**Ш. А. АЛИМОВ, О. Р. ХОЛМУХАМЕДОВ,
М. А. МИРЗААХМЕДОВ**

АЛГЕБРА

ЖАЛПЫ ОРТА БІЛІМ БЕРЕТІН МЕКТЕПТЕРДІҢ
8-СЫНЫБЫНА АРНАЛҒАН ОҚУЛЫҚ

Қайта өңделген 4-басылымы

*Өзбекстан Республикасы Халыққа білім беру министрлігі
баспаға ұсынған*

„O‘QITUVCHI“ БАСПА-ПОЛИГРАФИЯ ШЫҒАРМАШЫЛЫҚ ҮЙІ
ТАШКЕНТ – 2019

УЎК 512(075.3)=512.122
КБК 22.14я72
А 39

Пікір жазғандар:

М.М. Шониёзова – *Ташкент қаласының Сіргелі ауданыдағы №300 мектептің математика пәні оқытушысы;*

И.Б. Соибова – *Ташкент қаласының Яшнабад ауданыдағы пәндерге мамандандырылған № 307мектептің математика пәні оқытушысы;*

Г.П. Мухамедова – *Низами атындағы ТМПУ-дегі жалпы математика кафедрасының доценті, педагогика ғылымдарының кандидаты;*

Н.Ш. Каршибоева – *Низами атындағы ТМПУ-дегі оқу-әдістеме басқармасының әдіскері..*

Оқулықтағы шартты белгілер:

△ – есепті шешу басталды

▲ – есепті шешу аяқталды

○ – математикалық тұжырымды негіздеудің немесе формуланы қорытып шығарудың басталуы

● – негіздеудің немесе қорытып шығарудың соңы

– қызықты есептер

16, 18,... – күрделі есептер

– білу өте маңызды және есте сақтау пайдалы болған мәтін

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР! – негізгі материал бойынша білімді тексеруге арналған өзіндік жұмыс

– сынақ жаттығулары – тесттер

– тарихи есептер

– тарихи мағлұматтар

– практикалық және пәнаралық байланысқа қатысты есептер.

Республикалық кітап қоры қаржылары есебінен басылды.

ISBN 978–9943–5749-9-1

7-СЫНЫПТАҒЫ „АЛГЕБРА“ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУ

Қымбатты оқушылар! Сендер 7-сыныптың „Алгебра“ курсында алған білімдеріңді естеріңе түсіру үшін бірнеше жаттығуларды ұсынамыз.

1. Өрнектің сан мәнін табыңдар:

1) $S=2(ab+ac+bc)$, мұнда $a=5$, $b=4$, $c=10$;

2) $V=\frac{h}{3}(a^2+b^2+ab)$, мұнда $h=12$, $a=10$, $b=8$;

3) $S=\frac{(a+b)n}{2}$, мұнда $a=10$, $b=40$, $n=16$;

4) $V=\frac{1}{3}abh$, мұнда $a=30$, $b=20$, $h=25$.

2. Жақшаларды ашыңдар және ықшамдаңдар:

1) $7a-(5a+4b)$; 2) $9x-(7y-4x)$;

3) $-(2a-3b)-(-a+3b)$; 4) $8x-(3y+5x)-(-2y-x)$.

3. Егер:

1) $v=60$; 2) $v=75$; 3) $v=90$;

4) $v=100$; 5) $v=20{,}4$; 6) $v=28{,}5$

болса, $S=\frac{1}{5}v+\frac{1}{200}v^2$ өрнектің сан мәнін тап.

4. Әрбір дұрыс жауап үшін: ана тілі мен әдебиетінен n балл, математикадан k балл, ағылшын тілінен m балл қойылады. Сейіт ана тілі мен әдебиетінен c, математикадан a, ағылшын тілінен b сұраққа дұрыс жауап берді.

1) Сейіт жинаған барлық балды есептеу үшін өрнек құрастырыңдар;

2) егер $a=35$, $b=34$, $c=36$; $k=3{,}1$; $m=2{,}1$ және $n=1{,}1$ болса, ол барлығы болып қанша балл жинаған?

5. Теңдеуді шеш **(5–6)**:

1) $2x+15=3x-11$; 2) $7-5x=x-2$;

3) $2(x-3)=3(2-x)$; 4) $-3(4-x)=2(x-5)$.

6. 1) $3{,}2x+1{,}8x=6x-3{,}5$; 2) $7{,}5x-2{,}5x=7x-10$;

3) $0{,}5\,(0{,}4x-8)=5\,(0{,}2x-1)$; 4) $2{,}4\,(5x-3)=-0{,}8(10-5x)$.

7. Саяхатшы 3 км және қалған жолдың $\frac{1}{3}$ бөлігін жүрген соң, есептеп көрсе, барлық жолдың жартысына жету үшін тағы да 1км жол жүруі керек екен. Ол барлығы қанша жол жүретінін тап.

8. Ұзындығы 9,9 м сымтемір бөлігін екі бөлікке бөліп алды. Егер:
1) бөліктің біреуі екіншісінен 20% қысқа болса;
2) бөліктің біреуі екіншісінен 20% ұзын болса, әрбір бөліктің ұзындығын тап.

9. 1) Бір сан екінші санның 45%-ын құрайды. Сандардың біреуі екіншісінен 66-ға артық болса, осы сандарды табыңдар.
2) Бір сан екінші санның 30%-ын құрайды. Сандардың біреуі екіншісінен 35-ға аз болса, осы сандарды табыңдар.

10. Бір ауылдан екінші ауылға жаяу адам 4 км/сағ жылдамдықпен жолға шықты. Арадан 2 сағат өткен соң, жаяудың соңынан 10 км/сағ жылдамдықпен велосипедші жолға шықты. Ол екінші ауылға жаяудан 1 сағат бұрын келді. Ауылдардың арақашықтығын тап.

11. Есепте:

1) $\frac{3\cdot 4^{10}-5\cdot 2^{19}}{2^{15}}$; 2) $\frac{2^3\cdot(4\cdot 3^{15}-7\cdot 3^{14})}{3^{16}+5\cdot 3^{15}}$; 3) $\frac{2^{15}\cdot a^{16}}{4^7\cdot a^{15}}$.

12. Бірмүшені стандарт түрге келтір және сан мәнін есепте:

1) $ba \cdot 8ac$, мұнда $a=\frac{1}{2}, b=-3, c=2$;

2) $\frac{4}{5}x\cdot 8y^2\cdot\frac{5}{16}x^2y$, мұнда $x=3, y=\frac{1}{9}$.

13. Көпмүшені стандарт түрге келтір:

1) $1{,}2ab+0{,}8b^2-0{,}2ab+2{,}2b^2+2ab$;

2) $3a^2 2a^2+3b^2 4a^2-2a^2 5b^2-3a2ab^2-a^3 2a$.

14. Амалдарды орында (**14–15**):

1) $(3a^2-2ab-b^2)-(2a^2-3ab-2b^2)$;

2) $(7a^2-13ab+10b^2)+(-3a^2+10ab-7b^2)$;

3) $(a^2 + 3ab - b^2) \cdot ab$; 4) $abc \cdot (2a^2b - 3abc)$.

15. 1) $(x + y)(a - b)$; 2) $(a - b + c)(a - c)$;
3) $(a^2 - b^2)(a + b)$; 4) $(a - 3)(a - 2) - (a - 1)(a - 4)$.

16. Өрнекті ықшамда:
1) $4a^3 : a - (2a)^2 + a^4 : 3a^2$;
2) $(5a^4 + \frac{1}{3}a^3) : a^2 - (4a^3) : (2a) + (2a)^2$;
3) $(0,1b^4 - 2b^3 + 0,4b^2 + 0,02b) : (0,1b)$;
4) $\left(\frac{3}{8}a^3b^2 + \frac{9}{10}a^2b^3 - \frac{15}{16}ab^4\right) : \left(\frac{3}{4}ab^2\right)$.

17. Көбейткіштерге жікте (**17–18**):
1) $5a^2 - 15a^4 + 10a^6$; 2) $9a^3 + 12a^2 - 6a$;
3) $a(x + y) - b(x + y)$; 4) $(x - 1) - a(1 - x)$;
5) $4(a - 3) + a(3 - a)$; 6) $a^2(1 - a) + 4(a - 1)$.

18. 1) $ay + zy - 2ap - 2zp$; 2) $5ac - 6bd + 5ad - 6bc$;
3) $a(5a - 4b) - 10a + 8b$; 4) $4ab - 6cd - 12ad + 2bc$.

19. Есепте:
1) $49^2 + 51 \cdot 98 + 51^2$; 2) $58^2 - 116 \cdot 33 + 33^2$;
3) $\frac{19^2 + 38 \cdot 11 + 11^2}{19^2 - 11^2}$; 4) $\frac{53^2 - 53 \cdot 94 + 47^2}{53^2 - 47^2}$;
5) $\frac{183^3 - 93^3}{183^2 + 183 \cdot 93 + 93^2}$; 6) $\frac{43,73^2 - 43,73 \cdot 56,27 + 56,27^2}{43,73^3 + 56,27^3}$.

20. Саудагер өндірген өнімінің 1 килограмын 19 800 сумнан сатса, 162 800 сум пайда табады. Егер осы өнімнің 1 килограмын 16 500 сумға сатса, 81 400 сум зиян көреді. Өнім неше килограм екен?

21. Сынақта оқушыға 60 сұрақ берілді. Әрбір дұрыс жауап 5 балға бағаланды. 4 қате жауап үшін бір дұрыс жауап жойылды. Бұл сынақта барлық сұрақтарды белгілеген бір оқушы 225 балл жинаған болса, ол неше сұраққа дұрыс жауап берген?

22. Үш таңбалы санның цифрлары біреуден азайып отырады. Сол саннан оған кері ретпен жазылған санды азайту арқылы пайда болған сан 2-ге, 9-ға, 11-ге бөлінеді. Осыны дәлелдеңдер.

23. Автомобиль 60 км/сағ жыдамдықпен 4 сағат жүрді. Осы жолға 1 сағат аз уақыт жұмсау үшін ол жылдамдығын неше пайызға арттыру керек?

24. Екі ауыл арасындағы қашықтықты бір саяхатшы 2 сағатта, ал екінші саяхатшы 3 сағатта жүріп өтті. Егер олар бұл ауылдардан бір-біріне қарай бір уақытта жолға шықса, қанша уақыттан соң кездеседі?

25. Өнімнің бағасы a сум еді. Бұл баға q%-ға арзандады. Белгілі бір уақыттан соң, жаңа баға p%-ға көтерілді. Қазір осы өнім неше сумға сатылады?

26. Тік төртбұрыштың ені a-ға, биіктігі b-ға тең. Оның ені p%-ға ұзартылды, ал биіктігі q%-ға азайтылды. Пайда болған тік төртбұрыштың ауданын есептеңдер.

27. Машина v_1 км/сағ жылдамдықпен n сағат, v_2 км/сағ жылдамдықпен m сағат жол жүрді.

1) Машина барлығы неше километр жол жүрді?
2) Оның орташа жылдамдығы қандай болған?

28. 5 тонна және 10 тонна жүк көтеретін 50 машинамен 405 тонна жүк тасылды. Жүк тасуға неше 5 тонналық және неше 10 тонналық машина қатысқан?

I ТАРАУ АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРМЕН АМАЛДАР ОРЫНДАУ

1- §. АЛГЕБРАЛЫҚ ӨРНЕКТЕР

Төмендегі есепті қарастырамыз.

1-есеп. Қандайда бір санды ойлап, оны 3-ке көбейт, пайда болған нәтижеге 6-ны қос, шыққан қосындыны 3-ке бөл және ойланған санды айт. Қандай сан пайда болды?

△ Айталық, ойланған сан 8 болсын. Барлық амалдарды есеп шартында көрсетілген ретпен орындаймыз:

$$1)\,8\cdot 3=24;\quad 2)\,24+6=30;\quad 3)\,30:3=10;\quad 4)\,10-8=2.$$

2 саны пайда болады.

Бұл шешімді мәні 2-ге тең болған $(8\cdot 3+6):3-8$ санды өрнек ретінде жазуға болады.

Ал егер 5 саны ойланған болса, онда мәні тағы 2-ге тең болған $(5\cdot 3+6):3-5$ санды өрнек пайда етілген болатын еді.

Қандай санды ойласақ та, нәтижеде 2 саны пайда болады екен, деген ой туындайды. Мұны тексеріп көрейік. Ойланған санды a әрпімен белгілеп, амалдарды есеп шартында көрсетілген ретпен жазамыз:

$$(a\cdot 3+6):3-a.$$

Арифметикалық амалдардың бізге белгілі қасиеттерін пайдаланып, осы өрнекті ықшамдаймыз:

$$(a\cdot 3+6):3-a=a+2-a=2.\ ▲$$

Есепті шешуде кез келген санды білдіретін a әрпі, 3 және 6 сандары, амалдардың белгілері мен жақшалардан құралған $(a\cdot 3+6):3-a$ өрнек пайда болды. Бұл *алгебралық өрнекке* мысал болып, ол есеп шартының математикалық тілге өткізу үлгісі.

Тағы алгебралық өрнекке мысал келтіреміз:

$$2(m+n),\ \ 3a+2ab-7,\ \ (a+b)(a-b),\ \ \frac{x+y}{a}.$$

Алгебралық өрнек сандар мен әріптерден құралып, амалдардың белгілерімен біріктірілген өрнек болып табылады.

Егер алгебралық өрнектегі әріптердің орнына қандайда бір сан қойылып, көрсетілген амалдар орындалса, нәтижеде пайда болған сан *берілген алгебралық өрнектің сандық мәні* деп аталады.

Мысалы, $a=2$, $b=3$ болғанда

$$3a+2b-7$$

алгебралық өрнектің мәні 5-ке тең, өйткені $3\cdot2+2\cdot3-7=5$; бұл алгебралық өрнектің мәні $a=1$; $b=0$ болғанда -4-ке тең, өйткені

$$3\cdot1+2\cdot0-7=-4.$$

a-ның кез келген мәнінде

$$(a\cdot3+6):3-a$$

алгебралық өрнектің мәні 2-ге тең.

2-есеп. $\frac{(3a+7)b}{a-b}$ өрнектің мәнін $a=10$, $b=5$ болғанда тап.

$$\triangle\ \frac{(3\cdot10+7)\cdot5}{10-5}=\frac{37\cdot5}{5}=37.\ \blacktriangle$$

Қосу, айыру және көбейту белгілерінің жәрдемімен біріктірілген бірнеше көпмүшеден құралған алгебралық өрнек *бүтін өрнек* деп аталады.

Кез келген бүтін өрнекті стандарт көріністегі көпмүшеге келтіруге болады.

Мысалы: $P(a,b)=30a^3b^2-(6a^2b+a)(5ab-2)$ бүтін өрнекті стандарт көріністегі көпмүшеге келтір.

$$\triangle\ P(a,b)=30a^3b^2-30a^2b\cdot ab-5ab\cdot a+12a^2b+2a=$$

$$=30a^3b^2-30a^3b^2-5a^2b+12a^2b+2a=7a^2b+2a.$$

Жауабы: $7a^2b+2a.\blacktriangle$

Жаттығулар

1. Алгебралық өрнектің мәнін тап:

1) $3a-2b$, мұнда $a=\frac{1}{3}, b=1$;

2) $2a+3b$, мұнда $a=3$, $b=-2$;

3) $0,25a-4c^2$, мұнда $a=4, c=3$;

4) $\left(2a^2-\frac{1}{3}b\right)$, мұнда $a=2, b=9$.

2. Алгебралық өрнектің мәнін тап:

1) $\frac{1}{4}x-\frac{3}{7}y$, мұнда $x=8, y=-14$;

2) $\frac{2}{3}x+\frac{4}{5}y$, мұнда $x=9$, $y=-10$;

3) $\frac{a-3b}{a+3b}$, мұнда $a=4$, $b=-2$;

4) $\frac{a+3c}{2a-c}$, мұнда $a=3$, $c=-1$.

3. Мұнай құбырынан 1 сағатта 7 т мұнай ағады, m сағатта құбырдан неше тонна мұнай ағып өтеді? Ал бір тәулікте ше?

4. 1) m сағатта; 2) p секундта; 3) m сағат l минут және p секундта неше минут бар?

5. x және y сандар айырмасының үштелгенін жаз. Осы өрнектің:

1) $x=-0,37$, $y=-0,42$;

2) $x=-2,98$, $y=-4,48$;

3) $x=-\frac{5}{6}$, $y=-\frac{9}{4}$;

4) $x=\frac{2}{15}$, $y=-0,7$

болғандағы санды мәнін тап.

6. x және y сандар қосындысы мен олардың айырмасының көбейтіндісін жаз. Пайда болған алгебралық өрнектің:

1) $x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{1}{4}$;

2) $x=-\frac{5}{8}, y=\frac{3}{4}$;

3) $x=0,15$, $y=-0,75$;

4) $x=1,32$, $y=-1,28$

болғандағы санды мәнін тап.

Алгебралық өрнектердің мәнін тап (**7–8**):

7. 1) $\frac{2mn(n+k)}{n-k}$, мұнда $m=k=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$;

2) $\frac{(3p+1)\cdot 2p}{p-l}+\frac{1}{3}$, мұнда $p=\frac{1}{3}$, $l=1$.

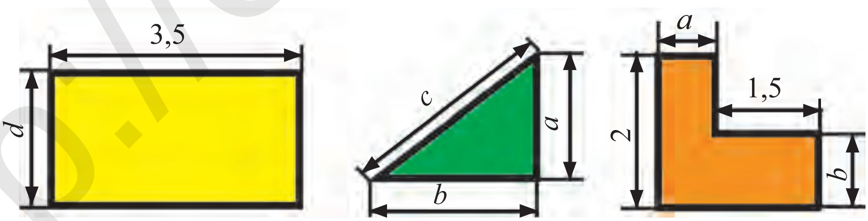
8. 1) $\frac{3(x-y)}{2p+q}$, мұнда $x=8,31$; $y=2,29$; $p=2,01$; $q=2$;

2) $\frac{5(bc+m)}{2q+4\frac{1}{4}}$, мұнда $b=\frac{2}{3}$; $c=6$; $q=\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{5}$.

9. Тақ сан формуласы $n=2k+1$-ді пайдаланып, $k=0$, $k=1$, $k=7$, $k=10$ болғанда n-ның мәнін тап.

10. Алгебралық өрнек түрінде жаз:
1) кішісі n-ға тең болған екі көршілес натурал санның қосындысы;
2) үлкені m-ға тең болған екі көршілес натурал санның көбейтіндісі;
3) кішісі $2k$-ға тең болған үш көршілес жұп натурал санның қосындысы; 4) кішісі $2p+1$-ге тең болған үш көршілес тақ натурал санның көбейтіндісі.

11. Фигуралардың периметрі мен ауданын алгебралық өрнек түрінде жаз (1-сурет):



1-сурет.

12. Үйді жылыту үшін p тонна көмір алынды; оның q тоннасы жұмсалды. Неше тонна көмір қалды? 1) $p=20$, $q=15$ болғанда есепте; 2) q сан p саннан үлкен болуы мүмкін бе? p-ға тең болуы ше?

13. Күрес сайысын көру үшін әрбірі 400 сумнан n дана билет және әрбірі 500 сумнан m дана билет сатылды. Барлық билеттен қанша ақша түскен? Сәйкес өрнек құрап, оны $n=200$, $m=150$; $n=100$, $m=230$ болғанда есепте.

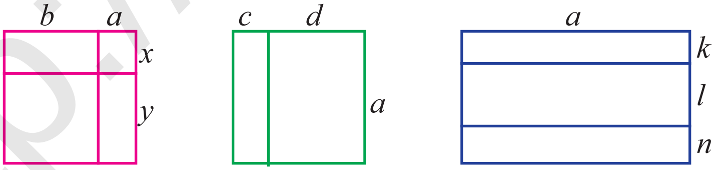
14. Бір альбомның бағасы 200 сум, бір дәптердің бағасы 40 сум, бір қаламның бағасы 60 сум. c дана альбом, a дана дәптер және b дана қаламның жалпы (сумдағы) бағасын p әрпімен белгелеп, оны формула түрінде жаз. Егер $c=9$, $a=21$, $b=4$ болса, осы формула бойынша p-ны тап.

15. Жылу беру станциясына арналған газ құбыры арқылы әр минутта 26 $м^3$ газ өтеді. 5 тәулікте; m тәулікте құбырдан неше текше метр газ өтеді?

16. Геологтар өз бағыты бойынша қозғалып, атта сағатына c километр жылдамдықпен 3 сағат 10 минут жүрді; ағынының жылдамдығы сағатына a километр болған өзенде ағын бойынша 1 сағат 40 минут қайықпен жүзді және сағатына b километр жылдамдықпен 2 сағат 30 минут жаяу жүрді. Бағыттың (км-де) ұзындығын s әрпімен белгілеп, геологтар жүрген жол формуласын жаз. Егер $a=3{,}3$ км/сағ, $b=5{,}7$ км/сағ, $c=10{,}5$ км/сағ болса, бағыттың ұзындығын тап.

17. Аралас сан $a+\frac{b}{c}$ көрінісінде жазылған. Аралас санды бұрыс бөлшекке айналдыру ережесін әріптердің жәрдемімен жаз.

18. 1) 2-суреттегі фигура (тік төртбұрыш) ауданы мен периметрін есептеу үшін формулалар құрастыр:



2-сурет.

2) Фигура жәрдемімен:

a) $(a+b)(x+y)=ax+bx+ay+by$;

b) $a(c+d)=ac+ad$;

d) $a\cdot(k+l+n)=ak+al+an$

теңдіктерді дәлелде. Бұл формулалардың мағынасын анықта.

19. Осы теңдіктерге келетін *өмірлік мысалдар* құрастырыңдар:

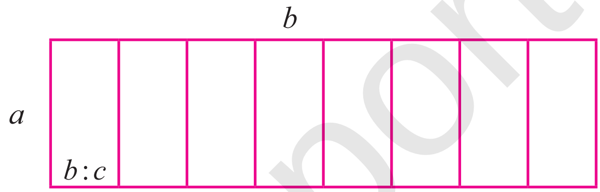
1) $a-(b+c+d)=a-b-c-d$;

2) $a-(b-c)=a-b+c$;

3) $(ab)c=a(bc)$;

4) $a-(b-c+d)=a-b+c-d$.

20. $(ab):c=a\cdot(b:c)$ формуланы дәлелде. Геометриялық ой-толғамдарды және 3-суреттегі фигураны пайдалан.



3- сурет.

2-§. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕК. БӨЛШЕКТЕРДІ ҚЫСҚАРТУ

1-есеп. Катердің тұрғын судағы жылдамдығы сағатына a километрге, өзен ағысының жылдамдығы сағатына b километрге тең. Катердің өзен ағысы бойынша жылдамдығы өзен ағысына қарсы жылдамдығынан неше есе үлкен?

△ Катердің өзен ағысы бойынша жылдамдығы сағатына $(a+b)$ километрге; өзен ағысына қарсы жылдамдығы сағатына $(a-b)$ километрге тең. Сондықтан өзен ағысы бойынша жылдамдығы өзен ағысына қарсы жылдамдығынан

$\frac{a+b}{a-b}$ есе артық болады. ▲

$\frac{a+b}{a-b}$ өрнегі *алгебралық бөлшек* делінеді. Бөлшектің алымы $a+b$, бөлшектің бөлімі $a-b$-ға тең.

Жалпы, *алымы мен бөлімі алгебралық өрнек болатын бөлшек алгебралық бөлшек* деп аталады.

Алгебралық бөлшектерге арналған бірнеше мысалды көрейік:

$$\frac{a}{b};\ \frac{2}{x+y};\ \frac{a-b}{c};\ \frac{x(b+c)}{y(a-c)}.$$

Егер алгебралық бөлшектің құрамындағы әріптердің орнына кез келген сан қойып, қажетті есептеулерді орындағаннан соң осы алгебралық бөлшектің *сандық мәні* пайда болады.

Мысалы, $a=10,\ b=8$ болғанда $\frac{a+b}{a-b}$ алгебралық бөлшегінің сандық мәні $\frac{10+8}{10-8}=\frac{18}{2}=9$ -ға тең болады.

$\frac{a+b}{a-b}$ алгебралық бөлшекте a және b-ның орнына, өзара тең емес ($a\neq b$) кез келген сандарды қоюға болады, себебі $a=b$ болғанда, бөлшектің бөлімі нөлге тең, бөлшекті нөлге бөлу мүмкін емес.

Бұдан былай алгебралық бөлшектегі әріптердің орнына бөлшектің бөлімін нөлге айналдыратын мәнінен басқа барлық сандарды қабылдауға болатынын ескертеміз.

Мысалы, $\frac{a}{a(a-1)}$ бөлшегі үшін a-ның $a=0$ және a=1-ден басқа барлық мәндер қажетті мәндер болады.

! *Бөлшектің негізгі қасиетін былай жазуға болады*:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},}$$

мұндағы $b\neq 0,\ m\neq 0$.

Бұл қасиет бөлшектің алымы мен бөлімін бірдей алгебралық өрнекке көбейтсек яки бөлсек, оған тең бөлшек шығатынын білдіреді, мысалы:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20},\ \frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)\cdot c}{bc}.$$

Бөлшектің негізгі қасиеті бойынша, алгебралық бөлшектің алымы мен бөлімінің ортақ көбейткіштерін қысқартуға болады, мәселен:

$$\frac{a(b+c)}{a(b-c)}=\frac{b+c}{b-c},\ \frac{(a+b)c}{(a+b)d}=\frac{c}{d}.$$

Бөлшектерді ықшамдау үшін алдымен олардың алымы мен бөлімінің ортақ көбейткіштерін анықтау керек. Осыған қатысты мысалдарды қарастырайық.

2-есеп. Бөлшекті қысқарт:

1) $\frac{12a^2b}{4ab^2}$; 2) $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}$.

△ 1) $12a^2b$ және $4ab^2$ бірмүшелердің ортақ көбейткіші $4ab$-ға тең. Бөлшектің алымы мен бөлімін $4ab$-ға бөлеміз:

$$\frac{12a^2b}{4ab^2}=\frac{4ab\cdot 3a}{4ab\cdot b}=\frac{3a}{b}.$$

2) m^2-n^2 және m^2+mn көпмүшеліктердің ортақ көбейткіші $m+n$ өрнегі. Себебі $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$, $m^2+mn=m(m+n)$. Бөлшектің алымы мен бөлімін $m+n$-ге бөлеміз:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2+mn}=\frac{(m+n)(m-n)}{m(m+n)}=\frac{m-n}{m}.$$ ▲

Бөлшектерді қысқарту үшін бұл бөлшектердің алымы мен бөлімін ортақ көбейткіштеріне бөлу керек.

Егер $\frac{a}{b}$ бөлшегінің алымындағы немесе бөліміндегі таңбаны қарама-қарсысына өзгертетін болсақ, онда берілген бөлшекке қарама-қарсы бөлшек келіп шығады.

$\frac{-a}{b}$ және $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}$ және $\frac{a}{b}$ – қарама-қарсы бөлшектер. Сонымен бірге $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

Мысалы, $\frac{-3}{7}=-\frac{3}{7}$; $\frac{-a}{1-a}=-\frac{a}{1-a}=\frac{a}{a-1}$.

3-есеп. $\frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}$ бөлшекті қысқарт:

$$\triangle\ \frac{3a(y-x)}{a^2(x-y)}=\frac{-3a(x-y)}{a^2(x-y)}=\frac{-3}{a}=-\frac{3}{a}.\ \blacktriangle$$

Жаттығулар

21. Алымы x және y сандарының көбейтіндісі, бөлімі олардың қосындысына тең алгебралық бөлшекті жаз.

22. Алымы p және q сандарының айырмасына, бөлімі олардың көбейтіндісіне тең алгебралық бөлшекті жаз.

23. Алымы a және b сандары квадраттарының айырмасына, бөлімі сол сандардың айырмасының квадратына тең алгебралық бөлшекті жаз.

24. Алымы c және d сандары кубтарының қосындысына, бөлімі сол сандардың екі еселенген көбейтіндісіне тең алгебралық бөлшекті жаз.

25. Алгебралық бөлшектің сандық мәнін тап:

1) $\frac{1}{a}$, мұнда $a=2\frac{3}{5}$;
2) $\frac{b+1}{b-1}$, мұнда $b=1,$;
3) $\frac{a^2+1}{2a}$, мұнда $a=-3$;
4) $\frac{a-b}{a+2b}$, мұнда $a=16$, $b=-3$;
5) $\frac{5a+b^2}{a^2-5b}$, мұнда $a=2$, $b=8$;
6) $\frac{-7ab}{3b^2-a^3}$, мұнда $a=3$, $b=4$.

26. 1) $S=vt$ формуладан v-ны; 2) $p=\frac{m}{V}$ формуладан V-ны;
3) $C=2\pi R$ формуладан R-ны; 4) $P=2(a+b)$ формуладан a-ны тап.

27. Әрбір жүк машинасына a тонна картоп тиеуге болады. Сонда әрқайсысында p килограмм картобы бар n қап картопты тасымалдау үшін неше жүк машинасы (x) керек? x-ті $n=90$, $p=50$, $a=1{,}5$ болғандағы мәнін тап.

28. Машина сағатына орта есеппен c метр линолеум шығарады. Егер машина күніне n сағат жұмыс істесе, ол a метр линолеумді неше күнде шығарады? Уақытты t-мен белгілеңдер, t-ны $c=47$, $a=11280$ және $n=16$ болғандағы сандық мәнін тап.

29. Берілген екі бөлшектің теңдігін көрсет:

1) $\frac{6}{7}$ және $\frac{18}{21}$; 3) $\frac{2}{3}$ және $\frac{2a}{3a}$; 5) $\frac{m-n}{m+n}$ және $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$;

2) $\frac{-3}{5}$ және $\frac{27}{-45}$; 4) $\frac{2a}{7b}$ және $\frac{2a^2b}{7ab^2}$; 6) $\frac{a+3b}{c}$ және $\frac{(a+3b)c}{c^2}$.

Бөлшекті қысқарт (**30–45**):

30. 1) $\frac{-48}{-56}$; 2) $\frac{-64}{-80}$; 3) $\frac{-121}{55}$; 4) $\frac{28}{-14}$.

31. 1) $\frac{12a}{20}$; 2) $\frac{2c}{3c}$; 3) $\frac{7b}{21b}$;

4) $\frac{4ab}{8ac}$; 5) $\frac{a^2}{2a}$; 6) $\frac{5x}{x^3y}$.

32. 1) $\frac{a^2}{a^3}$; 2) $\frac{b^3}{b^7}$;

3) $\frac{a^5}{a^4}$; 4) $\frac{b^6}{b^4}$.

33. 1) $\frac{6ab}{4a}$; 2) $\frac{14c}{49c}$; 3) $\frac{a^4b}{ab^3}$;

4) $\frac{3a^2b}{9a^3}$; 5) $\frac{12a^4b^2}{18a^3b^3}$; 6) $\frac{25a^3bc^2}{125ac^3}$.

34. 1) $\frac{4(m+n)}{5(m+n)}$; 3) $\frac{2b(m-n)}{8b(m-n)(m-n)}$; 5) $\frac{2(a-b)}{b-a}$;

2) $\frac{7a(a-b)}{5(a-b)}$; 4) $\frac{3a(a+b)}{9a(a+b)(a-b)}$; 6) $\frac{5(x-y)}{15(y-x)}$.

35. 1) $\frac{(a-b)^2}{a-b}$; 3) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$; 5) $\frac{3m(1-x)^2}{9m^2(x-1)^2}$;

2) $\frac{m+n}{(m+n)^4}$; 4) $\frac{(2x-3y)^2}{3y-2x}$; 6) $\frac{8a^2b(a-b)}{4a^3b(b-a)^2}$.

36. 1) $\frac{3x+3y}{6c}$; 3) $\frac{2a+2b}{4a-4b}$; 5) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$;

2) $\frac{8a}{4m-4n}$; 4) $\frac{12a-3}{6a+9}$; 6) $\frac{a+ab}{a-ab}$.

37. 1) $\frac{a^2}{a^2+ab}$; 3) $\frac{7a+14b}{3a+6b}$; 5) $\frac{3a-6b}{12b-6a}$;

2) $\frac{pq^3}{p^2q-pq^2}$; 4) $\frac{2m^2-mn}{2mn-n^2}$; 6) $\frac{x^2-2xy}{2y^2-xy}$.

38. 1) $\frac{12x^2-30xy}{30x^2-12xy}$; 2) $\frac{36a^2+24ab}{24a^2+36ab}$; 3) $\frac{m^3-3m^2n}{3m^2n-3m^3}$; 4) $\frac{a^3-2a^2b}{2a^3b^2-a^4b}$.

39. 1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}$; 3) $\frac{4c^2-9x^2}{2c-3x}$; 5) $\frac{3a(a-b)}{6a^2(b-a)}$;

2) $\frac{a-b}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{25-x^2}{5-x}$; 6) $\frac{5a(c^2-4)}{10a^2(2-c)}$.

40. 1) $\frac{8-3c}{9c^2-64}$; 3) $\frac{2y-10}{25-y^2}$; 5) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}$;

2) $\frac{100-49b^2}{7b+10}$; 4) $\frac{5y-y^2}{25-y^2}$; 6) $\frac{5a^3b+5ab^3}{a^4-b^4}$.

41. 1) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}$; 2) $\frac{b+7}{b^2+14b+49}$; 3) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}$; 4) $\frac{1-2p}{1-4p+4p^2}$.

42. 1) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}$; 3) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$;

2) $\frac{16a^2-1}{16a^2-8a+1}$; 4) $\frac{50m^2+100mn+50n^2}{15m^2-15n^2}$.

43. 1) $\dfrac{1-a^2}{(a-1)^2}$; 2) $\dfrac{(m-n)^2}{n-m}$; 3) $\dfrac{4y^2-4y+1}{2-4y}$; 4) $\dfrac{5-2x}{4x^2-20x+25}$.

44. 1) $\dfrac{9c^2-16}{16-24c+9c^2}$; 4) $\dfrac{36c-c^3}{c^3+12c^2+36c}$;

2) $\dfrac{16x^2-24xy+9y^2}{9y^2-16x^2}$; 5) $\dfrac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2+25b}$;

3) $\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{y^2-4x^2}$; 6) $\dfrac{4b^2-12bc+9c^2}{-2ab+3ac}$.

45. 1) $\dfrac{2a^5-128a^2}{(2a^2+8a+32)(a^4-4a^3)}$; 3) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$;

2) $\dfrac{2a^4+3a^3+2a+3}{(a^2-a+1)(2a+3)}$; 4) $\dfrac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$.

3-§. БӨЛШЕКТЕРДІ ОРТАҚ БӨЛІМГЕ КЕЛТІРУ

Жай бөлшектерді қосқанда алдымен бөлшектер ортақ бөлімге келтіріледі. Мысалы, $\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{25}, \dfrac{7}{10}$ бөлшектері үшін ортақ бөлім 100 саны болады, бұл сан 4, 25, 10 сандарының ең кіші ортақ еселігі.

! Алгебралық бөлшектердің ортақ бөлімі осы бөлшектер бөлімдерінің ең кіші ортақ еселігі болып табылады. Бөлшектерді ортақ бөлімге келтіруде бөлшектің негізгі қасиеті пайдаланылады.

1-есеп. $\dfrac{m}{3a^2b}, \dfrac{n}{6ab^2}$ және $\dfrac{p}{4ac}$ алгебралық бөлшектерінің ортақ бөлінгішін табайық.

△ Берілген бөлшектің ортақ бөлінгіші әрбір бөлшектің бөліміне бөлінуі керек. Демек, ол 3-ке, 6-ға, 4-ке яғни 12-ге; a^2-ға, a-ға, яғни a^2-ға; b-ға және b^2-ға, яғни b^2-ға; c-ға бөлінуі керек.

Сонымен, бөлшектің ортақ бөлімі етіп 12, a^2, b^2 және c көбейткіштерін алу керек. Ортақ бөлінгіш ретінде $12a^2b^2c$ көбейткішін аламыз. Бұл ортақ бөлінгішті бірінші бөлшектің бөліміне бөліп, оның алымы мен бөліміне көбейтіп бірмүшені табамыз. Бұл бірмүшелік берілген *бөлшектің толықтауыш көбейткіші* деп аталады. Бірінші бөлшек үшін мұндай бірмүшелік $4bc$-ға тең. Осы тәсілмен екінші, үшінші бөлшектердің толықтауыш көбейткіштерін табамыз: $2ac$ мен $3ab^2$.

Бірінші, екінші және үшінші бөлшектердің алымы мен бөліміне сәйкес, $4bc$, $2ac$ және $3ab^2$-ға көбейтеміз, оларды $12a^2b^2c$ ортақ бөлінгішіне келтіреміз:

$$\frac{m}{3a^2b}=\frac{4mbc}{12a^2b^2c},\ \frac{n}{6ab^2}=\frac{2nac}{12a^2b^2c},\ \frac{p}{4ac}=\frac{3pab^2}{12a^2b^2c}.\ \blacktriangle$$

2-есеп. Бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріңдер:

$$\frac{a}{x^2-y^2};\quad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2};\quad \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}.$$

$\triangle$ Бөлшектердің бөлімін көбейткіштерге жіктейміз. Ортақ бөлінгіш берілген бөлшектердің әрқайсысының бөліміне бөлінуге тиіс:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y);$$

$$2x^2-4xy+2y^2=2\left(x^2-2xy+y^2\right)=2(x-y)^2;$$

$$3x^2+6xy+3y^2=3\left(x^2+2xy+y^2\right)=3(x+y)^2.$$

Ортақ бөлінгіш бірінші бөлшектің бөліміне бөлінуі үшін оның құрамында $(x-y)(x+y)$ көбейтінді болуы керек.

Содан кейін, ортақ бөлінгіш екінші бөлшектің бөліміне бөлінуі үшін онда $2(x-y)^2$ көбейткіші болуы керек. Демек, бірінші бөлшектің бөліміне $2(x-y)$ көбейткішті жазу керек, яғни ортақ бөлінгіш құрамында

$$2(x-y)^2(x+y)$$

көбейтінді болуы керек.

Ортақ бөлінгіш үшінші бөлшектің $3(x+y)^2$ бөліміне бөлінуі үшін пайда етілген көбейтіндіге $3(x+y)$ көбейткішті жазу керек. Демек, үш бөлшектің ортақ бөлінгіші

$$6(x-y)^2(x+y)^2$$

өрнегіне тең болады.

Бөлшектердің ортақ бөлінгішін табу үшін олардың алымын және бөлімін толықтауыш көбейткіштерге көбейту керек, оны ортақ бөлінгішті әрбір бөлшектің бөліміне бөлу арқылы табамыз; берілген бөлшектер үшін олар сәйкесінше мына өрнектерге тең:

$$6(x-y)(x+y),\ 3(x+y)^2,\ 2(x-y)^2.$$

Демек, берілген бөлшектерді мынадай жазып алу керек:

$$\frac{a}{x^2-y^2}=\frac{6a(x-y)(x+y)}{6(x-y)^2(x+y)^2};\qquad \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}=\frac{3b(x+y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2};$$

$$\frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}=\frac{2c(x-y)^2}{6(x-y)^2(x+y)^2}.$$

Алгебралық бөлшекті ортақ бөлімге келтіру үшін:
1) берілген бөлшектердің ортақ бөлінгішін табу;
2) әрбір бөлшек үшін толықтауыш көбейткішін табу;
3) әрбір бөлшектің алымын толықтауыш көбейткішке көбейту;
4) әрбір бөлшекті табылған алымымен және ортақ бөлінгішімен жазу керек.

Жаттығулар

Мына жаттығуларда бөлшектердің ортақ бөлінгішін тап (**46–53**):

46. 1) $\frac{1}{2}$ және $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{7}$ және $\frac{3}{14}$; 5) $\frac{x}{2y}$ және $\frac{x}{3y}$;

2) $\frac{1}{a}$ және $\frac{2}{b}$; 4) $\frac{a}{b}$ және $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{8}{15}$ және $\frac{5}{12}$.

47. 1) $\frac{3}{4a}$, $\frac{1}{5b}$ және $\frac{7}{20ab}$; 3) $\frac{7}{a^2}$ және $\frac{8}{a^3}$;

2) $\frac{3x}{4y}$, $\frac{6}{xy}$ және $\frac{4y}{3x}$; 4) $\frac{a}{2x}$ және $\frac{b}{4x^3}$.

48. 1) a және $\dfrac{b^2}{a}$; | 2) $3b$ және $\dfrac{a^2}{2b}$; | 3) a^2 және $\dfrac{c}{2ab}$; | 4) $\dfrac{b}{3a}$, $\dfrac{3c}{2b}$ және ab.

49. 1) $\dfrac{1}{2p^2}$, $\dfrac{1}{6pk}$ және $\dfrac{1}{3k^2}$; 3) $\dfrac{2a}{b^2}$, $\dfrac{4}{15a^2b}$ және $\dfrac{3}{20a^3b^4}$;

2) $\dfrac{1}{6b^2}$, $\dfrac{a^2+b^2}{9a^2b^2}$ және $\dfrac{3-a^2}{18ab^2}$; 4) $\dfrac{7}{20x^4y}$, $\dfrac{31}{6xy^3}$ және $\dfrac{4}{3x^2y^4}$.

50. 1) $\dfrac{3}{x+y}$ және $\dfrac{5}{x}$; 3) $\dfrac{7x}{2(x-1)}$ және $\dfrac{5x}{x-1}$;

2) $\dfrac{6}{a-1}$ және $\dfrac{6}{a-1}$ 4) $\dfrac{2a^2}{3(a+1)}$ және $\dfrac{5a^2}{4(a+1)}$.

51. 1) $\dfrac{1}{x-y}$ және $\dfrac{1}{x+y}$; 3) $\dfrac{5x}{2x-2}$ және $\dfrac{3}{4x-4}$.

2) $\dfrac{7a}{3x-y}$ және $\dfrac{6b}{3x+y}$; 4) $\dfrac{3x}{4x+4y}$ және $\dfrac{x}{8x+8y}$.

52. 1) $\dfrac{3b}{b-2}$ және $\dfrac{4}{b^2-4}$; 3) $\dfrac{1}{1-a}$, $\dfrac{2a}{1+a}$ және $\dfrac{a^2}{1-a^2}$;

2) $\dfrac{7a}{x^2-9}$ және $\dfrac{a}{x+3}$; 4) $\dfrac{6x}{x-y}$, $\dfrac{7xy}{x+y}$ және $\dfrac{3}{x^2-y^2}$.

53. 1) $\dfrac{m}{2m+2n}$, $\dfrac{n}{8m-8n}$ және $\dfrac{mn}{6m^2-6n^2}$; | 2) $\dfrac{2c}{5b-5c}$, $\dfrac{3a^2}{35b^2-35c^2}$ және $\dfrac{7b}{14b+14c}$;

3) $\dfrac{1}{a^2-4b^2}$, $\dfrac{1}{3a^2+6ab}$ және $\dfrac{1}{2ab-a^2}$; | 4) $\dfrac{5}{4x-4}$, $\dfrac{4x}{1-x^2}$ және $\dfrac{1}{3x^2+3x}$.

№1 ***Бір құрт жерден ағаштың ұшына шықпақты болыпты. Ағаш бойымен түнде ол 2 м биіктікке көтеріліп, күндіз 1 м төмен түседі екен. 9-түнде ол ағаштың ұшына шығып үлгеріпті. Ағаштың биіктігі неше метр екен?***

4-§. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕРДІ ҚОСУ ЖӘНЕ АЗАЙТУ

Бөлімдері бірдей бөлшектерді қосу және азайту ережесін былай жазуға болады:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}; \qquad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

1-есеп. $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{2a-b}{a+b}$ және $\frac{a-2b}{a+b}$ бөлшектерді қос.

$$\triangle\ \frac{a-b}{a+b}+\frac{2a-b}{a+b}+\frac{a-2b}{a+b}=\frac{a-b+2a-b+a-2b}{a+b}=\frac{4a-4b}{a+b}=\frac{4\left(a-b\right)}{a+b}.\ \blacktriangle$$

2-есеп. $\frac{a^2}{a+b}$ және $\frac{b^2}{a+b}$ бөлшектердің айырмасын тап.

$$\triangle\ \frac{a^2}{a+b}-\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{\left(a+b\right)\left(a-b\right)}{a+b}=a-b.\ \blacktriangle$$

Бөлімдері әр түрлі бөлшектерді қосу және азайту үшін бұл бөлшектердің ортақ бөлінгішін тауып, бөлімдері бір түрлі бөлшектерді қосу және азайту ережесін пайдалану керек.

3-есеп. $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{2a^2b}$ және $\frac{1}{3ab^2}$ бөлшектерін қос.

$\triangle$ Берілген бөлшектердің ортақ бөлімі $6a^3b^2$ көбейтіндісі болады. Демек,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{2a^2b}+\frac{1}{3ab^2}=\frac{6b^2}{6a^3b^2}+\frac{3ab}{6a^3b^2}+\frac{2a^2}{6a^3b^2}=\frac{2a^2+3ab+6b^2}{6a^3b^2}.\ \blacktriangle$$

4-есеп. $\frac{a}{3b^2c}$ және $\frac{c}{15ab^2}$ бөлшектердің айырмасын тап.

$$\triangle\ \frac{a}{3b^2c}-\frac{c}{15ab^2}=\frac{5a^2}{15ab^2c}-\frac{c^2}{15ab^2c}=\frac{5a^2-c^2}{15ab^2c}.\ \blacktriangle$$

5-есеп. $\frac{1}{x^2-x}$ және $\frac{3}{x^2-1}$ бөлшектерді қос.

△ Бөлшектің бөліміндегі көпмүшеліктерді көбейткіштерге жіктейміз:

$$x^2-x=x(x-1),\ x^2-1=(x-1)(x+1).$$

Бөлшектің ортақ бөлімі $x(x-1)(x+1)$ көбейтіндісі болады. Бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, табамыз:

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+1}{x(x^2-1)}+\frac{3x}{x(x^2-1)}=$$

$$=\frac{x+1+3x}{x(x^2-1)}=\frac{4x+1}{x(x^2-1)}.$$ ▲

Бөлімдері әр түрлі бөлшектерді қосу және азайту төмендегі тәртіппен орындалады:
1) бөлшектердің ортақ бөлінгіші табылады;
2) бөлшек ортақ бөлімге келтіріледі;
3) пайда болған бөлшектердің қосындысы табылады;
4) мүмкіндігі болса, нәтижені ықшамдаймыз.

6-есеп. $\frac{1}{a^2+4a+4}-\frac{4}{a^4+4a^3+4a^2}+\frac{4}{a^3+2a^2}$ өрнегінде $a=0,5$ деп алып, сандық мәнін есепте.

△ Берілген өрнекті төмендегідей жіктеуге болады:

$$\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a^2+4a+4)}+\frac{4}{a^2(a+2)}=\frac{1}{(a+2)^2}-\frac{4}{a^2(a+2)^2}+\frac{4}{a^2(a+2)}=$$

$$=\frac{a^2-4+4(a+2)}{a^2(a+2)^2}=\frac{a^2+4a+4}{a^2(a+2)^2}=\frac{1}{a^2}.$$

Демек, өрнектің ізделген сандық мәні:

$$\frac{1}{0,5^2}=\frac{1}{0,25}=\frac{100}{25}=4.$$ ▲

Жаттығулар

Амалдарды орында (**54–60**):

54. 1) $\frac{p}{q^2}+\frac{3p}{q^2}$; 2) $\frac{8a}{b^3}-\frac{3a}{b^3}$; 3) $\frac{a}{a+b}+\frac{c}{a+b}$; 4) $\frac{x}{n+a}-\frac{y}{n+a}$.

55. 1) $\frac{c+d}{2a}+\frac{2c-d}{2a}$; 2) $\frac{a+2b}{3c^2}+\frac{5a-2b}{3c^2}$; 3) $\frac{a+b}{2c}-\frac{a-b}{2c}$;

4) $\frac{10a-b}{a^3}-\frac{3a-b}{a^3}$; 5) $\frac{(1+b)^2}{5d}+\frac{(1-b)^2}{5d}$; 6) $\frac{(2+a)^2}{a^2b}-\frac{(2-a)^2}{a^2b}$.

56. 1) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{3a}+\frac{1}{a}$; 5) $\frac{c}{15a}+\frac{d}{3}$;

2) $\frac{4}{7}-\frac{5}{28}$; 4) $\frac{1}{b}-\frac{2}{5b}$; 6) $\frac{a}{4}-\frac{b}{12d}$.

57. 1) $\frac{m}{2}-\frac{1}{n}$; 2) $\frac{3}{a}+\frac{b}{5}$; 3) $5-\frac{1}{a}$; 4) $\frac{2}{b}+7$.

58. 1) $5-\frac{2}{b}+\frac{3}{b^2}$; 2) $\frac{2}{c}+4-\frac{3}{c^2}$;

3) $d-\frac{c}{d}+\frac{c^2}{d^2}$; 4) $\frac{m}{n}-k+\frac{m^2}{n^2}$.

59. 1) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}$; 3) $\frac{a}{bc}-\frac{a}{bd}$; 5) $\frac{3}{m^2}+\frac{4}{mn}$;

2) $\frac{1}{mn}-\frac{1}{mk}$; 4) $\frac{b}{ac}+\frac{b}{cd}$; 6) $\frac{2}{mn}-\frac{3}{n^3}$.

60. 1) $\frac{3c}{4a^3b}+\frac{5d}{6ab^3}$; 3) $\frac{2}{3y^3}-\frac{1}{6x^2y}+\frac{5}{12xy^2}$; 5) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}$;

2) $\frac{2a}{9b^4}-\frac{7c}{6a^3b}$; 4) $\frac{5}{7x^2y}-\frac{3}{4xy^2}+\frac{11}{14x^2y^2}$; 6) $\frac{b}{c}+\frac{b}{c^2d}+\frac{b}{cd^2}$;

Алгебралық бөлшектерді қос және айырмасын тап (**61–72**):

61. 1) $\frac{2x}{3(a-b)}+\frac{x}{a-b}$; 3) $\frac{2a^2}{3(a+1)}+\frac{5a^2}{4(a+1)}$;

2) $\frac{7x}{2(x-1)}-\frac{5x}{x-1}$; 4) $\frac{4y}{5(y-3)}-\frac{5x}{2(y-3)}$.

62. 1) $\frac{5}{2x-2}+\frac{3}{4x-4}$; 3) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}$;

2) $\frac{7}{5b+5}-\frac{3}{10b+10}$; 4) $\frac{3x}{4x+4y}-\frac{x}{8x+8y}$.

63. 1) $\frac{3}{a^2+a}+\frac{5a}{ab+b}$; 3) $\frac{y+a}{b^2+ba}+\frac{y-b}{ab+a^2}$;

2) $\frac{5b}{ax+ay}-\frac{2a}{bx+by}$; 4) $\frac{y-b}{a^2-ab}-\frac{y-a}{ab-b^2}$.

64. 1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-3)}+\frac{1}{x(x+3)}$;

2) $\frac{6}{a}-\frac{10}{a-1}$; 4) $\frac{4}{5(a-b)}-\frac{7}{8(a+b)}$.

65. 1) $\frac{a}{1-b^2}+\frac{1}{1+b}$; 3) $\frac{5+p^2}{p^2-36}-\frac{p}{6+p}$;

2) $\frac{2}{x^2-9}+\frac{1}{x+3}$; 4) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{x^2-16}$.

66. 1) $\frac{2x}{x-4}-\frac{5x-2}{16-x^2}$; 3) $\frac{c^2-8}{2c+3}-\frac{16c-2c^3}{9-4c^2}$;

2) $\frac{12n-5}{n^2-49}+\frac{6}{7-n}$; 4) $\frac{21y^2+1}{1-9y^2}-\frac{y}{3y-1}$.

67. 1) $\frac{3}{a+2}+\frac{2a}{(a+2)^2}$; 2) $\frac{a}{(3a+1)^2}+\frac{4}{3a+1}$.

68. 1) $\frac{2y+8}{y^2-4y+4}-\frac{7}{y-2}$;

2) $\frac{4-5x}{1+6x+9x^2}-\frac{2}{3x+1}$;

3) $\frac{7}{(a-b)^2}-\frac{5}{b-a}$;

4) $\frac{4}{(m-n)^2}-\frac{7}{n-m}$;

5) $\frac{2a}{25-10a+a^2}+\frac{10}{a^2-25}$;

6) $\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{(x+3)^2}$.

69. 1) $a+\frac{a}{a-1}$;

2) $b-\frac{b}{b-2}$;

3) $c+1-\frac{c^2}{c-1}$;

4) $\frac{a^2}{a+1}-a+1$.

70. 1) $\frac{7}{a+b}+\frac{8}{a-b}-\frac{16b}{a^2-a^2}$;

2) $\frac{6x}{x^2-y^2}-\frac{3}{x-y}-\frac{4}{x+y}$;

3) $\frac{3}{a+3}+\frac{2}{3-a}-\frac{6}{a^2-9}$;

4) $\frac{3}{4a^2-9}-\frac{8}{2a+3}-\frac{7}{3-2a}$.

71. 1) $\frac{a+b}{a}-\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a^2-ab}$;

2) $\frac{5b-1}{3b^2-3}+\frac{b+2}{2b+2}-\frac{b+1}{b-1}$;

3) $\frac{6a}{9a^2-1}+\frac{3a+1}{3-9a}+\frac{3a-1}{6a+2}$;

4) $\frac{7}{m}-\frac{4}{m-2n}-\frac{m-n}{4n^2-m^2}$;

5) $x-\frac{xy}{x+y}-\frac{x^3}{x^2-y^2}$;

6) $a-2+\frac{4a}{2+a}-\frac{a^3+b}{a^2+2a}$.

72. 1) $\frac{a+1}{a^3-1}-\frac{1}{a^2+a+1}$;

2) $\frac{a^2+4}{a^3+8}-\frac{1}{a+2}$;

3) $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a+b}$;

4) $\frac{m^2-3m+9}{m^3-27}-\frac{1}{m-3}$.

73. Өрнекті ықшамдап алып, сандық мәнін тап:

1) $\dfrac{8a^2}{a^3-1}+\dfrac{a+1}{a^2+a+1}$, мұнда $a=2$;

2) $\dfrac{3c^2-c+3}{c^3-1}-\dfrac{c-1}{c^2+c+1}+\dfrac{2}{1-c}$, мұнда $c=1\dfrac{1}{2}$.

5-§. АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕРДІ КӨБЕЙТУ ЖӘНЕ БӨЛУ

Алгебралық бөлшектерді көбейту және бөлу жай бөлшектерді көбейту және бөлу ережесіне негізделіп орындалады:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}; \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

1-есеп. Бөлшектерді көбейт:

$$\frac{1}{2xy},\ \frac{4x^2y^3}{5z}\ \text{va}\ \frac{10z^2}{3x^3}.$$

△ $\dfrac{1}{2xy}\cdot\dfrac{4x^2y^3}{5z}\cdot\dfrac{10z^2}{3x^3}=\dfrac{1\cdot 4x^2y^3\cdot 10z^2}{2xy\cdot 5z\cdot 3x^3}=\dfrac{4y^2z}{3x^2}$. ▲

2-есеп. $\dfrac{a-b}{a^2+ab}$ және $\dfrac{b^2+ab}{(a-b)^2}$ бөлшектерді көбейт.

△ Көбейткіштерге жіктеп, табамыз:

$$\frac{a-b}{a^2+ab}\cdot\frac{b^2+ab}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)\,b\,(a+b)}{a\,(a+b)\,(a-b)^2}=\frac{b}{a(a-b)}.\ ▲$$

3-есеп. $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}$ және $\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}$ бөлшектерді бөл.

△ $\dfrac{m+n}{9m^2n^3}:\dfrac{m^2-n^2}{27mn^2}=\dfrac{(m+n)\cdot 27mn^2}{9m^2n^3\left(m^2-n^2\right)}=\dfrac{(m+n)\,3}{mn\,(m-n)\,(m+n)}=\dfrac{3}{mn\,(m-n)}$. ▲

Алгебралық бөлшекті дәрежеге шығару кезінде мына формула қолданылады $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Мысалы,

$$\left(\frac{4a^2}{b}\right)^2 = \frac{16a^4}{b^2};\ \left(\frac{a+b}{3c}\right)^3 = \frac{(a+b)^3}{27c^3}.$$

Бөлшектерді көбейт (**74–75**):

74. 1) $\frac{85}{24}\cdot\frac{72}{17}$; 2) $\frac{256}{169}\cdot\frac{13}{64}$; 3) $50\cdot\frac{7}{625}$; 4) $\frac{5}{26}\cdot 39$.

75. 1) $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^4}$; 3) $\frac{6a}{5b}\cdot\frac{15c}{2d}$; 5) $\frac{2a}{3b}\cdot 3c$;

2) $\frac{m^2n^2}{k}\cdot\frac{k^3}{m^3n^3}$; 4) $\frac{4m}{9n}\cdot\frac{27k}{16d}$; 6) $14a^2\cdot\frac{b^2}{7c^3}$.

76. Бөлшектерді бөл:

1) $\frac{3}{5} : \frac{3}{7}$; 3) $\frac{a}{8} : \frac{1}{3}$; 5) $\frac{2}{a} : \frac{6}{7}$;

2) $\frac{11}{12} : \frac{2}{5}$; 4) $\frac{6}{c} : \frac{m}{13}$; 6) $\frac{9}{35} : \frac{b}{5}$.

77. Бөлшектерді бөл:

1) $\frac{8}{17} : \frac{8}{17}$; 3) $\frac{3a}{7b} : \frac{a}{b}$; 5) $\frac{2a}{3b} : \frac{a^2}{bc}$;

2) $\frac{a}{b} : \frac{a}{b}$; 4) $\frac{c}{2d} : \frac{4c^2}{5d}$; 6) $\frac{5m}{n^2} : \frac{10m^3}{n}$.

78. Бөлшектерді бөл:

1) $\frac{17}{12} : \frac{34}{39}$; 3) $\frac{4}{13} : 5$; 5) $12 : \frac{8}{9}$;

2) $\frac{54}{25} : \frac{81}{75}$; 4) $\frac{a}{b} : c$; 6) $a : \frac{b}{c}$.

79. Бөлшектерді бөл:

1) $\frac{a^2b}{c} : \frac{a^4}{c^2}$;
3) $\frac{4a}{5b} : \frac{12c}{25d}$;
5) $\frac{6a}{5b} : (5c)$;

2) $\frac{mn}{k} : \frac{m^2n^2}{k^3}$;
4) $\frac{8m}{9n} : \frac{16k}{27d}$;
6) $12a^2 : \frac{4d}{5c^2}$.

Көрсетілген амалдарды орында (**80–86**):

80. 1) $\left(\frac{5a}{7b}\right)^2 \cdot \frac{14b^2}{25a^3}$;
2) $\left(\frac{3a^2}{2b}\right)^3 \cdot \frac{16b^3}{21a^4}$;
3) $\frac{2a^2}{5b^2} : \frac{12a^2}{15b^2}$;

4) $\frac{3a^3}{7b} : \frac{9a^4}{21b}$;
5) $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2 \cdot acd$;
6) $abc^2 \cdot \left(\frac{ab}{cd}\right)^2$.

81. 1) $\frac{8a^2b}{9c} \cdot \frac{36c^3}{5a^3b}$;
3) $\frac{16x^2y}{7z} : \frac{20xy^3}{21z^2}$;
5) $\frac{18m^3n^5}{7k} : (9n^2)$;

2) $\frac{7b^4}{9c^5y} : \frac{35b^4c^2}{18c^4y^2}$;
4) $\frac{46d^3c}{15a} : \frac{23dc^2}{5a^3}$;
6) $24k^2 : \frac{12m^4k^2}{11p^3n}$.

82. 1) $\frac{3x^2y}{4a^2b} \cdot 4a^2b$;
3) $15xy : \frac{30xy}{7a^2b}$;

2) $\frac{5a^2b}{7xy^2} \cdot 14xy^2$;
4) $\frac{7x^2y}{2a^2b} : (14x^2y)$.

83. 1) $\frac{7-x}{a+b} \cdot \frac{a-b}{7-x}$;
3) $\frac{c+d}{c-d} : \frac{c}{c-d}$;
5) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$;

2) $\frac{x-y}{2a} \cdot \frac{4b}{x-y}$;
4) $\frac{a-b}{2b} : \frac{a-b}{6b^2}$;
6) $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{b}{a}$.

84. 1) $\frac{a+1}{b} \cdot \frac{4b^2}{a^2-1}$;
4) $\frac{5m}{m^2-n^2} : \frac{15m^3}{m-n}$;

2) $\frac{1-a}{3b^2} \cdot \frac{b^3}{1-a^2}$;
5) $\frac{3(x+y)}{4y^2(x^2+y^2)} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

3) $\frac{a^2-b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b}$;
6) $\frac{5(a-b)}{3(a^2+b^2)} : \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

85. 1) $\frac{a^2-b^2}{3a+3b}\cdot\frac{3a^2}{5b-5a}$;

2) $\frac{5x^2-5y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{3x^2}{10y-10x}$;

3) $\frac{a^2-25}{a^2-3a}:\frac{a+5}{9-a^2}$;

4) $\frac{3n^2-3m^2}{n^2+np}\cdot\frac{6m-6n}{n+p}$;

5) $\frac{a^2+b^2}{x^3+x^2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{a^4-b^4}$;

6) $\frac{a^2+b^2}{a^2-ab}:\frac{a^4b-b^5}{a^2b-ab^2}$.

86. 1) $\frac{a-5}{a^2+6a+9}\cdot\frac{(a+3)^2}{a^2-25}$;

2) $\frac{b^2-8b+16}{b+3}:\frac{(b-4)^2}{b^2-9}$;

3) $\frac{a^2-49}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{a+b}{a-7}$;

4) $\frac{a^2-2a+1}{2a+1}:\frac{a-1}{4a^2-1}$.

6-§ БӨЛШЕК-РАЦИОНАЛ ӨРНЕКТЕРДІ ПАРА-ПАР АЛМАСТЫРУ

Арифметикалық амалдар белгілерімен біріктірілген бірнеше алгебралық бөлшектерден құралған өрнек бөлшек-рационал өрнек деп аталады. Бөлшек-рационал өрнектің бөліміндегі көпмүше нөлге тең болмауы керек.

Бөлшек-рационал өрнектерді алгебралық бөлшектер мойынсұнатын ережелерді қолданып ықшамдап, олардың үстінде *пара-пар алмастырулар* орындауға болады.

1-есеп. Бөлшек-рационал өрнекті ықшамда:

$$R(x,y)=\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{6}{x}+\frac{6}{xy}+\frac{12}{y}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1},\ x\neq0,\ y\neq0.$$

△ Алгебралық бөлшектерді ортақ бөлімге келтіру және қосу ережелеріне орай:

$$R(x,y)=\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{6y+12x+6}{xy}}-\frac{\frac{xy}{6}}{2x+y+1}=$$

Алгебралық бөлшектерді бөлу ережесіне орай:

$$=\frac{(x+1)xy}{x(12x+6y+6)}-\frac{xy}{6(2x+y+1)}=$$

Нөлден басқа ($x\neq 0$) санға ықшамдап, жақшаларды ашамыз:

$$=\frac{(x+1)y}{12x+6y+6}-\frac{xy}{12x+6y+6}=$$

Алгебралық бөлшектерді айыру ережесіне орай:

$$=\frac{xy+y-xy}{12x+6y+6}=$$

Ұқсас мүшелерді біріктіріп, бөлімдегі ортақ көбейткіштерді жақшадан шығарамыз:

$$=\frac{y}{12x+6y+6}=\frac{y}{6(2x+y+1)}.$$

Жауабы: $R(x,y)=\dfrac{y}{6(2x+y+1)}$. ▲

2-есеп. Өрнекті ықшамда: $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\dfrac{2a+2}{a+2}$.

△ Жақша ішіндегі өрнектерді ықшамдаймыз:

$$\frac{a+1}{2a-2}-\frac{1}{2a^2-2}=\frac{a+1}{2\left(a-1\right)}-\frac{1}{2\left(a^2-1\right)}=\frac{\left(a+1\right)^2-1}{2\left(a^2-1\right)}=$$

$$=\frac{\left(a+1-1\right)\left(a+1+1\right)}{2\left(a^2-1\right)}=\frac{a\left(a+2\right)}{2\left(a+1\right)\left(a-1\right)}.$$

Көбейтіндіні табамыз:

$$\frac{a(a+2)}{2(a+1)(a-1)}\cdot\frac{2a+2}{a+2}=\frac{a(a+2)\,2(a+1)}{2(a+1)(a-1)(a+2)}=\frac{a}{a-1}. \ ▲$$

3-есеп. Көрсетілген амалдарды орында:

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right).$$

△ Бірінші жақша ішіндегі амалды орындаймыз:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{(a+b+a-b)(a+b-a+b)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2a\cdot 2b}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Екінші жақша ішіндегі амалды орындаймыз:

$$\frac{a+b}{a-b}-1=\frac{a+b-a+b}{a-b}=\frac{2b}{a-b}.$$

Бөлеміз:

$$\frac{4ab}{a^2-b^2}:\frac{2b}{a-b}=\frac{4ab(a-b)}{(a^2-b^2)2b}=\frac{2a}{a+b}. \ ▲$$

4-есеп. Әуіз бірінші құбыр арқылы a сағатта, екіншісі арқылы b сағатта толады. Егер бір уақытта екі құбыр ашылса, әуіз неше сағатта толады?

△ Әуіздің көлемі V болсын. Бір сағатта бірінші құбыр $\frac{V}{a}$-ға тең көлемді, екіншісі $\frac{V}{b}$-ға тең көлемді толтырады, ал екі құбыр бір сағатта $\frac{V}{a}+\frac{V}{b}$-ға тең көлемді толтырады. Табылатын уақыт t болсын. t сағатта екі құбыр әуізді толық толтыруы керек, яғни

$$\left(\frac{V}{a}+\frac{V}{b}\right)t=V.$$

Теңдіктің екі бөлігін де V-ға бөліп,

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)t=1 \text{-ді}$$

пайда етеміз. Жақша ішіндегі бөлшектердің қосындысы $\frac{a+b}{ab}$-ға тең. Сондықтан $\frac{a+b}{ab}t=1$, бұдан $t=\frac{ab}{a+b}$. ▲

Жаттығулар

Көрсетілген амалдарды орында (**87–92**):

87. 1) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{1}{a^2}$; 3) $\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{5}+\frac{b}{5}\right)$; 5) $1:\left(1+\frac{1}{a}\right)$;

2) $\frac{a^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$; 4) $\frac{ab}{a-b}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$; 6) $b:\left(b+\frac{1}{b}\right)$.

88. 1) $\left(1+\frac{1}{a}\right):\left(1-\frac{1}{a}\right)$; 3) $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(a+\frac{a}{b}\right)\left(a-\frac{a}{b}\right)$; 4) $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+2\right)\left(1+\frac{m-n}{m+n}\right)$.

89. 1) $\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(2+\frac{2b}{a-b}\right)$; 3) $\left(\frac{6}{a-b}-\frac{5}{a+b}\right)\cdot\frac{a-b}{a+11b}$;

2) $\left(1+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(2-\frac{2a}{a+b}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{c+d}\right)\cdot\frac{c}{18(2c+d)}$.

90. 1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right):\frac{4m}{10m-5}$; 3) $\frac{y-1}{y}:\left(\frac{y^2+1}{y^2+2y}-\frac{2}{y+2}\right)$;

2) $\left(\frac{z+6}{3z+9}-\frac{1}{z+3}\right):\frac{z+2}{27z}$; 4) $\frac{m-2}{m-5}:\left(\frac{m^2+24}{m^2-25}-\frac{4}{m-5}\right)$.

91. 1) $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)$;

2) $\dfrac{ab-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}\right)$;

3) $\left(\dfrac{c+d}{c}-\dfrac{2c}{c-d}\right)\cdot\dfrac{d-c}{c^2+d^2}$;

4) $\left(\dfrac{2c}{c+d}+\dfrac{d-c}{c}\right)\cdot\dfrac{c+d}{c^2+d^2}$.

92. 1) $\left(\dfrac{a+1}{2a-1}+\dfrac{6}{2a^2-2}-\dfrac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\dfrac{4a^2-4}{3}$;

2) $\left(\dfrac{b}{a^2+ab}+\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{a}{b^2+ab}\right):\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$;

3) $\dfrac{a^2-c^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ac+c^2}\cdot\left(a+\dfrac{ac}{a-c}\right)$;

4) $\dfrac{c^2-ac}{a^2-b^2}\cdot\dfrac{a-b}{c^2-a^2}:\left(c-\dfrac{ac}{a+c}\right)$.

93. Көлемі V мұз бөлігінің массасы p килограмға тең. Көлемі V_1 бөліктің массасы нешеге тең?

94. Автомобиль сағатына v километр жылдамдықпен қозғалып, s километр жүрді. Егер мотоциклшының жылдамдығы сағатына u километр болса, ол қанша жол жүріп өтеді?

95. Моторлы қайықтың тұрғын судағы жылдамдығы сағатына v километр, ал өзен ағысының жылдамдығы v_1 километр. Қайық ағыс бойымен қозғалып, s километр жүзді. Моторлы қайық ағысқа қарсы осы уақыт ішінде қанша арақашықтықты жүзіп өтті?

96. *(Әбу Райхан Беруни есебі.)* Екі бұйымның бірінің 10-ы бір динар (ақша бірлігі), ал екіншісінің 15-і бір динар. Бір динарға екі бұйымнан бірдей мөлшерде неше дана сатып алуға болады?

7- §. $y=\dfrac{k}{x}$ ФУНКЦИЯ. ҚАСИЕТТЕРІ, ГРАФИГІ

1 - есеп. $y=\dfrac{1}{x}$ функцияның графигін сал.

△ 1) анықталу саласы – нөлден басқа барлық нақты сан;

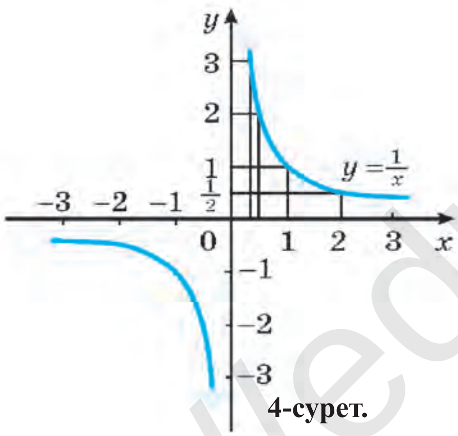
2) функция – тақ, өйткені $x\neq 0$ болғанда $\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$;

3) функция $x > 0$ аралықта теріс көрсеткішті дәрежелі функцияның қасиетіне орай азаяды, өйткені $\frac{1}{x} = x^{-1}$;

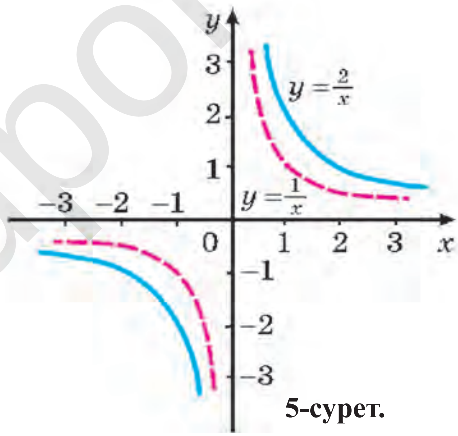
4) $x > 0$ болғанда функция оң мәндерді қабылдайды;

5) графикке тиісті бірнеше, мысалы, $(\frac{1}{3}; 3)$, $(\frac{1}{2}; 2)$, $(1; 1)$, $(2; \frac{1}{2})$ нүктелерді тауып, $x > 0$ -дің мәндері үшін графиктің бір бөлігін салып, соң симметрияның жәрдемімен $x < 0$ үшін қалған бөлігін саламыз (4-сурет). ▲

$y = \frac{1}{x}$ функцияның графигі *гипербола* деп аталады. Ол *тармақтар* деп аталатын екі бөліктен құралған. Тармақтардың бірі бірінші ширекте, ал екіншісі үшінші ширекте орналасқан.



4-сурет.



5-сурет.

2-есеп. $k = 2$ және $k = -2$ болғанда $y = \frac{k}{x}$ функцияның графигін сал.

△ Аргументтердің бірдей мәндерінде $y = \frac{2}{x}$ функцияның мәндері $y = \frac{1}{x}$ функция мәндерін 2-ге көбейтумен пайда етілетінін ескертеміз. Бұл $y = \frac{2}{x}$ функцияның графигі $y = \frac{1}{x}$ функцияның графигін абсциссалар осінен ординаталар осі бойынша екі есе созумен пайда етіледі, демек (5-сурет).

$y = -\frac{2}{x}$ функцияның мәндері $y = \frac{2}{x}$ функция мәндерінен тек таңбасымен ғана ерекшеленеді, $y = -\frac{2}{x}$ функцияның графигі $y = \frac{2}{x}$ функция графигіне абсциссалар осіне қарағанда симметриялық (6-сурет). ▲

Кез келген $k \neq 0$-де $y = \frac{k}{x}$ функцияның графигі де *гипербола* деп аталады. *Гипербола екі тармаққа ие.* Олар, егер $k > 0$ болса, бірінші және үшінші ширектерде, егер $k < 0$ болса, екінші және төртінші ширектерде жатады.

$y = \frac{k}{x}$ (мұндағы $k > 0$) функция $y = \frac{1}{x}$ *функцияның барлық қасиеттеріне* ие, себебі, бұл функция:

1) $x \neq 0$ *болғанда анықталған;*
2) *нөлден басқа барлық нақты сандарды қабылдайды;*
3) *тақ;*
4) $x > 0$ болғанда *оң* мәндерді және $x < 0$ болғанда *теріс* мәндерді қабылдайды;
5) $x < 0$ және $x > 0$ аралықтарда *азаяды*.

Егер $k < 0$ болса, онда $y = \frac{k}{x}$ функция 1–3-қасиеттерге ие болады; ал 4-5 қасиеттер былай өрнектеледі:

4′) $x < 0$ болғанда *оң* мәндерді және $x > 0$ болғанда *теріс* мәндерді қабылдайды;

5′) $x < 0$ және $x > 0$ аралықтарда *артады.*

$y = \frac{k}{x}$ функция $k > 0$ болғанда x пен y-тер арасындағы *кері пропорционалдық тәуелділікті* өрнектейді деп айтылады. Мөлшерлер арасындағы осындай тәуелділіктер көбінесе физика, техника, тағы басқа да салаларда кездеседе.

Мысалы, v тұрақты жылдамдықпен шеңбер бойымен бірқалыпты қозғалғанда дене $a = \frac{v^2}{r}$-ға тең (мұнда r – шеңбер радиусы) центрге тартқыш үдеумен қозғалады, яғни бұл жағдайда үдеу айнала радиусына кері пропорционал.

3-есеп. Ай Жерден $3{,}84 \cdot 10^8$ м қашықтықта. Ай 27,3 тәулік барысында Жердің айналасын бір рет айналып шығады. Айдың центрге тартқыш үдеуін есепте.

△ a үдеуді $a = \frac{v^2}{r}$ формуламен есептейміз, мұндағы $v = \frac{C}{t}$, $C = 2\pi r$, $t = 27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600$ с, $r = 3{,}84 \cdot 10^8$.

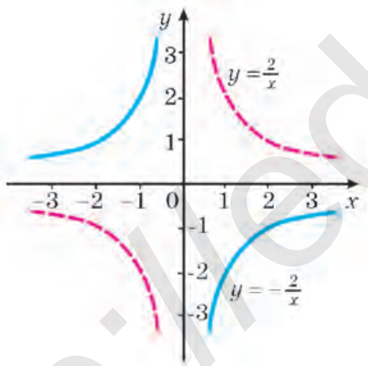
Бұл жағдайда:

$$a = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 3{,}84 \cdot 10^8}{(27{,}3 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \approx 2{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

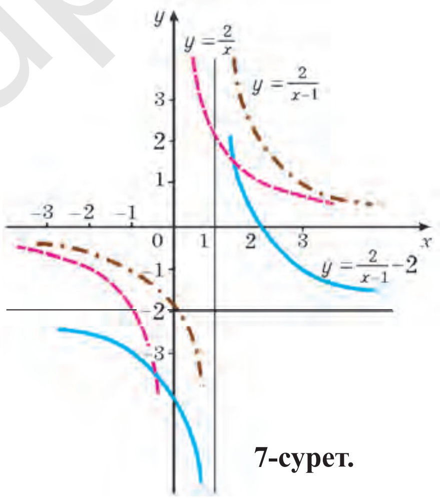
Жауабы: $2{,}72 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. ▲

4-есеп. $y = \frac{2}{x-1} - 2$ функция графигін сал.

△ $y = \frac{2}{x}$ функция графигін (6-сурет) Ox осі бойынша оңға бір бірлік және Oy осі бойынша екі бірлік төменге жылжытумен $y = \frac{2}{x-1} - 2$ функцияның графигін салуға болады (7-сурет). ▲



6-сурет.



7-сурет.

Жаттығулар

97. $y = \frac{2}{x}$ функция графигін сал. x-тің қандай мәндерінде:

1) $y(x) = 4$; 2) $y(x) = -\frac{1}{2}$; 3) $y(x) > 4$; 4) $y(x) \leq 1$

болатынын анықта.

98. Бір координаталар жазықтығында $y=\frac{1}{x}$ және $y=x$ функциялар графиктерін сал. x-тің қандай мәндерінде:

1) бұл функциялар қиылысатынын анықта;
2) бірінші функцияның графигі екінші функция графигінен жоғарыда (төменде) жататынын анықта.

99. Функциялардың графиктерін салмай-ақ олардың қиылысу нүктелерін тап:

1) $y=\frac{12}{x}, y=3x$; 2) $y=-\frac{8}{x}, y=-2x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x-1$; 4) $y=\frac{6}{x+1}, y=x+2$.

100. Функциялардың графиктерін салып, олардың қиылысу нүктелерін жуықтап тап:

1) $y=\frac{3}{x}, y=x+1$; 2) $y=-\frac{3}{x}, y=1-x$;

3) $y=\frac{2}{x}, y=x^2+2$; 4) $y=\frac{1}{x}, y=x^2+4x$.

101. Цилиндрда поршень астындағы газ тұрақты температурада тұр. Газдың V (литрде) көлемі p (атмосфера) қысымында $V=\frac{12}{p}$ формуламен есептеледі.

1) Қысым 4 атм; 5 атм; 10 атм болғандағы газ иелеген көлемді тап; 2) қандай қысымда газ 3 л; 5 л; 15 л көлемді иелейтінін есепте; 3) газдың көлемі оның қысымына тәуелділігі графигін сал.

102. Реостаттағы I ток күші (амперде) $I=\frac{U}{R}$ формуламен есептеледі, мұндағы U – кернеу (вольтта), R – кедергі (омда).

1) $U=6$ болғанда $I(R)$ тәуелділіктің графигін сал.

2) График бойынша жуықтап тап: a) R кедергі 6, 12, 20 Ω болғанда ток күшін; b) ток күші 10, 5, 1,2 А болғанда реостаттың кедергісін.

103. Автомобиль жолдың радиусы 150 м болған айналмалы бөлігінде 60 км/сағ жылдамдықпен қозғалуда. Автомобильдің центрге тартқыш үдеуін тап. Егер автомобильдің жылдамдығы бұрынғысынша қалып, жолдың айналмалы бөлігінің радиусы артса, центрге тартқыш үдеу арта ма немесе азая ма?

104. Функцияның графигін сал:

1) $y=\frac{3}{x}-2$; 2) $y=\frac{2}{x}+1$; 3) $y=\frac{2}{x+2}-1$; 4) $y=\frac{3}{1-x}+1$.

8-§. НАТУРАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕНІҢ АРИФМЕТИКАЛЫҚ ТҮБІРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Орта Азиялық ғұлама ғалым, математик және астроном **Жамшид ибн Маъсуд ибн Махмуд Ғиясиддин әл-Каши** (шамамен 1430 жылы дүние салған) сандардан кез келген n-дәрежелі түбір табу амалын тапқан. Оның «Арифметика кілті» атты шығармасының бесінші тарауында осы жайлы ой-пікір жүргізіледі.

Мынадай мысалды карастырайық.

1 есеп. Теңдеуді шешіңдер: $x^4=81$.

△ Теңдеуді $x^4-81=0$ немесе $(x^2-9)(x^2+9)=0$ көрінісінде жазамыз. $x^2+9\neq 0$ болғандықтан $x^2-9=0$ болады, ал бұдан

$$x^2-9=(x-3)(x+3)=0,\ x_1=3,\ x_2=-3.$$ ▲

Сөйтіп, $x^4=81$ теңдеуінің екі нақты түбірі бар екен: $x_1=3$, $x_2=-3$. олар 81 санының 4-*дәрежелі түбірлері*, ал оң түбірі (3 саны) болса 81 санының 4-*дәрежелі арифметикалық түбірі* деп аталады және мынадай белгіленеді: $\sqrt[4]{81}$. Сөйтіп, $\sqrt[4]{81}=3$.

$x^n=a$ теңдеу (мұнда n – натурал сан, a – теріс емес сан) бір ғана теріс емес түбірі бар екендігін дәлелдеуге болады. Бұл түбір *a санының n-дәрежелі арифметикалық түбірі деп* аталады.

Анықтама. *a теріс емес санның $n\geq 2$ натурал көрсеткішті арифметикалық түбірі деп, n-дәрежесі a-ға тең теріс емес санды атайды. a санының n-дәрежелі арифметикалық түбірі былай белгіленеді: $\sqrt[n]{a}$. a сан түбір астындағы өрнек деп аталады. Егер $n=2$ болса, онда $\sqrt[2]{a}$ орнына $\sqrt{a}$ жазылады.*

Екінші дәрежелі арифметикалық түбір *квадрат түбір* деп те аталады, ал 3-дәрежелі түбірі *куб түбір* делінеді.

Сөз n-дәрежелі арифметикалық түбір туралы айтылғанда анық болған жағдайларда қысқаша «n-дәрежелі түбір» делінеді.

Анықтаманы пайдаланып, $\sqrt[n]{a}$ -ның b-ға тең болатынын дәлелдеу үшін: 1) $b \geq 0$; 2) $b^n = a$ екендігін көрсету керек.

Мысалы, $\sqrt[3]{64} = 4$, өйткені $4 > 0$ және $4^3 = 64$.

Арифметикалық түбір анықтамасынан, егер $a \geq 0$ болса, онда

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a}$$

болатыны келіп шығады.

Мысалы, $\left(\sqrt[5]{7}\right)^5 = 7$, $\sqrt[6]{13^6} = 13$.

n-дәрежелі түбір табылатын амал *n- дәрежелі түбір шығару амалы* дейіледі. Ол n-дәрежеге көтеру амалына кері амал.

2-есеп. $x^3 = -8$ теңдеуді шеш.

$\triangle$ Бұл теңдеуді $-x^3 = 8$ немесе $(-x)^3 = 8$ түрінде жазуға болады. $-x = y$ деп белгілейміз, онда $y^3 = 8$ болады.

Бұл теңдеу бір түбірге ие: $y = \sqrt[3]{8} = 2$. $y^3 = 8$ теңдеудің теріс түбірі болмайды, себебі $y < 0$ болғанда $y^3 < 0$ болады. $y = 0$ саны да бұл теңдеудің түбірі бола алмайды.

Сондықтан, $y^3 = 8$ теңдеудің тек бір ғана $y = 2$ болатын түбірі бар, демек, $x^3 = -8$ теңдеудің де бір ғана түбірі бар: $x = -y = -2$.

Жауабы: $x = -2$. $\blacktriangle$

$x^3 = -8$ теңдеудің шешімін қысқаша мынадай жазуға болады:

$$x = -\sqrt[3]{8} = -2.$$

Жалпы, кез келген тақ $2k+1$ натурал саны үшін $a < 0$ болғанда $x^{2k+1} = a$ теңдеу тек қана бір, оның үстіне теріс түбірге ие. Бұл түбір дәл арифметикалық түбір сияқты мынадай белгіленеді: $\sqrt[2k+1]{a}$. *Оны теріс санның тақ дәрежелі түбірі деп атайды.*

Мысалы, $\sqrt[3]{-27}=-3$, $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Теріс a санының тақ дәрежелі түбірі мен $-a=|a|$ санының арифметикалық түбірі арасында мынадай тепе-теңдік орынды:

$$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}.$$

Мысалы, $\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3$.

Жаттығулар

105. (Ауызша.) 1) Санның арифметикалық квадрат түбірін тап:

$$1;\quad 0;\quad 16;\quad 0,81;\quad 169;\quad \frac{16}{121};\quad \frac{49}{144}.$$

2) Санның арифметикалық куб түбірін тап:

$$1;\quad 0;\quad 5;\quad \frac{1}{27};\quad 0,027;\quad 0,064;\quad 0,729;\quad \frac{1}{343}.$$

3) Санның төртінші дәрежелі арифметикалық түбірін тап:

$$0;\quad 1;\quad 16;\quad \frac{16}{81};\quad \frac{256}{625};\quad 0,0016;\quad \frac{625}{1296}.$$

Есепте (**106–108**):

106. 1) $\sqrt[6]{36^3}$; 2) $\sqrt[12]{64^2}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{25}\right)^2}$; 4) $\sqrt[8]{225^4}$; 5) $\sqrt[7]{2\cdot 4^3}$.

107. 1) $\sqrt[3]{10^6}$; 2) $\sqrt[3]{3^{12}}$; 3) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}$; 4) $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^{16}}$; 5) $\sqrt[5]{32^2}$.

108. 1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[15]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$;

4) $\sqrt[5]{-1024}$; 5) $\sqrt[3]{-34^3}$; 6) $\sqrt[7]{-8^7}$.

109. Теңдеуді шеш:

1) $x^4=81$; 2) $x^5=-\frac{1}{32}$; 3) $5x^5=-160$; 4) $2x^6=128$.

110. x-тің қандай мәндерінде өрнек тура болады:

1) $\sqrt[6]{2x-3}$; 2) $\sqrt[3]{x+3}$; 3) $\sqrt[3]{2x^2-x-1}$; 4) $\sqrt[4]{\frac{2-3x}{2x-4}}$?

Есепте (**111–112**):

111. 1) $\sqrt[3]{-125}+\frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$; 2) $\sqrt[5]{32}-0,5\sqrt[3]{-216}$;

3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81}+\sqrt[4]{625}$; 4) $\sqrt[3]{-1000}-\frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;

5) $\sqrt[4]{0,0001}-2\sqrt{0,25}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; 6) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}+\sqrt[3]{-0,001}-\sqrt[4]{0,0016}$.

112. 1) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}}$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

3) $\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$; 4) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

113. 1) a) $x\geq 2$; b) $x<2$ болғанда $\sqrt[3]{(x-2)^3}$ өрнекті ықшамда;

2) a) $x\leq 3$; b) $x>3$ болғанда $\sqrt{(3-x)^6}$ өрнекті ықшамда.

114. $1987<\sqrt{n}<1988$ қанағаттандыратын неше натурал сан n бар?

9-§. РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

1-есеп. Есепте: $\sqrt[4]{5^{12}}$.

△ $5^{12}=(5^3)^4$ болғандықтан $\sqrt[4]{5^{12}}=\sqrt[4]{(5^3)^4}=5^3=125$. ▲

Сөйтіп, $\sqrt[4]{5^{12}}=5^{\frac{12}{4}}$.

Осыған ұқсас, $\sqrt[5]{7^{-15}}=7^{-\frac{15}{5}}$ екенін көруге болады.

Жалпы, егер n – натурал сан, $n\geq 2$, m – бүтін сан және $\frac{m}{n}$ бүтін сан болса, онда a>0 болғанда төмендегі теңдік тура болады:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.} \qquad (1)$$

○ Шарт бойынша $\frac{m}{n}$ – бүтін сан, яғни m-ны n-ға бөлгенде k бүтін сан пайда болады. Онда $\frac{m}{n}=k$ теңдіктен $m=kn$ екендігі келіп шығады. Дәреженің және арифметикалық түбірдің қасиеттерін қолдансақ, мынадай нәтиже келіп шығады.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{kn}}=\sqrt[n]{\left(a^k\right)^n}=a^k=a^{\frac{m}{n}}.$$ ●

Бірақ, егер $\frac{m}{n}$ бүтін сан болмаса, онда $a^{\frac{m}{n}}$ (мұнда $a>0$) дәреже (1) формула тура болып қалатындай етіп анықталады, яғни онда

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}} \qquad (2)$$

деп есептеледі.

Сондықтан, (2) формула кез келген бүтін m және кез келген натурал $n\geq 2$ және $a>0$ сан үшін тура болады. Мысалы,

$$16^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{16^3}=\sqrt[4]{2^{12}}=2^3=8; \qquad 7^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{7^5}=\sqrt[4]{7^4\cdot 7}=7\sqrt[4]{7};$$

$$27^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{27^2}}=\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{3^6}}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}.$$

r рационал сан – бұл $\frac{m}{n}$ көріністегі сан екенін, мұндағы m – бүтін сан, n – натурал сан, яғни $r=\frac{m}{n}$ болатынын еске салып өтеміз. Бұл жағдайда (2) формула бойынша $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ өрнекті пайда етеміз. Сөйтіп, дәреже кез келген рационал көрсеткіш және кез келген оң негіз үшін анықталды. Егер $r=\frac{m}{n}>0$ болса, онда $\sqrt[n]{a^m}$ өрнеке тек $a>0$ болғанда ғана емес, $a=0$ болса да мәнге ие болады. $a=0$ болса, $\sqrt[n]{0^m}=0$. Сондықтан $r>0$ болса $0^r=0$ теңдік орынды деп есептеледі.

(1) және (2) формулаларды пайдаланып, рационал көрсеткішті дәрежені түбір ретінде және керісінше өрнектеуге болады.

(2) формуладан және түбірдің қасиеттерінен

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}}$$

теңдік келіп шығатынын тұжырымдаймыз, мұндағы $a>0$, m – бүтін сан және n, k – натурал сандар.

Мысалы, $7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{6}{8}} = 7^{\frac{9}{12}}$.

Натурал көрсеткішті дәреженің барлық қасиеттері кез келген рационал көрсеткішті және оң негізді дәрежелер үшін тура болатынын көрсетуге болады. Демек, кез келген рационал p және q сандар мен кез келген $a>0$ және $b>0$ үшін мынадай теңсіздіктер тура болады:

1) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;

2) $a^p : a^q = a^{p-q}$;

3) $(a^p)^q = a^{pq}$;

4) $(ab)^p = a^p b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Бұл қасиеттер түбірдің анықтамаларынан келіп шығады. Мысалы, $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ қасиетін дәлелдейік.

○ Айталық, $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (мұндағы n және l – натурал сандар, m және k – бүтін сандар) болсын.

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} \tag{3}$$

екенін дәлелдеу керек.

$\frac{m}{n}$ va $\frac{k}{l}$ бөлшектерді ортақ бөлімге келтіріп, (3) теңдіктің сол жағы

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}}$$

түрінде жазылады.

Рационал көрсеткішті дәреже анықтамасына орай, түбір мен бүтін көрсеткішті дәреженің қасиетін пайдаланып, мынадай нәтиже аламыз:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{kn}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{kn}} =$$

$$= \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{kn}} = \sqrt[nl]{a^{ml+kn}} = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}}.$$

Рационал көрсеткішті дәреженің басқа қасиеттері де дәл осылай дәлелденеді.

Дәреженің қасиеттерін қолдануға мысалдар қарастырайық.

1) $7^{\frac{1}{4}} \cdot 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 7;$ $\quad 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 5^{1} = 5;$

2) $9^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3;$ $\quad 8^{\frac{2}{3}} : 8 = 8^{\frac{2}{3}-1} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$

3) $\left(16^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 16^{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^{4\cdot\frac{3}{4}} = 2^3 = 8;$

4) $24^{\frac{2}{3}} = (2^3 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3\cdot\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 4\sqrt[3]{3^2} = 4\sqrt[3]{9};$

5) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{8^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{3}}}{(3^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3};$ $\quad \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$

2-есеп. Есепте: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

$$\triangle \; 25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^5)^{\frac{1}{5}} = 5. \; \blacktriangle$$

3- есеп. Өрнекті ықшамда: $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

$$\triangle \; \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab. \; \blacktriangle$$

4- есеп. Өрнекті ықшамда: $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}.$

$$\triangle\ \frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{4}{3}}}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1-a)}-\frac{a^{-\frac{1}{3}}(1-a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1+a)}=$$

$$=1+a-(1-a)=2a.\ \blacktriangle$$

$3^{\sqrt{2}}$ мысалы арқылы *иррационал көрсеткішті дәрежені* қалай енгізетінімізді көрсетеміз. $\sqrt{2}$-жуық мәндерін 0,1; 0,01; 0,001; ... және тағы басқа дәлдіктермен тізбектей жазып шығамыз. Онда мынадай тізбек келіп шығады:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

3 санының дәреже көрсеткіштері тізбегін осы рационал көрсеткіштермен жазып шығамыз:

$$3^{1,4};\ 3^{1,41};\ 3^{1,414};\ 3^{1,4142};\ \ldots$$

Мұндай дәрежелер $3^{\sqrt{2}}$ сияқты белгіленетін қайсыбір нақты санның тізбектей жуық мәндері екендігін көрсетуге болады:

$$3^{1,4}=\underline{4},\ 6555355,$$

$$3^{1,41}=\underline{4{,}7}069644,$$

$$3^{1,414}=\underline{4{,}72}76942,$$

$$3^{1,442}=\underline{4{,}728}7329,$$

$$3^{\sqrt{2}}\approx\underline{4{,}7288033}.$$

Негізі a оң болғанда да және кез келген иррационал көрсеткішті a^b дәреже дәл осылай анықталады. Осылайша, енді оң негізді дәреже кез келген нақты көрсеткіш үшін анықталады, оған қосымша нақты дәреженің қасиеттері рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері сияқты орындалады.

Жаттығулар

115. (Ауызша.) Рационал көрсеткішті дәреже түрінде жаз:

1) $\sqrt{x^3}$; 2) $\sqrt[3]{a^4}$; 3) $\sqrt[4]{b^3}$; 4) $\sqrt[5]{x^{-1}}$; 5) $\sqrt[6]{a}$; 6) $\sqrt[7]{b^{-3}}$.

116. (Ауызша.) Бүтін көрсеткішті дәреженің түбірі түрінде жаз:

1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $y^{\frac{2}{5}}$; 3) $a^{-\frac{5}{6}}$; 4) $b^{-\frac{1}{3}}$; 5) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; 6) $(3b)^{-\frac{2}{3}}$.

Есепте (**117–120**):

117. 1) $64^{\frac{1}{2}}$; 2) $27^{\frac{1}{3}}$; 3) $8^{\frac{2}{3}}$;

4) $81^{\frac{3}{4}}$; 5) $16^{-0,75}$; 6) $9^{-1,5}$.

118. 1) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; 2) $5^{\frac{2}{7}}\cdot 5^{\frac{5}{7}}$; 3) $9^{\frac{2}{3}}:9^{\frac{1}{6}}$; 4) $4^{\frac{1}{3}}:4^{\frac{5}{6}}$;

5) $\left(7^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; 6) $\left(8^{\frac{1}{12}}\right)^{-4}$; 7) $8^{\frac{4}{5}}:8^{\frac{7}{15}}$; 8) $\left(5^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

119. 1) $9^{\frac{2}{5}}\cdot 27^{\frac{2}{5}}$; 2) $7^{\frac{2}{3}}\cdot 49^{\frac{2}{3}}$; 3) $144^{\frac{3}{4}}:9^{\frac{3}{4}}$; 4) $150^{\frac{3}{2}}:6^{\frac{3}{2}}$.

120. 1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$; 2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}}$;

3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}}\cdot 3^{\frac{4}{5}}$; 4) $\left(5^{-\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

121. Есепте:

1) $a=0{,}09$ болғанда $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ -тің мәнін;

2) $b=27$ болғанда $\sqrt{b}:\sqrt[6]{b}$ -тің мәнін;

3) $b=1{,}3$ болғанда $\frac{\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[6]{b}}$ -тің мәнін;

4) $a=2{,}7$ болғанда $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[12]{a^5}$ -тің мәнін.

122. Рационал көрсеткішті дәреже түрінде жаз:

1) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{a}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{b}$; 3) $\sqrt[3]{b}:b^{\frac{1}{6}}$;

4) $a^{\frac{4}{3}}:\sqrt[3]{a}$; 5) $x^{1,7}\cdot x^{2,8}:\sqrt{x^{5}}$; 6) $y^{-3,8}:y^{-2,3}\cdot\sqrt{y^{3}}$.

Өрнекті ықшамда (**123–124**):

123. 1) $\left(a^{4}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-6}$; 2) $\left(\left(\frac{a^{6}}{b^{-3}}\right)^{4}\right)^{\frac{1}{12}}$; 3) $\left(a^{-7}\right)^{-\frac{5}{7}}\cdot\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{-4}$.

124. 1) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$; 2) $\dfrac{b^{\frac{1}{5}}\left(\sqrt[5]{b^{4}}-\sqrt[5]{b^{-1}}\right)}{b^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b^{-2}}\right)}$; 3) $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{-1}-ab^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a^{2}}-\sqrt[3]{b^{2}}}$;

4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$; 5) $\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}\right)}{a^{\frac{2}{5}}\left(a^{\frac{8}{5}}-a^{-\frac{2}{5}}\right)}$; 6) $\dfrac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$.

125. Есепте:

1) $\left(2^{\frac{5}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}-3^{\frac{5}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\sqrt[3]{6}$; 2) $\left(5^{\frac{1}{4}}:2^{\frac{3}{4}}-2^{\frac{1}{4}}:5^{\frac{3}{4}}\right)\cdot\sqrt[4]{1000}$.

126. Өрнектерді ықшамда:

1) $a^{\frac{1}{9}}\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a}}$; 2) $b^{\frac{1}{12}}\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\left(\sqrt[3]{ab^{-2}}+(ab)^{-\frac{1}{6}}\right)\sqrt[6]{ab^{4}}$;

4) $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}\right)$; 5) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}$; 6) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}}}$;

7) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}{m+2\sqrt{mn}+n}$; 8) $\dfrac{c-2c^{\frac{1}{2}}+1}{\sqrt{c}-1}$; 9) $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

Өрнекті ықшамда (**127–129**):

127. 1) $\left(1-2\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\right):\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right):\left(2+\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$;

3) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{a}-a^{-\frac{1}{2}}b}{1-\sqrt{a^{-1}b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-a^{-\frac{1}{3}}b}{\sqrt[6]{a}+a^{-\frac{1}{3}}\sqrt{b}}$.

128. 1) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{2a^2-4ab}{a-b}$; 2) $\dfrac{3xy-y^2}{x-y}-\dfrac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}}$.

129. 1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 2) $\dfrac{a+b}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$;

3) $\dfrac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a-b}-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a+b}+\dfrac{1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

10-§. РАЦИОНАЛ КӨРСЕТКІШТІ ДӘРЕЖЕ ҚАТЫСҚАН АЛГЕБРАЛЫҚ ӨРНЕКТЕРДІ ЫҚШАМДАУ

Бұл тақырыпқа қатысты жаттығуларды орындауда алгебралық бөлшектер және олардың үстінде амалдар, қысқа көбейту формулалары мен рационал көрсеткішті дәреженің қасиеттері пайдаланылады.

1-есеп. Өрнекті ықшамда:

$$\left[\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2+(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})^2}{x+(xy)^{\frac{1}{2}}}\right]^5\cdot x^3\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{\sqrt{x^3}}=\sqrt[6]{x^3}=\sqrt{x}$;

2) квадрат жақшалар ішіндегі өрнектің алымын квадратқа шығарамыз және $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ екенін пайдаланамыз:

4—Алгебра, 8-сынып

$$\sqrt{x}+2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}=2(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

3) осы өрнектің бөлімінде $\sqrt{x}$ -ті жақшадан сыртқа шығарамыз:

$$x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

4) бұл жағдайда $\dfrac{2(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{2}{\sqrt{x}};$

5) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^5\cdot x^3\sqrt{x}=\dfrac{32}{x^2\sqrt{x}}\cdot x^3\sqrt{x}=32\cdot x$

Жауабы: $32\cdot x$. ▲

2-есеп. Өрнекті ықшамдап, оның $x=0{,}16$, $y=25$ болғандағы сандық мәнін тап:

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ x>0,\ y>0.$$

△ 1) $\dfrac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{xy}\cdot(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}=-\sqrt[4]{xy};$

2) $-\sqrt[4]{xy}+\dfrac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}};$

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}=\sqrt{xy};$

4) $\left(1+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\sqrt{\dfrac{y}{x}};$

5) $\sqrt{xy}\cdot\left(1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)=\sqrt{xy}+y.$

Егер $x=0{,}16$ және $y=25$ болса, $\sqrt{0{,}16\cdot 25}+25=\sqrt{4}+25=27$.

Жауабы: $\sqrt{xy}+y$; 27. ▲

3-есеп. Өрнекті ықшамдап, оның $a = 25$, $b = 0{,}6561$ болғандағы сандық мәнін тап:

$$\frac{\left(\sqrt[8]{a}+\sqrt[8]{b}\right)^2+\left(\sqrt[8]{a}-\sqrt[8]{b}\right)^2}{a-\sqrt{ab}} : \frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{ab}+\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a^3b}-b}.$$

△ 1) 1-бөлшектің алымын квадратқа шығарып, бөліміндегі $\sqrt{a}$ -ны жақшадан сыртқа шығарамыз. Ықшамдаудан соң 1-бөлшек $\dfrac{2}{\sqrt{a}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$ -ға тең болады.

2) 2-бөлшектің алымы қысқа көбейту формулаларын пайдаланып жақшалары ашылған соң $\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}$ түріндегі өрнекке келеді;

3) ал бөлімі $\sqrt[4]{b}$ жақшадан сыртқа шығарылып, $\left(x^3-y^3\right)$-ның жайылмасы пайдаланылады. Сонда 2-бөлшек $\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}$-ға тең болады;

4) сөйтіп, 1-бөлшекті 2-бөлшекке бөлу нәтижесі $\dfrac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$ -ға тең болады. $a = 25$, $b = 0{,}6561$ болса, бұл өрнек $\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{0{,}6561}}{\sqrt{25}} = \dfrac{2}{5}\cdot 0{,}9 = 0{,}36$ -ға тең.

Жауабы: $\dfrac{2\cdot\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}}$; 0,36. ▲

Жаттығулар

Өрнекті ықшамда (**130–146**):

130. $\left[\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+5b^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{2}}\right)\right]:\left(2a+3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right).$

131. $\left[\dfrac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right]^{-3}.$

132. $\left[\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right]^{2}.$

133. $\left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)\right].$

134. $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}.$

135. $\left(a+b^{\frac{3}{2}}:\sqrt{a}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-\frac{2}{3}}.$

136. $\left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}}\right]^{-2}-\sqrt{x^{2}+8x+16}.$

137. $\left(\frac{\sqrt[4]{ax^{3}}-\sqrt[4]{a^{3}x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2}\sqrt{1+2\sqrt{\frac{a}{x}}+\frac{a}{x}}.$

138. $\frac{(a-b^{2})\sqrt{3}-b\sqrt{3}\sqrt[3]{-8b^{3}}}{\sqrt{2\left(a-b^{2}\right)^{2}+\left(2b\sqrt{2a}\right)^{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{\frac{3}{a}}-\sqrt{\frac{3}{c}}}.$

139. $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}:\frac{x-a}{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}.$

140. $\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{3}+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^{2}+3b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$

141. $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{3}+2a^{2}:\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}+\frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}.$

142. $$\left(\frac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-\frac{1}{2}}.$$

143. $$\left[\left(\frac{a^2-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}}+a\sqrt[3]{b}\right):\left(a+\sqrt[6]{a^3b^2}\right)-\sqrt[3]{b}\right]^2.$$

144. $$\left[\frac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4.$$

145. $$\left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)}\right]^3.$$

146. $$\frac{\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}}-\sqrt[6]{x}.$$

I тарауға қатысты жаттығулар

Бөлшектерді ортақ бөлімге келтір:

147. 1) $\frac{5a}{a^3-27}$, $\frac{a-3}{a^2+3a+9}$ және $\frac{1}{a-3}$; 2) $\frac{3}{x+2}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ және $\frac{x+2}{x^2-2x+4}$.

Амалдарды орында (**148–149**):

148. 1) $\frac{a+3}{5}+\frac{7+a}{10}+\frac{a-3}{2}$; 3) $\frac{a-2}{45}-\frac{a+5}{15}-\frac{a-9}{9}$;

2) $\frac{b-7}{4}+\frac{5b-2}{3}+\frac{3b-1}{8}$; 4) $\frac{b}{12}-\frac{3b+1}{9}-\frac{2b-1}{4}$.

149. 1) $\dfrac{y}{n-2}+\dfrac{z}{2-n}$;

3) $\dfrac{2m}{3-5n}-1+\dfrac{7n-4}{5n-3}$;

2) $\dfrac{p+2q}{3p-q}-\dfrac{5q-2p}{q-3p}$;

4) $4-\dfrac{3a}{5-2b}+\dfrac{5\left(a-10\right)}{2b-5}$.

Көрсетілген амалдарды орында **(150–152):**

150. 1) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2}:\dfrac{8a-8b}{a^3+b^3}$;

2) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\cdot\dfrac{a^3-b^3}{7a+7b}$.

151. 1) $\dfrac{64x^2-1}{x^2-4}\cdot\dfrac{\left(x+2\right)^2}{x^2-4}\cdot\dfrac{\left(x-2\right)^2}{8x+1}$;

2) $\dfrac{x-6}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x^2+4x+4}{\left(x^2+2\right)\left(x-2\right)}\cdot\dfrac{x^3-9x}{\left(x-6\right)\left(x+2\right)}$;

3) $\dfrac{am^2-an^2}{m^2+2mn+n^2}:\dfrac{am^2+2amn+an^2}{3m+3n}$;

4) $\dfrac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b}:\dfrac{2a-8-ab+4b}{ab+4b-2a-8}$.

152. 1) $(x^2-1)\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{1+x}+1\right)$;

3) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;

2) $\left(1+a-\dfrac{a^2+3}{a+1}\right)(1-a^2)$;

4) $\left(\dfrac{2-a}{2+a}-\dfrac{a+2}{a-2}\right):\left(\dfrac{2+a}{2-a}+\dfrac{a-2}{a+2}\right)$.

Есепте **(153–154):**

153. 1) $(0{,}175)^0+(0{,}36)^{-2}-1^{\frac{4}{3}}$;

2) $1^{-0{,}43}-(0{,}008)^{\frac{1}{3}}+(15{,}1)^0$;

3) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}-\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}+4\cdot 379^0$;

4) $(0{,}125)^{\frac{1}{3}}+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-(1{,}85)^0$.

154. 1) $9{,}3\cdot 10^{-6}:(3{,}1\cdot 10^{-5})$;

2) $1{,}7\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{7}$;

3) $8{,}1\cdot 10^{16}\cdot 2\cdot\quad 10^{-14}$;

4) $6{,}4\cdot 10^{5}:(1{,}6\cdot 10^{7})$;

5) $2 \cdot 10^{-1} + \left(6^0 - \frac{1}{6}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{-1}$;

6) $3 \cdot 10^{-1} - \left(8^0 - \frac{1}{8}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$.

155. Өрнектің мәнін тап:

1) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}\right)^{-2}$, мұнда $x = \frac{7}{9}$; 2) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{9}}}{a^{-\frac{2}{9}}}\right)^{-3}$, мұнда $a = 0{,}1$.

156. Өрнекті ықшамда:

1) $(\sqrt[3]{125x} - \sqrt[3]{8x}) - (\sqrt[3]{27x} - \sqrt[3]{64x})$;

2) $(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{16x}) + (\sqrt[4]{81x} - \sqrt[4]{625x})$;

3) $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \frac{3+\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}$;

4) $\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right) : (\sqrt{x^2 - y^2} - x)$.

157. Есепте:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75} + 10000^{0{,}25} - \left(7\frac{19}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$;

2) $(0{,}001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;

3) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

4) $(-0{,}5)^{-4} - 625 - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.

158. x-тің қандай мәндерінде өрнек тура болады:

1) $\sqrt[4]{x^2 - 4}$; 2) $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$; 3) $\sqrt[6]{\frac{x-2}{x+3}}$;

4) $\sqrt[4]{x^2 - 5x + 6}$; 5) $\sqrt[8]{x^3 - x}$; 6) $\sqrt[6]{x^3 - 5x^2 + 6x}$?

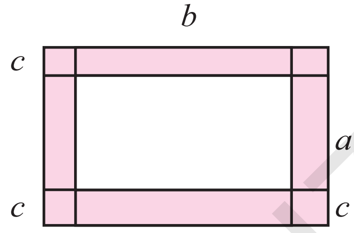
159. Өрнекті ықшамда:

1) $\frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{7}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{-\frac{3}{4}}}$; 2) $\frac{a^{\frac{4}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{-\frac{2}{3}}}$; 3) $\frac{b^{\frac{5}{4}} + 2b^{\frac{1}{4}} + b^{-\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}} - b^{-\frac{1}{4}}}$;

4) $\frac{a^{-\frac{4}{3}}b^{-2} - a^{-2}b^{-\frac{4}{3}}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2} - b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}$; 5) $\frac{\sqrt{a^3b^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b^3}}{\sqrt{ab^{-1}} - \sqrt{a^{-1}b}}$; 6) $\frac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}b^{-\frac{1}{4}} - a^{-\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}}$.

160. 1) Берілген өлшемдер бойынша боялған ауданды есептеу формуласын шығар (8-сурет);

2) $2bc+2c(a-2c)=2ac+2c(b-2c)$ теңдіктің дұрыстығын фигураның жәрдемімен көрсет;



8-сурет.

3) штрихталған ауданды екі тік төртбұрыш аудандардың айырмасы ретінде бейнеле. Осыны пайдаланып, $ab-(b-2c)(a-2c)=2ac+$ $+2c\cdot(b-2c)$ теңдікті дәлелде.

161. Теңдіктердің дұрыстығын тексеріп, оларға геометриялық түсініктеме бер. Сәйкес фигуралар сыз:

1) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$;

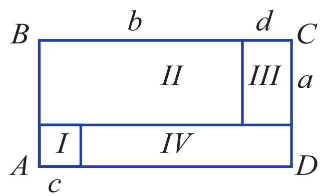
2) $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$;

3) $(a+b+c)(d+l)=ad+bd+cd+al+bl+cl$.

162. 1) Теңдіктердің дұрыстығын дәлелде:

$$c^2+b(a-c)+(b+d-c)c+d(a-c)=a(b+d).$$

2) *ABCD* тік төртбұрыш ауданын анықтау үшін екі өрнек құрастыр (9-сурет). *ABCD* тік төртбұрыштың ауданы I, II, III, IV тік төртбұрыштар аудандары қосындысына тең екенін пайдаланып, 1-теңдікке геометриялық түсінік бер.



9-сурет.

№2

***N* санның цифрлары қосындысы 2006-ға тең. *N* санды екі өзара тең сандар көбейтіндісі көрінісінде бейнелеуге бола ма?**

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. Әріптердің бөлшек мағынаға ие болатын мәндерін тап:

$$\frac{a}{b};\ \frac{3}{c-1};\ \frac{k}{d+2}.$$

2. Амалдарды орында:

1) $4a+\frac{1-4a^2}{a}$; 2) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$;

3) $\frac{2a-4}{3b}\cdot\frac{6b}{a-2}$; 4) $\frac{a^2-b^2}{b^2}:\frac{a+b}{b}$.

3. Өрнекті ықшамда және оның $x=2\frac{2}{3}$ болғандағы сандық мәнін тап:

$$\frac{1+2x}{x-3}-\frac{x^2+3x}{5}\cdot\frac{10}{x^2-9}.$$

4. Есепте:

1) $3^{-5}:3^{-7}-2^{-2}\cdot 2^4+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^3$; 2) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 32}-\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$;

3) $25^{\frac{3}{2}}\cdot 25^{-1}+(5^3)^{\frac{2}{3}}:5^3-48^{\frac{2}{3}}:6^{\frac{2}{3}}$; 4) $4^{-7}:4^{-10}-3^{-2}\cdot 3^5+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

5. Өрнекті ықшамда:

1) $\frac{3x^{-9}\cdot 2x^5}{x^{-4}}$; 2) $(x^{-1}+y^{-1})\left(\frac{1}{xy}\right)^{-2}$; 3) $\frac{2a^{-8}\cdot 4a^3}{16\cdot a^{-5}}$.

6. $\dfrac{a^{\frac{5}{3}}}{\sqrt[3]{a^5}\cdot a^{-\frac{3}{4}}}$ өрнегін ықшамда және $a=81$ болғандағы оның сандық мәнін тап.

I тарауға қатысты сынақ жаттығулары – тест

1. Бөлшекті қысқарт: $\dfrac{27a^2-36ab+12b^2}{9a^2-4b^2}$.

A) $\dfrac{3(3a-2b)}{3a+2b}$; B) $\dfrac{3a-2b}{3a+2b}$; C) $\dfrac{39-36ab}{5}$; D) $\dfrac{3a^2-36ab+3b^2}{a^2-b^2}$.

2. Бөлшекті қысқарт: $\dfrac{7a^2(ab^2-9a)}{3a(21a-7ab)}$.

A) $\dfrac{7a(ab^2-9a)}{3(21a-7ab)}$; B) $\dfrac{-a(b+3)}{3}$; C) $\dfrac{7(ab^2-9a)}{3(21-7b)}$; D) $\dfrac{a(b-3)}{3}$.

3. Амалдарды орында: $\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{5}{a-b}-\dfrac{10b}{a^2-b^2}$.

A) $\dfrac{9}{a-b}$; B) $\dfrac{9}{a+b}$; C) $\dfrac{-9}{a+b}$; D) $\dfrac{9(a+b)}{a-b}$.

4. Бөлшектен бөлшектің айырмасын тап: $\dfrac{a^2+9}{a^3+27}-\dfrac{1}{a+3}$.

A) $\dfrac{1}{a^2+9}$; B) $\dfrac{3}{a^2+9}$; C) $\dfrac{a}{a^3+9}$; D) $\dfrac{3a}{a^3+27}$.

5. Бөлшектердің көбейтіндісін тап: $\dfrac{9a^2-16b^2}{6a+8b}\cdot\dfrac{6a^2}{12b-9a}$.

A) a^2; B) $-a^2$; C) $\dfrac{a^2}{3a-4b}$; D) $\dfrac{6}{3a+4b}$.

6. Бөлшектерді бөл: $\dfrac{4a^2-20ab+25b^2}{5b+4}:\dfrac{(2a-5b)^2}{25b^2-16}$.

A) $\dfrac{5b+4}{2a-5b}$; B) $\dfrac{2a-5b}{5b-4}$; C) $5b-4$; D) $5b+4$.

7. Бөлшекті қысқарт: $\dfrac{8a^2-22ab+15b^2}{16a^2-25b^2}$.

A) $\dfrac{2a-3b}{4a+5b}$; B) $\dfrac{2a+3b}{4a-5b}$; C) $\dfrac{4a-5b}{4a+5b}$; D) $\dfrac{4a+3b}{2a-5b}$.

8. Бөлшектердің айырмасын тап: $\dfrac{9x^2+16}{27x^3+64}-\dfrac{1}{3x+4}$.

A) $\dfrac{9x^2+16}{3x+4}$; B) $\dfrac{-12x}{27x^3+64}$; C) $\dfrac{12x}{27x^3+64}$; D) $\dfrac{9x^2+4}{27x^3-64}$.

9. Амалдарды орында: $\dfrac{4}{3a+2b}-\dfrac{2}{2b-3a}+\dfrac{8b}{4b^2-9a^2}$.

A) $\dfrac{6}{3a-2b}$; B) $\dfrac{6}{3a+2b}$; C) $\dfrac{12a}{9a^2-4b^2}$; D) $\dfrac{12b}{2b-3a}$.

10. Есепте: $(-8)^2-(-5)^3-(12)^{-1}$.

A) $188\frac{11}{12}$; B) $-61\frac{1}{12}$; C) $189\frac{1}{12}$; D) $61\frac{1}{12}$.

11. Есепте: $(-0,2)^{-3}+(0,2)^{-2}-(-2)^{-2}$.

A) $-150\frac{1}{4}$; B) $-100\frac{1}{4}$; C) $99\frac{1}{4}$; D) 11,25.

12. Есепте: $\dfrac{\sqrt[3]{-16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{-250}}$.

A) $\sqrt[3]{2}$; B) 1; C) -1; D) $\frac{9}{5}$.

13. Есепте: $\sqrt[4]{\dfrac{(4{,}15)^3-(1{,}61)^3}{2{,}54}+4{,}15\cdot1{,}61}$.

A) 3,4; B) 5,76; C) 24; D) 2,4.

14. Есепте: $\sqrt[3]{\dfrac{(2{,}08)^3+(2{,}016)^3}{4{,}096}-2{,}08\cdot2{,}016}$.

A) 0,16; B) 4,096; C) 1,6; D) 0,8.

15. Есепте: $\sqrt{2\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{2}}$. *Нұсқау:* $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{b}=\sqrt[4]{a^2\cdot b}$.

A) $\sqrt{7}$; B) $2\sqrt{15}$; C) $3-2\sqrt{2}$; D) 7.

16. Есепте: $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$. *Нұсқау:* $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}=\sqrt[6]{a^2\cdot b}$.

A) -1; B) 1; C) $3+2\sqrt{3}$; D) $5+3\sqrt{3}$.

17. Есепте: $\dfrac{\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\cdot(3-\sqrt{2})}{11-6\sqrt{2}}$. *Нұсқау:* $\sqrt[3]{a}\cdot b=\sqrt[3]{a\cdot b^3}$.

A) $5-\sqrt{2}$; B) $5\sqrt{2}$; C) -1; D) 1.

18. Есепте: $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$.

A) 2; B) $\sqrt{2}$; C) $2\sqrt{2}$; D) -2.

19. Есепте: $\dfrac{\sqrt[3]{98}\cdot\sqrt[3]{-112}}{\sqrt[3]{500}}$.

A) $-\sqrt[3]{4}$; B) 2,84; C) $-2{,}8$; D) $-1{,}4$.

20. $a=125$ болғанда $\sqrt{a}:\sqrt[6]{a}$ өрнегінің сандық мәнін тап:

A) -25; B) 15; C) -5; D) 5.

21. $a=0{,}04$ болғанда $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$ өрнегінің сандық мәнін тап:

A) 0,2; B) $\sqrt[3]{0{,}4}$; C) 0,4; D) $-0{,}2$.

22. Өрнекті ықшамда: $\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{ab}+b^{\frac{2}{3}}\right)$.

A) $a+b$; B) $a-b$; C) a^3+b^3; D) a^3-b^3.

Тарихи мағлұматтар

Кысқа көбейту формулалары, алгебралық бөлшектер туралы мағлұматтар ежелгі ғалымдардың шығармаларында кездеседі. Мәселен, **ал-Каражидің** „Әл-Фахри“, Мысыр ғалымы **Абу Комилдің** (850–930) „Китаб ал-жабр вал-муқобала“ еңбектерінде де алгебралық бөлшектер зерттелген. Абу Комил — ал-Хорезмиден кейін алгебраға кітап жазған бірінші ғалым. Абу Комил өзінің шығармасында

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot b=a,\quad \frac{a}{b}=\frac{a^2}{ab},\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}$$

сияқты жай қатынастарға да көңіл бөлген.

Алгебралық бөлшектерді И. Ньютон „Жалпы арифметика“ кітабында да толық зерттеген. „$\frac{a}{b}$ бөлшек a-ны b-ға бөлу нәтижесінде келіп шығатын шама. Сол сияқты, $\frac{aa-bb}{a+x}$ шама $ab-bb$-ны $a+x$-ға бөлу нәтижесінде пайда болады“, – дейді Ньютон.

Рационал көрсеткішті дәреже ұғымын И. Ньютон (1643–1727) енгізген. Кез келген a нақты сан үшін a^α, $a>0$, дәреже ұғымын **Л.Эйлер** (1707–1783) „Анализге кіріспе“ деген еңбегінде баяндаған.

Әбу Райхан Беруни өзінің әйгілі „Маъсуди Заңы“ еңбегінде „шеңбер ұзындығының диаметрге қатынасы — иррационал сан“ болатынын айтқан. Ежелгі Үндістанда „егер квадраттың қабырғасы өлшем бірлігі ретінде алынса, оның диагоналын рационал санмен өрнектеуге болмайды“ деп дәлелденген. Эрамызға дейінгі V—IV ғасырлардан-ақ ежелгі грек ғалымдары толық квадрат болмайтын кез келген n натурал сан үшін $\sqrt{n}$ санның иррационал екендігін дәлелдеген.

Ғиясиддин Жамшид әл-Каши „Арифметика кілті“ деген шығармасында натурал саннан a түбір табудың жалпы тәсілін баяндаған. $\sqrt[n]{a^n+r}$ түбірді әл-Каши жуықтап $\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}$ түрінде өрнектейді, мұнда a – натурал сан және $r<(a+1)^n-a^n$.

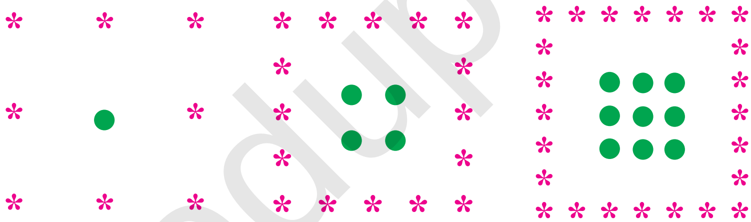
Әл-Каши түбірді дәлірек есептеу үшін түбір астындағы санды 10-ның сәйкес дәрежесіне көбейтуді ұсынады: $\sqrt[n]{N}=\frac{\sqrt[n]{10^{mn}\cdot N}}{10^m}$. Бөлшектен түбір табуға мына ережені пайдаланған: $\sqrt[n]{\frac{M}{N}}=\frac{\sqrt[n]{M\cdot N^{n-1}}}{N}$.

Сонымен қатар, әл-Каши түбірлер көбейтіндісінің ортақ көбейткішін табу ережесін баяндаған:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{b}=\sqrt[kn]{a^k}\cdot\sqrt[kn]{b^n}=\sqrt[kn]{a^k\cdot b^n}.$$

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

163. Суреттегі жасыл нүктелермен сирек кездесетін ағаштар (мысалы, сирек кездесетін сұрыпты алмұрт) белгіленген. Алмұрт өлшемдері $n\times n$ (м^2) болған квадраттарға егілген. Қызыл жұлдызшалар (*) арқылы қоршау ағаштары белгіленген.



Алмұрт бағының айналасындағы қоршау ағаштары квадрат қабырғалары бойынша егілген.

Сұрақтарға жауап бер:

1) 20 м × 20 м; 2) 25 м × 25 м өлшемдегі квадратқа егілген алмұрттарды „орап“ тұратын қоршау ағаштарының саны нешеу? 3) Алмұрттардың саны мен оларды „орап“ тұрған қоршау ағаштары санының арасында қандай байланыс бар?

164. Жоғарыдағы есеп шартында n-нің қандай мәндерінде n-квадраттағы алмұрттардың саны оларды „орап“ тұрған ағаштар санына: 1) тең; 2) үлкен; 3) кіші болады?

4) Кестені толтыр және талда. Қорытынды шығар.

Квадрат қабырғаларының ұзындығы (м)	Алмұрттардың саны	Қоршау ағаштарының саны
1	1	8
2	4	16
.	.	.
.	.	.
.	.	.
10	...	...

165. Автомобильдердің рейтингін анықтауда төмендегілер ескеріледі: қауіпсіздігі (S), қолайлылығы (C), түрліше міндеттерді орындауы (F), сапасы (Q) және дизайны (D). Осы көрсеткіштердің әрбірі бағаланады (мысалы, балл беріледі). Автомобиль рейтингі осы формула арқылы анықталады:

$$R = \frac{3S + 2C + 2F + 2Q + D}{50}.$$

Кестеде автомобильдің 3 түрлі моделі (шартты түрде *A, B, D* модельдер) үшін түрліше көрсеткіштердің бағасы келтірілген.

Автомобиль моделі	**Қауіпсіздік *S***	**Қолайлылық *C***	**Түрлі міндеттерді орындау *F***	**Сапа *Q***	**Дизайн *D***
A	3	3	5	5	3
B	4	5	3	4	3
D	4	4	3	3	4

1) Қайсы модельдегі автомобиль ең үлкен рейтингке ие?
2) Автомобиль модельдерін рейтингі төмендеу ретімен орналастыр.
3) Сен үшін қайсы көрсеткіш маңызды? Неге?
4) Сен қандай рейтингтегі автомобильді таңдаған болар едің? Неге?

166. Тыныс алу, асқорыту, қан айналу үшін қажетті энергия – негізгі зат алмасу интенсивтілігі (жылдамдығы).

Негізгі зат алмасу интенсивтілігін (НЗАИ) деп белгілейміз. НЗАИ калорияларда өлшенеді, мұнда адам температурасы 23 °С бөлмеде жайбарақат және тыныш күйде жатқан болуы керек. Әйелдерде НЗАИ төмендегі формула негізінде есептеледі:

$$\text{НЗАИ}= 9,74M + 172,9P - 4,737B + 667,051, \qquad (*)$$

мұндағы M – әйелдің массасы, P – бойының биіктігі (метрлерде), B – жасы (жылдарда).

1) Егер $M = 60$ кг, $P = 1,7$ м, $B = 35$ жыл болса, НЗАИ-ды есепте (ең жақын бүтін санға келтір);

2) (*) формуладан әйелдің массасы, бойы мен жасы НЗАИ-ға қандай әсер ететінін білуге болады.

Сұрақтарға жауап бер:

a) Жасы өткен сайын НЗАИ-да арта ма??
b) Бойдың биіктігі немесе төмендігі НЗАИ-ға қандай әсер етеді?
d) 667,051 саны әйелдің жасына, бойына, массасына тәуелді ме?
e) Егер әйелдің массасы азайса, әйелдегі НЗАИ өзгере ме?
3) Бір дәрігер „Егер екі әйелдің массасы, жасы бірдей, бойындағы айырмашылық 10 см болса, олардың НЗАИ-ы арасындағы айырмашылық 17,29 килокалория болады“, деген қорытындыға келеді. Осы қорытынды дұрыс па? Оны (*) формуламен тексеріп көр.

167. Бір дана бұйымды даярлау уақыты мен бір сағатта даярланатын бұйымдар саны тәуелділік байланыс кері пропорционал тәуелділік болады. Кестені толтырып, талда. Қорытынды шығар.

Бір бұйымды даярлауға жұмсалатын уақыт (минут)	2	3		5	6		10	12	
Бір сағатта шығатын бұйымдар саны (дана)	30		15			8	6		4

168. Өзеннің кейбір жерінде горизонтал қима ауданы мен осы жерге сәйкес орташа ағыс жылдамдығы кері пропорционал мөлшерлер болып табылады. Кестені толтыр. Қандай қорытындыға келдің?

Горизонтал қима ауданы (кв.м)	40	45		54	60		
Ағыс жылдам-дығы (м/с)	0,9	0,8	0,75			0,5	0,4

169. Екі метрлік ағашты отыншылар 4,5 сағатта 0,5 м-лік бөліктерге аралап болды. Егер оны 40 см-лік бөліктерге аралағанда, оларды қанша уақытта аралап болатын еді? Бұл жағдайда жұмыс көлемі қандай қатыснаста өзгереді?

170. 1) Екі шкив қайыспен біріктірілген. Бірінші шкивтің диаметрі 28 см, ал екінші шкивтікі 42 см. Бірінші шкив минутына 600 рет айналса, екінші шкив минутына неше рет айналады?

2) Екі шкив қайыспен біріктірілген. Бірінші шкив минутына 560 рет, ал екіншісі 240 рет айналады. Бірінші шкивтің айналасы 0,36 м болса, екінші шкивтің айналасының ұзындығын тап.

171. *A* және *B* қалалардың арақашықтығы 360 км. Осы арақашықтықты жеңіл машинада 4 сағатта, жүк машинасында 6 сағатта басып өтеді. *A*-дан *B*-ға қарай жүк машинасы жолға шықты. Дәл осы уақытта *B*-дан *A*-ға қарай жеңіл машина жолға шықты. Олар *A*-дан неше километр алыста кездеседі?

△ Жеңіл және жүк машиналарының жылдамдықтары түрліше болғандықтан тура пропорционалдық тәуелділік жоқ, өйткені, 360 км қашықтықты 4 және 6 сандарына тура пропорционал бөлумен мәселені шешуге болмайды..

Басқа әдісті қолданамыз:

1 сағатта жеңіл машина *AB* арақашықтықтың $\frac{1}{4}$ бөлігінен, ал жүк машинасы $\frac{1}{6}$ бөлігінен өтеді. Демек, кездесу орнын анықтау үшін 360 км қашықтықты $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{6}$ сандарына пропорционал бөлу керек.

Бірақ $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}=\frac{3}{12}:\frac{2}{12}=3:2.$

Бұдан $3+2=5$. Машиналар A-дан x км алыста кездеседі десек,

$x=\frac{360}{5}\cdot 2=144$ (км).

Жауабы: A-дан 144 км алыста. Есепте 360, 4, 6 сандары бар. Есепті шығару үдерісінде $\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{6}$ сандарын (4 және 6-ға кері сандарды) кіргіздік. Демек, мұндай есепті шығару үшін 360-ты 4 және 6 сандарына кері ($\frac{1}{4}$ және $\frac{1}{6}$ сандарына тура) пропорционал етіп бөлу керек екен. Бұдан мына ережеге келеміз:

Санды берілген сандарға кері пропорционал етіп бөлу үшін осы санды берілген сандарға кері болған сандарға тура пропорционал етіп бөлу керек. ▲

172. 195 санын 2, 3, 4 сандарына кері пропорционал етіп үш бөлікке бөліңдер.

△ 1) 2, 3, 4 сандарына кері сандар, тиісінше , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. Өйткені, 195-ті $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ сандарына тура пропорционал етіп үш бөлікке бөлу керек. Бірақ $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=\frac{6}{12}:\frac{4}{12}:\frac{3}{12}=6:4:3$. Бірінші санды a_1, екінші санды a_2, үшінші санды a_3 десек, онда

$$a_1=\frac{195\cdot 6}{6+4+3}=\frac{195\cdot 6}{13}=15\cdot 6=90\,;\quad a_2=\frac{195\cdot 4}{13}=15\cdot 4=60\,;$$

$$a_3=\frac{195\cdot 3}{13}=15\cdot 3=45\,.$$

Жауабы: 90, 60, 45.

Тексеру: 1) $90+60+45=195$.

2) $90:60:45=6:4:3=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ (қатынастың көпмүшелерін алдымен 15-ке, соң 12-ге бөлдік). ▲

173. 1) 4480 санын: a) $\frac{1}{3}$ және $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{4}$ және $\frac{2}{9}$ сандарына кері пропорционал етіп екі бөлікке бөл.
2) 987 санын: a) 0,6 және 0,3; b) 0,4 және 0,(3) сандарына кері пропорционал етіп екі бөлікке бөл.

174. 1) 2040 санын $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ және $\frac{5}{6}$ сандарына кері пропорционал болған 3 бөлікке бөл.
2) 4530 санын $\frac{2}{3}$, 0,7 және $1\frac{1}{2}$ сандарына кері пропорционал болған 3 бөлікке бөл.

175. 1) *A* және *B* қаланың арақашықтығы 465 км. Бұл арақашықтықты жолаушы пойызы 10,5 сағатта, ал жүк пойызы 12 сағатта басып өтеді. *A* және *B* қалалардан бір уақытта бір-біріне қарай жолға шықса, олар кездескенге дейін әрбірі неше километр жол жүреді?
2) Бірінші спортшы 100 м арақашықтықты 12 с, ал екіншісі 13 с уақытта жүгіріп өтті. Олар бір-бірінен 200 м арақашықтықта тұрып, бір уақытта бір-біріне қарай жүгіре бастады. Олар кездескенге дейін неше метр қашықтықты жүгіріп өтті?

176. 1) 36 тісті шестерна (құрылғы) 18 тісті шестернамен ұланған. 18 тісті шестерна 60 рет айналса, 36 тісті шестерна неше рет айналады? 18 тісті шестерна 24 рет айналса ше?
2) Велосипедтің педальдері біріктірілген алдыңғы (жетекші) шестернада 48 тіс, артқы дөңгелекке біріктірілген шестернада 16 тіс бар. Егер велосипедтің педальді шестернасы минутына 40 рет айналса, артқы дөңгелек неше рет айналады? Педальді шестерна 45 рет; 60 рет айналса ше? Егер велосипед дөңгелегінің диаметрі 70 см болса, жоғарыдағы әрбір жағдай үшін велосипедтің жылдамдығын тап.

177. 1) *Әбу Райхан Беруни есебі*. Қыштың өлшемдері 5, 4, 3 ұзындық бірлігіне тең. Осындай 30 қыштың бағасы 60 дирхам (ақша бірлігі). Өлшемдері 8, 6, 2 ұзындық бірлігіне тең 20 қыштың бағасы неше дирхам болады?
2) Қыштың ұзындығы, ені мен биіктігі 4 : 2 : 1 қатынаста болсын. Ұзындығымен 6 қыш қоюға болатын жерге енімен неше және биіктігімен неше қыш қоюға болады?

II ТАРАУ ТЕҢСІЗДІКТЕР

11-§. САНДЫ ТЕҢСІЗДІКТЕР

Сандарды салыстыру іс жүзінде кеңінен қолданылады. Мысалы, экономист жоспардағы көрсеткіштерді олардың орындалу нәтижесімен, дәрігер науқастың температурасын дені сау адамның температурасымен, шебер жонып жатқан детальдың өлшемдерін үлгімен салыстырады.

Осы үш жағдайда да қандайда бір сандар бір-бірімен салыстырылады. Сандарды салыстыру нәтижесінде сандық теңсіздік пайда болады.

Мысалы, $\frac{4}{5}$ және $\frac{3}{4}$ сандарын салыстырайық. Бұл сандарды салыстыру үшін олардың айырмасын табамыз:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}.$$

Демек, $\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$, яғни $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$ санына $\frac{1}{20}$ оң санын қосу нәтижесінде пайда болады. Бұл $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$ санынан $\frac{1}{20}$-ге үлкен болатынын білдіреді. Сөйтіп, $\frac{4}{5}$ саны $\frac{3}{4}$-тен үлкен, себебі олардың айырмасы оң.

Анықтама. ***Егер $a-b$ айырмасы оң болса, онда a саны b санынан үлкен болады. Егер $a-b$ айырмасы теріс болса, онда a саны b санынан кіші болады.***

Егер a саны b санынан үлкен болса, бұл $a>b$ сияқты; егер a саны b санынан кіші болса, ол $a<b$ сияқты жазылады.

Сонымен, $a>b$ теңсіздігі $a-b$ айырмасы оң, яғни $a-b>0$ болатынын білдіреді, ал $a<b$ теңсіздігі $a-b<0$ болатынын білдіреді.

1-есеп. Егер $a>b$ болса, онда $b<a$ болатынын дәлелде.

△ $a>b$ теңсіздігі $a-b$ оң сан екенін білдіреді. Онда $b-a=-(a-b)$ — теріс сан, яғни $b<a$. ▲

Кез келген *a* және *b* сандары үшін төмендегі үш қатынастың тек біреуі ғана дұрыс болады:

$$a>b, \; a=b, \; a<b.$$

Мысалы, –5 және –3 сандары үшін $-5<-3$ теңсіздігі дұрыс болады, ал $-5=-3$ және $-5>-3$ қатынастары дұрыс емес.

> ❗ *a және b сандарын салыстыру*, олардың арасына $>$, $=$ немесе $<$ таңбаларының қайсысын қойғанда дұрыс қатынас болуын табу деген сөз. Бұл $a-b$ айырмасының таңбасын анықтау арқылы орындалуы мүмкін.

2-есеп. 0,79 және $\frac{4}{5}$ сандарын салыстыр.

△ Олардың айырмасын табамыз:

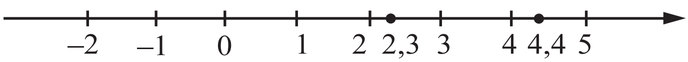
$$0,79-\frac{4}{5}=0,79-0,8=-0,01.$$

$0,79-\frac{4}{5}<0$ болғандықтан $0,79<\frac{4}{5}$. ▲

$a>b$ теңсіздігі *геометриялық тұрғыдан* алғанда *a* нүктесі сан осінде *b* нүктесінің оң жағында жататынын білдіреді (10-сурет).

10-сурет.

Мысалы, $\frac{4}{5}$ нүктесі 0,79 нүктесінен онда жатады, себебі $\frac{4}{5}>0,79$; 2,3 нүктесі 4,4 нүктесінен солда жатады, себебі $2,3<4,4$ (11-сурет).



11-сурет.

3-есеп. Егер $a \neq b$ болса, онда $a^2+b^2>2ab$ болатынын дәлелде.

△ a^2+b^2-2ab айырма оң болатынын дәлелдейміз. Шындығында да, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0$, себебі $a \neq b$. ▲

4-есеп. Егер $a>0$ және $a \neq 1$ болса, онда $a+\frac{1}{a}>2$ болатынын дәлелде.

△ $a+\frac{1}{a}-2$ айырма оң болатынын дәлелдейміз. Шындығында да,

$$a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2+1-2a}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}>0,$$

себебі $a>0$ va $a \neq 1$. ▲

5-есеп. Егер $\frac{n}{m}$ дұрыс бөлшек болса, онда $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$ болуын дәлелде.

△ $\frac{n}{m}$ бөлшек $n<m$ болғанда (n және m – натурал сандар) дұрыс бөлшек деп аталатынын ескертеміз.

Мына $\frac{n}{m}-\frac{n+1}{m+1}=\frac{n(m+1)-m(n+1)}{m(m+1)}=\frac{n-m}{m(m+1)}$ айырма нөлден кіші, себебі

$n-m<0$, $m>0$, $m+1>0$. Демек, $\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$. ▲

Жаттығулар

178. Санды теңсіздіктің анықтамасын пайдаланып, төмендегі сандарды салыстыр:

1) $0{,}3$ және $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ және $0{,}3$; 3) $\frac{13}{40}$ және $0{,}35$;
4) $-\frac{5}{8}$ және $-0{,}7$; 5) $\frac{22}{7}$ және $3{,}14$; 6) $\frac{4}{9}$ және $0{,}44$.

179. Егер:

1) $b-a=-1{,}3$; 2) $b-a=0{,}01$; 3) $a-b=(-5)^4$;
4) $a-b=-5^4$; 5) $a-b=0{,}8$; 6) $b-a=(-2)^3$

болса, a және b сандарын салыстыр.

180. a-ның кез келген мәнінде:

1) $a^2 > (a+1)(a-1)$; 2) $(a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$

теңсіздіктердің дұрыстығын дәлелде.

181. a-ның кез келген мәнінде төменгі теңсіздік дұрыс болатынын дәлелде:

1) $a^3 < (a+1)(a^2-a+1)$; 2) $(a+7)(a+1) < (a+2)(a+6)$;

3) $1+(3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a)$; 4) $(3a-2)(a+2) < (1+2a)^2$.

182. a мен b-ның кез келген мәнінде төменгі теңсіздік дұрыс болатынын дәлелде:

1) $a(a+b) > ab-2$; 2) $2ab-1 < b(2a+b)$;

3) $3ab-2 < a(3b+a)$; 4) $b(a+2b) > ab-3$.

183. Екі бала бірдей мөлшерде дәптер сатып алды. Біріншісінің алған дәптерінің барлығы 150 сумнан, ал екіншісі алған дәптерінің жартысының бағасы 130 сумнан, ал қалған жартысы 160 сумнан. Қайсы бала көп ақша жұмсаған?

12-§. САНДЫ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІҢ НЕГІЗГІ ҚАСИЕТТЕРІ

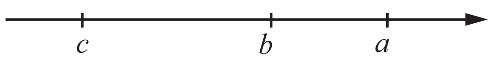
Бұл параграфта санды теңсіздіктердің негізгі деп аталатын қасиеттері қарасытырылады, себебі олар теңсіздіктердің басқа қасиеттерін дәлелдеуде және түрлі есептерді шығаруда жиі қолданылады.

1-теорема. ***Егер $a>b$ және $b>c$ болса, онда $a>c$ болады.***

○ Шарт бойынша $a>b$ және $b>c$. Бұл $a-b>0$ және $b-c>0$ болатынын білдіреді. $a-b$ және $b-c$ оң сандарды қосып, $(a-b)+(b-c)>0$ өрнегі келіп шығады, яғни $a-c>0$.

Демек, $a>c$. ●

1-теореманың *геометриялық түсініктемесі:* егер сан осінде a нүктесі b нүктесінің оң жағында орналасса және b нүктесі c нүктесінің оң жағында жатса, онда a нүктесі c нүктесінің оң жағында жатады (12-сурет.



12-сурет.

2-теорема. ***Егер теңсіздіктің екі жағына да бірдей сан қосылса, онда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді.***

○ $a>b$ болсын. Бұл жағдайда кез келген c саны үшін

$$a+c>b+c$$

теңсіздіктің орындалуын дәлелдеу талап етіледі.

Мына

$$(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b$$

айырманы қарастырайық. Бұл айырма оң, себебі есептің шарты бойынша $a>b$. Демек, $a+c>b+c$. ●

Нәтиже. ***Кез келген қосылғышты теңсіздіктің бір жағынан екінші жағына сол қосылғыштың таңбасына қарама-қарсы таңбамен көшіруге болады.***

○ $a>b+c$ болсын. Бұл теңсіздіктің екі жағына $-c$ санын қоссақ, $a-c>b+c-c$ болады, яғни $a-c>b$. ●

3-теорема. ***Егер теңсіздіктің екі жағы да бірдей оң санға көбейтілсе, онда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді. Егер теңсіздіктің екі жағы да бірдей теріс санға көбейтілсе, онда теңсіздіктің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.***

○ 1) $a>b$ және $c>0$ болсын. $ac>bc$ болатынын дәлелдейміз.

Шарт бойынша $a-b>0$ және $c>0$. Сол үшін $(a-b)c>0$, яғни $ac-bc>0$. Демек, $ac>bc$.

2) $a>b$ және $c<0$ болсын. $ac<bc$ болатынын дәлелдейміз.

Шарт бойынша $a-b>0$ және $c<0$. Сол үшін $(a-b)c<0$, яки $ac-bc<0$. Демек, $ac<bc$. ●

Мысалы, $\frac{1}{5}<0,21$ теңсіздіктің екі жағын 3-ке көбейтсек, $\frac{3}{5}<0,63$ болады, ал $\frac{1}{5}<0,21$ теңсіздіктің екі жағын -4-ке көбейтсек $-\frac{4}{5}>-0,84$ теңсіздігі келіп шығады.

Егер $c \neq 0$ болса, онда c және $\frac{1}{c}$ сандарының таңбасы бірдей болатынын ескертеміз. c санына бөлуді $\frac{1}{c}$-ге көбейтумен алмастыруға болатындықтан 3-теоремадан төмендегі салдар келіп шығады.

Салдар. ***Егер теңсіздіктің екі жағы да бірдей оң санға бөлінсе, онда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді. Егер теңсіздіктің екі жағы да бірдей теріс санға бөлінсе, онда теңсіздік таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.***

Мысалы, $0{,}99<1$ теңсіздігінің екі жағы да 3-ке бөлінсе, $0{,}33<\frac{1}{3}$ болады, $0{,}99<1$ теңсіздігінің екі жағын –9-ға бөлсек $-0{,}11>-\frac{1}{9}$ шығады.

1-есеп. Егер $a>b$ болса, онда $-a<-b$ болатынын дәлелде.

△ $a>b$ теңсіздігінің екі жағын теріс –1 санына көбейтсек, $-a<-b$ болады. ▲

Мысалы, $1{,}9<2{,}01$ теңсіздігінен $-1{,}9>-2{,}01$ теңсіздігі шығады, $0{,}63<\frac{3}{5}$ теңсіздігінен $-0{,}63<-\frac{3}{5}$ теңсіздігі шығады.

2-есеп. Егер a және b – оң сандар және $a>b$ болса, онда $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ болатынын дәлелде.

△ $b<a$ теңсіздігінің екі жағын ab оң санына бөлсек, $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ теңсіздігі шығады. ▲

Теңсіздіктің осы параграфта қарастырылған барлық қасиеттері > (үлкен) таңбалы теңсіздік үшін дәлелденгенін ескертеміз.

Олар < (кіші) таңбалы теңсіздіктер үшін де дәл осылай дәлелденеді.

Жаттығулар

184. Төмендегі тұжырымдарды дәлелдеңдер:

1) егер $a-2<b$ және $b<0$ болса, онда $a-2$ – теріс сан;

2) егер $a^2-5>a$ және $a>1$ болса, онда $a^2-5>1$.

185. Егер:

1) $a > b$ және $b > 1$; 2) $a < b$ және $b < -2$;

3) $a - 1 < b$ және $b < -1$; 4) $a + 1 > b$ және $b > 1$

болса, онда a оң сан бола ма немесе теріс сан бола ма?

186. $-2 < 4$ теңсіздіктің екі жағына: 1) 5; 2) –7 санын қосу арқылы пайда болатын теңсіздікті жаз.

187. $2a + 3b > a - 2b$ теңсіздіктің екі жағына: 1) $2b$; 2) $-a$ санын қосу арқылы пайда болатын теңсіздікті жаз.

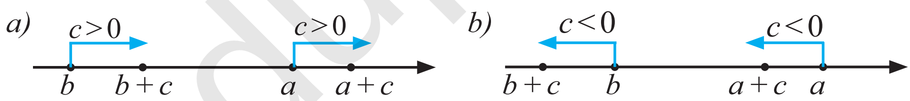
188. $3 > 1$ теңсіздіктің екі жағынан: 1) 1; 2) –5 санын айыру арқылы пайда болатын теңсіздікті жаз.

189. $a - 2b < 3a + b$ теңсіздіктің екі жағынан: 1) a; 2) b санын айыру арқылы пайда болатын теңсіздікті жаз.

190. $a < b$ болсын. Төмендегі сандарды салыстыр:

1) $a + x$ және $b + x$; 2) $a - 5$ және $b - 5$.

3) 13 және 14-суреттерде санды теңсіздіктің қандай қасиеттері өрнектелгенін айт.



13-сурет.

14-сурет.

Берілген теңсіздіктің екі жағын көрсетілген санға көбейт (**191–192**):

191. 1) $3{,}35 < 4{,}5$-ті 4-ке; 2) $3{,}8 > 2{,}4$-ті 5-ке;

3) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$-ні -12-ге; 4) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$-ні -16-ға.

192. 1) $2a > 1$-ді $0{,}5$-ке; 2) $4a < -1$-ді $0{,}25$-ке;

3) $-4a < -3$-ті $0{,}25$-ке; 4) $-2a > -4$-ті $-0{,}5$-ке.

Берілген теңсіздіктің екі жағын көрсетілген санға бөл (**193–194**):

193. 1) $-2<5$-ті 2 -ге; 2) $4{,}5>-10$ -ды 5 -ке;
3) $-25>-30$-ды -5 -ке; 4) $-20<-12$-ны -4 -ке;

194. 1) $1{,}2a<4{,}8$ -ді 2 $1{,}2$ -ге; 2) $2{,}3a<-4{,}6$-ны $2{,}3$ -ке;

3) $-\frac{2}{3}x<-\frac{1}{4}$-ді $\frac{2}{3}$ -ге; 4) $-\frac{3}{4}x>\frac{1}{3}$ -ді $-\frac{3}{4}$ ке.

13-§. ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ҚОСУ ЖӘНЕ КӨБЕЙТУ

Сан алуан есептерді шығару барысында көбінесе теңсіздіктерді қосу немесе көбейту жиі кездеседі, яғни теңсіздіктердің сол жағы мен оң жағын жеке-жеке қосуға немесе көбейтуге тура келеді. Мұндай жағдайларды кейде теңсіздіктерді мүшелеп қосу немесе мүшелеп көбейту деп атайды.

Мысал, егер саяхатшы бірінші күні 20 км-ден артық, ал екінші күні 25 км-ден артық жол жүрген болса, онда ол екі күн ішінде 45 км-ден артық жол жүреді деп айтуға болады.

Дәл сондай, егер тік төртбұрыштың ұзындығы 13 см-ден кіші, ал ені 5 см-ден кіші болса, онда ол тік төртбұрыштың ауданы 65 см^2-ден кіші деп айтуға болады.

Бұл мысалдарды қарастырғанда *теңсіздіктерді қосу және көбейту туралы төмендегі теоремалар* пайдаланылды.

1-теорема. ***Бірдей таңбалы теңсіздіктерді қосқанда дәл сондай таңбалы теңсіздік пайда болады: егер $a>b$ және $c>d$ болса, онда $a+c>b+d$ болады.***

○ Шарт бойынша $a-b>0$ және $c-d>0$. Мына айырманы қарастырамыз:

$$(a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d).$$

Оң сандар қосындысы оң болғандықтан $(a+c)-(b+d)>0$, яғни $a+c>b+d$. ●

Мысалдар:

1) $\begin{array}{r} 3>2{,}5 \\ +\ 5>4 \\ \hline 8>6{,}5 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 1{,}2<1{,}3 \\ +\ -3<-2 \\ \hline -1{,}8<-0{,}7 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 4{,}8>2{,}3 \\ +\ -1{,}2>-1{,}3 \\ \hline 3{,}6>1 \end{array}$

2-теорема. ***Сол және оң жақ бөліктері оң болған бірдей таңбалы теңсіздіктерді көбейту нәтижесінде дәл сондай таңбалы теңсіздік пайда болады: егер a>b, c>d және a, b, c, d – оң сандар болса, онда ac>bd болады.***

Мына айырманы қарастырайық:

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d).$$

Шартқа орай $a-b>0, c-d>0, b>0, c>0$. Сондықтан $c(a-b)+$ $+b(c-d)>0$, яғни $ac-bd>0$, бұдан $ac>bd$.

Мысалдар:

1) $\begin{array}{r} 3{,}2>3{,}1 \\ \times\ 3>2 \\ \hline 9{,}6>6{,}2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 1{,}8<2{,}1 \\ \times\ 4<5 \\ \hline 7{,}2<10{,}5 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 2{,}4<3{,}5 \\ \times\ 3<4 \\ \hline 7{,}2<14 \end{array}$

1-есеп. Егер a, b – оң сандар және $a>b$ болса, онда $a^2>b^2$ болады.

△ $a>b$ теңсіздігін өзіне-өзін көбейтсек: $a^2>b^2$ болады. ▲

Сол сияқты, a, b — оң сандар және $a>b$ болса, онда кез келген натурал n саны үшін $a^n>b^n$ болатынын дәлелдеуге болады.

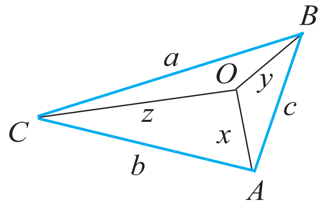
Мысалы, $5>3$ теңсіздігінен $5^5>3^5$, $5^7>3^7$ сияқты теңсіздіктер шығады.

2-есеп. Үшбұрыш ішінде жатқан кез келген нүктеден оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы сол үшбұрыштың жарты периметрінен үлкен болатынын дәлелде.

△ 15-суретті қарасытырайық.. x, y, z — ABC үшбұрыштың ішкі O нүктесінен оның төбелеріне дейінгі қашықтықтар болсын.

AOB, AOC, BOC үшбұрыштарынан үшбұрыштың екі қабырғасының қосындысы туралы теорема бойынша:

$$x+y>c,$$
$$x+z>b,$$
$$y+z>a.$$



15-сурет.

Бұл теңсіздіктерді мүшелеп қоссақ, $2x+2y+2z>a+b+c$ шығады, бұдан

$$x+y+z>\frac{a+b+c}{2}.$$ ▲

Жаттығулар

195. (Ауызша.) Дұрыс па:

1) егер $x>7$ және $y>4$ болса, онда $x+y>11$;
2) егер $x>5$ және $y>8$ болса, онда $xy<40$;
3) егер $x<-7$ және $y<7$ болса, онда $x+y<0$;
4) егер $x<2$ және $y<5$ болса, онда $xy<10$?

196. Теңсіздіктерді қос:

1) $5>-8$ және $8>5$;
2) $-8<2$ және $3<5$;
3) $3x+y<2x+1$ және $3y-2x<14-2a$;
4) $3x^2+2y>4a-2$ және $5y-3x^2>3-4a$.

197. Теңсіздіктердің көбейтіндісін тап:

1) $2\frac{2}{3}>1\frac{1}{3}$ және $12>6$;
2) $6\frac{1}{4}<9\frac{2}{3}$ және $4<6$;
3) $x-2>1$ және $x+2>4$;
4) $4<2x+1$ және $3<2x-1$.

198. Егер $a>2$ және $b>5$ болса, онда

1) $3a+2b>16$;
2) $ab-1>9$;
3) $a^2+b^2>29$;
4) $a^3+b^3>133$;
5) $(a+b)^2>35$;
6) $(a+b)^3>340$;
7) $2a+3b>19$;
8) $6ab-5>55$;
9) $ab(a+b)>70$

болатынын дәлелде.

199. Үшбұрыштың қабырғалары сәйкесінше 73 см, 1 м 15 см және 1 м 11 см-ден кіші. Оның периметрі 3 м-ден кіші болатынын дәлелде.

200. 4 қалың дәптер және 8 қойын дәптер сатып алынды. Қалың дәптердің бағасы 200 сумнан кем, қойын дәптердің бағасы 150 сумнан кем. Барлығы 2000 сумнан кем болатынын көрсет.

201. Тік төртбұрыштың бір қабырғасы 7 см-ден ұзын, екінші қабырғасының ұзындығы біріншісінен 3 есе ұзын. Тік төртбұрыштың периметрі 56 см-ден ұзын болатынын дәлелде.

202. Тік төртбұрыш пішінді егіндіктің ұзындығы енінен 5 есе ұзын, ал ені 4 м-ден ұзын. Егіндіктің ауданы 80 $м^2$-ден үлкен екенін дәлелде.

203. Тік төртбұрыш ішінде жатқан кез келген нүктеден оның төбелеріне дейінгі қашықтықтардың қосындысы сол үшбұрыштың жарты периметрінен үлкен болатынын дәлелде.

Қатаң және қатаң емес теңсіздіктер. > (үлкен) және < (кіші) таңбалы теңсіздіктер *қатаң теңсіздіктер* делінеді. Мысалы, $\frac{5}{6}>\frac{1}{2}, \frac{3}{4}<1, a>b, c<d$ – *қатаң теңсіздіктер*.

Қатаң теңсіздіктердің > және < таңбаларымен қатар ≥ (үлкен немесе тең) және ≤ (кіші немесе тең) таңбалы теңсіздіктер де пайдаланылады. Олар *қатаң емес теңсіздіктер* деп аталады.

$a \leq b$ теңсіздік $a<b$ немесе $a=b$ екенін, яғни a саны b санынан үлкен емес екенін білдіреді.

Мысалы, егер ұшақтағы орындардың саны 134 болса, онда a жолаушылар саны 134-тен кем немесе оған тең болуы мүмкін. Мұндай жағдайда $a \leq 134$ деп жазылады.

Осыған ұқсас, $a \geq b$ теңсіздігі a саны b-дан үлкен немесе оған тең болатынын, яғни a саны b-дан кіші емес екенін білдіреді.

≥ таңбасы немесе ≤ таңбасы қатысқан теңсіздіктер *қатаң емес теңсіздіктер* деп аталады. Мысалы, $18 \geq 12$, $11 \leq 12$, $7 \geq 7$, $4 \leq 4$, $a \geq b$, $c \leq d$ – қатаң емес теңсіздіктер.

Қатаң теңсіздіктердің 12–13-параграфта өрнектелген барша қасиеттері қатаң емес теңсіздіктерге де орынды. Егер қатаң теңсіздіктер үшін > және < таңбалары қарама-қарсы таңбалар деп саналған болса, қатаң емес теңсіздіктер үшін ≥ және ≤ таңбалары қарама-қарсы таңбалар саналады.

Мысалы, 12-параграфтағы 2-теорема қатаң емес теңсіздіктер үшін де дұрыс және ол былай өрнектеледі: егер $a \geq b$ болса, онда кез келген c саны үшін $a+c \geq b+c$ болады. Шынында да, $a>b$ жағдайы үшін бұл теорема 12-параграфта дәлелденген, ал $a=b$ үшін бұл тұжырым теңдіктің бізге белгілі қасиетін өрнектейді.

Есеп. Кез келген a және b үшін

$$a^2+b^2 \geq 2ab \qquad (1)$$

теңсіздіктің дұрыс екенін дәлелде.

△ a^2+b^2-2ab айырма кез келген a және b үшін нөлден кіші болмайтынын дәлелдейміз. Шынында да, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geq 0$. Демек, теңсіздік (1) a және b-лардың кез келген мәндерінде дұрыс болады, сонымен бірге теңдік белгісі тек қана $a=b$ болғанда орынды. ▲

Жаттығулар

204. n санының теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін мәнін тап:

1) $n \leq -2$; 2) $n \leq 3$; 3) $n < 4$; 4) $n < -5$;

5) $n \leq 0,2$; 6) $n \leq -0,3$; 7) $n < -\pi$; 8) $n < \pi$.

205. n санының теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін мәнін тап:

1) $n \geq -3$; 2) $n \geq 6$; 3) $n \geq -6$; 4) $n > -4$;

5) $n > -4,21$; 6) $n \geq 3,24$; 7) $n \geq \pi - 1$; 8) $n \geq -\pi + 1$.

206. x санының теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін мәнін тап:

1) 1) $\frac{x}{6} \leq 1$; 2) $\frac{x}{4} < -2$; 3) $\frac{x}{10} \leq -3,14$; 4) $\frac{x}{7} \leq 0,15$.

207. Теңсіздік белгілерін пайдаланып жаз:

1) Бүгін Ферғана аңғарында (t °C) температура 20°С-ден жоғары емес.

2) Су 5 м-ден кем емес (h m) биіктікке көтерілді.

3) Қалыпты қысымдағы судың сұйық күйдегі (t °C) температурасы 0 °С-ден кем емес; 100 °С-ден үлкен емес.

4) Қалада автомобиль транспортының (v км/сағ) қозғалыс жылдамдығы 70 км/сағ-тан үлкен емес.

208. $a \leq b$ болсын. Теңсіздік дұрыс па:

1) $a-3 \leq b-3$; 2) $5a \leq 5b$; 3) $a+2,5 < b+2,5$;

4) $a-4 > b-4$; 5) $a-4 \leq b+1$; 6) $a-3,1 \leq b+0,1$?

209. $a \geq b$ болсын. Теңсіздік дұрыс па:

1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leq -3b$; 3) $\frac{a}{12} \geq \frac{b}{12}$;

4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$; 5) $0,5a \geq 0,4b$; 6) $-2a \leq -b$?

14-§. САНДЫ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ДӘРЕЖЕГЕ КӨТЕРУ

11-§-та сол және оң жақ бөліктері оң болған бірдей таңбалы теңсіздіктерді мүшелеп көбейтсе, сондай таңбалы теңсіздік шығатыны айтылған.

Бұдан, егер $a>b>0$ және n натурал сан болса, онда $a^n>b^n$ болатыны келіп шығады.

Шарт бойынша $a>0$, $b>0$. Саны n-ге тең бірдей $a>b$ теңсіздіктерді мүшелеп көбейтіп: $a^n>b^n$ шығарамыз.

1-есеп. $(0,43)^5$ және $\left(\frac{3}{7}\right)^5$ сандарын салыстыр.

△ 0,001-ге дейінгі дәлдікпен $\frac{3}{7} \approx 0,428$ болғандықтан $0,43 > \frac{3}{7}$ болады. Сондықтан $(0,43)^5 > \left(\frac{3}{7}\right)^5$. ▲

Сол жағы мен оң жағы оң сандар болған теңсіздікті кез келген рационал дәрежеге көтеруге болады:

егер $a>b>0$, $r>0$ болса, онда

$$a^r > b^r \qquad (1)$$

болады;

егер $a>b>0$, $r<0$ болса, онда

$$a^r<b^r \qquad (2)$$

болады.

1-қасиетті дәлелдейміз.

○ Алдымен (1) қасиеттің $r=\frac{1}{n}$ болғанда дұрыстығын, содан кейін жалпы жағдай үшін, $r=\frac{m}{n}$ болғанда дұрыстығын дәлелдейміз.

a) Айталық, $r=\frac{1}{n}$ болсын, мұндағы n – бірден үлкен натурал сан, $a>0$, $b>0$. Шарт бойынша $a>b$. $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ екендігін дәлелдеу керек. Айталық, бұл дұрыс емес, яғни $a^{\frac{1}{n}}\le b^{\frac{1}{n}}$ деп жориық. Онда мұндай теңсіздікті n натурал дәрежеге көтеріп, $a\le b$-ны шығарып аламыз, ал бұла $a>b$ шартына қайшы. Демек, $a>b>0$-ден $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ екендігі келіп шығады.

b) Айталық, $r=\frac{m}{n}$ болсын, мұндағы m және n – натурал сандар. Онда $a>b>0$ шартынан, дәлелдеуіміз бойынша $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ екендігін шығарып аламыз. Мұндай теңсіздікті m натурал дәрежеге көтеріп, пайда етеміз:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m>\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m, \text{ яғни } a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}. \bullet$$

Мысалы, $5^{\frac{2}{7}}>3^{\frac{2}{7}}$, себебі $5>3$; $2^{\frac{3}{4}}<4^{\frac{3}{4}}$, себебі $2<4$; $\sqrt[5]{7^2}>\sqrt[5]{6^2}$, себебі $7>6$.

Енді (2) қасиетті дәлелдейміз.

○ Егер $r<0$ болса, онда $-r>0$ болады. (1) қасиетке орай $a>b>0$ шартынан $a^{-r}>b^{-r}$ екендігі келіп шығады. Бұл теңсіздіктің екі жағын да оң a^rb^r санға көбейтіп, $b^r>a^r$-ді шығарамыз, яғни $a^r<b^r$. ●

Мысалы, $(0,7)^{-8}<(0,6)^{-8}$, себебі $0,7>0,6$; $13^{-0,6}>15^{-0,6}$, себебі $13<15$; $\sqrt[4]{8^{-3}}<\sqrt[4]{7^{-3}}$, себебі $8>7$.

Жоғары математика курсында (1) қасиет кез келген оң r нақты сан үшін, ал (2) қасиеті болса, теріс r нақты сан үшін дұрыс екендігі дәлелденеді. Мысалы,

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{7}{8}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ өйткені } \frac{8}{9} > \frac{7}{8}; \qquad \left(\frac{7}{8}\right)^{-\sqrt{3}} < \left(\frac{6}{7}\right)^{-\sqrt{3}}, \text{ өйткені } \frac{7}{8} > \frac{6}{7}.$$

Қатаң теңсіздіктерді (> немесе < таңбалы) дәрежеге көтерудің қарастырылған қасиеттері қатаң емес теңсіздіктер (≥ немесе ≤ таңбалы) үшін де дұрыс болатынын ескертіп өтейік.

Сонымен, *егер теңсіздіктің екі жағы да оң сан болса, онда оны оң дәрежеге көтергенде теңсіздік таңбасы сақталады, теріс дәрежеге шығарғанда болса, теңсіздік таңбасы қарама-қарсысына өзгереді.*

Қатаң теңсіздіктер үшін > және < белгілері, қатаң емес теңсіздіктер үшін ≥ және ≤ белгілері қарама-қарсы белгілері болатынын ескертеміз.

2- есеп. Сандарды салыстырыңдар:

$$1)\ \left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} \text{ және } \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}};\quad 2)\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} \text{ және } (0{,}86)^{\sqrt{2}}.$$

△ 1) $\frac{17}{18}<1$ және $\frac{18}{17}>1$ болғандықтан $\frac{17}{18}<\frac{18}{17}$ болады.

Бұл теңсіздікті теріс $\left(-\frac{1}{3}\right)$ дәрежеге көтерсек: $\left(\frac{17}{18}\right)^{-\frac{1}{3}} > \left(\frac{18}{17}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

2) Дәрежелердің негіздерін салыстырамыз. $\frac{6}{7}=0{,}857...$ болғандықтан $\frac{6}{7}<0{,}86$ болады. Бұл теңсіздікті оң $\sqrt{2}$ дәрежеге көтеріп, төмендегіні пайда етеміз:

$$\left(\frac{6}{7}\right)^{\sqrt{2}} < 0{,}86^{\sqrt{2}}. \ ▲$$

3-есеп. Теңдеуді шеш: $10^x = 1$.

△ $x = 0$ саны бұл теңдеудің түбірі болады, себебі $10^0 = 1$. Бұдан басқа түбірлерінің жоқ екендігін дәлелдейік.

Берілген теңдеуді $10^x = 1^x$ түрінде жазамыз.

Егер $x > 0$ болса, онда $10^x > 1^x$, демек, теңдеудің оң түбірі болмайды.

Егер $x < 0$ болса, онда $10^x < 1^x$, демек, теңдеудің теріс түбірі болмайды.

Сөйтіп, $x = 0$ берілген $10^x = 1$ теңдеудің бір ғана түбірі екен. ▲

Сол сияқты, $a^x = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ теңдеудің бір ғана $x = 0$ түбірі болатыны дәлелденді.

Бұдан,

$$a^x = a^y \qquad (3)$$

теңдік $x = y$ болса дұрыс болатындығы келіп шығады, мұндағы $a > 0,\ a \neq 1$.

○ (3) теңдікті a^{-y}-ке көбейтіп, $a^{x-y} = 1$-ді шығарамыз, бұдан $x = y$. ●

4- есеп. $3^{2x-1} = 9$ теңдеуді шеш.

△ $3^{2x-1} = 3^2$, бұдан $2x - 1 = 2$, $x = 1{,}5$. ▲

$a^x = b$ теңдеуді қарастырамыз, мұндағы $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Теңдеудің бір ғана x_0 түбірі болуын дәлелдеуге болады. *x_0 саны a негізі бойынша b санының логарифмі делінеді және* $\log_a b$ *деп жазылады.*

Мысалы, $3^x = 9$ теңдеудің түбірі 2 саны болады, яғни $\log_3 9 = 2$. Дәл осылай,

$\log_2 16 = 4$, себебі $2^4 = 16$; $\log_5 \frac{1}{5} = -1$, себебі $5^{-1} = \frac{1}{5}$; $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$, себебі

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

b санының 10 негізі бойынша логарифмі *ондық логарифм* делінеді және $\lg b$ деп белгіленеді. Мысалы, $\lg 100 = 2$, себебі $10^2 = 100$; $\lg 0{,}001 = -3$, себебі $10^{-3} = 0{,}001$.

Жаттығулар

210. (Ауызша.) Сандарды салыстыр:

1) $2^{\frac{1}{3}}$ және $3^{\frac{1}{3}}$; 2) $5^{-\frac{4}{5}}$ және $3^{-\frac{4}{5}}$;

3) $5^{\sqrt{3}}$ және $7^{\sqrt{3}}$; 4) $21^{-\sqrt{2}}$ және $31^{-\sqrt{2}}$.

211. Сандарды салыстыр:

1) $(0,88)^{\frac{1}{6}}$ және 1) $(0,88)^{\frac{1}{6}}$ 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}$ және $(0,41)^{-\frac{1}{4}}$;

3) $(4,09)^{\sqrt[3]{2}}$ және $\left(4\frac{3}{25}\right)^{\sqrt[3]{2}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}$ және $\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

212. Теңдеулерді шеш:

1) $6^{2x}=6^{\frac{1}{5}}$; 2) $3^{x}=27$; 3) $7^{1-3x}=7^{10}$;

4) $2^{2x+1}=32$; 5) $4^{2+x}=1$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4x-3}=5$.

213. Сандарды салыстыр:

1) $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{2}}$ және $\sqrt[7]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{2}}$; 2) $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^{3}}$ және $\sqrt[5]{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^{3}}$.

Теңдеулерді шеш (**214–216**):

214. 1) $3^{2-y}=27$; 2) $3^{5-2x}=1$;

3) $9^{\frac{1}{2}x-1}-3=0$; 4) $27^{3-\frac{1}{3}y}-81=0$.

215. 1) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-5}=3^{5x-8}$; 2) $2^{4x-9}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; 3) $8^{x}4^{x+13}=\frac{1}{16}$;

4) $\frac{25^{x-2}}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-7,5}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-4}=2^{x+2}$; 6) $3^{x}\cdot 9^{x-1}=\frac{1}{27}$.

216. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+1}=(3\sqrt{3})^{x}$; 2) $(\sqrt[3]{2})^{x-1}=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^{2x}$;

3) $9^{3x+4}\sqrt{3}=\frac{27^{x-1}}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{8}{(\sqrt{2})^{x}}=4^{3x-2}\sqrt{2}$.

217. Есепте:

1) $\log_7 49$; 2) $\log_2 64$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 4$;

4) $\log_3 \frac{1}{27}$; 5) $\log_7 \frac{1}{7}$.

218. Теңдеуді шеш:

1) $7^{5x-1}=49$; 2) $(0,2)^{1-x}=0,04$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x+3}=3^{2x}$;

4) $3^{5x-7}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$; 5) $(0,3)^{2-3x}=0,027$; 6) $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}=6^{x}$.

15-§. БІР БЕЛГІСІЗІ БАР ТЕҢСІЗДІКТЕР

1-есеп. Екі қаладан бір уақытта біріне-бірі қарама-қарсы бірдей тұрақты жылдамдықпен екі пойыз шықты. Қозғалыс басталғаннан 2 сағаттан соң олар жүріп өткен қашықтықтардың қосындысы 200 км-ден кіші болмауы үшін пойыздар қандай жылдамдықпен жүруі керек?

△ Сағатына x км – пойыздар қозғалысының ізделінген жылдамдығы болсын. Екі сағатта пойыздардың әрқайсысы $2x$ километр жол жүрді. Есептің шарты бойынша пойыздардың 2 сағатта жүріп өткен қашықтығаындың қосындысы 200 км-ден кіші болмауы керек:

$$2x+2x\geq 200.$$

Бұдан $4x\geq 200$, $x\geq 50$.

Жауабы: Пойыздардың әрқайсысының жылдамдығы 50 км/сағ-тан кіші болмауы керек. ▲

$4x\geq 200$ теңсіздігінде x әрпімен белгісіз сан берілген. Бұл – *бір белгісізі бар сызықтық теңсіздіктің мысалы.*

Мына

$$ax>b,\ ax<b,\ ax\geq b,\ ax\leq b$$

теңсіздіктер бір белгісізі бар сызықтық теңсіздіктер деп аталады. Мұндағы a және b – берілген сандар, ал x белгісіз.

Көптеген, мысалы,

$$4(3-x)>5+2x,\quad \frac{x-3}{2}\leq\frac{x-2}{3},\quad 1-\frac{x}{2}<3(x+4)$$

сияқты теңсіздіктер бір белгісізі бар теңсіздіктерге келтіріледі.

Теңсіздік таңбасының сол және оң жақтарында тұрған өрнектер *теңсіздіктің сол және оң жағы* деп аталады. Теңсіздіктің сол және оң жақтарындағы әрбір қосылғыш *теңсіздіктің мүшесі* деп аталады.

Мысалы, $2x-5\geq 4+3x$ теңсіздігінде $2x-5$ – сол жағы, ал $4+3x$ – оң жағы, $2x$, -5, 4 және $3x$ – теңсіздіктің мүшелері.

Егер есепте пайда болған $2x+2x\geq 200$ теңсіздікке $x=50$, $x=51$, $x=60$ мәндерін қойсақ, онда дұрыс санды теңсіздіктер шығады:

$$2\cdot 50+2\cdot 50\geq 200;\ 2\cdot 51+2\cdot 51\geq 200;$$
$$2\cdot 60+2\cdot 60\geq 200.$$

50, 51, 60 сандарының әрбірі $2x+2x\geq 200$ теңсіздіктің шешімі деп аталады.

Бір белгісізі бар ***теңсіздіктің шешімі*** *деп, белгісіздің осы теңсіздікті дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын мәнін айтады.*

Теңсіздікті шешу *оның барлық шешімдерін табу немесе олардың жоқ екенін анықтау.*

Теңсіздіктегі белгісіз сан кез келген әріппен белгіленуі мүмкін. Мысалы,

$$3(y-5)<2(4-y),\qquad 2t-1\geq 4(t+3),\qquad 5-\frac{z}{2}>\frac{z}{3}-4$$

теңсіздіктердегі белгісіздер сәйкесінше, *y, t, z* әріптерімен белгіленген.

Теңсіздіктерді шешуге мысал келтіреміз.

2-есеп. Теңсіздікті шеш:

$$x+1>7-2x.$$

△ x саны берілген теңсіздіктің шешімі, яғни x саны $x+1>7-2x$ теңсіздігін дұрыс теңсіздікке айналдырады, деп қарастырамыз.

$-2x$ мүшені теңсіздіктің оң жақ бөлігінен сол жақ бөлігіне оның таңбасын қарама-қарсысына өзгертіп өткіземіз, ал 1 санын теңсіздіктің оң жақ бөлігіне „–“ таңбасымен өткіземіз.

Нәтижеде осы

$$x+2x>7-1$$

дұрыс теңсіздікті шығарамыз.

Бұл теңсіздіктің екі жақтағы бөлігіндегі ұқсас мүшелерді ықшамдаймыз:

$$3x>6.$$

Енді теңсіздіктің екі жақ бөлігін 3-ке бөліп,

$$x > 2$$

екенін табамыз.

Сөйтіп, x-ті берілген теңсіздіктің шешімі, деп қарастырып, біз $x > 2$-ні шығардық. x-тің 2-ден үлкен кез келген мәні теңсіздіктің шешімі болатынына көз жеткізу үшін барлық ой-тұжырымдарды кері ретпен жүргізу жеткілікті-ақ.

Айталық, $x > 2$ болсын. Дұрыс санды теңсіздіктердің қасиеттерін қолданып, бір ізділікпен төмендегілерді пайда етеміз:

$$3x > 6,$$
$$x + 2x > 7 - 1,$$
$$x + 1 > 7 - 2x.$$

Сонымен, 2-ден үлкен кез келген x саны берілген теңсіздіктің шешімі болады.

Жауабы: $x > 2$. ▲

Теңсіздіктің шешімін жазуда ескертулерді толығымен келтіру шарт емес. Мысалы, есептің шешуін төмендегідей жазуға болады:

$$x + 1 > 7 - 2x,$$
$$3x > 6,$$
$$x > 2.$$

Сөйтіп, теңсіздікті шешуде оның төмендегі *негізгі қасиеттері* пайдаланылады:

1-қасиет. ***Теңсіздіктің кез келген мүшесін оның бір бөлігінен екінші бөлігіне, осы мүшенің таңбасын қарама-қарсы таңбаға өзгертіп өткізуге болады, мұнда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді.***

2-қасиет. ***Теңсіздіктің екі бөлігін нөлге тең болмаған бірдей санға көбейтуге немесе бөлуге болады; егер бұл сан оң болса, онда теңсіздіктің таңбасы өзгермейді, егер бұл сан теріс болса, онда теңсіздіктің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.***

Бұл қасиеттер берілген теңсіздікті басқа, дәл осындай шешемдерге ие болған теңсіздікпен алмастыруға мүмкіндік береді.

Сызықты теңсіздікке келтірілетін бір белгісізі бар теңсіздікті шешу үшін:

1) белгісізі бар мүшелерді сол жаққа, ал белгісізі жоқ (бос) мүшелерді оң жаққа өткізу (1-қасиет);

2) ұқсас мүшелерді ықшамдап, теңсіздіктің екі жағын белгісіздің алдындағы коэффициентке (егер нөлге тең болмаса) бөлу (2-қасиет) керек.

3-есеп. Теңсіздікті шеш:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

△ Теңсіздіктің сол және оң бөліктерін ықшамдаймыз. Жақшаларды ашамыз:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Белгісізі бар мүшелерді теңсіздіктің сол жағына, ал белгісізі жоқ (бос) мүшелерді оң жағына өткіземіз (1-қасиет):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Ұқсас мүшелерді ықшамдаймыз:

$$-3x<2$$

және теңсіздіктің екі жағын –3-ке бөлеміз (2-қасиет):

$$x>-\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $x>-\frac{2}{3}$. ▲

Осы шешуді қысқаша төмендегідей жазуға болады:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$
$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$
$$-x-10<2x-8,$$
$$-3x<2,$$
$$x>-\frac{2}{3}.$$

$x > -\frac{2}{3}$ теңсіздікті қанағаттандыратын x сандар жинағы сан осінде *сәулемен* бейнеленеді (16-сурет). $x = -\frac{2}{3}$ нүкте бұл сәулеге тиісті емес, 16-суретте ол *ақ шеңбермен*, ал сәуле көлбеу сызықтармен жиектелген.

x сандардың, мысалы, $x \geq 2$ теңсіздікті қанағаттандыратын жинағы да *сәуле* деп аталады. $x=2$ нүкте осы сәулеге тиісті. 17-суретте осы нүкте *қара шеңбермен* бейнеленген.

4-есеп. Теңсіздікті шеш:

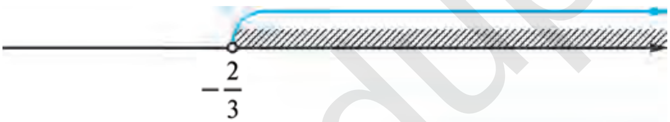
$$\frac{x-5}{6} + 1 \geq \frac{5x}{2} - \frac{x-3}{3}.$$

△ Теңсіздіктің екі жақ бөлігін 6-ға көбейтеміз:

$$6 \cdot \frac{x-5}{6} + 6 \cdot 1 \geq 6 \cdot \frac{5x}{2} - 6 \cdot \frac{x-3}{3},$$

$$(x-5) + 6 \geq 15x - 2(x-3).$$

Жақшаларды ашып, ұқсас мүшелерді ықшамдаймыз:



16-сурет.

17-сурет.

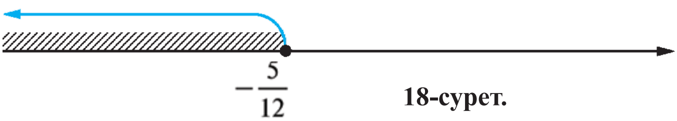
$$x - 5 + 6 \geq 15x - 2x + 6,$$

$$x + 1 \geq 13x + 6,$$

бұдан

$$-12x \geq 5, \ x \leq -\frac{5}{12}. \ ▲$$

Осы теңсіздіктің шешімдер жинағы, яғни $x \leq -\frac{5}{12}$ сандар жинағы 18-суретте кескінделген.



18-сурет.

Қарастырылған мысалдарда теңсіздіктер ықшамдалған соң белгісіздің алдындағы коэффициенті нөлге тең болмаған сызықты теңсіздікке келтірілді. Кейбір жағдайларда бұл коэффициент нөлге тең болуы мүмкін.

Осындай теңсіздіктерге мысалдар келтіреміз.

5-есеп. Теңсіздікті шеш:

$$2(x+1)+5>3-(1-2x).$$

△ Теңсіздіктің екі жақ бөлігін ықшамдаймыз:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$

$$2x+7>2+2x,$$

бұдан

$$2x-2x>2-7,$$

$$0\cdot x>-5.$$

Соңғы теңсіздік x-тің кез келген мәнінде дұрыс болады, себебі оның сол жақ бөлігі кез келген x-те нөлге тең және $0>-5$. Демек, x-тің кез келген мәні берілген теңсіздіктің шешімі болады.

Жауабы: x – кез келген сан. ▲

6-есеп. Теңсіздікті шеш:

$$3(2-x)-2>5-3x.$$

△ Теңсіздіктің сол жақ бөлігін ықшамдаймыз:

$$6-3x-2>5-3x,$$

$$4-3x>5-3x,$$

бұдан

$$-3x+3x>5-4,$$

$$0\cdot x>1.$$

Соңғы теңсіздік шешімге ие емес, себебі теңсіздіктің сол жақ бөлігі х-тің кез келген мәнінде нөлге тең және $0>1$ теңсіздік дұрыс емес. Демек, берілген теңсіздіктің шешімі жоқ.

Жауабы: шешімдері жоқ. ▲

Жаттығулар

219. Тұжырымды теңсіздік түрінде жаз:

1) x және 17 сандарының қосындысы 18-ден үлкен;
2) 13 және x сандарының айырмасы 2-ден кіші;
3) 17 және x сандарының көбейтіндісі 3-тен кіші емес;
4) x және –3 сандары қосындысының екі еселенгені 2-ден үлкен емес;
5) x және 3 сандары қосындысының жартысы олардың көбейтіндісінен үлкен емес;
6) x және -4 сандары көбейтіндісінің екі еселенгені олардың айырмасынан кіші емес.

220. 10, $\frac{1}{2}$, 0, –1 сандарының қайсысы теңсіздіктің шешімі болады:

1) $3x+4>2$; 2) $3x+4\le x$; 3) $\frac{1}{2}x-3>\le 1-x$;

4) $3-x\ge\frac{1}{2}x$; 5) $0,8x+5>7$; 6) $0,2x-4\le -2$?

221. y -тің қандай мәндерінде теңсіздік дұрыс болады:

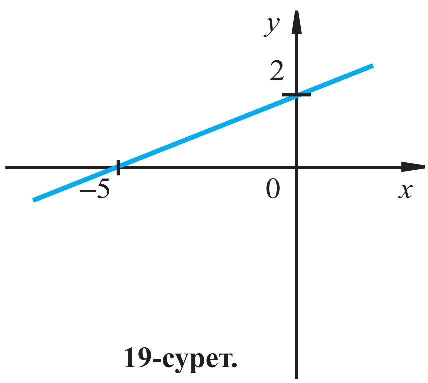
1) $-2y>0$; 2) $-3y<0$; 3) $y^2+1\ge 0$;

4) $2y^2+3\le 0$; 5) $(y-1)^2\le 0$; 6) $(y+2)^2\ge 0$?

222. 19-суретте $y=kx+b$ сызықты функциясы кескінделген.

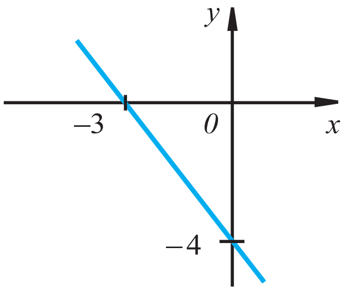
1) $x\ge 0$; 2) $x<0$;
3) $x>-5$; 4) $x\le -5$

болғанда y қандай мәндер қабылдайтынын теңсіздік жәрдемімен жаз.



19-сурет.

223. 20-суретте $y=kx+b$ сызықты функциясы кескінделген. x-тің қандай мәндерінде y функцияның мәндері: 1) оң; 2) теріс емес; 3) теріс; 4) -4 -тен кіші; 5) -4-тен кіші емес; 6) -4-тен үлкен болуын теңсіздіктің жәрдемімен жаз.



20-сурет.

224. Функцияның графигін сал және график бойынша x -тің қандай мәндерінде функция: 1) оң; 2) теріс; 3) нөлге тең; 4) 1-ден үлкен; 5) 1-ден кіші мәндерді қабылдайтынын тап:

1) $y = 2x + 4$; 2) $y = 3x - 9$;

3) $y = -2x - 8$; 4) $y = -3x + 6$.

Теңсіздікті шеш **(225–226):**

225. 1) $x + 2 \geq 15$; 2) $x - 6 < 8$; 3) $3 \leq y + 6$;

4) $-4 > 5 - y$; 5) $2z \geq z - 7$; 6) $3z \leq 2z + 4$.

226. 1) $12x > -36$; 2) $-7x \leq 56$; 3) $\frac{y}{4} \leq 7$;

4) $-5 < \frac{z}{3}$; 5) $7,2z > -27$; 6) $-4,5x \geq 9$.

Теңсіздікті шеш және оның шешімдері жинағын сан осінде кескінде **(227–228):**

227. 1) $2x - 16 > 0$; 2) $18 - 3x > 0$; 3) $3x - 15 < 0$;

4) $25 - 5x < 0$; 5) $9 - 3x \geq 0$; 6) $2x + 4 \leq 0$;

7) $6 - 2x \leq 0$; 8) $1,8 + 3x \geq 0$; 9) $-4x + 2 \leq 0$.

228. 1) $3(x+1) \leq x + 5$; 2) $4(x-1) \geq 5 + x$;

3) $2(x-3) + 4 < x - 2$; 4) $x + 2 < 3(x+2) - 4$;

5) $\frac{x-1}{3} \geq \frac{3x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geq \frac{2x-1}{3}$.

229. x-тің қандай мәндерінде өрнек оң болатынын анықта:

1) $\frac{3}{8}x + 4$; 2) $\frac{5}{2} - 4x$; 3) $2(x+3) + 3x$;

4) $3(x-5) - 8x$; 5) $\frac{1}{3} - 2(x+4)$; 6) $\frac{1}{2} - 3(x-5)$.

230. y-тің қандай мәндерінде өрнек теріс болатынын анықта:

1) $5-\frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4}-2y$; 3) $\frac{y-2}{3}+\frac{1}{3}$;

4) $\frac{8y-3}{5}-\frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2}-\frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6}-\frac{y}{6}$.

231. Теңсіздіктің шешімі болатын ең кіші бүтін санды тап:

1) $4(y-1)<2+7y$; 3) $3(x-2)-2x<4x+1$;

2) $4y-9\geq 3(y-2)$; 4) $6x+1\geq 2(x-1)-3x$.

232. Теңсіздіктің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды тап:

1) $5-2x>0$; 2) $6x+5\leq 0$;

3) $3(1-x)>2(2-x)$; 4) $4(2-x)<5(1-x)$.

233. 1) a-ның қандай мәндерінде $\frac{a}{3}$ бөлшегі $\frac{a+1}{4}$ бөлшектен үлкен болады?

2) b-ның қандай мәндерінде $\frac{b+3}{2}$ бөлшегі $\frac{b-1}{5}$ бөлшектен кіші болады?

3) x-тің қандай мәндерінде $\frac{3x-5}{6}$ бөлшегі $\frac{6x-7}{15}$ және $\frac{3-x}{9}$ бөлшектер айырмасынан үлкен болады?

4) x-тің қандай мәндерінде $\frac{2-5x}{4}$ және $\frac{7x-3}{6}$ бөлшектердің қосындысы $\frac{2x+5}{18}$ бөлшектен кіші болады?

Теңсіздікті шеш (**234–236**):

234. 1) $3(x-2)+x<4x+1$; 2) $5(x+2)-x>3(x-1)+x$;

3) $\frac{3x+6}{4}-\frac{x}{4}>\frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5}-4<x-\frac{3x+1}{5}$.

235. 1) $5(x+2)+2(x-3)<3(x-1)+4x$;

2) $3(2x-1)+3(x-1)>5(x+2)+2(2x-3)$;

3) $\frac{5x+3}{2}-1\geq 3x-\frac{x-7}{2}$; 5) $\frac{3x+2}{4}-1\leq 2x+\frac{x-5}{2}$;

4) $2-\frac{x-4}{3}\leq 2x-\frac{7x-4}{3}$; 6) $3-\frac{x-1}{2}\geq 3x-\frac{5x-3}{3}$.

236. 1) $\frac{2}{3x+6}<0$; 2) $\frac{3}{2x-4}>0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2}>0$;

4) $\frac{-2,3}{0,4x+8}<0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x}<0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x}>0$.

237. x-тің қандай мәндерінде $y=2,5x-4$ функциясының мәні: 1) оң; 2) теріс; 3) 1-ден үлкен; 4) -4-тен кіші?

238. x-тің қандай мәндерінде $y=3,5-0,5x$ функциясының мәні: 1) оң; 2) теріс емес; 3) 3,5-тен үлкен емес; 4) 1-ден кіші емес?

239. $y=3-2x$ функциясының графигін сал. График жәрдемімен x-тің графигінің нүктелері: 1) абсциссалар осінен жоғарыда; 2) $y=2$ түзу сызықтан жоғарыда; 3) абсциссалар осінен төменде; 4) $y=4$ түзу сызықтан төменде орналасқан мәндерін тап.
Нәтижелерді тиісті теңсіздіктерді шешу арқылы тексер.

240. Шеберлер жоспар бойынша 40 бесік даярлауы керек. Олар жоспарды 10%-дан көбірек етіп орындауы үшін неше бесік даярлауы керек?

16-§. БІР БЕЛГІСІЗІ БАР ТЕҢСІЗДІКТЕР ЖҮЙЕСІ. САНДЫҚ АРАЛЫҚТАР

1. Теңсіздіктер жүйесі.

Есеп. Сыйымдылығы 4000 л болған бос әуіз сумен толтырыла бастады. Әуіздің 4 сағаттан кейін жартысынан көбі толып, 5 сағаттан кейін ол тасып кетпеуі үшін сағатына неше литрден су құю керек?

△ x литр — әуізге 1 сағат ішінде құйылатын су мөлшері болсын. Есептің шарты бойынша $4x>2000$, $5x\leq 4000$.

Бірінші теңсіздіктен $x>500$, ал екінші теңсіздіктен $x\leq 800$ келіп шығады.

Жауабы: әуізге сағатына 500 л-дан көп, 800 л-дан көп болмаған көлемде су құю керек. ▲

$4x>2000$ және $5x\leq 4000$ теңсіздіктеріндегі белгісіз x бірдей сандар. Сондықтан бұл теңсіздіктер бірге қарастырылады және олар *теңсіздіктер жүйесін* құрайды, деп айтылады:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leq 4000. \end{cases} \qquad (1)$$

Үлкен жақша (1) x-тің жүйедегі екі теңсіздікті де дұрыс санды теңсіздікке айналдыратын мәндерін табу керектігін білдіреді.

(1) жүйе *бір белгісізі бар сызықтық теңсіздіктер жүйесіне* мысал.

Тағы да сызықтық теңсіздіктер жүйесіне келтірілетін бір белгісізі бар теңсіздіктер жүйесіне мысалдар келтірейік:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geq 3x, \\ 5(x-1) \leq 8, \\ x-1 > 5. \end{cases}$$

(!) ***Бір белгісізі бар теңсіздіктер жүйесінің шешімі*** *деп, белгісіздің жүйе теңсіздіктерінің барлығын дұрыс санды теңсіздіктерге айналдыратын мәнін айтады.*

Теңсіздіктер жүйесін шешу *— оның барлық шешімдерін табу немесе олардың жоқ екенін анықтау.*

Мысалы, $x=1$ осы

$$\begin{cases} 2x \geq -4, \\ 3x \leq 9 \end{cases} \qquad (2)$$

жүйенің шешімі болады, себебі $x=1$ болғанда (2) жүйенің екі теңсіздігі де дұрыс болады:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 \geq -4, \\ 3\cdot 1 \leq 9. \end{cases}$$

(2) жүйедегі бірінші теңсіздіктің екі жағын 2-ге, екінші теңсіздіктің екі жағын 3-ке бөлсек,

$$\begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq 3 \end{cases}$$

болады. Демек, (2) жүйенің шешемдері x-тің -2-ден кіші емес және 3-тен үлкен емес барлық мәндерінің жиынтығы.

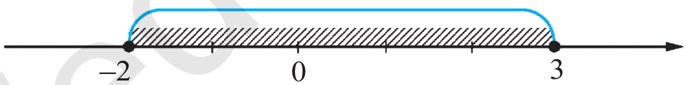
$x \geq -2$ және $x \leq 3$ теңсіздіктерін *қос теңсіздік* түрінде жазуға болады:

$$-2 \leq x \leq 3.$$

2. Сандық аралықтар.

Бір белгісізі бар теңсіздіктер жүйесінің шешімдері әр түрлі санды жиындар болады. Бұл жиындардың өзіндік атаулары бар.

Мысалы, сан осіндегі x-тің $-2 \leq x \leq 3$ болатын сан мәндері жиынның ұштары –2 және 3 нүктелерде болатын кесіндімен кескінделеді (21-сурет).



21-сурет.

Сондықтан $-2 \leq x \leq 3$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны кесінді деп аталады және [–2; 3] түрінде белгіленеді.

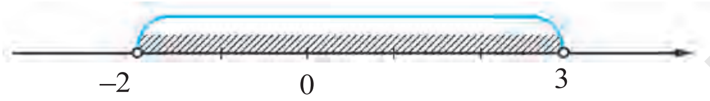
Егер $a < b$ болса, онда $a \leq x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны ***кесінді*** *делінеді және [a; b] түрінде белгіленеді.*

Мысалы, [4; 7] кесіндісі – осы $4 \leq x \leq 7$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны.

$2 < x < 7$, $-1 \leq x < 2$, $4 < x \leq 7$ түріндегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын сандар жиыны үшін де арнайы атаулар енгізіледі.

*Егер $a < b$ болса, онда $a < x < b$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны **интервал** деп аталады және $(a;\ b)$ түрінде белгіленеді.*

Мысалы, (–2; 3) интервалы – осы $-2 < x < 3$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны (22-сурет).



22-сурет.

*$a \le x < b$ немесе $a < x \le b$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын x сандар жиыны **жартылай интервалдар** деп аталады және сәйкесінше $[a;\ b)$ және $(a;\ b]$ түрінде белгіленеді.*

Мысалы, [–1; 2) жартылай интервал — осы $-1 \le x < 2$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны; (4; 7] жартылай интервал — осы $4 < x \le 7$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны (23-сурет).

23-сурет.

Кесінділер, интервалдар, жартылай интервалдар және сәулелер *сандық аралықтар* деп аталады.

Сөйтіп сандық аралықтарды теңсіздіктер түрінде өрнектеуге болады.

Теңіздіктер жүйесін шешуге қатысты мысалдар қарастырамыз.

1-есеп. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} 5x - 1 > 3(x + 1), \\ 2(x + 4) > x + 5. \end{cases} \qquad (1)$$

△ Бірінші теңсіздікті шешу:

$$5x - 1 > 3x + 3,$$
$$2x > 4,\ \ x > 2.$$

Сөйтіп, бірінші теңсіздік $x > 2$ болғанда орындалады.

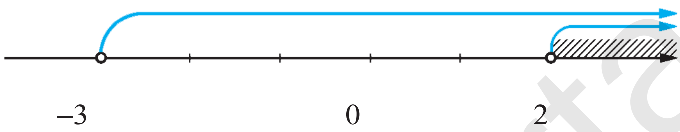
Екінші теңсіздікті шешейік:

$$2x+8>x+5,\ \ x>-3.$$

Олай болса, (1) жүйенің екінші теңсіздігі $x>-3$ болғанда орындалады.

Сан осіне (1) жүйенің бірінші және екінші теңсіздіктерінің шешімдер жиындарын кескіндейміз.

Бірінші теңсіздіктің шешімдері $x>2$ сәуленің барлық нүктелері, екінші теңсіздіктің шешімдері $x>-3$ сәуленің барлық нүктелері болады (24-сурет).



24-сурет.

(1) жүйенің шешімдері x -тің екі сәулеге де бір уақытта тиісті болатын мәндері. Суреттен көрініп тұрғандай бұл сәулелердің барлық ортақ нүктелері жиыны $x>2$ сәулесі болады.

Жауабы: $x>2$. ▲

2-есеп. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases}3(x-1)\le 2x+4,\\ 4x-3\ge 13.\end{cases} \qquad (2)$$

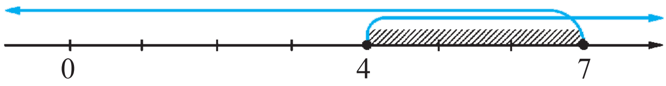
△ Бірінші теңсіздікті шешейік:

$$3x-3\le 2x+4,$$
$$x\le 7.$$

(2) жүйенің екінші теңсіздігін шешейік:

$$4x\ge 16,$$
$$x\ge 4.$$

Сан осіне (2) жүйенің бірінші және екінші теңсіздіктер шешімдерінің жиындарын кескіндейміз. Бірінші теңсіздіктің шешімдері $x\le 7$ сәулесі, екінші теңсіздіктің шешімдері $x\ge 4$ сәулесі болады (25-сурет).



25-сурет.

Суреттен көрініп тұрғандай бұл сәулелердің ортақ нүктелері жиыны $[4; 7]$ кесінді болады.

Жауабы: $4 \le x \le 7$. ▲

3-есеп. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} \frac{5x}{12} + \frac{4}{3} \ge \frac{x+1}{3}, \\ 2 - \frac{5x}{14} < \frac{2-x}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

△ (3) жүйенің бірінші теңсіздігін шешейік:

$$5x + 16 \ge 4x + 4,$$

$$x \ge -12.$$

Екінші теңсіздікті шешейік:

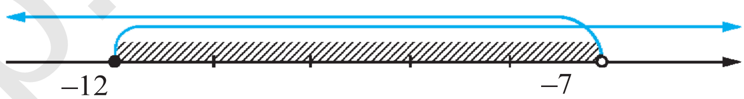
$$28 - 5x < 14 - 7x,$$

$$2x < -14,$$

$$x < -7.$$

Сан осіне $x \ge -12$ және $x < -7$ сәулелерін кескіндейміз (26-сурет). Суреттен көрініп тұрғандай бұл сәулелердің ортақ нүктелері жиыны $[12; -7)$ жартылай интервал болады.

Жауабы: $-12 \le x < -7$. ▲



26-сурет.

4-есеп. Осы

$$\begin{cases} 2(1 - x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1 \end{cases} \qquad (4)$$

теңсіздіктер жүйесінің шешімі болмайтынын көрсет.

△ Бірінші теңсіздікті шешейік:

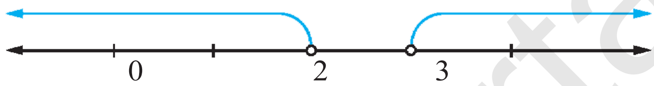
$$2-2x<4-3x, \quad x<2.$$

(4) жүйенің екінші теңсіздігін шешейік:

$$-3x<-9,$$
$$x>3.$$

Сан осіне $x<2$ және $x>3$ сәулелерін кескіндейміз (27-сурет).

Суреттен көрініп тұрғандай бұл сәулелер ортақ нүктелерге ие емес. Демек, (4) жүйенің шешімі болмайды. ▲



27-сурет.

Жаттығулар

241. –3; 0; 5 сандарының қайсысы теңсіздіктер жүйесі шешімдері болады:

1) $\begin{cases} 5-x\le 9, \\ 2-3x>-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{3}x-2>1, \\ 5-2x>-25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 0{,}5x+3>4, \\ 7-x>1? \end{cases}$

242. –2; 0; 1 сандарының қайсысы теңсіздіктер жүйесі шешімдері болады:

1) $\begin{cases} 12x-1<11, \\ -3-x\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-1\ge 4-x, \\ x+6>2? \end{cases}$

243. Теңсіздіктер жүйесі шешімдері болатын барлық бүтін сандарды тап:

1) $\begin{cases} x>2, \\ x<7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\le 3, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x\le 2{,}7, \\ x\ge 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\ge -5{,}1, \\ x<5{,}1. \end{cases}$

244. Берілген қос теңсіздікті қанағаттандыратын x сандар жиынын сандық аралықты белгілеу арқылы жаз:

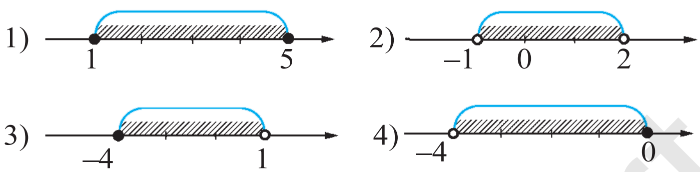
1) $1\le x\le 5$; 2) $-1\le x\le 3$; 3) $-1<x<4$;

4) $1<x<2$; 5) $-3\le x<1$; 6) $-4<x\le -2$.

245. Берілген сандық аралыққа тиісті x сандар жиынын қос теңсіздіктер жүйесінде жазып, оны сан осінде кескінде:

1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;
4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

246. 28-суретте кескінделген x сандар жиынын қос теңсіздік түрінде және сандық аралықтың белгісі арқылы жаз:

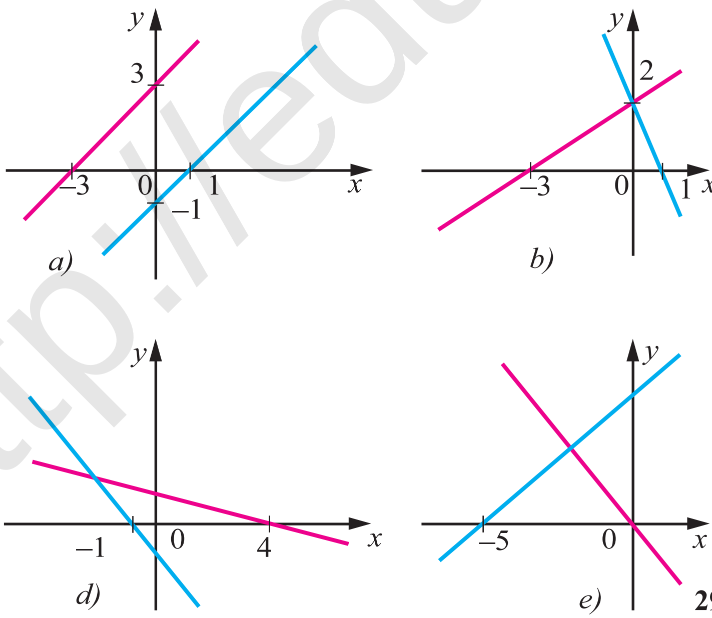


28-сурет.

247. $[2;\ 3]$ кесінді $(1;\ 4)$ аралыққа тиісті ме?

248. $[2;\ 4]$ және $[3;\ 5]$ кесінділердің ортақ нүктелері бар ма?

249. Бір координата жазықтығында екі сызықтық функцияның графиктері кескінделген (29-сурет). x-тің қандай мәндерінде екі функцияның мәндері бір мезгілде оң болады? Қандай мәндерінде бір уақытта теріс болады?



29-сурет.

№ 3

Тік төртбұрыштың қабырғалары натурал санмен өрнектеледі. Тік төрбұрыш периметрінің мәні оның ауданының мәніне тең болуы үшін олар қандай сандарға тең болуы керек?

250. Бір координата жазықтығында $y=-2x-2$ және $y=2-\frac{x}{2}$ функцияларының графиктерін сал. Абсциссалар осіндегі x-тің екі функциясының да мәндері: 1) оң; 2) теріс болатын мәндерінің жиынын белгіле.

251. Теңсіздікті шеш:

1) $(x-3)(2x-3)+6x^2 \geq 2(2x-3)^2$;

2) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2 \leq (1+3x)(1-3x)$;

3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3 \geq -2(x+3)$;

4) $(x-2)(x^2+2x+4) \leq x(x^2+2)+1$.

Теңсіздіктер жүйесінің барлық шешімдерін бір теңсіздікпен жаз және шешемідерінің жиынын сан осінде кескінде **(252–253):**

252. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x>5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>0, \\ x>-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x>2, \\ x\geq -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq -2, \\ x\geq -4. \end{cases}$

253. 1) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x<0, \\ x<-1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<-2, \\ x<-5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\leq 1, \\ x\leq 0. \end{cases}$

Теңсіздіктер жүйесінің барлық шешімдерін қос теңсіздікпен жаз және шешемідерінің жиынын сан осінде кескінде **(254–255):**

254. 1) $\begin{cases} x>2, \\ x<5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x>3, \\ x<6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<0, \\ x\geq -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x\geq 0, \\ x<\frac{1}{2}. \end{cases}$

255. 1) $\begin{cases} x \le -2, \\ x \ge -7,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1,5, \\ x \ge -1,5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \ge 0,8, \\ x < 2,2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \le 7,5, \\ x \ge -0,5; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \le 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x < 3,5, \\ x > 0. \end{cases}$

Теңсіздіктер жүйесін шеш (**256–259**):

256. 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \ge 0, \\ 2x \ge 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \ge 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 7 \ge 0, \\ 5x + 15 > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x + 10 > 0, \\ 3x \le 9; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 2x + 1 \ge 0. \end{cases}$

257. 1) $\begin{cases} 3 - 2x \ge 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \le 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + 3 \le 0, \\ 3x + 9 \le 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 24 < 6x, \\ 3x \ge 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7x + 14 > 0, \\ 3x - 6 \le 0. \end{cases}$

258. 1) $\begin{cases} 7 - 2x \ge 0, \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \le 0, \\ 9x + 18 \le 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10 - 2x \ge 0, \\ 4x - 8 \ge 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 5x - 12 \ge 0, \\ 15 - 3x \le 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 6 - 4x \le 0, \\ 3x + 9 > 0. \end{cases}$

259. 1) $\begin{cases} 3x + 3 \le 2x + 1, \\ 3x - 2 \le 4x + 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2 \ge 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x+1) - x > 2x + 2, \\ 4(x+1) - 2 < 2(2x+1) - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x-1) - 3 < 5(2x-1) - 7x, \\ 3(x+1) - 2 \le 6(1-x) + 7. \end{cases}$

260. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болатын барлық бүтін сандарды тап:

1) $\begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\dfrac{x}{3} \geq 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 0,5x \geq 0, \\ -\dfrac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3}, \\ \dfrac{x+1}{2} \geq \dfrac{x}{5}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} \leq \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x}{3} > \dfrac{x+4}{7}; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 0,4x > -2, \\ 0,3x < 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 1 + 0,2x \geq 0, \\ 0,5x - 1 < 0. \end{cases}$

261. x-тің қандай мәндерінде $y=0,5x+2$ және $y=3-3x$ функцияларының мәндері бір уақытта: 1) оң; 2) теріс; 3) 3-тен үлкен; 4) 3-тен кіші болады?

262. x-тің қандай мәндерінде $y=x-2$ және $y=0,5x+1$ функцияларының мәндері бір уақытта: 1) теріс емес; 2) оң емес; 3) 4-тен кіші емес; 4) 4-тен үлкен емес болады?

263. Үшбұрыштың бір қабырғасының ұзындығы 5 м, екінші қабырғасы 8 м. Егер үшбұрыштың периметрі: 1) 22 м-ден кіші; 2) 17 м-ден үлкен болса, оның үшінші қабырғасының ұзындығы қандай болуы мүмкін?

264. Егер бүтін санның $\dfrac{3}{2}$ бөлігінен оның $\dfrac{1}{4}$ бөлігі шегерілсе, онда 29-дан үлкен сан шығады, егер дәл осы санның $\dfrac{3}{2}$ бөлігінен оның $\dfrac{1}{3}$ бөлігі шегерілсе, онда 29-дан кіші сан шығады. Осы бүтін санды тап.

265. Егер бүтін санның екі есесіне оның жартысы қосылса, онда 92-ден кіші сан шығады, егер дәл сол бүтін санның екі есесінен оның жартысы шегерілсе, онда 53-тен үлкен сан болады. Сол бүтін санды тап.

17-§. САННЫҢ МОДУЛІ. МОДУЛЬ ҚАТЫСҚАН ТЕҢДЕУЛЕР МЕН ТЕҢСІЗДІКТЕР

1. Санның модулі.

Санның модулі анықтамасын еске түсірейік:

1) *Оң санның модулі сол санның өзіне тең.*

Мысалы, $|3| = 3$, $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$, $|2,4| = 2,4$.

2) *Теріс санның модулі оған қарама-қарсы санға тең.*

Мысалы, $|-2| = -(-2) = 2$, $\left|-\frac{5}{6}\right| = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$, $|-1,5| = -(-1,5) = 1,5$.

3) *Нөлдің модулі нөлге тең:* $|0| = 0$.

Сөйтіп, сан модулінің анықтамасы мынадай:

$$|a| = a, \text{ егер } a \geq 0 \text{ болса;}$$

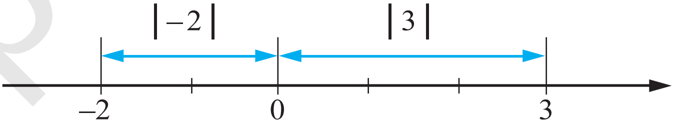
$$|a| = -a, \text{ егер } a < 0 \text{ болса.}$$

Бұл анықтама қысқаша мына формуламен жазылады:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{егер } a \geq 0 \text{ болса;} \\ -a, & \text{егер } a < 0 \text{ болса.} \end{cases}$$

Сан модулінің геометриялық мағынасын қарастырайық.

Сан осінде, мысалы, 3 және –2 нүктелерін кескіндейміз (30-сурет). Суретте көрініп тұрғанындай, $|3| = 3$ – 0 нүктесінен 3 нүктесіне дейінгі арақашықтық, $|-2| = 2$ – 0 нүктесінен –2 нүктесіне дейінгі арақашықтық.



30- сурет.

Сонымен, $|a|$ *– а санның модулі, геометриялық тұрғыдан,* 0 *нүктесінен а санды кескіндейтін нүктеге дейінгі арақашықтық.*

2. Белгісіз модуль таңбасы астында қатысқан теңдеулер.

1-есеп. Теңдеуді шеш:

$$|x| = 7.$$

△ 1) $|x| \geq 0$ болсын. Онда модульдің анықтамасына орай $|x| = x$ болғандықтан, теңдеу мынадай көрініске келеді:

$$x=7,$$

яғни $x=7$ — берілген теңдеудің түбірі;

2) $|x|<0$ болсын. Онда модульдің анықтамасына орай $|x| = -x$ болғандықтан, теңдеу мынадай көрініске келеді:

$$-x=7,$$

бұдан $x=-7$ — берілген теңдеудің түбірі.

Жауабы: $x_1=7$, $x_2=-7$. ▲

2-есеп. $|3x + 2| = 1$ теңдеуді шеш.

△ 1) $3x + 2 \geq 0$ болсын. Онда $3x+2=1$, $3x=-1$, $x=-\frac{1}{3}$;

2) $3x+2<0$ болсын. Онда $3x+2=-1$, $3x=-3$, $x=-1$.

Жауабы: $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=-1$. ▲

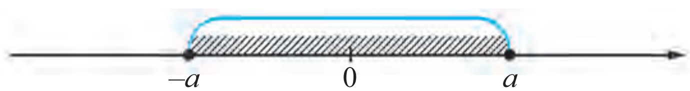
3. Белгісіз модуль таңбасы астында қатысқан теңсіздіктер.

Осы

$$|x| \leq a, \text{ мұнда } a > 0$$

теңсіздігін қарастырайық.

Бұл теңсіздікті 0 нүктесінен a-дан үлкен емес қашықтықта жататын барлық x нүктелері, яғни $[-a;\ a]$ кесінді нүктелері қанағаттандырады (31-сурет).



$$|x| \leq a$$

31-сурет.

$[-a;\ a]$ кесіндісі — осы $-a \le x \le a$ теңсіздігін қанағаттандыратын x сандар жиыны.

Демек, $|x| \le a$ теңсіздігі $-a \le x \le a$ қос теңсіздіктің дәл өзін білдіреді, мұндағы $a > 0$.

Мысалы, $|x| \le 2{,}5$ теңсіздік $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$-ті білдіреді; $|x| < 3$ теңсіздік $-3 < x < 3$-ті білдіреді.

3-есеп. $|5-3x| < 8$ теңсіздікті шеш.

△ Берілген теңсіздікті мына көріністе жазамыз:

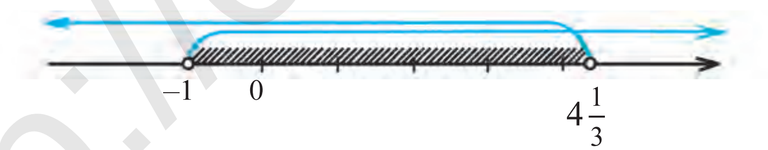
$$-8 < 5 - 3x < 8.$$

Бұл қос теңсіздік мына төмендегі теңсіздіктер жүйесінің дәл өзін білдіреді:

$$\begin{cases} 5-3x < 8, \\ 5-3x > -8. \end{cases}$$

Бұл жүйені шешіп, $-1 < x < 4\frac{1}{3}$ екенін табамыз (32-сурет). ▲

Осы

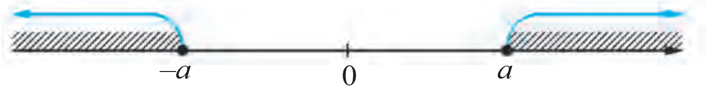


32-сурет.

$$|x| \ge a,\ \text{мұнда}\ a > 0$$

теңсіздігін қарастырайық.

Бұл теңсіздікті 0 нүктесінен a-дан кіші емес қашықтықта жататын барлық x нүктелері жиыны, яғни $x \ge a$ және $x \le -a$ сәулелерінің нүктелері қанағаттандырады (33-сурет).



33-сурет.

4-есеп. Теңсіздікті шеш: $|x-1| \geq 2$.

△ 1) $x-1 \geq 0$ болсын. Онда $x-1 \geq 2$. Төмендегі теңсіздіктер жүйесін шығарамыз:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-1 \geq 2. \end{cases}$$

Осы жүйені шешіп, $x \geq 3$-ті табамыз.

2) $x-1<0$ болсын. Онда $-(x-1) \geq 2$ немесе $x-1 \leq -2$.
Төмендегі теңсіздіктер жүйесін шығарамыз:

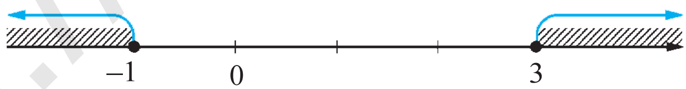
$$\begin{cases} x-1 < 0, \\ x-1 \leq -2. \end{cases}$$

Осы жүйені шешіп, $x \leq -1$-ді табамыз.

Сөйтіп, $|x-1| \geq 2$ теңсіздіктің шешімдері, біріншіден $x \geq 3$ сандар, ал екіншіден $x \leq -1$ сандар болады.

Жауабы: $x \leq -1, x \geq 3$. ▲

$|x-1| \geq 2$ теңсіздіктің шешімдері 34-суретте кескінделген.



34-сурет.

Егер

$$|x| \leq a$$

теңсіздігіндегі a саны нөлге тең болса, онда теңсіздіктің $x=0$ болатын жалғыз шешімі болады; егер $a<0$ болса, онда теңсіздіктің шешімдері болмайды.

Егер

$$|x| \geq a$$

теңсіздігінде a саны нөлден кіші немесе оған тең болса, онда теңсіздіктің шешімі кез келген сан болады.

Жаттығулар

266. (Ауызша.) Санның модулі неге тең:

1) 23; 2) $4{,}7$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) $-2{,}1$; 6) $-\frac{3}{8}$?

Теңдеуді шеш (**267–270**):

267. 1) $|x| = 2{,}5$; 2) $|x| = 1{,}5$; 3) $|x-1| = 2$;

4) $|x+3| = 3$; 5) $|x+4| = 4$; 6) $|x-4| = 4$.

268. 1) $|x+4| = 0$; 2) $|x-2| = 0$; 3) $|2x-3| = 0$;

4) $|3-4x| = 0$; 5) $|7+3x| = 0$; 6) $|2x+5| = 0$.

269. 1) $|3x-5| = 5$; 2) $|4x+3| = 2$; 3) $\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$;

4) $\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 5) $|7x-10| = 4$; 6) $|0{,}5-2x| = 2{,}5$.

270. 1) $|-x| = 3{,}4$; 2) $|-x| = 2{,}1$; 3) $|5-x| = 5$;

4) $|3-x| = 8$; 5) $|x-7| = 1$; 6) $|5-x| = 2$.

271. Теңсіздіктің шешімдер жиынын сан осінде кескінде:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \leq 4$; 3) $|x| \leq 4$; 4) $|x| > 2$.

272. Модульді теңсіздікті қос теңсіздік түрінде жаз:

1) $|x| \geq 3$; 2) $|x| < 2$; 3) $|x| < 3{,}5$; 4) $|x| \leq 2{,}4$.

273. Қос теңсіздікті модульді теңсіздік түрінде жаз:

1) $-3{,}1 < x < 3{,}1$; 2) $-0{,}3 \le x \le 0{,}3$; 3) $-4{,}8 < x < 4{,}8$.

Теңсіздікті шеш (**274–277**):

274. 1) $|1+x| \le 0{,}3$; 2) $|2+x| < 0{,}2$; 3) $|3-x| \le \frac{2}{3}$;

4) $|1-x| < \frac{3}{4}$; 5) $|x-1| \le 1$; 6) $|x-4| \le 2$.

275. 1) $|3x-4| < 5$; 2) $|2x+3| < 3$; 3) $|2-3x| \le 2$;

4) $|5-4x| \le 1$; 5) $|4x-1| < 7$; 6) $|3-2x| \le 3$.

276. 1) $|x+1| > 1{,}3$; 2) $|x-2| \ge 1{,}1$; 3) $|1-x| \ge \frac{1}{2}$;

4) $|3-x| > \frac{2}{3}$; 5) $|x-1| > 3{,}8$; 6) $|5-4x| \le 1$.

277. 1) $|4x-3| \ge 3$; 2) $|3x+2| > 1$; 3) $|3x-2| > 4$;

4) $|4-5x| \ge 4$; 5) $|6x-1| \le 2$; 6) $|3-5x| \ge 2$.

278. x-тің төмендегі теңсіздік орындалатын барлық бүтін мәндерін тап:

1) $|5x-2| < 8$; 2) $|5x+3| < 7$; 3) $|5-3x| \le 1$;

4) $|3-4x| \le 3$; 5) $|2x-5| \le 1$; 6) $|3-4x| \le 6$.

279. Теңсіздікті шеш:

1) $|2x-3| > 5$; 2) $|3x-1| \le 4$; 3) $|1-3x| \le 1$;

4) $|3-2x| \ge 3$; 5) $|1{,}5x-2| \le 1$; 6) $|4-3x| > 2$.

18-§. ЖУЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР. МӨЛШЕРЛЕРДІҢ ЖУЫҚ МӘНДЕРІ. ЖУЫҚТАУ ҚАТЕЛІГІ

Іс жүзіндік есептерді шешкенде көбіне *түрлі мөлшерлердің жуық мәндерімен* жұмыс істеуге тура келеді. Жуық мәндер, әдетте көп мөлшердегі заттарды, мысалы ормандағы ағаштарды санағанда, құралдар көмегімен түрлі шамаларды, яғни ұзындықты, массаны, температураны өлшегенде, сандарды дөңгелектегенде пайда болады.

Бірнеше мысалды қарастырайық:

1) Тәуелсіз Өзбекстанның бірінші пошта маркасы өзбек ақыны Мохларайым Надираға арналып, 2 миллион данамен сатуға шығарылды;

2) сыныпта 36 оқушы бар;

3) Өзбекстанда 10 000-ға жуық мектеп бар;

4) Науаи – Нөкіс теміржолының ұзындығы 342 км;

5) жұмысшы кассадан 70 600 сум ақша алды;

6) соңғы жылдарда Өзбекстанда дәнді егін алаңы 300 мың гектарға көбейді;

7) Ташкент пен Бұхараның арақашықтығы 500 км;

8) бір килограмм бидайда 30 000 бидай дәні бар;

9) Жерден Күнге дейінгі арақашықтық $1{,}5 \cdot 10^8$ км;

10) Өзбекстан Республикасы Мемлекеттік жалауында 12 жұлдыз бар.

2, 5, 10-мысалдардағы мөлшерлердің мәндері дәл, ал қалған жағдайлардағы мәндер жуық.

1-есеп. Оқушылардың бірінен мектепте қанша оқушы оқитынын сұрағанда, ол „1000“ деп жауап берді, екінші оқушы дәл осы сұраққа „950“ деп жауап берді. Егер мектепте 986 оқушы оқыса, кімнің жауабы дәлірек?

△ Бірінші оқушы 14-ке, ал екінші оқушы 36-ға қателесті. Демек, бірінші оқушының жауабы дәлірек. ▲

Бірінші жағдайда оқушылар санының дәл және жуық мәндерінің арасындағы айырма теріс:

$$986 - 1000 = -14,$$

ал екінші жағдайда оң:

$$986 - 950 = 36.$$

Іс жүзіндік тұрғыдан жуық мәндердің дәл мәннен айырмашылығының ол жаққа немесе бұл жаққа қалай ауытқып тұрғанын, яғни дәл мән мен жуық мәннің арасындағы айырманың модулін (абсолютті мәнін) білудің маңызы ерекше зор.

Мөлшердің дәл мәні мен оның жуық мәні арасындағы айырманың модулі *жуықтаудың абсолютті қателігі деп аталады.*

Сонымен, егер a – дәл мәні x-қа тең болған мөлшердің жуық мәні болса, онда абсолютті қателік

$$|x-a| \text{ -ға}$$

тең болады.

Жуықтаудың абсолютті қателігін көп ретте жай ғана *қателік* дейді.

2 -есеп. Үшбұрыш бұрыштары қосындысын транспортир көмегімен табуда нәтиже 182° болды. Бұл жуықтаудың абсолютті қателігі қандай?

△ Үшбұрыш бұрыштары қосындысының дәл мәні 180°-қа тең, жуық мәні 182°-қа тең. Сондықтан абсолютті қателік

$$|180°-182°|=|-2°|=2°$$

-қа тең. ▲

3 - есеп. $\frac{3}{7}$ санының 0,43 ондық бөлшекке жуықтау қателігін тап.

$$\triangle\ \left|\frac{3}{7}-0,43\right|=\left|\frac{3}{7}-\frac{43}{100}\right|=\left|\frac{300-301}{700}\right|=\left|-\frac{1}{700}\right|=\frac{1}{700}.\ \blacktriangle$$

Жаттығулар

280. Мысалдарда келтірілген сандардың қайсылары мөлшерлердің дәл мәндері, қайсылары жуық мәндері болады:

1) бір нан 500 сум тұрады;
2) 12 парақты дәптер 60 сум тұрады және қалыңдығы 3 мм;
3) бір жылда автомобиль зауыты 200 мың автомобиль шығарады.

281. Оқушы кітаптың енін масштабты сызғышпен өлшегенде 16,2 см-ден 16,4 см-ге дейінгі аралықтағы нәтижелерді алды.
1) Кітап енінің дәл мәнін айтуға бола ма?
2) Кітап енінің бірнеше жуық мәндерін көрсет.

282. $\frac{4}{9}$ санының:

1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $0,3$; 4) $0,44$; 5) 0,43; 6) 0,45

санына жуықтаудың абсолютті қателігін тап.

283. Төмендегі сандардың жуықтау қателігін тап:
1) 0,1975 санының 0,198 санымен;
2) –3,254 санының –3,25 санымен;
3) $-\frac{8}{17}$ санының $-\frac{1}{2}$ санымен;
4) $\frac{22}{7}$ санының 3,14 санымен.

284. a саны x жуық мәні болсын. Егер:
1) $x = 5{,}346$, $a = 5{,}3$; 2) $x = 4{,}82$, $a = 4{,}9$;
3) $x = 15{,}9$, $a = 16$; 4) $x = 25{,}08$, $a = 25$
болса, жуықтау қателігін тап.

285. Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 360°. Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын транспортирмен өлшегенде 363° болды. Осы жуықтаудың қателігі неге тең?

286. $y= 7x+9$ және $y=1$ түзулерінің графиктері көмегімен бұл түзулер абсциссасы –1-ге тең нүктеде қиылысатыны анықталды. Осы жуықтаудың қателігі неге тең?

287. 0,33 ондық бөлшегі $\frac{1}{3}$ санының абсолютті қателігі 0,01-ден кіші жуық мән болатыны дұрыс па?

19-§. ҚАТЕЛІКТІ БАҒАЛАУ

Көп жағдайда мөлшерлердің дәл мәндері белгісіз болады, сондықтан жуықтаудың абсолютті қателігін табуға болмайды. Дегенмен, егер артығымен және кемімен алынған жуықтаулар белгілі болса, *абсолютті қателікті бағалау*ға болады.

1-есеп. Бөлме термометріндегі сұйықтық бағанының жоғары көрсеткіші 21 және 22 °C белгілері арасында тұр. Температураның жуық мәні үшін 21,5 саны алынды. Жуықтаудың абсолютті қателігін бағала.

△ t температураның дәл мәні белгісіз, бірақ

$$21 \le t \le 22$$

деп тұжырым жасауға болады.

Температураның дәл мәні мен жуық мәнінің арасындағы айырманы, яғни $t - 21{,}5$ айырманы бағалау үшін бұл қос теңсіздіктің әрбір бөлігінен 21,5 санын шегереміз.

$-0{,}5 \le t - 21{,}5 \le 0{,}5$ яғни $|t - 21{,}5| \le 0{,}5$ болады. Сонымен абсолютті қателік 0,5-тен үлкен емес. ▲

Бұл жағдайда температура 0,5-ке дейінгі дәлдікпен өлшенген деп айтылады және былай жазылады:

$$t = 21{,}5 \pm 0{,}5.$$

Егер a саны x санының жуық мәні және $|x - a| \le h$ болса, онда x саны a санға h-қа дейінгі дәлдікпен тең дейіледі және былай жазылады:

$$\boxed{x = a \pm h.} \qquad (1)$$

$|x - a| \le h$ теңсіздігі

$$a - h \le x \le a + h \qquad (2)$$

қос теңсіздігінің дәл өзін аңғартатынын ескертеміз.

Мысалы, $x = 2{,}43 \pm 0{,}01$ жазуы x саны 2,43-ке 0,01-ге дейінгі дәлдікте теңдігін, яғни $2{,}43 - 0{,}01 \le x \le 2{,}43 + 0{,}01$ немесе $2{,}42 \le x \le 2{,}44$ болатынын білдіреді.

2,42 және 2,44 сандары x санының, сәйкесінше, кемімен және артығымен алынған жуық мәндері болады.

Әдетте, 1-есепте қарастырылған температураны өлшегенде, температураның жуық мәні ретінде 21 немесе 22 °C алынды. Онда әрбір жуықтаудың абсолютті қателігі 1° С-ден артпайды. Сол үшін, әдетте бөліктерінің аралығы 1° С болатын термометрдің жәрдемімен температураны өлшегенде өлшеу 1° С-ге дейінгі дәлдікпен алынған деп саналады.

Осыған ұқсас басқа өлшеу құралдарының да *өлшеу дәлдігі,* әдетте құралдың ең кіші бөліктері бойынша есептеледі. Мысалы, ұзындық микрометрмен 0,01 мм-ге дейінгі дәлдікпен өлшенеді, температура медицина термометрімен 0,1 °С-ге дейінгі дәлдікпен өлшенеді, секунд стрелкасы бар қол сағаты уақытты 1 секундқа дейінгі дәлдікпен көрсетеді.

Сондықтан өлшеу құралы мөлшер қандай құралмен өлшенуіне байланысты болады. Жуықтау қателігі қаншалықты кіші болса, өлшеу құралы соншама дәл болады.

Жай бөлшекті ондық бөлшекке айналдырғанда жуық мәндер жиі пайдаланылады.

2-есеп. 0,43 саны $\frac{13}{30}$ бөлшектің 0,01-ге дейінгі дәлдікпен алынған жуық мәні екенін дәлелде.

△ Мұнда

$$\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\leq 0,01$$

болатынын дәлелдеу керек. Айырманы есептейміз:

$$\frac{13}{30}-0,43=\frac{13}{30}-\frac{43}{100}=\frac{130-129}{300}=\frac{1}{300}.$$

Демек, $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|=\frac{1}{300}; \frac{1}{300}\leq 0,01$ болғандықтан $\left|\frac{13}{30}-0,43\right|\leq 0,01$ болады. ▲

Жаттығулар

288. Төмендегі жазу нені білдіреді:

1) $x = 3,9 \pm 0,2$; 2) $x = 0,4 \pm 0,15$; 3) $x=\frac{1}{3}\pm\frac{1}{10}$;

4) $x = 0,73\pm 0,01$; 5) $x = -135 \pm 1$; 6) $x=-2\frac{1}{5}\pm\frac{1}{10}$;

7) $x = -1 \pm 0,1$; 8) $x = 9,5 \pm 0,2$; 9) $x = -3,2 \pm 0,01$?

289. Қос теңсіздік түрінде жаз:

1) $x = 11 \pm 0{,}5$; 2) $m = 142 \pm 1$; 3) $l = 3{,}7 \pm 0{,}1$;
4) $v = 900 \pm 5$; 5) $x = a \pm h$; 6) $y = m \pm n$.

290. x санының кемімен және артығымен алынған жуық мәндерін тап:

1) $x = 4 \pm 0{,}1$; 2) $x = 2{,}7 \pm 0{,}1$;
3) $x = -0{,}6 \pm 0{,}12$; 4) $x = -5{,}9 \pm 0{,}2$

291. $x = 5{,}8 \pm 0{,}2$ болсын. Дәл мән төмендегіге тең болуы мүмкін бе:
1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81; 5) 5,75; 6) 5,6?

292. $x = 8{,}7 \pm 0{,}4$ болсын. x саны төмендегіге тең болуы мүмкін бе:
1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5; 5) 9,3?

293. x санының оның кемімен және артығымен алынған жуықтауларының арифметикалық ортасына тең жуық мәндерін көрсет:
1) $20 \le x \le 22$; 2) $5 \le x \le 6$; 3) $4{,}5 \le x \le 4{,}8$;
4) $3{,}7 \le x \le 4{,}1$; 5) $2{,}81 \le x \le 2{,}83$; 6) $0{,}55 \le x \le 0{,}6$.

294. Дәлелде:
1) 2,7 саны 2,7356 санының 0,5-ке дейінгі дәлдіктегі жуық мәні;
2) 0,27 саны $\frac{11}{40}$ бөлшегінің 0,01-ге дейінгі дәлдіктегі жуық мәні.

295. 4 саны 4,3 бөлшегінің 0,5-ке дейінгі дәлдіктегі жуық мәні бола ма? 0,1-ге дейінгі дәлдіктегі жуық мәні ше?

296. Оптикалық және радиолокациялық өлшеулер бойынша Меркурийдің диаметрі (4880 ± 2) км-ге, ал Шолпанның радиусы (6050 ± 5) км-ге тең. Өлшеу нәтижелерін қос теңсіздік түрінде жаз.

297. Жұмысшы цилиндрдің диаметрін өлшеу үшін 10,00; 10,04; 10,08 мм, т.с.с. 10,56 мм-ге дейінгі диаметрлі тесіктері бар құрылғы пайдаланылады. Мұндағы өлшеулер дәлдігі қандай?

298. Техникалық бақылау бөлімінде цилиндрдің диамтері 0,1 мм-ге дейінгі дәлдікпен өлшенеді. Нұсқау бойынша цилиндр диаметрі $167{,}8 \le d \le 168{,}2$ аралықта болса, ол жарамды саналады. Егер өлшеу нәтижесінде цилиндрдің диаметрі 168,1 мм-ге тең болса, техникалық бақылау бөлімі оны жарамсызға шығара ма?

20-§. САНДАРДЫ ДӨҢГЕЛЕКТЕУ

Сандарды дөңгелектеу физика, математика, техниканың көптеген практикалық мәселелерінде түрлі шамалардың (мөлшерлердің) жуық мәндерімен жұмыс істеуде пайдаланылады.

Мысалы, теңіз деңгейінде және 45° ендікте денелердің еркін түсу үдеуі 9,80665 м/с^2-ке тең. Әдетте бұл сан оннан бірге дейін дөңгелектенеді: 9,8. Ол былай жазылады: $g \approx 9{,}8$(оқылуы: g жуықтап алынған 9,8-ге тең).

! *$x \approx a$ жазуы x санының жуық мәні a саны екенін білдіреді.*

1-есеп. Тік төртбұрыш пішінді алаңның ауданы 25 м^2-ге, оның ұзындығы 8 м-ге тең. Алаңның енін тап.

△ Алаңның ені l метр болсын, онда

$$l = 25 : 8 = 3{,}125.$$

Жауабы: 3,125 м. ▲

Іс жүзінде мұндай нәтиже, әдетте, оннан бірге дейін дөңгелектенеді, яғни $l \approx 3{,}1$ деп алынады.

Сандарды дөңгелектеу ережесін мына мысал арқылы қарастырайық. 3,647 санын жүзден бірге дейін дөңгелектеу керек болсын. Кемімен дөңгелектеу үшін соңғы 7 цифрын түсіріп қалдырамыз, нәтижеде 3,64 болады. Артығымен дөңгелектеу үшін соңғы 7 цифрын түсіріп қалдырып, одан алдыңғы цифрын бір бірлікке арттырамыз. Нәтижеде 3,65 пайда болады.

Бірінші жағдайда дөңгелектеудің абсолютті қателігі

$$|3{,}647 - 3{,}64| = 0{,}007$$

екінші жағдайда

$$|3{,}647 - 3{,}65| = 0{,}003$$

болады.

Екінші жағдайда жуықтау қателігі бірінші жағдайдағыдан кем. Демек, қарастырылған мысалдағы артығымен дөңгелектеу тиімді екен.

Дөңгелектеудің абсолютті қателігі ең кем болуы үшін оң сандарды дөңгелектеуде төмендегі ереже пайдаланылады.

! *Егер бірінші түсіріп қалдырылған цифр 5-тен кіші болса, онда кемімен дөңгелектеу керек, егер бұл цифр 5-тен үлкен болса немесе оған тең болса, онда артығымен дөңгелектеу керек.*

Мысалы, оннан бірге дейінгі дөңгелектеуде

$$3{,}647 \approx 3{,}6, \quad 2{,}658 \approx 2{,}7$$

болады; жүзден бірге дейінгі дөңгелектеуде

$$0{,}6532 \approx 0{,}65, \quad 9{,}0374 \approx 9{,}04$$

болады.

2-есеп. $\frac{2}{7}$ санын осы санға 0,01-ге дейінгі дәлдікте тең болған ондық бөлшекпен алмастыр.

△ 2-ні 7-ге бөлу нәтижесін үтірден кейін үш цифрлы ондық бөлшек түрінде жазамыз:

$$\frac{2}{7} = 0{,}285\ldots.$$

Бұл санды жүзден бірге дейін дөңгелектесек, $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$ шығады. ▲

Бұл есепті шешу үшін $\frac{2}{7}$-нің 0,01-ге дейінгі дәлдіктегі жуық мәнін табу үшін оның үтірден кейінгі үш цифрын табу керек. Егер $\frac{2}{7}$ санының 0,001-ге дейінгі дәлдіктегі жуық мәнін табу талап етілсе, онда төрт ондық цифрды табуға тура келеді.

Жаттығулар

299. Сандарды ретімен 0,001, 0,01, 0,1-ге дейін, бірліктерге, ондықтарға, жүздіктерге, мыңдықтарға дөңгелекте: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

300. 15,75 және 317,25 сандарын бірліктерге дейін кемімен және артығымен дөңгелекте. Әрбір дөңгелектеудің абсолютті қателігін тап.

301. Санды 0,1-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде көрсет:

1) $\frac{13}{8}$; 2) $\frac{17}{25}$; 3) $\frac{39}{129}$; 4) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{19}{11}$.

302. Санды 0,01-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде көрсет:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

303. Санды 0,001-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде көрсет:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$; 5) $3\frac{1}{7}$; 6) $1\frac{18}{19}$.

304. 0 °С-да сутегі молекуласының орташа қозғалыс жылдамдығы 1693 м/с. Бір оқушы бұл санды 1690 м/с етіп, ал екіншісі 1700 м/с етіп дөңгелектеді. Әрбір дөңгелектеудің абсолютті қателігін тап. Қайсы жағдайда жуықтау қателігі кем?

21-§. САЛЫСТЫРМАЛЫ ҚАТЕЛІК

Бірдей шаманың әр түрлі жуықтауларының дәлдігін салыстыру үшін абсолютті қателік пайдаланылады. Егер әр түрлі шамалардың жуықтаулары салыстырылатын болса, онда абсолютті қателік жеткіліксіз.

Мысалы, Ташкенттен Самарқантқа дейінгі арақашықтық (300 ± 1) км. Қарындаштың ұзындығы (21,3 ± 0,1) см. Бірінші жағдайда абсолютті қателік 1 км-ден үлкен емес, ал екінші жағдайда 1 мм-ден үлкен емес. Сонда қарындаштың ұзындығы Ташкенттен Самарқантқа дейінгі арақашықтыққа қарағанда дәлірек өлшенген деп айтуға бола ма?

Ташкенттен Самарқантқа дейінгі арақашықтық өлшенгенде 300 км-ге 1 км-ден үлкен болмаған абсолютті қателікке жол берілген. Демек, қателік өлшенетін шаманың $\frac{1}{300}\cdot 100\% \approx 0,33\%$ -ын құрайды.

Қарындаштың ұзындығын өлшегенде 21,3 см-ге 0,1 см-ден үлкен болмаған абсолютті қателікке жол берілген. Демек, бұл жағдайда қателік өлшенетін шаманың $\frac{0,1}{21,3}\cdot 100\% \approx 0,47\%$ -ын құрайды.

Олай болса, қалалар арасындағы қашықтық қарындаштың ұзындығына қарағанда дәлірек өлшенген екен.

Жуықтау сапасын бағалау үшін салыстырмалы қателік ұғымы енгізілді.

Салыстырмалы қателік деп шаманың абсолютті қателігін оның жуық мәні модуліне қатынасын айтады.

Сонымен егер a саны x-тің жуық мәні болса, онда абсолютті қателік $|x-a|$-ға, ал салыстырмалы қателік $\frac{|x-a|}{|a|}$-ға тең. Салыстырмалы қателік әдетте процентттерде (пайыздарда) өрнектеледі.

Есеп. Жер массасының жуық мәні $(5{,}98 \pm 0{,}01)\cdot 10^{24}$ кг-ға тең. Аңшы мылтығы оғының массасы (9 ± 1) г-ға тең. Қайсы өлшеу дәлірек?

△ Әрбір өлшеудің салыстырмалы қателігін бағалаймыз:

$$1)\ \frac{0{,}01\cdot 10^{24}}{5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot 100\% \approx 0{,}2\%; \qquad 2)\ \frac{1}{9}\cdot 100\% \approx 11\%.$$

Жер массасы дәлірек өлшенген. ▲

Жаттығулар

305. Санды бірліктерге дейін дөңгелектеп, әрбір дөңгелектеудің абсолютті және салыстырмалы қателігін тап:

1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892; 5) 1,947.

306. 1) $\frac{1}{3}$ санының 0,33 санымен; 2) $\frac{1}{7}$ санының 0,14 санымен дөңгелектеудің салыстырмалы қателігін тап.

307. Қайсы өлшеу дәлірек:

1) $a=(750\pm 1)$ м бе немесе $b = (1{,}25\pm 0{,}01)$ м бе;

2) $p=(10{,}6\pm 0{,}1)$ с пе немесе $q = (1{,}25\pm 0{,}01)$ с пе?

308. Түрлі құралдармен бір мезгілде бу температурасы өлшенді және бірінші жағдайда $t=(104\pm 1)$ °С, екінші жағдайда $t = (103{,}8\pm 0{,}1)$ °С, үшінші жағдайда $t = (103{,}86\pm 0{,}01)$ °С нәтижелері алынды. Әрбір өлшеудің салыстырмалы қателігін бағала.

309. Екі оқушы ұзындықты өлшеуге байланысты практикалық жұмыс орындаған кезде (203 ± 1) мм және (120 ± 1) см нәтижелер алды. Оқушылардың қайсысы жұмысты сапалы орындаған?

310. 1) x санының жуық мәні a-ға тең. Жуықтаудың салыстырмалы қателігі 0,01-ге тең, яғни 1%. Егер $a = 2{,}71$ болса, абсолютті қателікті тап. 2) x санының жуық мәні b-ға тең. Жуықтаудың салыстырмалы қателігі 0,001-ге тең, яғни 0,1%. Егер $b = 0{,}398$ болса, абсолютті қателікті тап.

311. Күннің массасы $(2 \cdot 10^{33} \pm 0{,}1 \cdot 10^{33})$ г. Балалар добының массасы $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$ г. Қайсы өлшеу дәлірек?

II тарауға қатысты жаттығулар

Теңдеуді шеш **(312–313):**

312. 1) $x(2x + 5) = 0$; 2) $x(3x - 4) = 0$;

3) $(x - 5)(3x + 1) = 0$; 4) $(x + 4)(2x - 1) = 0$.

313. 1) $\frac{2x+3}{3x-1} = 0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5} = 0$; 3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} = 0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} = 0$.

314. Сан осінде a нүкте b нүктенің сол жағында жатады. Төмендегі сан оң ба немесе теріс пе:

1) $b - a$; 2) $2 + b - a$; 3) $a - b$; 4) $a - 3 - b$?

315. Теңсіздікті шеш:

1) $x + 9 > 8 - 4x$; 2) $3(y + 4) \geq 4 - (1 - 3y)$;

3) $5(0{,}2 + y) - 1{,}8 \geq 4{,}3 + 5y$; 4) $3(x - 5) + 9 > 15$.

316. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

1) $\begin{cases} 0{,}5\,(x+3) - 0{,}8 < 0{,}4\,(x+2) - 0{,}3, \\ 0{,}7\,(2-x) + 1{,}3 < 0{,}6\,(1-x) + 2{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}5\,(x-2) - 2{,}1 < 1{,}3\,(x-1) + 2{,}5, \\ 1{,}3\,(x+3) + 1{,}7 > 1{,}6\,(x+2) + 1{,}8. \end{cases}$

317. Теңдеуді шеш:

1) $|x-1|=3,4;$ 2) $|1-x|=2,4;$ 3) $|1-2x|=5;$

4) $|3x-2|=1;$ 5) $|4x-1|=3;$ 6) $|2x+7|=9.$

318. Теңсіздікті шеш:

1) $|x-1|\le 3,4;$ 2) $|x-1|\ge 3,4;$ 3) $|x-1|<3,4;$

4) $|2x+1|\ge 3;$ 5) $|3+2x|\le 1;$ 6) $|1-3x|\ge 4.$

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. x-тің кез келген мәнінде

$$\frac{1}{2}x(2x-4)\ge(x-2)x$$

теңсіздігінің дұрыстығын дәлелде.

2. Теңсіздікті шеш:

1) $12-5x>0;$ 2) $3x-7\le 4(x+2);$ 3) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{4}<2.$

3. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

1) $\begin{cases}3x-13>0,\\25-4x>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-13\ge 3x-10,\\11-4x\le 12-3x;\end{cases}$

3) $\begin{cases}5x+3<3x-7,\\1-2x>x+4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}5x-7\le 2-4x,\\7-3x\ge 1-5x.\end{cases}$

319. $a<2b$ болсын. Дәлелде:

1) $4a-2b<a+4b;$ 2) $3a-2b<a+2b;$

3) $a+2b>3a-2b;$ 4) $a+b>4a-5b.$

320. Үшбұрыштың бір қабырғасы 4 см-ден ұзын, екінші қабырғасы біріншісінен 1,5 есе ұзын, үшінші қабырғасы екіншісінен 1,5 есе ұзын. Үшбұрыштың периметрі 19 см-ден ұзын екенін дәлелде.

321. x-тің қандай мәндерінде $y=-x+1$ және $y=x+2$ функцияларының мәндері бір мезгілде: 1) оң; 2) теріс; 3) 1-ден үлкен; 4) 2-ден үлкен болады?

322. Жұп санның одан кейін келетін жұп санның үш еселенгені мен қосындысы 134-тен үлкен, осы жұп санның одан алдын келетін жұп санның екі еселенгені мен қосындысы 104-тен кіші. Осы санды тап.

323. Тақ санның одан кейін келетін тақ санның екі еселенгені мен қосындысы 151-ден кіші, осы тақ санның одан алдын келетін тақ санның үш еселенгені мен қосындысы 174-тен үлкен. Осы санды тап.

324. Қос теңсіздік түрінде жаз:

1) $x=12\pm0{,}3$; 2) $y=23\pm1$; 3) $x=a\pm1$;
4) $y=m\pm0{,}1$; 5) $z=1{,}8\pm0{,}01$; 6) $z=b\pm0{,}2$.

325. Мына санды 0,01-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде көрсет:

1) $\frac{5}{11}$; 2) $\frac{3}{22}$; 3) $\frac{3}{13}$; 4) $\frac{2}{7}$; 5) $\frac{17}{24}$; 6) $\frac{5}{12}$.

326. Ұзындығы $l=0{,}25$ м, горизонталь қимасының ауданы $S\approx1{,}2\cdot10^2$ мм^2, салыстырмалы кедергісі $\rho\approx0{,}017\ \Omega\cdot$мм^2/м мыс таяқшасының кедергісін есепте $\left(R=\frac{\rho l}{S}\right)$.

327. Егер $m = 7{,}6$ кг, $v = 4{,}2$ м/с болса, дененің кинетикалық энергиясын

$$E_k=\frac{mv^2}{2}$$

формуламен есепте.

328. 20 см кесіндіні өлшегенде 0,5 мм қате болса, ал 1000 км-лік арақашықтықты өлшегенде 200 м-лік қателікке жол берілді. Қайсы өлшеу дәлірек?

329. 57 100 тұрғыны бар қалада әрбір қан тобына жататын адамдардың қанша екенін анықтау мақсатында медициналық зерттеу өткізілді. Қаны I топқа сәйкес келетін адамдар 32,9%-ды, II топтағылар 35,8%-ды, III топтағылар 23,2%-ды және IV топтағылар 8,1%-ды құрайтыны анықталды. Қалада әрбір қан тобындағы қанша адам жасайды?

II тарауға қатысты сынақ жаттығулары – тест

1. Теңсіздікті шеш: $5(x-3)+2x<4x+3$.

A) $x<6$; B) $x<-6$; C) $x>6$; D) $x>-6$.

2. Теңсіздікті шеш: $4(x-1)+5(x+1)<6(x+2)+7(x-1)$.

A) $x<-1$; B) $x>-1$; C) $x<1$; D) $x>1$.

3. Теңсіздікті шеш: $\frac{2x-3}{4}>\frac{x+1}{6}-\frac{4x+3}{3}$.

A) $x>1$; B) $x\le 1$ C) $x>-0{,}05$; D) $x<2$.

4. $7x+5\ge 3(x-1)-4x$ теңсіздіктің шешімі болатын ең кіші бүтін санды тап:

A) $x=2$; B) $x=-2$; C) $x=3$; D) $x=-1$.

5. $7(1-x)>5(3-x)$ теңсіздіктің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды тап:

A) $x=-5$; B) $x=-3$; C) $x=2$; D) $x=-2$.

6. x-тің қандай мәндерінде $\frac{3x-6}{5}$ бөлшегі $\frac{4x-5}{15}$ және $\frac{4-x}{3}$ бөлшектері қосындысынан кіші болады?

A) $x<3{,}3$; B) $x>2{,}3$; C) $x\le -2{,}3$; D) $x>4{,}5$.

7. x-тің қандай мәндерінде $\frac{3-5x}{4}$ және $\frac{7x+3}{6}$ бөлшектер айырмасы $\frac{3x+5}{12}$ және бөлшектен үлкен болады?

A) $x<\frac{1}{16}$; B) $x<-\frac{1}{16}$; C) $x>\frac{1}{16}$; D) $x>-\frac{1}{16}$.

8. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases}3(1-x)>5-4x,\\13-4x<1.\end{cases}$$

A) $x>\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{2}<x<3$; C) $x>3$; D) $x>-3$.

9. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} \le \dfrac{x+2}{2}, \\ \dfrac{x-4}{5} \ge \dfrac{x-5}{4}. \end{cases}$$

A) $1 \le x \le 9$; | B) $-12 \le x$; | C) $x \ge 9$; | D) $-12 \le x \le 9$.

10. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

$$\begin{cases} (x+3)(x+2) \le (x+4)(x-1)+5, \\ 2(5x-1) \ge 3(3x-2). \end{cases}$$

A) $-4 \le x \le -2{,}5$; B) $-4 \le x \le 2{,}5$; C) $4 \le x \le 2{,}5$; D) $0 \le x \le 2{,}5$.

11. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын ең кіші бүтін санды тап:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{3} > 1, \\ 3x - 2 > x + 2. \end{cases}$$

A) $x=7$; B) $x=-7$; C) $x=6$; D) $x=3$.

12. Теңсіздіктер жүйесінің шешімі болатын ең үлкен бүтін санды тап:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} < 1, \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

A) $x=-2$; B) $x=1$; C) $x=2$; D) $x=0$.

13. Теңсіздікті шеш: $|4x-5| \le 3$.

A) $x \ge -2$; B) $\frac{1}{2} \le x \le 1$; C) $\frac{1}{2} \le x \le 2$; D) $-2 \le x \le -\frac{1}{2}$.

14. Теңсіздікті шеш: $|1-3x| \le 2$.

A) $0 \le x \le \frac{1}{3}$; | B) $-1 \le x \le -\frac{1}{3}$; | C) $\frac{1}{3} \le x \le 1$; | D) $-\frac{1}{3} \le x \le 1$.

15. Теңсіздікті шеш: $|3-2x|\geq 1$.

A) $x\leq 1, x\geq 2$; B) $x\leq -1, x\geq -2$; C) $x\leq 2, x\geq 3$; D) $1\leq x\leq 2$.

16. Санның дәл мәні 1,483, жуық мәні 1,48 болса, жуықтау қателігін тап:

A) 0,003; B) 0,435; C) 1,335; D) 0,445.

17. Санның дәл мәні $\frac{8}{17}$, жуық мәні $\frac{1}{2}$ болса, жуықтау қателігін тап:

A) $\frac{1}{33}$; B) $\frac{1}{34}$; C) $\frac{1}{35}$; D) $\frac{7}{15}$.

18. Қос теңсіздік түрінде жаз: $a=-1{,}8\pm 0{,}2$.

A) $-2<a<-1{,}6$; C) $-2\leq a\leq -1{,}6$;

B) $-1{,}6\leq a\leq -2$; D) $-2\leq a\leq -1{,}82$.

19. Қос теңсіздік түрінде жаз: $a=2{,}71\pm 0{,}01$.

A) $2{,}7<a<2{,}72$; C) $2{,}7\leq a<2{,}711$;

B) $-1{,}6\leq a\leq -2$; D) $2{,}7\leq a\leq 2{,}72$.

20. $\frac{8}{15}$ -ді 0,01-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде жаз:

A) 0,53; B) 0,05; C) 0,61; D) 0,54.

21. $\frac{5}{14}$ -ді 0,001-ге дейінгі дәлдікпен ондық бөлшек түрінде жаз:

A) 0,357; B) 0,353; C) 0,456; D) 0,361.

22. Бөлменің ұзындығы $(5\pm 0{,}02)$ м-ге тең. Өлшеудің салыстырмалы қателігін анықта:

A) 4%; B) 0,4%; C) 0,02%; D) 0,05%.

23. Екі ауыл арасындағы қашықтық (100 ± 1) км. Өлшеудің салыстырмалы қателігін анықта:

A) 2%; B) 0,5%; C) 1%; D) 1,5%.

24. Санды жүзден бірге дейін дөңгелекте. Дөңгелектеудің салыстырмалы қателігін тап: 5,7635.

A) 5,76; 0,8%; C) 5,77; 0,08%;

B) 5,76; 0,9%; D) 5,76; 0,06%.

25. Санды оннан бірге дейін дөңгелекте. Дөңгелектеудің салыстырмалы қателігін тап: 2,2941.

A) 2,3; 0,26%; C) 2,3; 0,3%;

B) 2,2; 2,5%; D) 2,3; 0,4%.

Тарихи есептер

1. *Евклид есебі.* Егер a, b, c, d — оң сандар, a – олардың ең үлкені және $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ болса, онда $a+d>b+c$ болатынын дәлелде.

2. *Александриялық Папп есебі.* Егер a, b, c, d оң сандар және $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ болса, онда $ad>bc$ болатынын дәлелде.

3. *Бернулли теңсіздігі.* Егер $x_1, x_2, ..., x_n > -1$ және $x_1, x_2, ..., x_n$ сандарының барлығы бірдей таңбалы болса, $(1+x_1)(1+x_2) ... (1+x_n) \geq 1+x_1+...+x_2+ +x_n$ болады.

Бернулли теңсіздігін $n=2, 3$ болған жағдай үшін дәлелде.

4. $(1+a)^2 \approx 1+2a$ жуықтау формуласын пайдаланып есепте және қателікті бағала:

1) $(1,01)^2$; 2) $(1,001)^2$; 3) $(0,99)^2$; 4) $(0,999)^2$.

5. Вакуумда жарықтың жылдамдығын өлшеу $299796\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$ нәтижені берді, мұндағы өлшеу дәлдігі $4\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$ болды. Салыстырмалы қателікті тап.

6. Адамның шаш талшығының қалыңдығы $(0{,}15 \pm 0{,}005)$ мм. Ал Жерден Айға дейінгі арақашықтық $(380\,000 \pm 500)$ км-ге тең. Қайсы өлшеу дәлірек?

7. *Акмим папирусында:* „Ұзындығы $r=5$ және $R=10$ радиусты шеңберлер ұзындықтарының орташа арифметикалық мәніне тең дөңгелектің ауданы сондай радиустағы дөңгелектер аудандарының орташа арифметикалық мәніне тең“, делінген екен. Абсолютті және салыстырмалы қателікті тап.

Тарихи мағлұматтар

> (үлкен) және < (кіші) белгілері – қатаң теңсіздік белгілері алғаш ағылшын ғалымы Т. Гарриоттың 1631 жылы басылған еңбегінде келтірілген. Ал ≥ (үлкен немесе тең) және ≤ (кіші немесе тең) белгілері – қатаң емес теңсіздік белгілерін 1734 жылы француз математигі П. Буге енгізген.

x санының модулін $|x|$ түрінде белгілеуді 1841 жылы атақты неміс математигі К. Вэерштрас ұсынған.

Ежелгі Мысыр және Вавилонда анықталған математикалық жазбалар адамдар өте ерте замандардан-ақ жуықтап есептеулердің кейбір тәсілдерімен таныс екенін көрсетті. 4000 жыл бұрын Вавилон ғалымдары сандарды көбейту, квадрат дәрежеге шығару, кері сандардың кестелерімен қатар, сандардың квадрат түбірін табу кестелерін де құрастыра білген. Олар натурал сандардың квадрат түбірлерін жуық мәндерін тапқан.

2-, 3-дәрежелі теңдеу түбірлерін жуықтап есептеу тәсілдерін Ежелгі Қытай, Орта Азия ғалымдары тапқан.

Мырза Ұлықбек ғылыми мектебінің ғалымдары астрономиялық кестелерді („Зиждерді“) дәлірек құрастыру үшін жуықтап есептеудің жаңа тәсілдерін жаратқан. Ал Мырза Ұлықбек академиясының жетекші ғалымдарының бірі Ғиясиддин Жамшид әл-Каши „Шеңбер туралы еңбегінде“ π санының үтірден кейінгі 17 цифрын анық есептеген.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

Теңсіздіктерді, теңсіздіктер жүйесін шешуге әкелетін бірнеше есепті қарастырайық.

330. 4 құрт пен 5 кәмпит бірге 225 сумнан арзан. 3 құрт пен 2 кәмпит бірге 120 сумнан қымбат.
Қайсысы арзан: 13 құрт па немесе 10 кәмпит пе?
△ 1 құрттың бағасы x сум, 1 кәмпиттің бағасы y сум болсын. Онда есеп шартына сәйкес келетін осы теңсіздіктер жүйесіне ие боламыз:

$$\begin{cases} 4x+5y<225, \\ 3x+2y>120. \end{cases} \qquad (1)$$

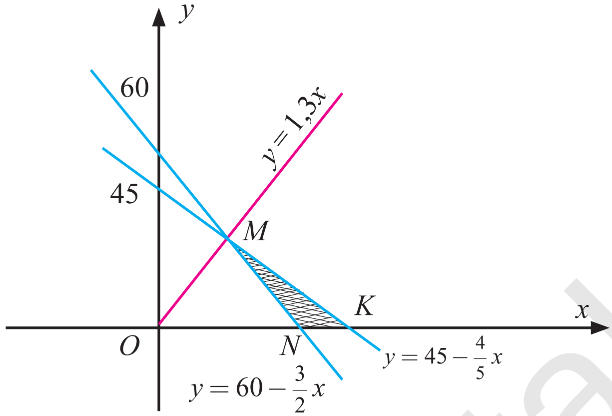
Бұдан

$$\begin{cases} 32x+40y<1800, \\ 45x+30y>1800, \end{cases}$$

яғни $45x+30y>32x+40y, \qquad 13x-10y>0.$

Демек, $13x>10y$.

Жауабы: 10 кәмпит 13 құрттан арзан.
Есепті геометриялық тұрғыдан қарастырайық.
Жазықтықтағы қандай сала (1) теңсіздіктер жүйесімен кескінделген?
(1) жүйенің 1-теңсіздігі $4x+5y=225$, яғни $y=45-\frac{4}{5}x$ түзуден *төменде* жататын барлық нүктелерді өрнектейді; ал 2-теңсіздік $3x+2y=120$, яғни $y=60-\frac{3}{2}x$ түзуден *жоғарыда* жататын барлық нүктелерді өрнектейді (35-сурет).
Осы екі жартылай жазықтықтың қиылысуы, $x>0$, $y>0$, екені ескерілсе, ΔMNK шығады. Құрт пен кәмпиттің дәл бағасын білмейміз, бұл бағаны өрнектейтін $(x;\ y)$ нүкте MNK үшбұрыш ішіндегі кез келген нүкте болуы мүмкін. Ал бұл үшбұрыш $13x = 10y$, яғни $y = 1{,}3x$ түзуден *төменде* жатыр.
Демек, $y < 1{,}3x$, яғни $13x > 10y$. ▲



35-сурет.

331. Емтиханда оқушылардың $\frac{1}{6}$ бөлігі „қанағаттанарлық“, 56%-ы „жақсы“, 14-і „үлгілі“ баға алды. „Үлгілі“ алғандар жалпы оқушылардың 4%-ынан көп, бірақ 5%-ынан кем болса, жалпы оқушы санын тап.

△ Жалпы оқушылар саны x болсын. Онда $\frac{x}{6}$ – „қанағаттанарлық“ баға, $\frac{56x}{100} = \frac{14}{25}x$ – „жақсы“ баға алған оқушылар саны болады. Жалпы оқушылар саны 6-ға да, 25-ке де бөлінеді, демек, $x = 6 \cdot 25 \cdot n = 150 \cdot n$, n – натурал сан. Шартқа орай, „үлгілі“ баға алған оқушылар саны $0{,}04x < 14 < 0{,}05x$ теңсіздікті қанағаттандырады. Осыған, $x = 150 \cdot n$-ны қойып, $6n < 14 < 7{,}5 \cdot n$, яғни $n = 2$ екенін табамыз.

Жауабы: 300 оқушы. ▲

332. Екі ыдыстағы бірдей бұйымдардың саны бірге 29-дан көп. 1-ыдыстан 2 бұйым алынғанда, онда қалған бұйымдар 2-ыдыстағыдан 3 еседен де көп болады. 1-ыдыстағы бұйымдардың 3 есесі мен 2-ыдыстағы бұйымдардың 2 есесінің айырмашылығы 60-тан кем. Әрбір ыдыста қанша бұйым бар?

△ 1-ыдыстағы бұйымдар санын x-пен, 2-ыдыстағы бұйымдар санын y-пен белгілейік. Онда есеп шартына сәйкес мына теңсіздіктер жүйесіне ие боламыз:

$$\begin{cases} x+y>29, \\ x-2>3y, \\ 3x-2y<60. \end{cases}$$

Бұл жүйені төмендегідей етіп жазамыз:

$$\begin{cases} x>29-y, \\ x>3y+2, \\ 20+\frac{2}{3}y>x. \end{cases} \tag{1}$$

Ал бұдан

$$20+\frac{2}{3}y>29-y, \tag{2}$$

$$20+\frac{2}{3}y>3y+2 \tag{3}$$

теңсіздіктердің төрттігі шығады. (2)-ден $y>\frac{27}{5}$, ал (3)-тен $y<\frac{54}{7}$ теңсіздікті аламыз.

Демек, $\frac{27}{5}<y<\frac{54}{7}$ немесе $5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}$. y – натурал сан болғандықтан ол 6-ға немесе 7-ге тең болады. Егер $y=6$ болса, онда (1) жүйені

$$\begin{cases} x>23, \\ x>20, \\ x<24 \end{cases}$$

түрінде жазып алуға болады. Бірақ бұл жүйені қанағаттандыратын натурал сан x жоқ. Демек, $y=7$ екен. Онда (1)-ден

$$\begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x<24\frac{2}{3} \end{cases}$$

жүйесіне келеміз. Бұл жүйені қанағаттандыратын бір ғана натурал сан $x = 24$ екені анық.

Жауабы: 1-ыдыста 24, 2-ыдыста 7 бұйым бар. ▲

333. Екі ыдыстағы бұйымдар саны бірге 27-ден көп. 2-ыдыстан 12 бұйым алынғанда, 1-ыдыстағы бұйымдар саны 2-ыдыстағыдан 2 еседен көбірек болады. 1-ыдыстан 10 бұйым алынғанда, 2-ыдыстағы бұйымдар саны 1-ыдыстағыдан 9 еседен көбірек болады. Әрбір ыдыста қаншадан бұйым бар?

334. 1-зауыт 1 күнде 950-ден көп болмаған мөлшерде өнім өндіреді. 2-зауыт бұрын 1-зауыт шығарған өнімнің 95%-ын өндіретін еді. Қосымша қондырғылар орнатылған соң, 2-зауыт өндірісті 1-зауытқа қарағанда 23%-ға арттырды және 1 күнде 1000-нан көп өнім бере бастады. 2-зауыт қосымша қондырғылар алғанға дейін, әрбір зауыт қанша өнім өндіретін еді? (Өнім саны натурал санмен өрнектеледі.)

△ 1-зауыттың 1 күндік өнімінің саны x болсын. Онда 2-зауыт бұрын $\frac{95x}{100}$, ал қосымша қондырғылар орнатылған соң $\left(\frac{95x}{100}+\frac{23x}{100}\right)$ өнім берген. Есеп мазмұнына сәйкес теңсіздіктер жүйесі мынадай болады:

$$\begin{cases} x \le 950, \\ \frac{95x}{100}+\frac{23x}{100} > 1000. \end{cases}$$

Бұдан

$$847\frac{27}{59} < x \le 950. \qquad (1)$$

Бірақ $\frac{95x}{100}$ және $\frac{23x}{100}$ сандары натурал сан болуы қажет, яғни $x = 100$-ге бөлінуі керек. (1) аралықта 100-ге бөлінетін сан 900. Демек, 1-зауыт 1 күнде 900 өнім шығарған. Ал 2-зауыт қосымша қондырғы орнатылғанға дейін $\frac{95}{100}\cdot 900 = 855$ дана өнім өндірген.

Жауабы: 900 дана, 855 дана. ▲

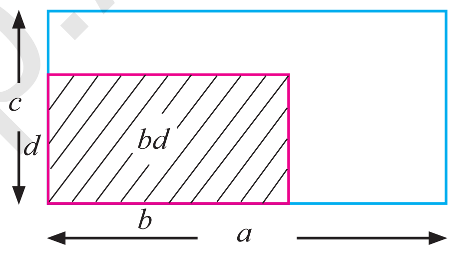
335. 1-ыдыста жасыл, ал 2-ыдыста ақ шарлар бар. Жасыл шарлардың саны ақ шарлар санының $\frac{15}{19}$ бөлігін құрайды. Жасыл шарлардың $\frac{3}{7}$ бөлігі, ақ шарлардың $\frac{2}{5}$ бөлігі ыдыстардан алынған соң, 1-ыдыста 1000-нан кем, 2-ыдыста 1150-ден көп шар қалды. Бастапқыда әрбір ыдыста қаншадан шар болған?

336. 80 т, 60 т, 50 т жүк сыятын вагондар бар. Егер жүк 80 т-лық вагондарға артылса, вагондардың 1-еуі бос қалады. Егер жүк 60 т-лық вагондарға артылса, 8-ден көп вагон керек болады және 1 вагон бос қалады. Егер жүк 50 т-лық вагондарға артылса, тағы 5 вагон қажет болады және бұл жағдайда вагондардың барлығы жүкпен толады. Жүк неше тонна болған?

337. Оқушылар әрбір қатарда 8-ден тізіліп тұрса, қатарлардың біреуі толмай қалады. Егер бір қатарда 7-ден болса, қатарлар толық болады, бірақ қатар саны 2-ге артады. Егер әрбір қатарда 5-тен болатын болса, қатар саны тағы да 7-ге артады, бірақ 1 қатар толмайды. Оқушылар санын анықта.

338. 1) a, b, c, d – оң сандар және $a > b$, $c > d$ болса, онда $ac > bd$ болатыны оқулықта дәлелденген. Бұл теңсіздікке геометриялық сипаттама бер және 36-суретті түсіндір:

2) Дөңес көпбұрыш ішінде жататын кез келген нүктеден оның төбесіне дейінгі арақашықтықтар қосындысы осы көпбұрыш периметрлерінен үлкен болатынын дәлелде.



36-сурет.

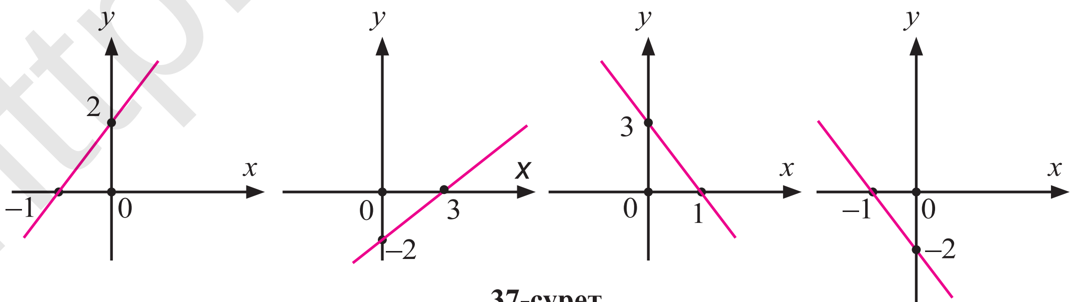
339. Көлемі 8 л ерітіндіде 60% қышқыл бар еді. Оған кислотасы қышқылы 20% ерітінді құйыла басталды. Қоспадағы қышқыл 40%-дан көп болмауы, бірақ 30%-дан аз болмауы үшін екінші ерітіндіні біріншісіне қанша құю керек?

340. 1) Жұмысшылар ұжымы 5 күнде 300-ден аз, ал 10 күнде 500-ден көп өнім даярлады. Егер ұжымда 8 адам жұмыс істеп, олардың еңбек өнімділігі бірдей болса, әрбір жұмысшы бір күнде қанша өнім даярлаған?
2) Автобус 8 рет қатнағанда 185-тен көп жолаушы, ал 15 рет қатнағанда 370-тен аз жолаушы тасымалдады. Егер автобус әр кез онда неше орын болса, соншама жолаушы тасымалдаған болса, автобуста неше орын бар?

341. Функцияның графигін сал және график бойынша x-тің қандай мәндерінде функция: оң; нөлге тең; 2-ден үлкен; –1-ден кіші мәндерді қабылдайтынын тап:

1) $y = 5x + 2$;   2) $y = 2x - 6$;
3) $y = -4x + 5$;   4) $y = -3x - 1$.

342. 37-суретте $y = kx + b$ сызықты функцияның графигі кескінделген. 1) k мен b-ны тап; 2) $x \geq 0$; 3) $x < 0$; 4) $x \geq 3$ 5); $7 \leq -2x$ болғандағы y функция қандай мәндерді қабылдайтынын теңсіздік белгісінің жәрдемімен жаз және пайда болған теңсіздікті шеш. Шешімін сан осінде кескінде.



37-сурет.

III ТАРАУ КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕР

22-§. КВАДРАТ ТЕҢДЕУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТҮБІРЛЕРІ

1-есеп. Тік төртбұрыштың табаны биіктігінен 10 см-ге артық, ал оның ауданы 24 $см^2$-ге тең. Тік төртбұрыштың биіктігін тап.

△ Тік төртбұрыштың биіктігі x сантиметр болсын, онда оның табаны $(x+10)$ сантиметрге тең. Осы тік төртбұрыштың ауданы $x(x+10)$ $см^2$-ге тең. Есептің шартына орай, $x(x+10)=24$.

Жақшаларды ашып, 24 санын қарама-қарсы таңбамен теңдеудің сол жақ бөлігіне өткізіп, төмендегі өрнекті пайда етеміз:

$$x^2+10x-24=0.$$

Теңдеудің сол жақ бөлігін топтау әдісімен көбейткіштерге бөлеміз:

$$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=$$
$$=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2).$$

Демек, теңдеуді мынадай етіп жазуға болады:

$$(x+12)(x-2)=0.$$

Бұл теңдеу $x_1=-12$ және $x_2=2$ түбірлерге ие.

Кесіндінің ұзындығы теріс сан болмайтыны себепті ізделінген биіктік 2 см-ге тең болады. ▲

Осы есепті шешуде квадрат теңдеу деп аталатын

$$x^2+10x-24=0$$

теңдеу пайда етеміз.

__Квадрат теңдеу__ деп

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

көрінісіндегі теңдеулерге айтылады, мұнда a, b, c — берілген сандар, $a\neq 0$, ал x белгісіз шама.

Квадрат теңдеудің *a, b, c* коэффициенттері былай аталады: *a–бірінші яки бастапқы коэффициент*, *b–екінші коэффициент*, *c – бос мүше.*

Мысалы, $3x^2-x+2=0$ теңдеудің бастапқы коэффициенті 3, екінші коэффициенті -1, бос мүшесі 2.

Математика, физика, техниканың көптеген есептерін шығару квадрат теңдеуді шығаруға келтіріледі.

Квадрат теңдеуге тағы да мысалдар келтірейік:

$$2x^2+x-1=0, \quad 5t^2-10t+3=0,$$
$$x^2-25=0, \quad 2x^2=0.$$

Көптеген есептерді шығару алгебралық түрлендірулердің нәтижесінде квадрат теңдеуге келтіріледі.

Мысалы,

$$2x^2+3x=x^2+2x+2$$

теңдеуі оның барлық мүшелерін сол жағына көшіріп, ұқсас мүшелерін ықшамдаған соң төмендегі квадрат теңдеу пайда болады.

$$x^2+x-2=0$$

2-есеп. Теңдеуді шеш:

$$x^2=64.$$

△ 64-ті теңдеудің сол бөлігіне көшіреміз, квадрат теңдеу келіп шығады:

$$x^2-64=0.$$

Сол бөлігін көбейткіштерге жіктейміз:

$$(x-8)(x+8)=0.$$

Демек, теңдеудің екі түбірі бар екен: $x_1=8$, $x_2=-8$. ▲

$x^2=64$ теңдеуінің бірінші түбірі 64 санының арифметикалық түбірі, ал екіншісі оған қарама-қарсы сан:

$$x_1=\sqrt{64}, x_2=-\sqrt{64}.$$

Әдетте, бұл екі формула біріктіріліп жазылады:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{64}.$$

2-есептің жауабын $x_{1,2}=\pm 8$ түрінде жазуға болады.

$x^2=64$ теңдеуі $x^2=d$ теңдеудің дербес жағдайы. Ал кез келген квадрат теңдеу $x^2=d$ теңдеу түріне келітірілуі мүмкін.

Теорема. ***$x^2=d$ теңдеуінің, мұнда $d>0$, екі түбірі бар:***

$$x_1=\sqrt{d},\ x_2=-\sqrt{d}.$$

○ d-ны теңдеудің сол бөлігіне көшіреміз:

$$x^2-d=0.$$

$d>0$ болғандықтан арифметикалық квадрат түбірдің анықтамасына орай $d=\left(\sqrt{d}\right)^2$. Сондықтан теңдеуді былай жазуға болады:

$$x^2-(\sqrt{d})^2=0.$$

Бұл теңдеудің сол бөлігін көбейткіштерге жіктесек, мына өрнек келіп шығады:

$$\left(x-\sqrt{d}\right)\left(x+\sqrt{d}\right)=0,$$

бұдан, $x_1=\sqrt{d}$, $x_2=-\sqrt{d}$. ●

Мысалы, $x^2=\frac{4}{9}$ теңдеу $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$ түбірлерге; $x^2=3$ теңдеу $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ түбірлерге; $x^2=8$ теңдеу $x_{1,2}=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$ түбірлерге ие.

Егер $x^2=d$ теңдеудің оң бөлігі нөлге тең болса, онда $x^2=0$ *теңдеуінің жалғыз түбірі болады:* $x=0$. $x^2=0$ теңдеуін $x\cdot x=0$ түрінде жазуға болғандықтан кейде $x^2=0$ *теңдеу өзара тең екі түбірі бар делінеді*: $x_{1,2}=0$.

Егер $d<0$ болса, онда $x^2=d$ *теңдеудің нақты түбірлері болмайды,* себебі нақты санның квадраты теріс оң болуы мүмкін емес. Мысалы, $x^2=-25$ теңдеуінің нақты түбірлері жоқ.

Жаттығулар

343. (Ауызша.) Төмендегі теңдеулердің қайсылары квадрат теңдеу болады:

1) $5x^2-14x+17=0$;
2) $\frac{2}{3}x^2+4=0$;
3) $-7x^2-13x+8=0$;
4) $17x+24=0$;
5) $-13x^4+26=0$;
6) $x^2-x=0$?

344. (Ауызша.) Квадрат теңдеудің коэффициенттерін және бос мүшесін айтып бер:

1) $5x^2-14x+17=0$;
2) $-7x^2-13x+8=0$;
3) $\frac{2}{3}x^2+4=0$;
4) $x^2+25x=0$;
5) $-x^2+x+\frac{1}{3}=0$;
6) $-x^2-x=0$.

345. Егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуінің коэффициенттері белгілі болса, осы квадрат теңдеуді жаз:

1) $a=2, b=3, c=4$;
2) $a=-1, b=0, c=9$;
3) $a=1, b=-5, c=0$;
4) $a=1, b=0, c=0$.

346. Берілген теңдеуді квадрат теңдеуге келтір:

1) $x(x-3)=4$;
2) $(x-3)(x-1)=12$;
3) $3x(x-5)=x(x+1)-x^2$;
4) $7(x^2-1)=2(x+2)(x-2)$.

347. –3, –2, 0, 1 сандардың қайсылары теңдеудің түбірі болады:

1) $x^2-9=0$;
2) $x^2-x=0$;
3) $x^2+x-6=0$;
4) $x^2-5x+4=0$;
5) $(x-1)(x+2)=0$;
6) $(x+1)(x-3)=x$?

348. (Ауызша.) $x^2=36$ теңдеуінің неше түбірі бар? Оларды тап. Олардың қайсысы 36-ның арифметикалық түбірі болады?

349. (Ауызша.) Теңдеуді шеш:

1) $x^2=1$; 2) $x^2=9$; 3) $x^2=16$; 4) $x^2=25$;

5) $x^2=100$; 6) $x^2=0$; 7) $x^2=49$; 8) $x^2=64$.

350. Теңдеудің түбірлерін тап:

1) $x^2=\frac{9}{16}$; 2) $x^2=\frac{16}{49}$; 3) $x^2=1\frac{7}{9}$; 4) $x^2=2\frac{1}{4}$;

5) $x^2=5$; 6) $x^2=13$; 7) $x^2=\frac{25}{49}$; 8) $x^2=10$.

351. Теңдеуді шеш:

1) $x^2-49=0$; 2) $x^2-121=0$; 3) $\frac{1}{3}x^2=0$;

4) $\frac{x^2}{5}=0$; 5) $x^2+9=0$; 6) $x^2+12=0$.

352. Квадрат теңдеуді, оның сол бөлігін көбейткіштерге жіктеп шешіңдер:

1) $x^2-x=0$; 2) $x^2+2x=0$; 3) $3x^2+5x=0$;

4) $5x^2-3x=0$; 5) $x^2-4x+4=0$; 6) $x^2+6x+9=0$.

23-§. ТОЛЫМСЫЗ КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ

Егер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуіндегі b немесе c коэффициенттерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең болса, онда бұл теңдеуді *толымсыз квадрат теңдеу* деп атайды.

Демек, толымсыз квадрат теңдеу төмендегі теңдеулердің бірінің көрінісінде болады:

$$ax^2=0, \tag{1}$$

$$ax^2+c=0, c\neq 0, \tag{2}$$

$$ax^2+bx=0, b\neq 0. \tag{3}$$

(1), (2), (3) теңдеулердегі *a коэффициенті нөлге тең емес екенін* ескертеміз.

Толымсыз квадрат теңдеудің қалай шешілетінін көрейік.

1-есеп. Теңдеуді шеш:

$$5x^2=0.$$

△ Бұл теңдеудің екі бөлігін 5-ке бөліп,

$$x^2=0$$

теңдеуі шығады, бұдан $x=0$. ▲

2-есеп. Теңдеуді шеш:

$$3x^2-27=0.$$

△ Теңдеудің екі бөлігін 3-ке бөлейік:

$$x^2-9=0.$$

Бұл теңдеуді былай жазуға болады:

$$x^2=9,$$

бұдан $x_{1,2}=\pm 3$. ▲

3-есеп. Теңдеуді шеш:

$$2x^2+7=0.$$

△ Теңдеуді былай жазуға болады:

$$x^2=-\frac{7}{2}.$$

Бұл теңдеудің нақты түбірлері жоқ, себебі x-тің кез келген нақты мәндерінде $x^2\geq 0$ болады. ▲

4-есеп. Теңдеуді шеш:

$$-3x^2+5x=0.$$

△ Теңдеудің сол бөлігін көбейткіштерге жіктеп,

$$x\ (-3x+5)=0$$

екенін табамыз, бұдан: $x_1=0, x_2=\frac{5}{3}$.

Жауабы: $x_1=0,\ x_2=\frac{5}{3}$. ▲

Жаттығулар

Теңдеуді шеш (**353–357**):

353. 1) $x^2=0$; 2) $3x^2=0$; 3) $5x^2=125$;
4) $9x^2=81$; 5) $4x^2-64=0$; 6) $x^2-27=0$;
7) $4x^2=81$; 8) $0{,}01x^2=4$; 9) $0{,}04x^2=16$.

354. 1) $x^2-7x=0$; 2) $x^2+5x=0$; 3) $5x^2=3x$;
4) $4x^2=0{,}16x$; 5) $9x^2-x=0$; 6) $9x^2+1=0$;
7) $x^2-3x=0$; 8) $0{,}1x^2-x=0$; 9) $16x^2+3=0$.

355. 1) $4x^2-169=0$; 2) $25-16x^2=0$; 3) $2x^2-16=0$;
4) $3x^2=15$; 5) $2x^2=\frac{1}{8}$; 6) $3x^2=5\frac{1}{3}$;
7) $3x^2=27$; 8) $4x^2=64$; 9) $1\frac{9}{16}x^2=4$.

356. 1) $\frac{x^2-1}{3}=5$; 2) $\frac{9-x^2}{5}=1$; 3) $4=\frac{x^2-5}{5}$;
4) $3=\frac{9x^2-4}{4}$; 5) $\frac{16-x^2}{4}=3$; 6) $5=\frac{x^2-6}{2}$.

357. 1) $3x^2+6x=8x^2-15x$; 2) $17x^2-5x=14x^2+7x$;
3) $10x+7x^2=2x^2+8x$; 4) $15x+9x^2=7x^2+10x$.

358. x-тің қандай мәндерінде берілген бөлшектер біріне-бірі тең болады:
1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ va $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ va $\frac{7x^2-5x}{3}$?

24-§. КВАДРАТ ТЕҢДЕУДІҢ ТҮБІРЛЕРІН ТАБУ ФОРМУЛАЛАРЫ. ДИСКРИМИНАНТ

Квадрат теңдеулерді шешу үшін *толық квадратты бөліп алу әдісі* қолданылады. Бұл әдісті мысалдар арқылы қарастырайық.

1-есеп. Квадрат теңдеуді шеш:

$$x^2+2x-3=0.$$

△ Бұл теңдеуді былай түрлендіреміз:

$$x^2+2x=3,$$

$$x^2+2x+1=3+1,$$

$$(x+1)^2=4.$$

Демек, $x+1=2$ немесе $x+1=-2$, бұдан $x_1=1$, $x_2=-3$. ▲

Біз, $x^2+2x-3=0$ теңдеуді шешкенде, оның *сол бөлігі екі мүшенің квадраты* $(x+1)^2$ *болатындай, ал оң бөлігінде белгісіз қатыспайтындай* етіп түрлендірдік.

2-есеп. Теңдеуді шеш:

$$x^2+6x-7=0.$$

△ Бұл теңдеуді оның сол бөлігіндегі екі мүшенің квадраты болатындай етіп түрлендіреміз:

$$x^2+6x=7,$$

$$x^2+2\cdot 3x=7,$$

$$x^2+2\cdot 3x+3^2=7+3^2,$$

$$(x+3)^2=16.$$

Бұл түрлендіруді түсіндірейік. x^2+6x өрнегіндегі бірінші қосылғыш x санының квадраты, ал екіншісі x пен 3-тің екі еселенген көбейтіндісі. Сондықтан теңдеудің сол бөлігінде екі мүшенің квадраты шығуы үшін теңдеудің екі бөлігінде де 3^2-сін қосу керек.

$(x+3)^2=16$ теңдеуін шешіп, $x+3=4$ немесе $x+3=-4$-ті шығарамыз, бұдан $x_1=1$, $x_2=-7$. ▲

3-есеп. $4x^2-8x+3=0$ теңдеуді шеш.

$$△\quad 4x^2-8x=-3,$$

$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x=-3,\ (2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x+4=-3+4,$$

$$(2x-2)^2=1,\ 2x-2=1 \text{ yoki } 2x-2=-1,$$

$$x_1=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{1}{2}.\ ▲$$

4-есеп. $x^2+5x-14=0$ теңдеуді шеш.

$$\triangle\quad x^2+5x=14,\quad x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=14+\frac{25}{4},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4},\quad x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2},$$

$$x_1=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2,\ x_2=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7.\ \blacktriangle$$

Жоғарыда квадрат теңдеулерді толық квадратты бөлу әдісімен шешу қарастырылған еді. Осы әдісті жалпы түрдегі квадрат теңдеуді шешу формуласын келтіріп шығаруға қолданамыз.

Жалпы түрдегі квадрат теңдеуді қарастырайық:

$$ax^2+bx+c=0,\ \text{мұнда}\ a\neq 0.$$

Теңдеудің екі бөлін a-ға бөліп,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

квадрат теңдеуді аламыз.

Бұл теңдеуді оның сол бөлігінде *екі мүшесінің толық квадраты* келіп шығатындай етіп түрлендіреміз:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},\qquad x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (1)$$

Егер $b^2-4ac\geq 0$ болса, онда

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2.$$

Бұдан

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

немесе

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \qquad (2)$$

(2) формуланы *жалпы түрдегі квадрат теңдеу түбірлерінің формуласы* деп атайды.

$D = b^2 - 4ac$ өрнегі $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеудің *дискриминанты* деп аталады. (2) формуладан көрініп тұр, квадрат теңдеу:

1) $D > 0$ болса, x_1 және x_2 – екі түрлі түбірге ие, $x_1 \neq x_2$;
2) $D = 0$ болса, $x_1 = x_2$ – бір түбірге ие;
3) $D < 0$ болса, накты түбірлері жоқ.

1-есеп. Теңдеуді шеш:

$$6x^2 + x - 2 = 0.$$

△ Мұнда $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$ және $D > 0$, яғни теңдеудің екі түбірі бар. (2) формула бойынша төмендегілерді табамыз:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6(-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

бұдан

$$x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}.$$

Жауабы: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ▲

2-есеп. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ теңдеуін шеш.

△ Мұнда $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$ және $D = 0$, яғни теңдеудің бір түбірі бар. (2) формула бойынша төмендегілерді табамыз:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Жауабы: $x = \frac{1}{2}$. ▲

Егер (1) теңдіктің оң бөлігінде теріс сан тұрса, яғни $D = b^2 - 4ac < 0$ болса, онда (1) теңдік x-тің кез келген мәнінде дұрыс емес болады, себебі оның сол бөлігі теріс емес. Сондықтан, *егер* $D=b^2-4ac<0$ *болса,*

$$ax^2+bx+c=0$$

теңдеудің нақты түбірлері болмайды.

3-есеп. $x^2-4x+5=0$ теңдеудің нақты түбірлері жоқ екенін дәлелде.

△ Мұнда $a=1$, $b=-4$, $c=5$,

$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0.$$

Демек, берілген теңдеудің нақты түбірлері жоқ. ▲

4-есеп. $2x^2+3x+4=0$ теңдеуін шеш:

△ (2) формуламен есептесек:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot4}}{4}.$$

Түбір таңбасының астындағы сан теріс:

$$9-4\cdot2\cdot4=9-32<0.$$

Жауабы: теңдеудің нақты түбірлері жоқ. ▲

Бұл мысалды $D=b^2-4ac=-23<0$: нақты түбірлері жоқ екендігіне дискриминантты пайдаланып та көз жеткізуге болады.

Толымсыз квадрат теңдеулерді де (2) формуламен шешуге болады, бірақ оларды шешуде 23-§-та қарастырылған әдістерді пайдаланған ыңғайлы.

Жаттығулар

359. Сондай оң m санды тап, нәтижеде берілген өрнек қосынды немесе айырманың квадраты болсын:

1) x^2+4x+m; 2) x^2-6x+m; 3) $x^2-14x+m$;

4) $x^2+16x+m$; 5) x^2+mx+4; 6) x^2-mx+9.

360. Теңдеуді толық квадратты бөлу әдісімен шеш:

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+4x-12=0$;

3) $x^2+2x-15=0$; 4) $x^2-10x+16=0$;

5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2+8x-7=0$.

Теңдеуді шеш (**361–363**):

361. 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$.

362. 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-3x-10=0$.

363. 1) $2x^2+3x-5=0$; 2) $5x^2-7x-6=0$.

364. $D=b^2-4ac$ өрнегінің мәнін есепте, мұнда:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=3, b=-0,2, c=-0,01$;

3) $a=7, b=-6, c=-45$; 4) $a=-1, b=5, c=1800$.

365. Квадрат теңдеуді шеш:

1) $2x^2+3x+1=0$; 2) $2x^2-3x+1=0$;

3) $2x^2+5x+2=0$; 4) $2x^2-7x+3=0$;

5) $3x^2+11x+6=0$; 6) $4x^2-11x+6=0$.

366. x-тің қандай мәндерінде өрнектің мәні нөлге тең болады:

1) $2x^2+5x-3$; 2) $2x^2-7x-4$; 3) $3x^2+x-4$;

4) $3x^2+2x-1$; 5) x^2+4x-3; 6) $3x^2+12x+10$;

7) $-2x^2+x+1$; 8) $-3x^2-x+4$; 9) $6x^2-5x+1$?

Квадрат теңдеуді шеш (**367–368**):

367. 1) $9x^2-6x+1=0$; 2) $16x^2-8x+1=0$;

3) $49x^2+28x+4=0$; 4) $36x^2+12x+1=0$.

368. 1) $2x^2+x+1=0$; 2) $3x^2-x+2=0$;

3) $5x^2+2x+3=0$; 4) $x^2-2x+10=0$.

369. Төмендегі теңдеулерді шешпестен, олардың неше нақты түбірі болатынын анықта:

1) $2x^2+5x-7=0$; 2) $3x^2-7x-8=0$;

3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $9x^2-6x+2=0$.

Теңдеуді шеш (**370–372**):

370. 1) $7x^2-6x+2=0$; 2) $3x^2-5x+4=0$;

3) $9x^2+12x+4=0$; 4) $4x^2-20x+25=0$;

5) $4x^2+12x+9=0$; 6) $x^2-3x-4=0$.

371. 1) $6x^2=5x+1$; 2) $5x^2+1=6x$;

3) $x(x-1)=72$; 4) $x(x+1)=56$;

5) $2x(x+2)=8x+3$; 6) $3x(x-2)-1=x-0,5(8+x^2)$.

372. 1) $\frac{x^2+3x}{2}=\frac{x+7}{4}$; 2) $\frac{x^2-3x}{7}+x=11$;

3) $\frac{2x^2+x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{x^2-6}{6}$; 4) $\frac{x^2+x}{4}-\frac{3-7x}{20}=0,3$.

373. Теңдеуді шеш:

1) $5x^2-8x-4=0$; 2) $4x^2+4x-3=0$;

3) $8x^2-6x+1=0$; 4) $5x^2-26x+5=0$.

374. Теңдеуді толық квадратты бөлу әдісімен шеш:

1) $x^2-16x+48=0$; 2) $x^2-7x-18=0$;

3) $x^2-15x+56=0$; 4) $x^2+12x+27=0$;

5) $x^2-11x+28=0$; 6) $x^2-11x+18=0$;

7) $x^2+10x+21=0$; 8) $2x^2-5x+2=0$;

9) $x^2-21x+20=0$; 10) $x^2-6x-55=0$;

11) $3x^2-x-70=0$; 12) $x^2-100x+99=0$.

$ax^2+bx+c=0$ теңдеудің әр екі бөлігін $4a$-ға көбейтіп те $ax^2+bx+c=0$ үш мүшеден толық квадратты бөліп алуға болады:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \text{ бұдан, } 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Онда, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Мысал. Толық квадратты жоғарыдағы әдіспен бөліп алып, $10x^2 + 13x - 3 = 0$ теңдеуін шеш:

△ $10x^2 + 13x - 3 = 0,\ 40\cdot 10x^2 + 40\cdot 13x - 3\cdot 40 = 0,$

$$(20x)^2 + 2\cdot 20x\cdot 13 + 13^2 - 13^2 - 3\cdot 40 = 0,$$

$$(20x + 13)^2 = 169 + 120,\ (20x + 13)^2 = (17)^2;\ \ 20x + 13 = \pm 17;$$

$$x_1 = \frac{17 - 13}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5};\qquad x_2 = \frac{-17 - 13}{20} = \frac{-30}{20} = -\frac{3}{2}.$$

Жауабы: $x = \frac{1}{5},\ x = -\frac{3}{2}$. ▲

375. Теңдеуді көрсетілген әдіспен шешіп көр:

1) $12x^2 - 7x + 1 = 0;$

2) $6x^2 + 5x + 1 = 0;$

3) $8x^2 + 7x - 1 = 0;$

4) $\frac{x^2}{12} - \frac{1}{12}x - 1 = 0.$

№ 4

Қырының ұзындығы 3 см-лік куб қызыл түске боялған. Ол қыры 1 см-лік кішкене кубтарға бөлінді. Үш жағы қызыл түсті кішкене куб нешеу? Екі жағы қызылы ше? Бір жағы қызылы ше? Бірде-бір қызыл жағы жоғы ше?

25-§. ВИЕТ ТЕОРЕМАСЫ. КВАДРАТ ҮШМҮШЕНІ СЫЗЫҚТЫҚ КӨБЕЙТКІШТЕРГЕ ЖІКТЕУ

Мына

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

түрдегі квадрат теңдеу ***келтірілген квадрат теңдеу*** *деп аталады.*

Бұл теңдеудің бастапқы коэффициенті бірге тең. Мысалы,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

теңдеуі — келтірілген квадрат теңдеу.

Кез келген

$$ax^2 + bx + c = 0$$

квадрат теңдеуді оның екі бөлігін $a \neq 0$-ге бөліп, (1) түрге келтіруге болады.

Мысалы, $4x^2 + 4x - 3 = 0$ теңдеуін 4-ке бөлетін болсақ, мынадай түрге келтіріледі:

$$x^2 + x - \frac{3}{4} = 0.$$

(1) келтірілген квадрат теңдеудің түбірлерін табамыз. Ол үшін жалпы түрдегі $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеудің түбірлерінің формуласын табамыз, яғни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2)$$

формуласын пайдаланамыз. Жалпы түрдегі квадрат теңдеудегі $a=1$, $b=p$, $c=q$ болса, келтірілген квадрат теңдеу

$$x^2 + px + q = 0$$

пайда болады. Сондықтан келітірілген квадрат теңдеу үшін (2) формула

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

немесе

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \qquad (3)$$

түрінде болады.

(3) формуланы *келтірілген квадрат теңдеу түбірлері формуласы* деп атайды.

(3) формуланы, әсіресе, p жұп сан болғанда пайдаланған тиімді. Мысалы, $x^2 - 14x - 15 = 0$ теңдеуін шешейік.

△ (3) формула бойынша төмендегіні табамыз:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Жауабы: $x_1 = 15,\ x_2 = -1.$ ▲

Келтірілген квадрат теңдеу үшін төмендегі теорема орынды:

Виет теоремасы. ***Егер x_1 және x_2***

$$x^2 + px + q = 0$$

теңдеуінің түбірлері болса, онда

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

формулалар орынды, яғни келтірілген квадрат теңдеудің түбірлерінің қосындысы қарама-қарсы таңбамен алынған екінші коэффициентке тең, ал түбірлерінің көбейтіндісі бос мүшеге тең.

○ (3) формула бойынша:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Бұл теңдіктерді мүшелеп қоссақ, $x_1+x_2=-p$ болады. Бұл теңдіктерді көбейтіп, квадраттар айырмасы формуласы бойынша төмендегіні шығарамыз:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q. \text{ ●}$$

Мысалы, $x^2-13x+30=0$ теңдеуі $x_1=10$, $x_2=3$ түбірлеріне ие; осы түбірлерінің қосындысы $x_1+x_2=13$, ал көбейтіндісі $x_1 \cdot x_2=30$ болады.

Виет теоремасы квадрат теңдеудің екі түбірі тең $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ болған жағдайда да дұрыс болады.

Мысалы, $x^2-6x+9=0$ теңдеуінің екі түбірі тең $x_1=x_2=3$; олардың қосындысы $x_1+x_2=6$, көбейтіндісі $x_1 \cdot x_2=9$.

1-есеп. $x^2+px-12=0$ теңдеуінің түбірлерінің біреуі $x_1=4$. Осы теңдеудің p коэффициентін және екінші түбірі x_2-ні тап.

△ Виет теоремасына орай:

$$x_1 \cdot x_2 = -12, x_1 + x_2 = -p.$$

$x_1=4$ болғандықтан $4x_2=-12$, бұдан $x_2=-3$,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4-3) = -1.$$

Жауабы: $x_2=-3$, $p=-1$. ▲

2-есеп. Түбірлері $x_1=3$, $x_2=4$ болатын келтірілген квадрат теңдеу құраңдар.

△ $x_1=3$; $x_2=4$ сандары $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері болғандықтан Виет теоремасына орай $p=-(x_1+x_2)=-7$, $q=x_1x_2=12$.

Жауабы: $x^2-7x+12=0$. ▲

3-есеп. $3x^2+8x-4=0$ теңдеуінің түбірлерінің біреуі оң. Теңдеуді шешпестен, екінші түбірінің таңбасын анықта.

△ Теңдеудің екі бөлігін 3-ке бөліп, төмендегіні пайда етеміз:

$$x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{4}{3} = 0.$$

Виет теоремасына орай $x_1x_2=-\frac{4}{3}<0$. Есеп шарты бойынша $x_1>0$, демек, $x_2<0$. ▲

Кейбір есептерді шешкенде төмендегі *Виет теоремасына кері теорема* қолданылады.

Егер p, q, x_1, x_2 сандары үшін

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q \qquad (4)$$

қатынастары орындалса, онда x_1 және x_2 сандары

$$x^2+px+q=0$$

теңдеуінің түбірлері болады.

○ Сол бөлігіндегі

$$x^2+px+q$$

өрнектегі p-ның орнына $-(x_1+x_2)$-ні, ал q-дің орнына $x_1\cdot x_2$ көбейтіндіні қоямыз. Нәтижеде төмендегі өрнек келіп шығады:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Сонымен, егер p, q, x_1 және x_2 сандары (4) қатынастармен байланысты болса, онда *x-тің кез келген мәнінде*

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$

теңдігі орындалады, ал бұдан x_1 және x_2-лер $x^2+px+q=0$ теңдеуінің түбірлері екендігі келіп шығады. ●

Виет теоремасына кері теореманы пайдаланып, квадрат теңдеудің түбірлерін кейде *таңдау әдісімен* табуға болады.

4-есеп. Таңдау әдісімен

$$x^2-5x+6=0$$

теңдеудің түбірлерін тап.

△ Мұндағы $p=-5$, $q=6$. Екі x_1 және x_2 сандарын

$$x_1+x_2=5,\ x_1x_2=6$$

болатындай етіп таңдап аламыз.

$6=2\cdot3$ және $2+3=5$ екенін ескеріп, Виет теоремасына кері теоремаға орай $x_1=2$, $x_2=3$-ке, яғни $x^2-5x+6=0$ теңдеудің түбірлеріне ие боламыз. ▲

5-есеп. $\dfrac{x^2-x-12}{x+3}$ бөлшекті ықшамда.

△ Бөлшектің алымын көбейткіштерге жіктейміз:

$$x^2-x-12=x^2-4x+3x-12=$$
$$=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3).$$

Демек,

$$\frac{x^2-x-12}{x+3}=\frac{(x-4)(x+3)}{x+3}=x-4.\ ▲$$

ax^2+bx+c көпмүшесін *квадрат үшмүше* деп атайды, мұндағы $a\neq0$.

5-есепті шығарғанда x^2-x-12 квадрат үшмүше топтау әдісімен көбейткіштерге жіктеледі. Оны төмендегі теореманы пайдаланып та көйбейткіштерге жіктеуге болады.

Теорема. ***Егер x_1 және x_2-лер $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеудің түбірлері болса, онда барлық x үшін мына теңдік орынды болады:***

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).} \tag{5}$$

○ (5) теңдіктің оң бөлігіндегі өрнекті түрлендіреміз:

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2)&=ax^2-ax\cdot x_1-ax\cdot x_2+ax_1x_2=\\ &=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

x_1 және x_2-лер $ax^2+bx+c=0$ теңдеудің, яғни $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ теңдеудің түбірлері болғандықтан Виет теоремасына орай,

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

бұдан $a(x_1+x_2)=-b,\ ax_1x_2=c.$

Осы өрнектерді (6) теңдікке қойсақ, (5) формула келіп шығады. ●

(5) *формула* ax^2+bx+c *квадрат үшмүше сызықтық көбейткіштерге жіктелгенін өрнектейді.*

6-есеп. $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$ өрнегін ықшамда.

△ Бөлшектің алымы мен бөлімін көбейткіштерге жіктейміз.

1) $2x^2+5x-3=0$ теңдеуінің екі түбірі бар:

$$x_1=\frac{1}{2},\, x_2=-3.$$

Дәлелденген теоремаға орай

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

2) $x^2-x-12=0$ теңдеуі $x_1=-3,\ x_2=4$ түбірлеріне ие. Дәлелденген теоремаға орай $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$.

Сонымен,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}=\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-4}.\ ▲$$

Жаттығулар

376. Келтірілген квадрат теңдеуді шеш:

1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2-6x-7=0$;

3) $x^2-8x-9=0$; 4) $x^2+6x-40=0$;

5) $x^2+x-6=0$; 6) $x^2-x-2=0$.

377. (Ауызша.) Келтірілген квадрат теңдеу түбірлерінің қосындысы мен көбейтіндісін тап:

1) $x^2 - x - 2 = 0$;
2) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 7x + 5 = 0$;
6) $x^2 + 9x - 6 = 0$.

378. (Ауызша.) $x^2 - 19x + 18 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің біреуі 1-ге тең. Оның екінші түбірін тап.

379. (Ауызша.) $28x^2 + 23x - 5 = 0$ теңдеуінің түбірлерінің біреуі 1-ге тең. Оның екінші түбірін тап.

380. (Ауызша.) Теңдеуді шешпестен, оның түбірлерінің таңбаларын анықта:

1) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
2) $x^2 + 5x + 3 = 0$;
3) $x^2 - 5x + 3 = 0$;
4) $x^2 - 8x - 7 = 0$.

381. Түбірлері x_1 және x_2 болатын келтірілген квадрат теңдеуді жаз:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -1$;
2) $x_1 = 2,\ x_2 = 3$;
3) $x_1 = -4,\ x_2 = -5$;
4) $x_1 = -3,\ x_2 = 6$.

382. Таңдау әдісімен теңдеудің түбірлерін тап:

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$;
2) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
3) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
4) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
5) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
6) $x^2 + 2x - 15 = 0$.

383. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жікте:

1) $x^2 - 5x + 6$;
2) $x^2 + 4x - 5$;
3) $x^2 + 5x - 24$;
4) $x^2 + x - 42$;
5) $2x^2 - x - 1$;
6) $8x^2 + 10x + 3$;
7) $-6x^2 + 7x - 2$;
8) $-4x^2 - 7x + 2$.

384. Бөлшекті қысқарт:

1) $\frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x-12}{x-2}$; 3) $\frac{x+3}{x^2-6x-27}$;

4) $\frac{x-8}{x^2-x-56}$; 5) $\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$; 6) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}$.

385. Келтірілген квадрат теңдеуді шеш:

1) $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$; 2) $x^2-2\sqrt{5}x+1=0$;

3) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 4) $x^2-4\sqrt{7}x+4=0$.

386. Көбейткіштерге жікте:

1) x^3-3x^2+2x; 2) x^3+4x^2-21x; 3) x^3+5x^2-24x;

4) x^3-9x^2-22x; 5) x^3-8x^2+7x; 6) x^3-5x^2+6x.

387. Бөлшекті қысқарт:

1) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}$; 2) $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$; 3) $\frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}$; 4) $\frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}$.

388. Өрнекті ықшамда:

1) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{3}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{7}{5x^2+3x-2}-\frac{5}{5x-2}$; 4) $\frac{5x+1}{x^2+9x-10}:\frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}$.

26- §. БИКВАДРАТ ТЕҢДЕУ. КВАДРАТ ТЕҢДЕУГЕ КЕЛТІРІЛЕТІН ТЕҢДЕУЛЕР

1-есеп. Теңдеуді шеш:

$$x^4-7x^2+12=0.$$

△ $x^2=t$ деп *белгілейміз*. Онда теңдеу мына түрге келеді:

$$t^2-7t+12=0.$$

Мына квадрат теңдеуді шешеміз:

$$t_1=4,\ t_2=3.$$

$x^2=t$ болғандықтан берілген теңдеуді шешу төмендегі екі теңдеуді шешуге келтіріледі:

$$x^2=4,\ x^2=3,$$

бұдан:

$$x_{1,2}=\pm 2,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$$

Жауабы: $x_{1,2}=\pm 2,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{3}.$ ▲

Мына

$$ax^4+bx^2+c=0$$

көріністегі теңдеу биквадрат теңдеу деп аталады, мұндағы $a\neq 0$.

$x^2=t$ *белгілеу* арқылы бұл теңдеу биквадрат теңдеуге келтіріледі.

2-есеп. Биквадрат теңдеуді шеш:

$$9x^4+5x^2-4=0.$$

△ $x^2=t$ деп белгілейміз. Онда

$$9t^2+5t-4=0.$$

Бұл квадрат теңдеуді шешіп, төмендегіні табамыз:

$$t_1=\frac{4}{9},\ t_2=-1.$$

$x^2=\frac{4}{9}$ теңдеуінің $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}$ түбірлері бар, ал $x^2=-1$ теңдеуінің нақты түбірлері жоқ.

Жауабы: $x_{1,2}=\pm\frac{2}{3}.$ ▲

3-есеп. Теңдеуді шеш:

$$\frac{3}{x+2}-\frac{4}{x-3}=3.$$

△ Теңдеудегі бөлшектердің ортақ бөлімі $(x+2)(x-3)$-ке тең. Егер $x+2\neq 0$ және $x-3\neq 0$ болса, онда теңдеудің екі бөлігін $(x+2)(x-3)$-ке көбейтіп табатынымыз:

$$3(x-3)-4(x+2)=3(x+2)(x-3).$$

Осы теңдеуді түрлендіреміз:

$$3x-9-4x-8=3(x^2-x-6),$$
$$-x-17=3x^2-3x-18,$$
$$3x^2-2x-1=0.$$

Пайда болған квадрат теңдеуді шешіп, оның түбірлерін табамыз:

$$x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}.$$

$x=1$ және $x=-\frac{1}{3}$ болғанда берілген бөлшектердің бөлімдері нөлге айналмағандықтан 1 және $-\frac{1}{3}$ сандар берілген теңдеудің түбірлері болады.

Жауабы: $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}$. ▲

4-есеп. Теңдеуді шеш:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{3}{x-1}=\frac{3-x}{x-2},\ x\neq 1,\ x\neq 2. \qquad (1)$$

△ Есеп шартына орай $(x-1)(x-2)\neq 0$. теңдеудің екі бөлігін де $(x-1)(x-2)$-ге көбейтіп, төмендегіні аламыз:

$$1+3(x-2)=(3-x)(x-1).$$

Осы теңдеуді түрлендіреміз:

$$\begin{aligned}1+3x-6&=-x^2+4x-3,\\ x^2-x-2&=0.\end{aligned} \qquad (2)$$

Пайда болған квадрат теңдеуді шешіп, оның түбірлерін табамыз:

$$x_1=-1,\ x_2=2.$$

$x=-1$ болғанда берілген теңдеудің бөлімдері нөлге айналмайды. Демек, -1 саны – берілген теңдеудің түбірі. Ал $x=2$ болғанда, берілген теңдеудегі екі бөлшектің бөлімі нөлге тең болады. Сондықтан 2 саны берілген теңдеудің түбірі болмайды.

Жауабы: $x=-1$. ▲

4-есепте берілген (1) теңдеу екі түбірі бар (2) квадрат теңдеуге келтіріледі. Ол түбірлердің біреуі, яғни $x_1=-1$ (1) теңдеудің түбірі болады. Екінші $x_2=2$ түбір (1) теңдеудің түбірі болмайды, мұндай жағдайда оны *бөгде түбір* деп атайды.

Сонымен, теңдеуді белгісіз қатысқан өрнекке көбейткенде бөгде түбірлер пайда болуы мүмкін. Сондықтан *бөлшектің бөліміне белгісіз қатысқан теңдеулерді шешімін тапқан соң тексеру өткізу қажет.*

5-есеп. Теңдеуді шеш:

$$\frac{x+7}{x+4}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2+7x+12}=0.$$

Бұл түрдегі теңдеулер *бөлшек-рационал теңдеулерге* мысал болады.

△ $x^2+7x+12$ квадрат үшмүшені көбейткіштерге жіктейміз. $x^2+7x+12=0$ теңдеуін шешіп, оның $x_1=-3$, $x_2=-4$ түбірлерін табамыз. Сондықтан

$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4).$$

Теңдеудің екі бөлігін де бөлшектің ортақ бөліміне, яғни $(x+3)(x+4)$-ке көбейтеміз. Нәтижеде төмендегіге ие боламыз:

$$(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0.$$

Теңдеуді түрлендіреміз:

$$x^2+10x+21-x-4+1=0,$$

$$x^2+9x+18=0.$$

Осы теңдеуді шешіп, оның түбірлерін табамыз:

$$x_1=-3,\quad x_2=-6.$$

Енді түбірлерді тексерейік. $x=-3$ болғанда берілген теңдеудің екінші және үшінші бөлшектерінің бөлімдері нөлге айналады. Сондықтан $x_1=-3$

– бөгде түбір. $x=-6$ болғанда берілген теңдеудегі бөлшектердің бөлімдері нөлге тең емес. $x=-6$-ны берілген теңдеуге қойсақ, бұл сан теңдеудің түбірі болатынын нық сеніммен айтуға болады.

Жауабы: $x=-6$. ▲

Жаттығулар

Теңдеуді шеш (**389–392**):

389. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-5x^2+4=0$;
3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-50x^2+49=0$.

390. 1) $x^4-3x^2-4=0$; 2) $x^4+3x^2-4=0$;
3) $x^4+x^2-20=0$; 4) $x^4-4x^2-5=0$.

391. 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1$; 2) $\frac{2}{x-5}+\frac{14}{x}=3$;
3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}$; 4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1$;
5) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{8}$; 6) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=1,5$.

392. 1) $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$;
3) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$; 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$;
5) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-3-x}=\frac{6}{x+3}$; 6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}=\frac{3}{x-1}$.

393. Теңдеудің нақты түбірлері бар ма:
1) $x^4-5x^2+7=0$; 2) $x^4+3x^2+2=0$?

394. x-тің қандай мәндерінде өрнектің мәндері өзара тең:
1) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{2}{1-x}$ және $2-\frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{6}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ және $\frac{14}{4-x^2}+1$?

Сәйкес *белгілеу* енгізіп, теңдеуді шеш (**395–399**):

395. 1) $x^4-5x^2+4=0$; 2) $x^4-8x^2-9=0$;

3) $9x^4+23x^2-12=0$; 4) $16x^4-409x^2+225=0$;

5) $4x^4-5x^2+1=0$; 6) $4x^4-17x^2+4=0$;

7) $4x^4-9x^2+2=0$; 8) $6x^4-5x^2+1=0$.

396. 1) $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$; *Белгілеу:* $(x+3)^2=t$

2) $(2x-1)^4-13(2x-1)^2-12=0$; $(2x-1)^2=t$

3) $(x-1)^4-x^2+2x-73=0$; $(x-1)^2=t$

4) $(x+2)^4-2x^2-8x-16=0$; $(x+2)^2=t$

5) $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)-9=0$; $(x^2+6x)=t$

6) $(x^2-16x)^2-2(x^2-16x)-63=0$. $(x^2-16x)=t$

397. 1) $(x+1)^2\cdot(x^2+2x)=12$;

2) $(x-2)^2\cdot(x^2-4x)+3=0$;

3) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$;

4) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)=28$;

5) $x(x+1)(x+2)(x+3)=0{,}5625$;

6) $(x-2)(x-3)(x+2)(x-7)+36=0$.

398. 1) $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=3\dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{x^2-2x}{4x-3}+5=\dfrac{16x-12}{2x-x^2}$;

3) $\dfrac{x^2+4x}{7x-2}-\dfrac{12-42x}{x^2+4x}=7$; 4) $\left(\dfrac{4x-5}{3x+2}\right)^2+\left(\dfrac{3x+2}{5-4x}\right)^2=4{,}25$;

5) $\left(\dfrac{5x+1}{2x-3}\right)^2+\left(\dfrac{3-2x}{5x+1}\right)^2=\dfrac{82}{9}$; 6) $\left(\dfrac{5x-2}{2x+1}\right)^2+\left(\dfrac{2x+3}{2-5x}\right)^2=3\dfrac{31}{225}$;

7) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-2{,}5$.

399. 1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$; *Белгілеу:* $(x+\frac{1}{x})=t.$

2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$;

3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$;

4) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0$;

5) $(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)=-5$;

6) $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$.

400. Төмендегі теңдеулердің әрбірі үшін: 1) барлық түбірлері қосындысын; 2) барлық түбірлері көбейтіндісін; 3) теріс түбірлері қосындысын; 4) оң түбірлері көбейтіндісін; 5) ең үлкен және ең кіші түбірлері айырмасын; 6) ең үлкен оң түбірінің ең кіші оң түбіріне қатынасын тап:

1) $x^4-26x^2+25=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;

3) $x^4-10x^2+9=0$; 4) $x^4-5x^2+6=0$;

5) $x^4-19x^2+90=0$; 6) $x^4-11x^2+28=0$.

401. Теңдеуді шеш:

1) $\left(x^2-8\right)^2+4\left(x^2-8\right)=5$;

2) $x^4-2x^3-13x^2+14x+24=0$;

3) $\left(x+5\right)^4-13\left(x+5\right)^2\cdot x^2+36x^4=0$;

4) $5x^4+20x^3-40x+17=0$;

5) $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)x^2=8.$

27-§. КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕРМЕН ЕСЕПТЕР ШЫҒАРУ

Квадрат теңдеудің жәрдемімен бірнеше есептер шығарайық.

1-есеп. Шахтаға тас тасталды және оның шахта түбіне жетіп, соғылған дыбысы 9 секундтан соң естілді. Дыбыс жылдамдығын 320 м/с, ауырлық күшінің үдеуін $g=10$ м/с^2 деп алып шахтаның тереңдігін анықта.

△ Шахтаның тереңдігін табу үшін тастың шахта түбіне түсу уақыты t-ны анықтау жеткілікті, өйткені шахтаның тереңдігі еркін түсу заңы бойынша $\frac{gt^2}{2}$ метрге тең.

Есептің шарты бойынша $g=10$ м/с^2. Сондықтан шахтаның тереңдігі $5t^2$ метрге тең.

Екінші тұрғыдан, шахтаның тереңдігін анықтау үшін дыбыс жылдамдығын 320 м/с-ті тастың шахта түбіне барып түскеннен соққы дыбысы естілгенге дейінгі өткен уақытқа, яғни $(9-t)$ секундқа көбейту керек. Демек, шахтаның тереңдігі $320\ (9-t)$ метрге тең.

Шахтаның тереңдігін анықтау үшін табылған екі өрнекті теңестіріп, $5t^2=320(9—t)$ теңдеуді құрамыз. Бұл теңдеуді шешейік:

$$t^2-64(9-t)=0,$$

$$t^2+64t-64\cdot 9=0.$$

Осы квадрат теңдеудің түбірлерін табайық:

$$t_{1,2}=-32\pm\sqrt{32^2+64\cdot 9}=-32\pm\sqrt{32(32+18)}=$$

$$=-32\pm\sqrt{32\cdot 50}=-32\pm\sqrt{16\cdot 100}=-32\pm 40,$$

$$t_1=8,\ t_2=-72.$$

Тастың түсу уақыты оң болғандықтан $t=8$ s болады.

Демек, шахтаның тереңдігі мынаған тең:

$$5t^2=5\cdot 8^2=320\ (\text{м}).$$

Жауабы: 320 м. ▲

2-есеп. Экспресс автобус автовокзалдан 40 км қашықтықтағы аэропорт бағытында жолға шықты. Арадан 10 минут өткеннен соң автобустың соңынан таксимен жолаушы жолға шықты. Таксидің жылдамдығы автобустың жылдамдығынан 20 км/сағ артық. Егер олар аэропортқа бір мезгілде жететін болса, онда такси мен автобустың жылдамдығын тап.

△ Автобустың жылдамдығы x км/сағ болса, онда таксидің жылдамдығы $(x+20)$ км/сағ болады. Автобустың жүрген уақыты $\frac{40}{x}$ сағат, таксидің жүрген уақыты $\frac{40}{x+20}$ сағат. Есеп шартына орай, автобус пен таксидің жүрген уақыты арасындағы айырмашылық 10 минутқа тең, яғни $\frac{1}{6}$ сағат. Демек,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+20} = \frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Бұл теңдеуді шешейік. Теңдеудің екі бөлігін де $6x(x+20)$-ға көбейтсек, мынадай болады:

$$40 \cdot 6 \cdot (x+20) - 40 \cdot 6x = x(x+20),$$
$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x,$$
$$x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Бұл теңдеудің түбірлері:

$$x_1 = 60, \; x_2 = -80.$$

x-тің бұл мәндерінде (1) теңдеудегі бөлшектердің бөлімдері тең емес. Сондықтан $x_1=60$ және $x_2=-80$ (1) теңдеудің түбірлері болады.

Автобустың жылдамдығы оң болғандықтан есеп шартын бір түбір ғана қанағаттандырады: $x=60$. Демек, таксидің жылдамдығы 80 км/сағ-қа тең.

Жауабы: автобустың жылдамдығы 60 км/сағ, таксидің жылдамдығы 80 км/сағ. ▲

3-есеп. Қолжазбаны көшіру үшін бірінші оператор екіншісіне қарағанда 3 сағат кем уақыт жұмсайды. Олар бірге барлық қолжазбаны 6 сағат 40 минутта көшіріп болды. Барлық қолжазбаны көшіру үшін олардың әрқайсысына қаншадан уақыт қажет болатын еді?

△ Барлық қолжазбаны көшіру жұмысын бір бірлік деп аламыз. Бірінші оператор қолжазбаны көшіру үшін x сағат жұмсаған болсын. Онда екінші операторға бұл жұмыс үшін $(x+3)$ сағат қажет болады. Бірінші оператор бір сағатта жұмыстың $\frac{1}{x}$ бөлігін, ал екіншісі $\frac{1}{x+3}$ бөлігін орындайды. Олар бірге істеп, бір сағатта барлық жұмыстың $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$ бөлігін орындайды, 6 сағат 40 минутта, яғни $6\frac{2}{3}$ сағатта олар барлық жұмысты орындайды. Сондықтан

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)=1.$$

Бұл теңдеуді төмендегідей жазуға болады:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20}. \qquad (2)$$

Оның екі бөлігін $20x(x+30)$-ға көбейтсек, төмендегіге ие боламыз:

$$20(x+3)+20x=3x(x+3),$$
$$40x+60=3x^2+9x,$$
$$3x^2-31x-60=0.$$

Бұл теңдеудің түбірлері:

$$x_1=12,\ x_2=-\frac{5}{3}.$$

x-тің бұл мәндерінде (2) теңдеудегі бөлшектердің бөлімдері нөлге тең емес. Сондықтан $x_1=12$ және $x_2=-\frac{5}{3}$ (2) теңдеуінің түбірлері.

Есептің мағынасы бойынша $x>0$ болғандықтан $x=12$. Демек, бірінші оператор жұмысқа 12 сағат, екіншісі 12 сағат+3 сағат=15 сағат жұмсайды.

Жауабы: 12 сағат және 15 сағат. ▲

Жаттығулар

402. Көбейтіндісі: 1) 156; 2) 210; 3) 342; 4) 600-ге тең болатын тізбектес екі натурал санды тап.

403. Көбейтіндісі: 1) 255; 2) 399-ға тең болатын тізбектес екі тақ санды тап.

404. Тік төртбұрыштың периметрі 1 м, ал ауданы 4 $дм^2$. Оның қабырғаларының ұзындығын тап.

405. Ауданы 2,45 га болған бақ ұзындығы 630 м қабырғамен қоршалған. Егер бақ тік төртбұрыш пішінді болса, оның ұзындығы мен енін тап.

406. 400 км қашықтықты жүрдек пойыз жүк пойызына қарағанда 1 сағат жылдам жүріп өтті. Егер жүк пойызының жылдамдығы жүрдек пойыздың жылдамдығынан 20 км/сағ кем болса, әр пойыздың жылдамдығы қандай?

407. Кеме өзен ағысы бойымен *A* пристаньнан *B* пристаньға барды. Кеме жарты сағат тоқтағаннан соң кері қарай қайтты және *A*-дан шыққаннан 8 сағат өткеннен соң *A* пристаньға қайтып оралды. *A* және *B* пристаньдар арақашықтығы 36 км-ге тең, өзен ағысының жылдамдығы 2 км/сағ болса, кеменің тұрғын судағы жылдамдығы қандай?

408. Екі топ мамандар бірге жұмыс істеп, ауылда жаңадан құрылған емхананы заманалық медициналық аспаптармен жабдықтау және оларды саздау жұмысын 12 күнде аяқтады. Егер топтың бірі екіншісіне қарағанда 10 күннен аз уақытта бітірсе, әр топ жеке-жеке оны неше күнде бітіре алады?

409. Квадрат пішіндегі қаңылтырдан екі 6 см тілім қырқып алынды. Қалған бөілігінің ауданы 135 $см^2$-ге тең. Квадраттың алғашқы өлшемдерін тап.

410. Тік бұрышты үшбұрыштың ауданы 180 $см^2$. Катеттердің бірі екіншісінен 31 см артық болса, осы үшбұрыш катеттерінің ұзындығын тап.

411. 30 км қашықтықты велосипедшілердің бірі екіншісінен 20 мин жылдамырақ жүріп өтті. Бірінші велосипедшінің жылдамдығы екіншісінен 3 км/сағ-қа артық. Әр велосипедшінің жылдамдығын тап?

412. Екі құрылыс бригадасы қой қораны 6 күнде салып бітірді. Егер бұл жұмысты орындау үшін бірінші бригадаға екіншісіне қарағанда 5 күн артық қажет болса, әр бригада жеке істеп, сондай қораны неше күнде құрып бітіреді?

№ 5

$x^4 + 2006x^2 + 2005x + 2006$

көпмүшені көбейткіштерге жіктеңдер.

III тарауға қатысты жаттығулар

Теңдеуді шеш (**413–415**):

413. 1) $x^2 - 12 = 0$; 2) $x^2 - 50 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$;

4) $3x - \frac{2}{5}x^2 = 0$; 5) $x^2 - 48 = 0$; 6) $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$.

414. 1) $x^2 + 4x - 45 = 0$; 2) $x^2 - 9x - 52 = 0$;

3) $3x^2 - 7x - 40 = 0$; 4) $5x^2 + 17x - 126 = 0$.

415. 1) $4x^2 - 2x - 3 = 0$; 2) $9x^2 - 3x - 4 = 0$;

3) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; 4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.

416. Теңдеуді шешпестен, оның неше нақты түбірі бар екенін анықта:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $5x^2 + 7x - 8 = 0$;

3) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; 4) $9x^2 + 30x + 25 = 0$.

417. Квадрат үшмүшені көбейткіштерге жікте:

1) $x^2 + 12x + 30$; 2) $x^2 - 10x + 16$; 3) $2x^2 + x - 1$;

4) $2x^2 - 3x - 2$; 5) $x^2 + 8x + 7$; 6) $2x^2 - 3x + 1$.

418. Бөлшекті қысқарт:

1) $\frac{x^2-9}{x+3}$; 2) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$; 3) $\frac{16x^2-24x+9}{4x^2+5x-6}$;

4) $\frac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$; 5) $\frac{x^2-25}{x-5}$; 6) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}$.

Теңдеуді шеш (**419–420**):

419. 1) $x^4-9x^2+20=0;$ 2) $x^4-11x^2+18=0;$

3) $2x^4-5x^2+2=0;$ 4) $5x^4-16x^2+3=0.$

420. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-2};$ 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2+x}{x+3}=\frac{5-x}{x};$

3) $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y};$ 4) $\frac{y+4}{y-4}+\frac{y}{4-y}=-\frac{4}{y+2}.$

421. Ми-6 тікұшағының ауадағы жылдамдығы 300 км/сағ. Ол 224 км қашықтықты екі рет ұшып өтті: бірінші рет желдің бағыты бойынша, ал екінші рет желдің бағытына қарама-қарсы ұшты. Егер тікұшақ желге қарсы ұшқанда желдің бағыты бойынша ұшқанға қарағанда 6 минут көп уақыт жұмсаған болса, желдің жылдамдығын тап.

422. Велосипедшінің жолдың бірінші жартысындағы жылдамдығы, оның екінші жартысындағы жылдамдығынан 3 км/сағ-қа артық. Егер велосипедші 90 км-лік барлық жолды 5,5 сағатта жүріп өткен болса, ол жолдың екінші жартысында қандай жылдамдықпен жүрді?

423. Көшет отырғызуда екі топ жұмыс істеді. Бірінші топ әр күні екіншісіне қарағанда 400 түп артық көшет отырғызып, барлығы 2700 түп көшет отырғызды. Екінші топ 2 күн артық жұмыс істеп, 2500 түп көшет отырғызды. Әр топ неше күннен жұмыс істеген?

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. Теңдеуді шеш:

1) $3x^2=0;$ 2) $(x+1)(x-2)=0;$

3) $4x^2-1=0;$ 4) $3x^2=5x;$

5) $4x^2-4x+1=0;$ 6) $x^2-16x-17=0;$

7) $3x^2+5x=2;$ 8) $x^2-4x+5=0.$

2. Көбейткіштерге жікте:

1) x^2+x-6; 2) $2x^2-x-3$; 3) x^2-6x+9.

3. Есепті шығар.

Ауылдар арасындағы 36 км қашықтықты бір велосипедші екіншісінен 1 сағатқа жылдамырақ жүріп өтті. Егер велосипедшінің біреуінің жылдамдығы екіншісінен 3 км/сағ-қа артық екені белгілі болса, әр велосипедшінің жылдамдығын тап.

Теңдеуді шеш (**424–426**):

424. 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

425. 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

426. 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

427. x-тің қандай мәндерінде $x^2+3x-88$ өрнегінің мәні: 1) 0-ге; 2) 20-ға; 3) –18-ге; 4) –70-ке тең болады?

428. Егер:

1) $a=3, b=1, c=-4$; 2) $a=5, b=2, c=3$;

3) $a=25, b=-10, c=1$; 4) $a=1, b=0, c=-25$

болса, $ax^2+bx+c=0$ квадрат теңдеуі неше нақты түбірге ие болады?

429. Теңдеуді шеш:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$;

3) $\frac{x+34}{x^2-8x+7}=\frac{2x-3}{x-7}-\frac{x+5}{x-1}$.

430. Фирма белгілі бір мерзімде 5400 жұп аяққиім тігуі керек. Шындығында ол күніне 30 жұп артық өнім даярлап, тапсырысты мерзімінен 9 күн бұрын орындады. Тапсырыс неше күнде орындалған?

431. Екі саяхатшы велосипедте *A* ауылдан *B* ауылға қарай түрлі жолмен аттанды. Біріншісі 30 км, ал екіншісі 20 км жүруі керек еді. Бірінші саяхатшының жылдамдығы екіншісінен 3 км/сағ-қа артық. Бірақ екінші саяхатшы *B*-ға біріншісіне қарағанда 20 мин бұрын жетіп келді. Әр саяхатшы жолға қанша уақыт жұмсаған?

432. Жұмысшылардың екі тобы жолды жөндеуді 4 сағатта аяқтады. Егер алдымен бірінші топ жолдың жартысын, ал сосын екіншісі қалған бөлігін жөндегенде, барлық жөндеу істері 9 сағатта аяқталатын еді. Жолды әр топ жеке-жеке жөндегенде қанша уақыт жұмсалатын еді ?

III тарауға қатысты сынақ жаттығулары – тест

1. Теңдеуді шеш: $x^2=64$.

A) $x_{1,2}=\pm8$; C) $x=-8$;

B) $x=8$; D) $x=32$.

2. Теңдеуді шеш: $x^2-11=0$.

A) $x=\sqrt{11}$; C) $x=-\sqrt{11}$;

B) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; D) $x=\frac{11}{2}$.

3. Теңдеуді шеш: $3x^2=48$.

A) $x=4$; C) $x_{1,2}=\pm4$;

B) $x=-4$; D) $x=8$.

4. Теңдеуді шеш: $x^2=5x$.

A) $\varnothing$; C) $x=0$;

B) $x=2,5$; D) $x_1=0,\ x_2=5$.

5. Теңдеуді шеш: $x^2+9x=0$.

A) $x_1=0,\ x_2=-9$; C) $x_{1,2}=9$;

B) $x_{1,2}=\pm3$; D) $x_1=9,\ x_2=0$.

6. Квадрат теңдеуді шеш: $x^2+x-6=0$.

A) $x_1=-3,\ x_2=2$;
C) $x_{1,2}=\pm 6$;
B) $x_1=3,\ x_2=-2$;
D) $x_1=-2;\ x_2=-3$.

7. Квадрат теңдеуді шеш: $x^2+7x+6=0$.

A) $x_1=1, x_2=-1$;
C) $x_1=-7, x_2=-6$;
B) $x_1=-6, x_2=-1$;
D) $x_1=-1, x_2=-5$.

8. Квадрат теңдеуді шеш: $x^2+x+1=0$.

A) $x_1=0, x_2=1$;
C) $\varnothing$;
B) $x_{1,2}=\frac{\sqrt{-3}}{2}$;
D) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-3}$.

9. Квадрат теңдеуді шеш: $x^2-7x+10=0$.

A) $x_1=-2, x_2=2$;
C) $x_1=5, x_2=1$;
B) $x_1=-5, x_2=2$;
D) $x_1=2, x_2=5$.

10. Квадрат теңдеуді шеш: $6x^2-5x+1=0$.

A) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{2}$;
C) $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=-\frac{1}{3}$;
B) $x=\frac{1}{6}$;
D) $x=-\frac{1}{3}$.

11. Квадрат теңдеуді шеш: $12x^2+7x+1=0$.

A) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{4}$;
C) $x_1=\frac{1}{3}, x_2=-\frac{1}{4}$;
B) $x_1=-\frac{1}{3}, x_2=-\frac{1}{4}$;
D) $x=\frac{1}{7}$.

12. Теңдеуді шеш: $x^4-5x^2+4=0$.

A) $x_{1,2}=\pm 4, x_{3,4}=1$;
C) $x_1=1,\ x_2=4$;
B) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$;
D) $x_{1,2}=\pm 1$.

13. Теңдеуді шеш: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

A) $x_{1,2} = -\sqrt{5}, x_{3,4} = 1$; B) $x_{1,2} = 5$; C) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; D) $\varnothing$.

14. 60 км-лік арақашықтықты бір велосипедші екіншісінен 1 сағат жылдамырақ жүріп өтті. Бірінші велосипедшінің жылдамдығы екіншісінің жылдамдығынан 5 км/сағ кем болса, әр велосипедшінің жылдамдығын тап.
A) 20 км/сағ, 25 км/сағ; B) 10 км/сағ, 15 км/сағ;
C) 15 км/сағ, 20 км/сағ; D) 12 км/сағ, 17 км/сағ.

Тарихи есептер

Әл-Хорезмидің „Ал-жабр вал-муқобала“ еңбегінен алынған теңдеулерді шеш **(1—31):**

1. $x^2+10x=39$.
2. $x^2+5x=24$.
3. $x^2+10x=56$.
4. $x^2+(10-x)^2=58$.
5. $\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+1\right)=20$.
6. $4x(10-x)=x^2$.
7. $\frac{25}{9}x^2=100$.
8. $x^2+21=10x$.
9. $3x+4=x^2$.
10. $\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{4}=x+24$.
11. $\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=2\frac{1}{6}$.
12. $100+x^2-20x=81x$.
13. $30x=100+x^2$.
14. $4x\cdot5x=2x^2+36$.
15. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{6}$.
16. $\sqrt{x^2-x}+x=2$.
17. $13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$.
18. $(10-x)^2-x^2=40$.
19. $(10-x)^2+x^2+(10-x)-x=54$.
20. $\frac{1}{2}\cdot\frac{5x}{10-x}+5x=50$.
21. $x^2+20=12x$.
22. $\left(\frac{x}{3}+1\right)\left(\frac{x}{4}+2\right)=x+13$.
23. $x^2+x=\frac{3}{4}$.

24. $\left(x-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-4\right)^2=x+12.$

25. $\left(x-\left(\frac{x}{3}+3\right)\right)^2=x.$

26. $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{1}{7}x.$

27. $\frac{x^2-4x}{3}=4x.$

28. $(x^2-3x)^2=x^2.$

29. $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}x^2=\frac{4}{5}x.$

30. $10x=(10-x)^2.$

31. $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21. \end{cases}$

Әбу Комил есебі. Теңдеуді шеш:

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}\,.$$

Евклид есебі. $(1-x):x=x:1$ теңдеуді шеш.

Вавилон жазбаларындағы есеп:

Екі квадрат аудандарының қосындысы $25\frac{5}{12}$-ке тең. Екінші квадрат қабырғасы бірінші квадрат қабырғасының $\frac{2}{3}$ бөлігінен 5 бірлік артық. Квадраттың қабырғаларын тап.

Омар Хаям (1048–1131) *есебі.*

$\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}$ теңдеуді шеш.

Квадрат теңдеуді шешудің әл-Хорезми әдісі.

Әл-Хорезмидің „Ал-жабр вал-муқобала" еңбегінен алынған есепті қарастырайық: „Егер қандайда бір квадратқа оның он түбіріне теңді қосайық, отыз тоғыз болады". Осы есепті шешу (қазіргі белгілеумен) $x^2+10x=39$ теңдеуді шешу дегені. Әл-Хорезми бұл теңдеуді шешу ережесін төмендегідей түсіндіреді: „1) түбірлері санын екіге бөл, бұл есепте бес пайда болады $(10:2=5)$; 2) оны өзінің теңіне (тең санға) көбейтсең, жиырма бес болады $(5\cdot5=25)$; 3) оны отыз тоғызға қос, алпыс төрт болады $(25+39=64)$; 4) одан квадрат түбір шығар, сегіз болады $(\sqrt{64}=8)$; 5) одан түбірлер санының жартысын, яғни бесті айыр, үш қалады (8 – 5 = 3). Осы сан сен іздеген квадрат түбір болады“.

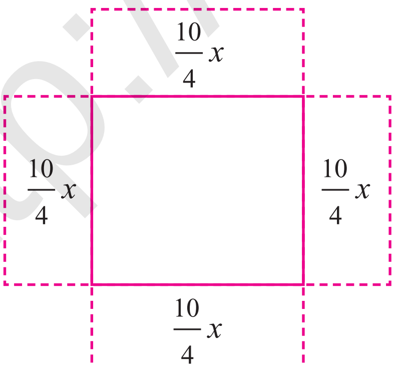
Қазіргі жазуда әл-Хорезмидің осы шешуі қысқаша мынадай көріністе болады:

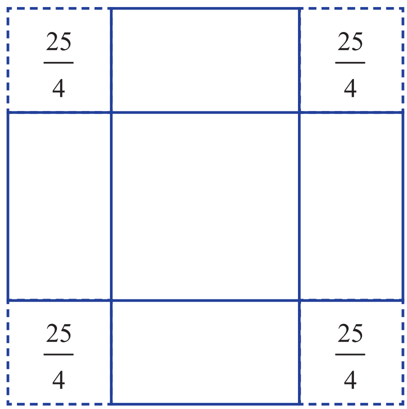
$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=\sqrt{25+39}-5=\sqrt{64}-5=8-5=3.$$

Жауабы: $x = 3$.

(Әл-Хорезми екінші түбір $x = -13$-ті қарастырмайды.)

„Ал-жабр вал-муқобала“ еңбегінде бұл теңдеудің геометриялық әдістегі шешуі де берілген (38-сурет). Бұл әдіс төмендегідей: қабырғасы x (ауданы x^2)-ке тең квадрат қарастырылады. Оның қабырғаларында ені $\frac{10}{4}$-ға тең 4 тік төртбұрыш салынады. Пайда болған фигура $x^2 + 10x$ өрнекке сай келеді. Бұл фигура қабырғасы $(x + 5)$-ке тең болған квадратқа дейін „толтырылады“, яғни фигураның „төбелеріне“ қабырғасы $\frac{10}{4}$-ға тең болған 4 квадрат „қосылады“. Пайда болған фигура $x^2+10x+25=(x+5)^2$ өрнегіне сәйкес. Бірақ, шарт бойынша, $x^2+10x=39$ болғандықтан пайда болған үлкен квадраттың ауданы $39+4\cdot\left(\frac{10}{4}\right)^2=64$. Сонымен, $(x + 5)^2 = 64$, бұдан $x+5=8$ және $x=3$. Демек, әл-Хорезми квадрат теңдеуді шешуде толымды квадратты жіктеудің геометриялық әдісін берді. $x^2 + px = q$ теңдеуі үшін әл-Хорезмидің осы әдісі төмендегідей жазылады:





38-сурет.

$$x^2+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)x+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2=q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2;\quad \left(x+2\cdot\frac{p}{4}\right)^2=q+4\left(\frac{p}{4}\right)^2,$$

$$x_{1,2}+2\cdot\frac{p}{4}=\pm\sqrt{q+4\cdot\left(\frac{p}{4}\right)^2},$$

бұдан $x_{1,2}=-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{4}\right)^2+q}.$

Тарихи мағлұматтар

Әбу Абдулла Мұхаммед ибн Мұса әл-Хорезми (783-850) халқымыздың ұлы ғалымдарының бірі. Ол өзінің „Ал-кітап ал-мұхтасар фи есеп ал-жабр вал-муқобала“ (қысқаша „Ал-жабр вал-муқобала“) еңбегімен алгебраға негіз салды. Еңбегінің 1342 жылы араб тіліне көшірілген нұсқасы Оксфорд университетінің Бодлеян кітапханасында сақталады. Ал-Хорезми кітапты жазудағы мақсатын былай баяндайды: „... Мен арифметиканың жай және күрделі мәселелерін қамтитын „Ал-жабр вал-муқобала есебі туралы қысқаша кітапты“ сыйладым, өйткені мұра бөлісуде, өсиет жазуда, мал-мүлікті бөлгенде, әділет ісінде, саудада және кез келген бітімдерде, жер өлшеуде, арықтар қазуда, инженерлікте, тағы басқа да осыған ұқсас түрлі істерде адамдар үшін бұл қажет“. Алгебрада „үш түрлі санмен (шамамен) амалдар орындалады“, дейді әл-Хорезми. Олар: түбір (теңдеудегі белгісіз сан x), квадрат (x^2) және жай сандар (теңдеудегі бос мүшелер).

Ал-Хорезми осы үш түрлі шамалар арасындағы түрлі байланыстарды зерттеді. Ол теңдеулерді төмендегідей сыныптарға бөлді:

1) $ax^2=bx$ – квадраттар түбірлерге тең;
2) $ax^2=c$ – квадраттар санға тең;
3) $bx=c$ – түбірлер санға тең;
4) $ax^2+bx=c$ – квадраттар және түбірлер санға тең;
5) $ax^2+c=bx$ – квадраттар және сан түбірлерге тең;
6) $bx+c=ax^2$ – түбірлер және сан квадраттарға тең.

Әл-Хорезми „Ал-жабр вал-муқобала“ еңбегінде 4-, 5-, 6-теңдеулерді шешудің геометриялық әдістерін көрсетеді. Ғалым ал-жабр вал-муқобала амалдары (түрлендірулер) көмегімен кез келген квадрат теңдеу жоғарыдағы 6 жағдайдың біреуіне келтірілетінін дәлелдейді.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

433. 1) Құдыққа тас тасталды. Тас құдықтың түбіне жетіп соғылғанда шыққан дыбыс бақылаушыға тас тасталғаннан соң 4 секундтан кейін есітілді. Дыбыстың жылдамдығы секундына 330 метр, еркін түскен дененің t секундта өткен жолын $s=\frac{gt^2}{2}$. $g\approx 10$ м/с^2 деп алып, құдықтың тереңдігін тап.

2) Секундына 300 метр жылдамдықпен атылған оқ неше секундта жерден 2500 метр биіктікте болады? (Ауаның кедергісі ескерілмесін.)

△ 1) Тас t минутта құдықтың түбіне түскен және $s=\frac{gt^2}{2}$ қашықтықтан өткен. Дыбыс құдық түбінен $(4-t)$ секундта $330(4-t)$ м қашықтықтан өтіп шыққан. $\frac{gt^2}{2}=330(4-t)$. Бұл теңдеуден $t\approx 3{,}78$ с; $4-t\approx 0{,}22$ с; с $\approx 330\cdot 0{,}22=72{,}6$ (м). **Жауабы:** $\approx 72{,}6$ м.

2) t секундтан соң дене жерден $300\ t$ м биіктікте болған. $300t-\frac{10t^2}{2}=2500$ немесе $t^2-60t+500=0$, мұнда $t=10$ немесе $t=50$.

Жауабы: 10 с және 50 с. ▲

434. Әрбірінің сыйымдылығы 30 литрлік екі ыдыста бірге 30 литр спирт бар. 1-ыдысқа толғанынша су құйып, осы қоспадан 2-ыдысқа толғанынша құйылды. Кейін 2-ыдыстан 1-ыдысқа 12 литр қоспа алып құйылды. Соң 2-ыдыстағы спирт 1-ыдыстағыдан 2 литрге кем болды. Бастапқыда қайсы ыдыста қаншадан спирт болған?

△ Бастапқыда 1-ыдыста x л, 2-ыдыста $(30-x)$ л спирт болсын. 1-ыдысқа су құйылған соң, 1 литр қоспада $\frac{x}{30}$ л спирт болды. Осы қоспадан 2-ыдысқа x л қосылса (себебі 2-ыдыста x л „бос орын“ бар), 2-ыдыстағы қоспа құрамында $\frac{x}{30}\cdot x=\frac{x^2}{30}$ литр спирт болды және 2-ыдыстағы $(30-x)$ л-мен бірге $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right)$ литр спирт болады.

2-ыдыстағы қоспа құрамында $\left(30-x+\frac{x^2}{30}\right):30=1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2$ литр спирт болды. 2-ыдыстан 1-сіне 12 л алып құйылса, бұл қоспада $12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ литр спирт бар, 1-ыдыстағы $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)$ литр спиртпен бірге $\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ литр болады. 2-ыдыстан 12 л қоспа 1-сіне құйылып, 18 л қоспа қалды, бұл қоспа құрамында $18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$ литр спирт бар. Есеп шарты бойынша, бұл шама 1-ыдыстағы спирттен 2 литр кем. Демек, мына теңдеуге келеміз:

$18\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\left(x-\frac{x^2}{30}\right)+12\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$, бұдан

$6\cdot\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=x-\frac{x^2}{30}$, сөйтіп, $x^2-30x+200=0$.

Жауабы: 20 л және 10 л. ▲

435. Мынадай төрт таңбалы сан тап, оның мыңдықтар таңбаларындағы және ондықтар таңбаларындағы цифрлар өзара тең болсын, жүздіктер таңбаларындағы цифр бірлік таңбасындағы цифрдан бірге артық болсын және ізделінген сан бүтін санның квадраты болсын.

(Нұсқау: $x^2=1010a+101b+100$ теңдеуге кел, мұндағы x^2 – ізделінген сан, a – мыңдықтар, b – бірліктер таңбаларындағы цифр).

436. Қышқылмен толған ыдыс бар. Осы ыдыстан 2 л қышқыл алынды және ыдысқа 2 л су құйылды. Қоспадан 2 л алынды және тағы да 2 л су қосылды. Қоспадан 2 л алынды және тағы да 2 л су құйылды. Нәтижеде ыдыстағы су көлемі қышқыл көлемінен 3 л көп болып қалды. Қазір ыдыста неше л қышқыл және неше л су бар?

△ Ыдыстың көлемі v литр болсын. Ыдыстан 2 л қышқыл алып, ыдысқа 2 л су құйылған соң, қышқыл ыдыстың $\frac{v-2}{v}$ бөлігін иелейді.

Қоспадан 2 л алынып, ыдыста $(v-2)\cdot\frac{v-2}{v}$ литр қышқыл қалды, оған 2 л су құйылып, қышқыл ыдыстың $\frac{(v-2)^2}{v^2}$ бөлігін иелейді. 3-рет (тағы 2 л қоспа алынып, ыдысқа 2 л су құйылған соң) қышқыл ыдыстың $\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$ бөлігін иелейді. Сөйтіп, ыдыстағы қышқыл мөлшері $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3$-ге, ал су мөлшері $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3$-ке тең.

Онда мынадай теңдеуге ие боламыз:

$$v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3+3=v,\ \text{бұдан}$$

$$v^3-9v^2+24v-16=0,\ \ (v-1)(v-4)^2=0.$$

Шарт бойынша, $v>2$ болғандықтан, $v=4$.

Онда $v\cdot\left(\frac{v-2}{v}\right)^3=4\cdot\left(\frac{4-2}{4}\right)^3=\frac{1}{2}\ (l)$,

Жауабы: 0,5 л қышқыл және 3,5 л су. ▲

437. A ауылдан B ауылға қарай жүк машинасымен жолға шықты. 1 сағаттан соң A-дан осы бағытта жеңіл машина жолға шықты және B-ға жүк машинасымен бір мезгілде жетіп келді. Егер бұл машиналар A және B ауылдарынан бір мезгілде бір-біріне қарай жолға шыққанда, олар жолға шыққан мезгілден 1 сағат 12 минут өткен соң кездесетін еді. Жүк машинасы A-дан B-ға келуі үшін қанша уақыт жұмсады?

438. Вагоннан жүкті жұмысшылардың екі тобы түсірді. Жүкті 1-топтың жалғыз өзі түсіретін уақыт пен осы жүкті 2-топтың жалғыз өзі түсіретін уақыттың қосындысы 12 сағатқа тең. Осы уақыттар айырмасы екі топ бірге жүк түсіруіне кеткен уақыттың 45%-ына тең. 1-топ жалғыз өзі және 2-топ жалғыз өзі жүкті қанша уақытта түсіреді?

△ 1-топ жүкті жалғыз өзі x сағатта, ал 2-топ y сағатта түсірген, болсын. Есеп шарты бойынша, $x+y=12$ (сағат). 1-топ 1 сағатта жалпы жұмыстың $\frac{1}{x}$ бөлігін, ал 2-топ $\frac{1}{y}$ бөлігін орындады. Олар бірге істеп, 1 сағатта жалпы жұмыстың $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ бөлігін орындады. Бірге істеп олар жалпы жұмысты орындау үшін $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ сағат жұмсады. Дәлдік үшін, мысалы, 1-топ жай істеген, яғни $x > y$ болсын. Онда шарт бойынша $(x-y)$ сағат $\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ сағаттың 45%-ын құрайды:

$$x-y=\frac{45}{100}\cdot\frac{xy}{x+y}.$$

Бұл теңдеудегі y-тің орнына $y=12-x$-ті қойып, x-ке қатысты квадрат теңдеуді пайда етеміз:

$$x-12+x=\frac{9}{20}\cdot\frac{x(12-x)}{12},$$

бұдан $3x^2+124x-960=0$.

Бұл теңдеудің түбірлері $x_1=-48,\ x_2=\frac{20}{3}$. Есеп мазмұны бойынша $x>0$. Демек,

$$x=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}\ \text{(сағат)},$$

$$y=12-x=12-6\frac{2}{3}=5\frac{1}{3}\ \text{(сағат)}.$$

Жауабы: $6\frac{2}{3}$ сағат, $5\frac{1}{3}$ сағат.▲

439. Екі мақта теретін машина бірге алқаптағы мақтаны тек бірінші машинаның жалғыз өзінен 8 күн жылдамрақ теруі мүмкін және тек екінші машинаның жалғыз өзінен 2 күн жылдам теріп аяқтауы мүмкін. Әрбір машина алқаптағы мақтаны неше күнде теруі мүмкін?

440. Екі шебер бір бұйымды жасау үшін тапсырыс алды. Алдымен бірінші шебер 1 сағат істеді, соң екі шебер де 4 сағат бірге істеді; сонда тапсырыстың 40%-ы атқарылды. Егер тапсырысты бірінші шебердің жалғыз өзі орындауы үшін екіншісіне қарағанда 5 сағат артық уақыт қажет болса, әрбір шебер тапсырысты неше сағатта орындайды?

441. Пойыз *A* және *B* қалалар арасындағы жолдың ортасында 20 минут тоқтады. Машинист *B*-ға кестеге сәйкес жетіп келуі үшін пойыздың бастапқы жылдамдығын 12 км/сағ-қа арттырды. *A* және *B* қалалардың арақашықтығы 240 км болса, пойыздың бастапқы жылдамдығын тап.

442. Түрліше қуатқа ие екі трактор 3 күн бірге істеп, алқаптың $\frac{5}{8}$ бөлігін жыртты. Егер бірінші трактормен бүкіл алқапты екіншісіне қарағанда 4 күнге жылдамырақ жырту мүмкін болса, бүкіл алқапты әрбір трактор жеке-жеке неше күнде жыртады?

443. Пойыз 840 км жол жүруі керек. Жолдың жартысында 30 минут тоқтады. Кешікпеу үшін жылдамдығын сағатына 2 км-ге арттырды. Пойыз бүкіл жолға қанша уақыт жұмсайды?

△ *1-тәсіл.* Пойыз бүкіл жолды x сағатта жүріп өтуі керек еді; жолдың жартысынан сағатына $\frac{840}{x}$ км жылдамдықпен өткен; соң сағатына $\left(\frac{840}{x}+2\right)$ км жылдамдықпен жолдың жартысынан $\frac{420}{\frac{840}{x}+2}=\frac{210x}{420+x}$ сағатта өтеді. Жолдың бірінші жартысынан $\frac{x}{2}$ сағатта өткен еді. Соған орай: $\frac{210x}{420+x}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. Теңдеуді шешсек, $x = 21$ сағат екенін табамыз.

2-тәсіл. Пойыздың бастапқы жылдамдығы x км, кейінгі жылдамдығы сағатына $(x + 2)$ км, 420 км-ді $\frac{420}{x}$ сағатта, қалған 420 км-ді $\frac{420}{x+2}$ сағатта жүріп өтеді. Соған орай: $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+2}=\frac{1}{2}$. Теңдеуді шешсек, $x=40$ км/ сағ; пойыз барлық жолдан өтуге $\frac{840}{40}=21$ сағат жұмсаған.

3-тәсіл. Пойыз жолдың бірінші жартысын x сағатта, екінші жартысын $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ сағатта жүріп өтті. Пойыздың жолдың бірінші жартысындағы жылдамдығы сағатына $\frac{420}{x}$ км, екінші жартысындағы жылдамдығы сағатына $\frac{420}{x-\frac{1}{2}}=\frac{840}{2x-1}$ км, $\frac{840}{2x-1}-\frac{420}{x}=2$. Теңдеуді шешіп, $x = 10{,}5$ сағ, $2x = 21$ сағ екені анықталады.

Жауабы: 21 сағат. ▲

444. Бір сан тізбектелген үш бүтін санның көбейтіндісінен құралған Осы санды берілген тізбектелген үш санның әрбіріне бөлгеннен пайда болған бөлінділердің қосындысы 74-ке тең. Осы санды тап.

445. Дөңес көпбұрыш қабырғаларының саны мен диагональдары санының қосындысы 15-ке тең. Көпбұрыш қабырғаларының санын тап.

446. Тік бұрышты үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары: a) тізбектелген натурал сандармен; b) тізбектелген жұп натурал сандармен; d) тізбектелген тақ натурал сандармен өрнектеліуі мүмкін бе?

△ a) Қабырғалары тізбектелген бүтін сандар: x, $x + 1$, $x + 2$ болсын. Онда x және $x+1$ катеттер, ал $(x+2)$ гипотенуза болады, $x^2+(x+1)^2=(x+2)^2$; бұдан $x = 3$ немесе $x = -1$ ($x = -1 < 0$ есепке жауап болмайды). $x = 3$; $x + 1 = 4$; $x + 2 = 5$. Қабырғалары тізбектелген бүтін сандар 3, 4, 5-пен өрнектелген тік бұрышты үшбұрыш болады; b) қабырғалары тізбектелген жұп сандар: $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$ болсын. Онда: $(2x)^2+(2x+2)^2=(2x+4)^2$; $x=3$; $2x=6$; $2x+2=8$; $2x+4=10$. Қабырғалары тізбектелген жұп сандар 6, 8, 10-мен өрнектелген тік бұрышты үшбұрыш болады;

d) қабырғалары тізбектелген тақ сандар: $2x+1$; $2x+3$; $2x+5$-пен өрнектелсін. $(2x+1)^2+(2x+3)^2=(2x+5)^2$; $x=\frac{5}{2}$ немесе $x=-\frac{3}{2}$. Бірақ x натурал сан емес екен. Демек, қабырғалары тізбектелген тақ сандармен өрнектелетін тік бұрышты үшбұрыш жоқ. ▲

447. Екі ерітіндінің бірінде 800 г, екіншісінде 600 г тұз бар. Екі ерітіндіден 10 кг-дық жаңа ерітінді пайда болды. Бірінші ерітіндідегі тұздың пайыздық мөлшері екінші ерітіндідегі тұздың пайыздық мөлшерінен 10-ға артық болса, қоспада әрбір ерітіндіден неше кг бар?

△ Бірінші ерітінді x кг болса, екіншісі $(10-x)$ кг болады. Бірінші ерітіндіде тұз $\frac{0,8 \cdot 100}{x}=\frac{80}{x}$ пайыз, ал екінші ерітіндіде $\frac{0,6\cdot 100}{10-x}=\frac{60}{10-x}$ пайыз болады. Есептің шарты бойынша:

$$\frac{80}{x}-\frac{60}{10-x}=10.$$

Мұны шешеміз: $x=20$ немесе $x=4$. Есеп шарты бойынша $x<10$ болғандықтан $x=20$ түбірі жарамсыз. $10-x=10-4=6$.

Жауабы: бірінші ерітіндінің массасы 4 кг, ал екінші ерітіндінің массасы 6 кг екен.

Жауапты тексеру: 800 г тұз 4 кг-дық ерітіндінің $\frac{0,8\cdot 100\%}{4}=20\%$-ын, 600 г тұз 6 кг-дық ерітіндінің $\frac{0,6\cdot 100\%}{6}=10\%$-ын құрайды: $20\%-10\%=10\%$.▲

448. Екі металл бөлігінің біреуінің массасы 880 г, екіншісінің массасы 858 г. 1-бөліктің көлемі 2-сінің көлемінен 10 см^3-ге кем. 1-металл бөлігінің салыстырмалы салмағы 2-сінікінен 1 г/см^3 артық болса, әрқайсы металл бөлігінің салыстырмалы салмағын тап.

△ Екінші металл бөлігінің салыстырмалы салмағы d г/см^3, бірінші металл бөлігінің салыстырмалы салмағы $(d+1)$ г/см^3. Бірінші металл бөлігінің көлемі $\frac{880}{d+1}$ см^3, екінші металл бөлігінің көлемі $\frac{858}{d}$ см^3. Есеп шарты бойынша

$$\frac{880}{d+1}+10=\frac{858}{d} \text{ немесе } 5d^2+16d-429=0,$$

$d = 7{,}8$ немесе $d = -11$ ($d = -11 < 0$ болғандықтан есепке жауап болмайды).

Жауабы: екінші бөліктің салыстырмалы салмағы 7,8 г/см^3, ал біріншісінікі $7{,}8 + 1 = 8{,}8$ (г/см^3).

Жауапты тексеру. Бірінші металдың көлемі $\frac{880}{8{,}8} = 110$ (см^3), екіншісінікі $\frac{858}{7{,}8} = 110$ (см^3); 110 см^3 – 100 см^3 = 10 см^3. ▲

449. Екі ыдыста бір-бірінен 1 кг айырмашылығы болған су бар. Ыдыстардағы суға 88 калория жылу берілді. Массасы көп болған су массасы кем болған суға қарағанда $\frac{4}{5}$ градусқа кемірек қызығаны белгілі болса, әрқайсы ыдыстағы су массасын анықта.

△1) Су массасы x кг және $(x+1)$ кг болсын. Массасы кем су $\frac{88}{x}$ градусқа, массасы көп су $\frac{88}{x+1}$ градусқа қызыған. Массалары түрліше болған екі ыдыстағы су температуралары арасындағы айырма $\frac{4}{5}$ градусқа тең болғандықтан төмендегі теңдеуді құраймыз:

$$\frac{88}{x} - \frac{88}{x+1} = \frac{4}{5}.$$

Пайда болған теңдеуді шешсек: $x = 10$ немесе $x = -11$. $x = -11 < 0$ есепке жауап болмайды.

Жауабы: 10 кг және 11 кг.

Жауапты тексеру. 10 кг су 88 калория жылудан $\frac{88}{10} = 8{,}8$ градусқа қызыған, ал 11 кг су 88 калория жылудан $\frac{88}{11} = 8$ градусқа қызыған.

$8{,}8 - 8 = 0{,}8 = \frac{4}{5}$ (градус). ▲

450. *A* және *B* қалалардың арақашықтығы теміржолмен 66 км, су жолымен 80,5 км. Пойыз кемеге қарағанда 4 сағаттан кейін жолға шығып, *B*-ға кемеден 15 минут бұрын келді. Егер пойыздың жылдамдығы кеменің жылдамдығынан сағатына 30 км артық болса, олардың жылдамдықтарын тап.

△Пойыз жылдамдығы сағатына x км, кеме жылдамдығы сағатына $(x-30)$ км. Пойыз $\frac{66}{x}$ сағат, кеме $\frac{80,5}{x-30}$ сағат жол жүрген. 4 сағат +15 минут$=4\frac{1}{4}$ сағат$=\frac{17}{4}$ сағат. Есеп шарты бойынша теңдеу құраймыз:

$$\frac{80,5}{x-30}-\frac{66}{x}=\frac{17}{4}.$$

Бұл теңдеуді шешсек, мына жауап шығады: пойыздың жылдамдығы сағатына 44 км, ал кеменікі 14 км.

Жауапты тексеру. Кеме 80,5 км-ді $\frac{80,5}{14}=5\frac{3}{4}$ сағатта, ал пойыз 66 км-ді $\frac{66}{44}=1\frac{1}{2}$ сағатта жүріп өтеді. $5\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}=4\frac{1}{4}$ сағат болады. ▲

451. Егін алаңының $\frac{2}{3}$ бөлігін түрлі қуатты екі трактор бірге 4 күнде жыртты. Егер жерді 1-трактордың жалғыз өзі 2-трактордың жалғыз өзінен 5 күн тезірек жыртатыны белгілі болса, егін алаңын әрбір трактордың жалғыз өзі неше күнде жыртады?

△ *1-тәсіл.* Жұмысты бір бірлік деп қабылдаймыз. Барлық жерді екінші трактордың өзі x күнде жыртсын. Онда біріншісінің жалғыз өзі $x-5$ күнде жыртып болады. Бірінші трактор бір күнде барлық жердің $\frac{1}{x-5}$ бөлігін, ал екіншісі $\frac{1}{x}$ бөлігін, екі трактор бірге $\frac{2}{3}:4=\frac{1}{6}$ бөлігін жыртты. Екі трактор бір күнде егін алаңының $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}$ немесе $\frac{1}{6}$ бөлігін жыртты. Демек:

$$\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}.$$

Бұл теңдеудің түбірлері $x=15$ немесе $x=2$. Есеп мазмұны бойынша $x>5$ болуы керек. Сондықтан $x_2=2$ есепке жауап болмайды.

2-тәсіл. Екі трактор бірге барлық жерді $4:\frac{2}{3}=6$ күнде жыртады. Екінші трактор жалғыз өзі барлық жерді x күнде жыртса, 1 күнде $\frac{1}{x}$ бөлігін, 6 күнде $\frac{6}{x}$ бөлігін жыртады. Бірінші трактордың жалғыз өзі барлық жерді $x-5$ күнде жыртса, 1 күнде $\frac{1}{x-5}$ бөлігін, ал 6 күнде $\frac{6}{x-5}$ бөлігін жыртады. Әр екі трактор 6 күнде егін алаңын жыртып болады, яғни:

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x-5}=1.$$

Жауабы: бірінші трактордың жалғыз өзі 10 күнде, екіншісінің жалғыз өзі 15 күнде жыртады.

Жауапты тексеру. 1) Егін алаңын бірінші трактордың жалғыз өзі екінші трактордың жалғыз өзінен 15 күн – 10 күн = 5 күн жылдам жыртады.

2) Бірінші трактор 1 күнде жердің $\frac{1}{10}$ бөлігін, 4 күнде $\frac{4}{10}$ бөлігін, екіншісі 1 күнде $\frac{1}{15}$ бөлігін, 4 күнде $\frac{4}{15}$ бөлігін жыртады. Екі трактор бірге 4 күнде жердің $\frac{4}{10}+\frac{4}{15}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ бөлігін жыртады.▲

452. Жоспардағы жұмысты орындау үшін 1-топ 3,5 күн істеді. Қалған жұмысты 2-топ 6 күнде аяқтады. Жоспардағы жұмысты 2-топтың жалғыз өзі 1-топтың жалғыз өзіне қарағанда 5 күн кейін аяқтады. Әр топтың жалғыз өзі жоспардағы жұмысты неше күнде аяқтайды?

453. Кеме өзен ағысы бойынша 69 км қашықтыққа барып, 34 км артқа қайтуы үшін 5 сағат уақыт жұмсады. Ағыс жылдамдығы сағатына 3 км болса, кеменің тұрғын судағы жылдамдығын тап.

454. *A* ауылдан өзен ағысы бойынша сал ағызылды. Сал ағызылғаннан 4 сағат өткен соң, осы ауылдан өзен ағысы бойынша моторлы қайық жолға шығып, 15 км жүріп салға жетті. Моторлы қайық салдан сағатына 15 км артық жүрсе, салдың (өзен ағысының) жылдамдығын тап.

455. Фермерлік шаруашылық 200 га жерге белгілі бір мерзімде картоп егуі қажет еді. Бірақ шаруашылық әр күні жоспардағыдан 5 га артық жерге картоп егіп, жұмысты мерзімінен 2 күн бұрын аяқтады. Картоп егу неше күн жалғасты?

456. Ондықтар цифры бірліктерден 4-ке кем болған екі таңбалы сан мен осы санның цифрларының орындарын алмастыру нәтижесінде пайда болған саннан 2 бірлік кіші болған санның көбейтіндісі 2627-ге тең. Осы екі таңбалы санды тап.

457. Екі таңбалы санның ондықтар цифры бірліктерінен 4 есе артық. Осы саннан 2-ні айырып, цифрлары ізделінген сан цифрларының кері ретпен жазылуынан пайда болған санға 2-ні қойсақ және нәтижелерді көбейтсек, 2400 шығады. Осы екі таңбалы санды тап.

458. Жұмысшылардың үш тобы ғимаратты бірге белгілі мерзімде жөндеді. Жөндеуді тек 1-топ орындаса, бұл мерзімнен 10 күн артық керек болады. Егер жұмысты тек 2-топ орындаса, 20 күн артық, тек 3-топ орындаса, мерзімінен 6 есе көп уақыт керек болады. Әрқайсы топ жалғыз өзі істесе, ғимаратты неше күнде жөндеп бітіреді?

459. Әуізге үш құбыр өткізілген. Бос әуізді екінші құбырдың жалғыз өзі бірінші құбырдың жалғыз өзіне қарағанда 3 сағат кеш толтырады. Ал үшінші құбырдың жалғыз өзі толы әуізді босатуы үшін, 1-құбыр әуізді толтыруға кететін уақыттан 3 сағат кем уақыт жұмсады. Егер құбырлардың екеуінен су кіріп, 3-сінен шығып тұрса, бос әуіз 36 сағатта толады. 1-құбырдың жалғыз өзі және 2-құбырдың жалғыз өзі толы әуізді қанша уақытта босатады?

460. Бұйымның бағасы 12000 сум еді. Бұл баға бірізділікпен екі рет бірдей пайызға арзандатылғаннан соң бұйымның бағасы 9720 сум болған. Әр кез бұйымның бағасы неше пайызға арзандады?

461. Екі жылдың ішінде қала тұрғындары 2 миллион адамнан 2 миллион 205 мың адамға жетті. Осы қала тұрғындарының жылдық орташа көбею пайызын тап.

462. Екі жолаушы *A* және *B* ауылдардан бір-біріне қарай келуде. Олар кездескенде бірі екіншісінен 2 км артық жүргені белгілі болды. Кездескеннен кейін жүруді жалғастырып, 40 минуттан соң 1-жолаушы *B*-ға келді. Ал 1,5 сағаттан соң 2-жолаушы *A*-ға келді. *AB* қашықтықты тап.

463. Шахмат жарысына қатысушылардың әрбірі басқалармен бір реттен ойнады. Барлығы болып 120 ойын ойналған болса, жарысқа неше адам қатысқан?

464. 11-сыныптың бітіруші оқушылары бір-бірімен суреттерін алмасты. Егер 1190 сурет алмастырылған болса, бұл сыныпта неше оқушы бар?

465. Арақашықтығы 900 км болған екі қаладан бір-біріне қарай екі пойыз жолға шықты. Пойыздар жолдың ортасында кездесті. Егер 1-пойыз 2-сінен 1,5 сағат кеш жолға шыққан болса және оған қарағанда жылдамдығы сағатына 10 км артық болса, әрбір пойыздың жылдамдығын тап.

466. Пойыз 220 км жолды белгілі бір уақытта жүріп өтуі керек еді. Ол 2 сағат жүргеннен кейін 10 минут тоқтап тұрды; соң жылдамдығын сағатына 5 км-ге арттырды және мекенжайға көзделген мезгілде жетіп келді. Пойыздың бастапқы жылдамдығын тап.

IV ТАРАУ ДЕРЕКТЕРДІ ТАЛДАУ

28-§. ДЕРЕКТЕРДІ ТАЛДАУ. ДЕРЕКТЕРДІ КЕСКІНДЕУ

Түрлі фирмалар, компаниялар шығаратын өнімдерінің сапасы мен мөлшерлік *белгілері,* көрсеткіштері (құрамы, массасы, өлшемдері, түсі, дәмі, ...) қабылданған нормаларға (стандарттарға) сәйкес келуін (немесе келмеуін) қалай білеміз? Қалай бақылаймыз, сынаймыз?

Дайындалған өнімдердің (мысалы: сүт, дән, ет өнімдері; түрлі ішімдіктер; киім-кешек; дәрі-дәрмек; электр жиhаздары, тағы басқалар) мөлшері өте көп болса, олардың барлығын бір-бірлеп сынақтан, бақылаудан өткізу экономикалық тұрғыдан тиімді емес. Бұндай жағдайда жалпы өнімдер жиынынан бірнеше өнім *кездейсоқ* түрді, кез келгені таңдап алынып, осы өнімдер ғана бір-бірлеп сынақтан өткізіледі.

Сынақтан өтетін барлық нысандар жиыны *бас жиын* деп аталады. Бас жиыннан таңдап алынған нысандар *іріктеме жиын* (қысқаша: *іріктеме*) деп аталады. Сынақтан өткізілетін заттар нысан деп аталады.

1-есеп. Фирма шамдарды (үй жарытқыштары) шығаратын болсын. Олардың неше проценті (пайызы) жарамсыз (жанбайды)? Мұны қалай тескереміз?

△ Фирма шығарған жүз мыңдаған электр шамының жану-жанбауын бір-бірлеп сынақтан өткізуге болмайды. Сондықтан мұндай жағдайда шамдардың бірнешеуі кездейсоқ түрде (тәуекел етіп) іріктеп алынады. Іріктелген барлық шамдар сынақтан өткізіледі. Сынақ нәтижесіне орай фирма шығарған өнім туралы белгілі бір қорытындыға келінеді.

Мысалы, 1000 шам сынақтан өткізіліп, олардың 10-ы жарамсыз болса (жанбаса), онда жалпы шамдардың да $\frac{10}{1000}=0,01$ бөлігі (яғни 1%-ы) жарамсыз деген қорытындыға келінеді. ▲

Бұл мысалда фирма шығарған жалпы шамдар *бас жиын* болса. Сынақ үшін кездейсоқ түрде іріктеп алынған 1000 шам *іріктеме жиынды* құрайды.

2-есеп. Мақта алқабында ашылған көсектердің орташа массасын анықта.

△ Ашылған көсектердің барлығын жинап алып, олардың массасын бір-бірлеп анықтаудың қажеті жоқ. Көсектің орташа массасын білу үшін, олардың бірнешеуі даланың түрлі жерлерінен кездейсоқ түрде таңдалған қоза түптерінен үзіп алынады. Пайда болған іріктемедегі көсектердің массасы өлшенеді және олардың орташа арифметикалық мәні есептеледі. Осы орташа арифметикалық мән мақта алқабында ашылған көсектердің орташа массасы ретінде қабылданады. ▲

Осы мысалда бас жиын — мақта алқабындағы барлық көсектер; ал іріктеме жиын — массасын өлшеу үшін алқаптың түрлі жерлерінен үзіп алынған көсектер.

Кездейсоқ түрде іріктелген *n* дана нысанның сынақ (өлшеу, бақылау) нәтижелері $x_1, x_2, ..., x_n$ болсын. *n* саны *іріктеменің көлемі* деп аталады. Іріктеменің мүшелері, әдетте, *варианталар* деп аталады. Варианталарды артып бару ретімен жазамыз:

$$x_1^* \leq x_2^* \leq x_3^* \leq ... \leq x_n^*. \quad (1)$$

(1) қатынас *вариациялық қатар* деп аталады.

3-есеп. Пәлләнің ұзындығын өлшеуде осындай мәндер (сантиметрлерде) алынады:

3,40; 3,34; 3,24; 3,40; 3,62; 3,45; 3,43; 3,35; 3,50; 3,56.

Осы мәндерге сәйкес вариациялық қатар құрастыр.

△ Осы мәндердің ең кішісі 3,24; ең үлкені 3,62. Сандарды өсу ретімен орналасытырып, осы вариациялық қатарды пайда етеміз:

3,24; 3,34; 3,35; 3,40; 3,40; 3,43; 3,45; 3,50; 3,56; 3,62. ▲

4-есеп. Кездейсоқ түрде 10 түп қоза таңдалды. Олардағы гүлдердің саны саналып, мына нәтиже алынды: 15, 11, 10, 15, 17, 15, 16, 16, 17, 18. Осы мәндерге сәйкес вариациялық қатар құрастыр.

△ Берілген сандардың ең кішісі 10, ең үлкені 18. Сандарды өсу ретімен жазып, осы вариациялық қатарды пайда етеміз:

10; 11; 15; 15; 15; 16; 16; 17; 17; 18. ▲

x_1, x_2,..., x_k іріктемеде x_1 варианта n_1 рет..., x_k варианта n_k рет қайталанған (байқалған) болсын. n_1, n_2,... n_k сандар *жиіліктер* деп аталады. Көрініп тұрғанындай, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

$W_1 = \frac{n_1}{n}$, $W_2 = \frac{n_2}{n}$,..., $W_k = \frac{n_k}{n}$ қатынастар *салыстырмалы жиіліктер* делінеді.

Демек, $W_1+W_2+...+W_k=1$. Кестелерді құрастырайық (1- және 2-кестелер):

1-кесте

Сынақ нәтиже-лері	x_1	x_2	...	x_k
Жиілік	n_1	n_2	...	n_k

2-кесте

Сынақ нәти-желері	x_1	x_2	...	x_k
Салыстырмалы жиілік	W_1	W_2	...	W_k

1- және 2-кестелерді x_1, x_2,...,x_k іріктеменің, тиісінше, жиіліктер бойынша, сондай-ақ салыстырмалы жиіліктер бойынша *бөлінісі* дейміз.

4-есеп үшін жиіліктер кестесі мен салыстырмалы жиіліктер кестесі төменде берілген (тиісінше, 3- және 4-кестелер).

3-кесте

Сынақ нәти-желері	10	11	15	16	17	18
Жиілік	1	1	3	2	2	1

4-кесте

Сынақ нәти-желері	10	11	15	16	17	18
Салыстыр-малы жиілік	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

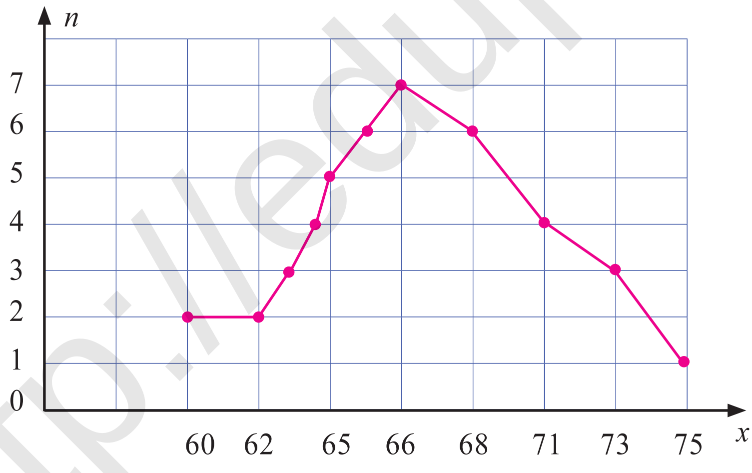
5-есеп. „Қозғалыс қауіпсіздігі“ айында МАБ қызметкері 30 автомобильдің жылдамдығын өлшеді. Деректер жиіліктер кестесінде:

Өлшеу нәтижелері (км/сағ)	60	62	65	66	68	71	73	75
Жиіліктер	2	2	5	7	6	4	3	1

Осы деректерді жазықтықта кескінде.

△ Координата жазықтығында координаталары (60; 2),(62; 2),(65; 5),...,(75; 1) болған нүктелерді кескіндеп, оларды кесінділермен ізбе-із қосамыз (39-сурет).

Пайда болған сынық сызық *жиіліктер полигоны* деп аталады.▲



39-сурет.

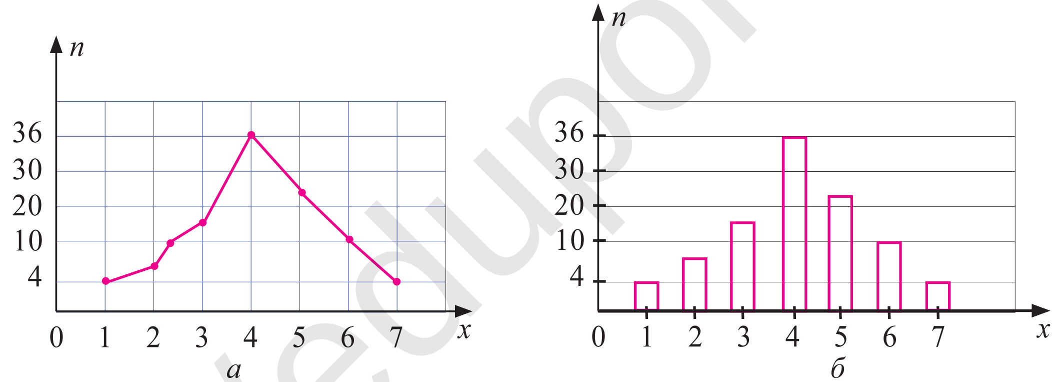
Егер іріктеменің көлемі үлкен болса, оның жиіліктер бойынша бөлінісін табу үшін іріктеме *сыныптарға* бөлінеді. Сыныптардың өлшемі (үлкендігі, ұзындығы,...) бірдей болуы керек.

Мысал. МАБ қызметкері „Қозғалыс қауіпсіздігі“ айында 100 автомобильді техникалық тексеруден өткізгенде олардың өткен 6 ай барысында неше километр жол жүргенін де анықтады. Бұл деректердің жиіліктер бойынша бөлінісі төмендегі кестеде берілген. Іріктемелер 7 сыныпқа бөлінген. Сыныптардың өлшемі (ұзындығы) бірдей.

Сыныптар	8001–9000	9001–10000	10001–11000	11001–12000	12001–13000	13001–14000	14001–15000
Сынып реттік саны	1	2	3	4	5	6	7
Жиіліктер	4	6	18	36	22	10	4

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=100$ екені көрініп тұр.

Кестедегі деректерді жиіліктер полигоны немесе бағаны диаграмма көрінісінде кескіндеуге болады (40-*а*, *б* суреттер).



40-сурет.

Жаттығулар

467. Кездейсоқ түрде іріктелген 30 түп қоза өсімдігіндегі гүлдер саны төмендегі кестеде келтірілген:

15	17	15	10	18	11	15	17	16	16
17	10	14	15	16	15	14	13	15	13
16	17	16	14	12	14	15	14	17	13

(Деректер М.Султонованың „Вариациялық статистика“ қолданбасынан алынған. „Уқитувчи“ баспасы, Т., 1977.)

1) Іріктеменің жиіліктер кестесін құрастыр.
2) Іріктеменің жиіліктер полигонын сал.

468. Сынып жетекшісі 30 оқушыдан демалыс күнінде әрбір оқушы неше сағат теледидар көргені туралы деректерді алды. Олар кестеде бейнеленген:

3	2	5	4	5	3	6	0	2	1	3	3	4	3	3
3	1	3	4	4	2	4	3	2	5	2	4	2	0	4

Деректер негізінде:1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) жиіліктер полигонын сал.

469. Әскери қызметке шақырылған жігіттердің 100-інің аяқкиімінің өлшемі төмендегі жиіліктер кестесінде берілген:

Өлшемі	38	39	40	41	42	43	44	45
Жиілік	4	4	19	27	23	14	6	3

Деректерге орай: 1) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр; 2)жиіліктер полигонын сал; 3) салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.

470. 8-сыныптағы 50 оқушы қыздың аяқкиім өлшемі кестеде берілген:

Өлшемі	34	35	36	37	38	39	40
Жиілік	5	7	10	15	7	4	2

Деректер негізінде:1) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр; 2) жиіліктер полигонын сал; 3) салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.

471. 8-сыныптың 20 оқушысының киім өлшемдері кестеде берілген:

38	42	40	44	40	48	46	42	44	46
48	46	44	50	46	44	48	44	48	44

Деректер негізінде: 1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр; 3) жиіліктер полигонын сал; 4) салыстырмалы жиіліктер полигонын сал.

472. Тестте 10 тапсырма бар еді. Сыныптағы 30 оқушының тест нәтижелері (дұрыс жауаптарының саны) кестеде берілген:

5	8	2	6	5	9	7	6	10	9	8	7	9	3	7
7	3	7	8	9	10	5	7	7	5	5	7	5	4	5

Деректерге сәйкес: 1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) жиіліктер полигонын сал.

473. Спорт тобына қатысатын 150 жігіттің 1 минут 30 секунд барысында неше рет „отырып-тұрғаны“ байқалды. „Отырып-тұру“ саны 40-тан 74-ке дейін болды: [40;74]. Осы кесінді әрбірінің ұзындығы 5-ке тең болған аралықтарға бөлінді. Әрбір аралыққа түскен бақылаулар саны есептелді және осы жиіліктер кестесі құрастырылды:

„Отырып-тұрулар“ саны	Жиілігі
40-тан 44-ке дейін	11
45-тен 49-ға дейін	20
50-ден 54-ке дейін	28
55-тен 59-ға дейін	36
60-тан 64-ке дейін	24
65-тен 69-ға дейін	19
70-тен 74-ке дейін	12
Жалпы	150

Деректерге сәйкес: 1) жиіліктер полигонын сал; 2) бағанды диаграмма сал.

29-§. ОРТАША МӘН. МОДА. МЕДИАНА

Орташа мән түсінігімен таныссың. Егер варианталар x_1, x_2,...,x_n болса, іріктеменің *орташа мәні* деп

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

санына айтылады.

Егер іріктемеде x_1 варианта n_1 рет, x_2 варианта n_2 рет,..., x_k варианта n_k рет қайталанған (байқалған) болса,

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1+...+n_kx_k}{n_1+...+n_k}$$

саны іріктеменің *салмақты орта мәні* деп аталады. n_1, n_2, ..., n_k сандары сәйкес варианталардың жиіліктері екенін ескертеміз.

1-есеп. Шаруашылық 100 га жерге шиіт егіп, белгілі бір сұрыптағы мақтадан әр гектардан 33 ц-ден өнім алды. Ал басқа 50 га жерге егілген сол сұрыптағы мақтадан 30 ц-ден өнім алды. Шаруашылық 1 гектар жерден орташа қанша өнім алды?

△ Бұл жерде $x_1 = 33$, $n_1 = 100$; $x_2 = 30$, $n_2 = 50$.

$$\overline{x} = \frac{100 \cdot 33+50 \cdot 30}{100+50} = \frac{3300+1500}{150} = \frac{4800}{150} = 32 \text{ (ц)}.$$

Жауабы: 32(ц).▲

2-есеп. Спортшы биіктікке 7 рет секіріп, мына нәтижелерді көрсетті (метр есебімен) :

2,1; 1,97; 2,44; 1,85; 1,97; 1,96; 2,06.

Спортшы орташа неше метр биіктікке секірген?

△Бұл жерде 1,97 варианта екі рет, қалған варианталар бір реттен көрсетілген. Бұдан

$$\overline{x} = (2,1 + 2 \cdot 1,97 + 2,44 + 1,85 + 1,96 + 2,06) : 7 = 14,35 : 7 = 2,05 \text{ (м)}.$$

Жауабы: 2,05 метр.▲

Орташа мәнді деректер қатарының *центрін* өрнектейтін сан деп айтуға болады.

Мода. Мода түсінігіне әкелетін есепті қарастырайық.

3-есеп. Мектеп медбикесі 8-сынып оқушыларының 10-ының бойын өлшеп, төмендегі нәтижелерді алды (сантиметр есебімен):
166; 168; 170; 165; 164; 168; 169; 163; 168; 162.
Іріктемеде қайсы варианта ең көп қайталанған?

△ Вариациялық қатар құрастырамыз:

162; 163; 164; 165; 166; 168; 168; 168; 169; 170.

Бұл вариациялық қатарда үйренілетін белгі – оқушы бойының биіктігі – 168 см ең көп – 3 рет тіркелген, ал басқа варианталар 1 немесе 2 рет. Бұл вариатциялық қатар үшін 168 саны *мода* болады.▲

Берліген вариациялық қатарда үйренілетін белгінің ең көп кездесетін мәні *мода* деп аталады және M_0 түрінде белгіленеді.

Мода және орташа мән өзара тең болмауы да, тең болуы да мүмкін. Бұл есепте оқушылардың орташа биіктігі $\bar{x}=(2\cdot163+164+$ $+165+166+3\cdot168+169+170):10=1664:10=166,4$ (см) болады.

Бұл есепте мода мен орташа мән өзара тең болмайды: 168≠166,4.

4-есеп. Әлінің „Алгебра“ пәнінен журналдағы бағалары: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5.

Осы іріктеменің модасы мен орташа мәнін тап.

△ M_0 = 4 екені көрініп тұр, өйткені 4 варианта іріктемеде ең көп кездесті:

$$\bar{x}=\frac{2\cdot3+3\cdot4+2\cdot5}{2+3+2}=\frac{28}{7}=4.$$

Бұл есепте $M_0=\bar{x}=4.$

Іріктеменің модасы болмауы да мүмкін. Мысалы, бақшада үзілген 5 қауынның массасы өлшенгенде (кг-да) 3,8; 4; 4,5; 5,2; 4,9 нәтижелер алынды: Бұл іріктеменің модасы жоқ. ▲

Медиана.

Вариациялық қатар мүшелерінің саны тақ болса, бұл қатар ортасыдағы *мүше медиана* дейиледе. M_e түрінде белгіленеді.

Мысалы, 20,23,24,27,29,31,34 қатары үшін медиана 27 болады, өйткені 27 саны осы вариациялық қатардың ортасында орналасқан. Оның сол жағында да, оң жағында да қатардың 3-тен мүшесі бар. Варианталар саны жұп болған жағдайды қарастырайық.

12, 14, 17, 21, 23, 29, 32, 37 қатарында 8 мүше бар, мұндай жағдайда вариациялық қатардың медианасы ортада тұрған екі санның орташа арифметикалық мәні түрінде анықталады:

$$M_e = \frac{21+23}{2} = \frac{44}{2} = 22.$$

Ендік.

Вариациялық қатардың ең үлкен мүшесі x_n^* мен ең кіші мүшесі di x_1^* арасындағы ерекшелік (айырма), яғни $x_n^* - x_1^*$ саны $x_1, x_2, ..., x_n$ іріктеменің *ендігі* деп аталады.

Ол, әдетте, r әрпімен белгіленеді.

Іріктеменің ендігі $x_1, x_2, ..., x_n$ сандары қаншалықты шашыраңқы екенін білдеретін өлшемдердің бірі болып табылады. Мысалы,

$$5,\ 6,\ 8,\ 16,\ 18,\ 19 \qquad (1)$$

қатар үшін ендік $r = 19 - 5 = 14$-ке тең.

$$10,\ 10,\ 12,\ 13,\ 13,\ 14 \qquad (2)$$

қатар үшін ендік $r = 14 - 10 = 4$-ке тең. Себебі, әр екі қатардағы мүшелер саны 6-дан, ал орташа мәндері өзара тең $(\overline{x} = 12)$.

$14 > 4$ теңсіздігі (1) қатардағы мүшелер (2) қатардағы мүшелерге қарағанда орташа мәнмен салыстырғанда шашыраңқы орналасқанын, (1) қатарда *айнымалылық* үлкен екенін білдіреді.

Жаттығулар

474. 10 ойында мектептің футбол командасы карсыластың қақпасына соққан доптардың жиіліктер кестесі төмендегідей болды:

x – доптар соны	0	1	2	3
n – жиілік	4	2	3	1

Осы деректерге орай: 1) вариациялық қатар құрастыр; 2) іріктеменің: орташа мәнін; модасын; медианасын; ендігін тап; 3) жиіліктер полигонын сал; 4) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр; 5) салыстырмалы жиіліктер кестесіне сәйкес диаграмма сал.

Іріктемелердің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын; 4) ендігін тап (**475 – 477**):

475. 1) 12, 14, 9, 13, 15; 3) 15,13,13,14,16,14;
2) 16, 14, 13, 17; 4) 5, 8, 13, 12, 12.

476. 1) 6, 8, 10, 11, 10; 3) 8, 10, 12, 11, 14;
2) 3, 6, 8, 4, 9; 4) 6, 3, 2, 7, 5, 7.

477. 1) –3, 4, 5, – 4, 1, 2, 4, –3, –2, 3, –3, 2;
2) –3, –3, 4, 4, 4, 6, 6, –3, –2, 4, 5, –4.

478. Тоғыз адамнан құралған қазылар алқасы 10 балдық шкалада екі бишінің биін бағалады. Бақылау нәтижелері кестеде келтірілген:

Бишінің реттік саны	Қазылардың реттік саны мен нәтижелері								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,8	9,6	8,9	9,2	8,7	8,9	8,9	8,8	8,7
2	9,1	8,2	9,0	8,9	9,0	9,1	9,0	9,1	9,0

Әрбір биші үшін қойылған бағалардың: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын; 4) ендігін тап.

479. Мектептегі 40 оқытушының еңбек өтелі туралы деректер төмендегі жиіліктер кестесінде келтірілген:

Еңбек өтелі	1	2	4	5	7	9	10	12	15	18	20	22	23	25
Оқытушылар саны	3	1	4	3	4	2	3	1	2	6	3	3	3	2

Осы іріктеменің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын; 4) ендігін тап; 5) жиіліктер полигонын сал.

480. Бақылау камераларын тексеріп, кездейсоқ түрде 50 автомобиль таңдалып, әрбірінің жылдамдығы (км/сағ-та) анықталды. Нәтижелер кестеде келтірілген:

62	54	56	73	78	63	68	70	66	54
58	65	55	57	69	67	61	64	53	56
58	76	57	48	57	68	82	78	72	75
65	67	64	54	58	62	67	80	87	69
74	78	70	76	46	60	63	68	74	67

Осы іріктеменің;
1) ендігін анықта;
2) аралық ұзындығын 5 деп алып, іріктемені сыныптарға (топтарға) бөл (45–49; 50–54; 55–59;...) және жиіліктер кестесін құрастыр;
3) іріктеменің: орташа мәнін; модасын; медианасын есепте;
4) жиіліктер полигонын сал;
5) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр;
6) салыстырмалы жиіліктер кестесіне сәйкес диаграмма сал;
7) неше пайыз автомобильдің жылдамдығы 70 км/сағ-тан артық?

481. Найза (копье) лақтыру бойынша сайысқа қатысқан 40 адамның көрсеткен нәтижелері (1 метр дәлдікте) мына кестеде берілген:

28	31	31	38	43	38	34	52	36	38
35	48	34	45	41	35	42	42	42	41
27	32	29	33	49	37	48	40	47	39
26	25	37	40	28	37	37	44	44	43

1) деректерді сыныптарға (топтарға) бөл (25–29; 30–34; ...) және жиіліктер кестесін құрастыр;
2) жиіліктер полигонын сал;
3) іріктеменің: орташа мәнін; модасын; медианасын тап.

30-§. ІРІКТЕУ ӘДІСІМЕН КОМБИНАТОРЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

Көптеген өмірлік есептердің шешімі бірнешеу болуы мүмкін. Шешімдердің ішінен өзімізге ең оңтайлысын таңдайтынымыз табиғи. Шешімдер санын есептеуде барлық варианттардың (тәсілдер, мүмкіндіктер) біреуі де „қалып кетпеуі“, „жоғалтпау“ үшін *іріктеу* (санамалау) әдісін пайдаланады. Бұл әдістің маңызы есептер шығару үдерісінде ашылады.

1-есеп. 2, 3, 5 цифрларының жәрдемімен неше екі таңбалы сан құруға болады?

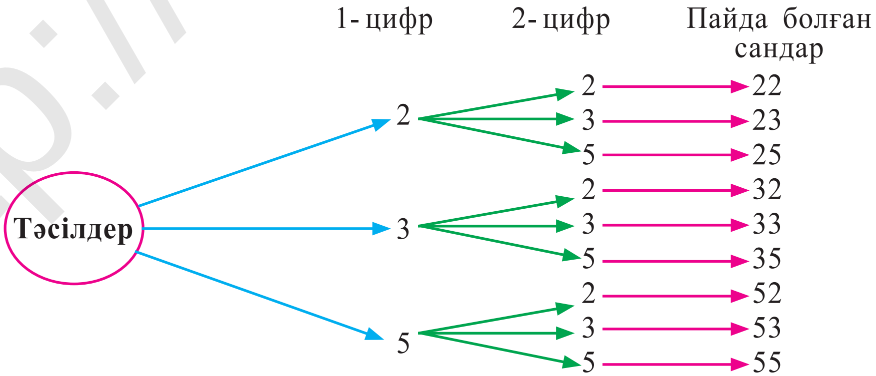
△ Жауаптардың біреуі де қалып кетпеуі, оларды қайталап жазбау үшін сандарды, мысалы, өсу ретімен жазамыз: алдымен 2 цифрымен, соң 3 цифрымен, кейін 5 цифрымен басталатын сандардың есепке сәйкесін *іріктеп* жазамыз:

22, 23, 25; 32, 33; 35, 52, 53, 55.

Жауабы: 9 екі таңбалы сан құрауға болады. ▲

1-есепті шығарудың тағы бір тәсілін қарастырайық.

△Осы сызбаны саламыз:

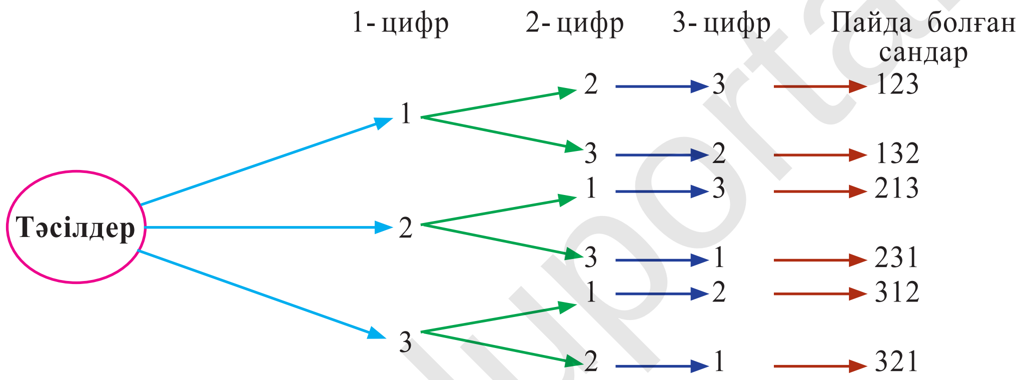


Жауабы: Жалпы 9.

Бұл сызба ағашқа ұқсайды, сондықтан мұндай сызбалар мүмкін болған *варианттар* (тәсілдер, іріктеулер) *ағашы* делінеді. Берілген 2, 3, 5 цифрлардан екі таңбалы сан құрастыру үшін алдымен 1-цифр таңдалады, ал бұл үшін 3 тәсіл бар, сондықтан ағаштағы „түбір“ – тәсілдерден 3 бұтақ шыққан. Соң 2-цифр таңдалады, ол үшін де 3 тәсіл бар, сондықтан 1-цифр болуға үміткер 3 цифрдың әрбірінен 3-тен бұтақ шыққан. Нәтижеде 9 түрлі екі таңбалы сан пайда болды.

2-есеп. 1, 2, 3 цифрлардан, оларды қайталамай, жалпы неше түрлі 3 таңбалы сан құруға болады?

△ Варианттар ағашын құрастырамыз:

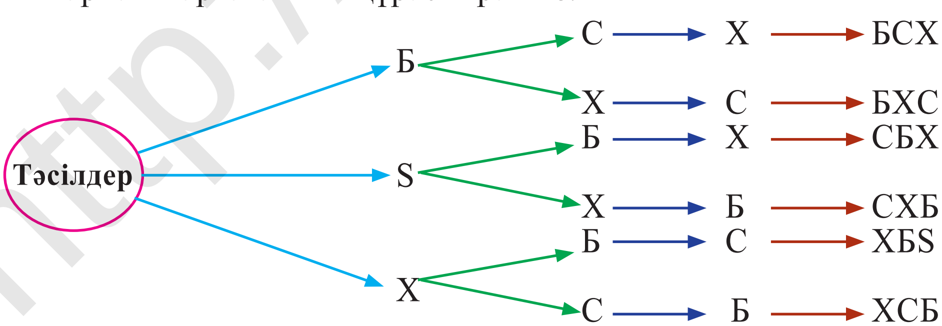


Жауабы: 6.▲

3-есеп. Туристік фирмасы Бұхара, Самарқант, Хиуа қалаларына саяхат ұйымдастырмақшы. Осындай маршруттың жалпы неше түрлі варианты (тәсілдері) бар?

△ Белгілерді енгіземіз: Бұхара – Б, Самарқант – С, Хиуа – Х.

Варианттар ағашын құрастырамыз:



Жауабы: Жалпы 6 маршрут.▲

4-есеп. 1) 1, 2 және 3; 2) 0, 1, 2 және 3 цифрларын пайдаланып, мүмкін болған барлық екі таңбалы сандарды жаз. Олардың саны N нешеге тең екен?

△ Комбинаторлық есептерді шешу құралдарының бірі — *варианттар кестесі*. Мұндай құралдың көмегімен есептеуде элементтер комбинациясын „жоғалтып“ алуға болмайды. Есепті варианттар кестесі арқылы шығарып көрейік. Мынадай кестелерді құрастырамыз:

1-цифр	2-цифр		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9.$

Жауабы: 1) $N = 9$.

1-цифр	2-цифр			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12.$

Жауабы: 2) $N = 12$. ▲

Жаттығулар

482. Әлішер, Бахрам, Сәлім футбол ойынын көру үшін 3 билет сатып алды. Билетке сәйкес олар 1-қатардағы 1; 2; 3-орындарға отыру керек. Олар осы 3 орынға неше тәсілмен отыруына болады? Есепке сәйкес варианттар ағашын сал.

483. 0, 4, 5 цифрларынан, цифрлар қайталануы мүмкін болса, жалпы неше 3 таңбалы сан құрауға болады? Есепке сәйкес варианттар ағашын сал.

484. 4, 5, 8 цифрларынан, цифрлар қайталануы мүмкін болса, неше 3 таңбалы сан құрауға болады?

485. Дүкенде алма, алмұрт, жүзім бар. Ирада мен Нәсиба әпкелер осы жемістердің біреуін таңдамақшы. Бұл таңдаудың жалпы неше варианты бар? Варианттар ағашын сал.

486. 2, 4, 6, 8 цифрларынан түрлі 4 таңбалы сандарды құра. Цифрлар қайталанбайды. Осы сандардың нешеуі: 1) 4-ке; 2) 8-ге бөлінеді?

487. Әзімхан анасы мен қарындасына беру үшін екі гүлшоғын алмақшы. Гүл дүкенінде ақ әтіргүл, қызыл әтіргүл, шынығүлден жасалған гүлшоқтары бар екен. Әзімхан екі гүлшоғын неше тәсілмен таңдауына болады? Варианттар ағашын сал.

488. Әліжан қоянға сәбіз, қырққабат, қызылша береді. Ол осы көкөністердің екеуін таңдауы керек. Әліжан мұны неше тәсілмен жүзеге асыруына болады?

489.. Сейфтің шифрінде 3 – *A, B, C* әріптері бар. Осы әріптердің көмегімен жалпы неше шифр құрауға болады? Екі жағдайды қарастыр: 1) әріптер қайталанбайды; 2) әріптер қайталанады.

490. Тәрелкеде 2 алма, 2 алмұрт, 2 шабдалы бар. Надыра мен Нәзима осы жемістердің 3-ін таңдамақшы. Таңдаудың неше тәсілі (варианты) бар?

491. Алты бала 3 екі орындықты қайықта серуендемекші. Балаларды осы қайықтарға неше тәсілмен бөлуге болады? Варианттар ағашын сал.

31-§. КОМБИНАТОРИКАНЫҢ НЕГІЗГІ ЕРЕЖЕСІ ЖӘНЕ ОНЫ ЕСЕП ШЫҒАРУДА ҚОЛДАНУ

Қымбатты оқушы! Сен 6-сыныпта комбинаториканың қосу және көбейту ережелеріне байланысты бастапқы түсініктермен танысқансың.

1-есеп. Самарқанттан Ташкентке 4 түрлі жолмен келуге болады: ұшақ, пойыз, автобус және жеңіл машина (такси). Ташкенттен Хожакентке 3 түрлі транспорт барады: пойыз, автобус, такси. Самарқанттан Хожакентке неше түрлі тәсілмен келуге болады (41-сурет)?

41-сурет.

△ Самарқанттан Ташкентке келудің жалпы 4 жолы бар. Сол 4 жолдың біреуін таңдап Ташкентке келдік дейік. Енді Хожакентке барудың 3 жолы – мүмкіндігі бар. Сөйтіп, Самарқанттан Ташкент арқылы Хожакентке барудың жалпы $4 \cdot 3 = 12$ түрлі тәсілі бар.

Бұл тәсілдерді жазып шығуға да болады. Белгілерді енгізейік: ұшақ (s), пойыз (p), автобус (a), такси (t). Мысалы, sp жазуы Самарқанттан Ташкентке ұшақта келуді және Ташкенттен Хожакентке пойызда баруды білдіреді. Осы белгілеу жәрдемімен Самарқанттан Ташкент арқылы Хожакентке барудың жалпы тәсілдері (варианттар, жолдар, мүмкіндіктер) төмендегідей болады:

sp	pp	ap	tp
sa	pa	aa	ta
st	pt	at	tt

Жалпы тәсілдердің саны: $4 \cdot 3 = 12$.

Жауабы: 12 түрлі тәсілі бар. ▲

Жалпы, *A* қаладан *B* қалаға келудің *m* ***тәсілі болса және әрбір тәсіл үшін*** *B*-дан *C* қалаға келудің *n* тәсілі болса, онда *A*-дан *C*-ға келудің жалпы $m \cdot n$ тәсілі бар, яғни *A*-дан *C*-ға $m \cdot n$ тәсілмен келуге болады.

Бұл ереже *көбейту ережесі* және ол комбинаториканың негізгі ережесі саналады.

2-есеп. „Макро“ супермаркетінің "Барлығы үй үшін" бөлімінде 5 түрлі пиала, 6 түрлі тәрелке, 4 түрлі шай қасық бар. Нағима апай түрлі аттағы екі зат сатып алмақшы. Оны неше түрлі тәсілмен жүзеге асыруға болады?

△ 1) Пиаланы таңдаудың 5 тәсілі бар. Ал тәрелкені таңдаудың 6 тәсілі бар. Пиала таңдаудың әрбір тәсіліне тәрелке таңдаудың 6 тәсілі бар, демек көбейту ережесіне орай пиала мен тәрелке жұбын таңдаудың $5 \cdot 6 = 30$ тәсілі бар. Дәл осылай пікір жүргізіп: 2) пиала мен қасықты $5 \cdot 4 = 20$ тәсілмен; 3) тәрелке мен қасықты $6 \cdot 4 = 24$ тәсілмен алуға болады. Демек, түрлі аттағы екі бұйымды алудың $30 + 2 + 24 = 74$ тәсілі бар екен.

Жауабы: 74 тәсілмен. ▲

3-есеп. Неше үш таңбалы санда тек бір 7 цифры бар?

△ 7 цифры 1-, 2-, 3-орында (жүздер, ондар, бірлер разряды) болуы мүмкін.

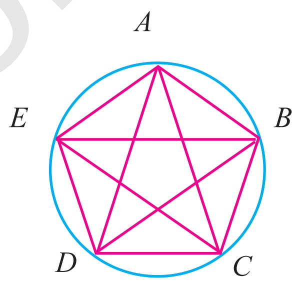
Егер 7 цифры 1-орында тұрған болса, 2- және 3-орындарды 9 цифрдың (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9) жәрдемімен $9 \cdot 9 = 81$ әдіспен толтыруға болады.

Егер 7 цифры 2-орында болса, онда 1-орында 0 және 7 цифрынан басқа кез келген цифр тұруы мүмкін. 1-орынды иелеудің $10-2 = 8$ мүмкіндігі бар. Олай болса 3-орында 7 цифрынан басқа кез келген цифр тұра алады: демек мүмкіндіктер саны $8 \cdot 9 = 72$.

Егер 7 цифры 3-орында тұрса, онда 1-орынды алу үшін 8, ал 2-орынды алу үшін 9 мүмкіндік бар. Сөйтіп, ондық жазуда тек бір 7 цифры бар үш таңбалы сандар барлығы $81 + 72 + 72 = 225$ екен.

Жауабы: 225. ▲

4-есеп. Шеңберде алынған 5 нүкте *A, B, C, D, E* әріптерімен белгіленген. Әр нүкте қалған нүктелермен тұтастырылса, неше кесінді пайда болады (42-сурет)?



42-сурет.

△ ***1-тәсіл.*** Нүктелердің саны кем болғандықтан, есепке сай пішінді сызып, кесінділер санын тікелей санап шығуға болады, олар — 10. Бірақ шеңберде алынған нүктелер саны көп болса (мысалы 100, ...) сәйкес пішін сызу және ондағы кесінділерді тікелей санау қиындайды. Олай болса басқаша жол ұстану керек.

2-тәсіл. Шеңберде алынған 5 нүктенің әрқайсысынан 4-еуден кесінді өткізіледі. Ондай кесінділердің саны $5 \cdot 4 = 20$, бірақ кесінділерді санауда әр кесінді екі реттен саналған. Демек, біз 20-ны 2-ге бөлуіміз керек: $20 : 2 = 10$.

3-тәсіл. *A* нүктені қалған 4 нүктемен тұтастырсақ, 4 кесінді аламыз: *AB, AC, AD, AE*. *B* нүктеден де 4 кесінді өткізуге болады, бірақ B-дан өткізілген бір кесінді ($BA = AB$)-ны біз санадық. Демек, *B* нүктеден 3 жаңа (алдын саналмаған) кесінді өткізіледі. Соған ұқсаған *C*-дан 2, *D*-дан 1 жаңа кесінді өткізу мүмкін. *E* нүктеден өткізілетін 4 кесіндінің барлығы бұрын саналған ($EA = AE$; $EB = BE$; $EC = CE$; $ED = DE$).

Демек, шеңберде белгіленген 5 нүктені тұтастыратын кесінділердің жалпы саны $4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 10$.▲

5-есеп. 3, 4, 5, 6, 8, 9 цифрларының көмегімен барлығы: 1) цифрлар қайталанбаса; 2) цифрлар қайталануы мүмкін болса, неше үш таңбалы сан құруға болады?

△ 1) Берілген цифрлар 6. Олардың кез келген біреуі 3 таңбалы санның бірінші цифры болуы мүмкін. Демек, 3 таңбалы санның бірінші цифрын *таңдау мүмкіндігі* 6-ау болады. Олай болса 2-цифр қалған 5 цифрдың кез келген біреуі болуы мүмкін, яғни 2-цифрды таңдау мүмкіндігіміз 5-еу. Соған ұқсас 3-цифрды таңдау мүмкіндігіміз 4-еу.

Демек, цифрлар қайталанбаса, барлығы үш таңбалы сандар саны $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ болады екен.

Жауабы: 120. ▲

△ 2) Цифрлар қайталанатын болса, үш таңбалы санның 1-, 2-, 3-разрядтарына жазылатын цифрды *таңдау мүмкіндігі* 6-аудан болады, өйткені берілген цифрлар саны 6-ау. Олай болса 3 таңбалы сандар саны $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$ болады.

Жауабы: 216. ▲

Жаттығулар

492. Анасы Назираға „Korzinka. Uz“ супермаркетінен 3 түрлі жеміс сатып ал деп айтты. „Korzinka. Uz-да“ 6 түрлі алма, 4 түрлі алмұрт, 5 түрлі жүзім бар. Назира жемістердің әр түрінен 1 кг-дан алып, неше түрлі жинақ құра алады?

493. Неше 4 таңбалы санда тек бір 5 цифры бар?

494. Шеңберде: а) 10; b) 100; d) n нүкте белгіленген. Әр нүкте қалған әрбір нүктемен тұтастырылса, әрбір жағдайда жалпы неше кесінді пайда болады?

495. 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 8; 6) 15 дос өзара қол алысып амандасты. Әрбір жағдайда қол алысулар саны нешеу болады?

496. 10 дос өзара шахмат турнирін өткізбекші. Онда әр бала қалған әрбір баламен бір партия шахмат ойнайды. Бір турнирде барлығы неше партия ойналады?

*Айтшы, **494–496-**есептердің ұқсастығы неде екен?*

497. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 цифрларының көмегімен барлығы: 1) цифрлар қайталанбаса; 2) цифрлар қайталануы мүмкін болса, неше үш таңбалы сан құруға болады?

498. 1, 2, 3, 4, 5 цифрларының көмегімен a) екі таңбалы; b) үш таңбалы; d) төрт таңбалы сандар жазу мүмкін бе? Цифрлар: қайталанбайтын; қайталанатын жағдайларды жеке қарастыр.

499. Футбол бойынша әлем чемпионатында алтын, күміс, қола медальдар үшін өтетін ойындарға 16 команда қатысуда. Медальдар командалар арасында неше түрлі тәсілмен бөлінуі мүмкін?

500. Бір елде 4 қала бар екен: A, B, C және D. A қаладан B-ға 6 жол, B қаладан C-ға 4 жол алып барады екен. A-дан D-ға 2 жол, D-дан C-ға 3 жолмен баруға болады. A қаладан C қалаға неше түрлі тәсілмен бару мүмкін?

501. Егер натурал санның жазуында тек тақ сандар қатысса, ондай санды „жағымды“ сан дейміз. Неше: 1) 3 таңбалы; 2) 4 таңбалы „жағымды“ сан бар?

502. Жазуында тым болмаса бір жұп цифр қатысқан 6 таңбалы сандар нешеу?

Нұсқау: Жазуында тек тақ сандар қатысқан 6 таңбалы сандар саны $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15\,625$. Барлығы 6 таңбалы сандар болса 900000. Есептің шартын қанағаттандыратын 6 таңбалы сандар саны $900\,000 - 15\,625 = 884\,375$.

503. 4 түрлі хатты 4 конвертке неше түрлі тәсілмен салуға болады?

504. 5 оқушыдан 2-еуін „Білімділер сайысына“ қатысу үшін таңдап алу керек. Оны неше түрлі тәсілмен орындауға болады?

505. Тақтаға 12 зат есім, 8 етістік, 7 сын есім жазылған. Сөйлем құрастыру үшін әр сөз табынан біреуден алу керек. Оны неше түрлі тәсілмен орындаймыз?

506. Шахмат тақтасына ақ және қара ладьяны бірін-бірі алалмайтын етіп неше түрлі тәсілмен орналастыру мүмкін (43-сурет)?

43-сурет.

507. Шахмат тақтасына ақ және қара ферзілерді бірін-бірі алалмайтындай етіп неше түрлі тәсілмен орналастыруға болады?

508. Шахмат тақтасына ақ және қара шахтарды ойын ережесін бұзбастан, неше түрлі тәсілмен орналастыру мүмкін?
Нұсқау: 3 жағдайды қарастыр:
1) ақ шах бұрышта тұр;
2) қара шах тақтаның шетінде (бірақ бұрышта емес) тұр;
3) ақ шах тақтаның шетінде емес.

509. Мектеп асханасында ақ нан, қара нан және үш түрлі шұжық бар. Олардан неше түрлі бутерброд дайындауға болады.

510. Кейбір елдердің жалауы түрлі түстегі 3 горизонталь немесе 3 вертикаль „жолақтан“ құралған. Ақ, жасыл, көк түсті маталардың көмегімен осындай жалаулардың неше түрін тігу мүмкін?

511. Бос орындарға 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 сандарының бірін жазу мүмкін болса, ○ + □ + △ = 10 „теңдеудің“ неше шешуі болады? Цифрлар қайталануы мүмкін. Екі жағдайды қарастыр (мысалы 1) 1, 1, 8, 1, 8, 1 8, 1, 1 түрлі шешім; 2) бір шешім деп қаралатын жағдайлар).

512. Назардың чемоданы кодпен ашылады. Бір код үш цифрдан құралып, әр цифр 3-тен үлкен емес. Кодта 13 саны жоқ. (мысалы, кодтар тізімінде 0, 13, 213... кодтар жоқ). Назар кодты ұмытып қалса, оны табу үшін ол көбімен неше рет ұмтылып көреді?

513. Көп қабатты үйдің есігіндегі құлып кодпен ашылады. Код 0 және 1 цифрларынан құралған 4 таңбалы сан (0000 және 1111 сандар код емес деп саналған). Құлыптың кодын ұмытқан болсаң, есікті көбімен неше рет ұмтылғанда ашасың?
Нұсқау*:* Алдымен бір 1 қатысқан, кейін екі 1 бар кодтарды, сосын үш 1 бар кодтарды сынап көру керек.

514. 20 кг күрішті 1 кг, 2 кг, 5 кг-дық тастардың көмегімен табақты таразыда неше түрлі тәсілмен тартуға болады?
△ Бұл істі төмендегідей орындауға болады:
1) тек 1 кг-лық тастың көмегімен 1 тәсіл;
2) тек 2 кг-лық тастың көмегімен 1 тәсіл;
3) тек 5 кг-лық тастың көмегімен 1 тәсіл;

4) 1 кг және 2 кг-лық тастардың көмегімен 9 тәсілмен:

1 кг-лық тас	18	16	14	12	10	8	6	4	2
2 кг-лық тас	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5) 1 және 5 кг-лық тастардың көмегімен 3 тәсіл:

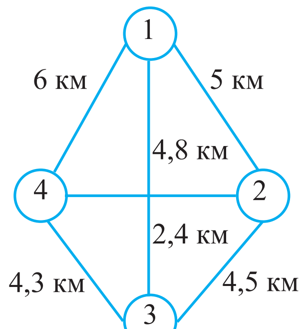
1 кг-лық тас	15	10	5
5 кг-лық тас	1	2	3

6) 2 және 5 кг-лық тастың көмегімен 1 тәсіл; бес 2 кг және екі 5 кг;
7) 1 кг, 2 кг және 5 кг-лық тастардың көмегімен 13 тәсілмен:

	Тәсілдердің аты												
Тастар, кг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1 кг	1	3	5	7	9	11	13	8	6	4	2	3	1
2 кг	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	1	2
5 кг	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

Демек, жалпы $1+1+1+9+3+1+13=29$ тәсіл.
Жауабы: 29 тәсіл.▲

515. Фирмаға тиісті 4 дүкен бар. Инкассатор (дүкендегі ақшаны жинап банкке тапсыратын қызметкер) 1-дүкеннен бастап барлық дүкендерді айналып шықты және тағы да 1-дүкенге қайтып келді. Мүмкін болған маршруттардың ең қысқасын тап (44-сурет).
Нұсқау: Әрбір маршрут үшін 5 цифрлы код жаз. Кодтың бірінші және соңғы цифры 1 болсын. Мысалы, 12431 маршруттың ұзындығы: $5+2,4+4,3+4,8=16,5$ (км).



44-сурет.

14—Алгебра, 8-сынып

IV *тарауға қатысты жаттығулар*

516. Төмендегі іріктеме берілген:
18, 19, 17, 18, 14, 13, 17, 19, 18, 18, 20, 22, 19, 15, 24, 14, 18, 15, 13, 17, 20, 22, 21, 19, 18, 16, 13, 13, 15, 14.
Іріктеменің: 1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) орташа мәнін; 3) модасын; 4) медианасын; 5) ендігін тап; 6) жиіліктер полигонын сал.

517. Іріктеменің: 1) вариациялық қатар құрастыр; 2) орташа мәнін; 3) модасын; 4) медианасын; 5) ендігін тап:
–5, –4, –3, –2, 0, 3, 6, 6, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 6, 7.

518. Кестедегі деректерге орай іріктеменің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын; 4) ендігін тап; 5) жиіліктер полигонын сал; 6) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр және соған сәйкес диаграмма сал:

Бақылау нәтижелері	7	8	9	10	12	14	15
Жиілік	6	7	8	9	10	6	4

519. 100 метрлік қашықтыққа жүгіруде 8-сыныптың 20 оқушысы мына нәтижелерді көрсетті (секундта):

14,3	16,1	14,7	16,9	24,1	22,4	19,8	14,2	17,4	14,5
20,8	19,9	15,4	18,4	20,2	18,3	20,1	18,4	18,3	16,2

Іріктеменің: 1) вариациялық қатарын; 2) жиіліктер кестесін құрастыр; 3) орташа мәнін; 4) модасын; 5) медианасын; 6) ендігін есепте; 7) жиіліктер полигонын сал.

520. 8-сыныптағы әрбір оқушының „Алгебра“ пәнінен екі тоқсан барысында алған бағалары төмендегідей екен:
4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 3, 4.
Іріктеменің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын тап; 4) жиіліктер кестесін құрастыр; 6) жиіліктер полигонын сал.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕРІП КӨР!

1. Футбол чемпионатына 18 команда қатысуда. Егер әр команда басқа командамен өз алаңында және қарсыластың алаңында ойнайтын болса, чемпионатта жалпы қанша ойын өткізіледі?

2. 8-сыныпта 12 пәннен сабақ өтіледі. Дүйсенбі күнгі кестеде 5 сағат сабақ бар, әр сағатта бірдей сабақ өтіледі. Дүйсенбі күнгі кестені неше түрлі тәсілмен құрастыруға болады?

3. 5 орындыққа 3 оқушыны неше түрлі тәсілмен отырғызуға болады?

4. Математикаға қатысты 5 түрлі кітапты сөредегі 5 орынға неше түрлі тәсілмен қоюға болады?

5. Іріктеменің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын; 4) ендігін тап; 5) жиіліктер кестесін құрастыр; 6) жиіліктер полигонын сал:

–3, –5, –3, –6, 1, 4, 7, 4, 9, 4.

6. Іріктеменің жиіліктер кестесі берілген:

Бақылау нәтижелері	2	1	5	4	0	–2	3	–1
Жиілік	3	2	1	5	1	2	4	2

Іріктеменің: 1) орташа мәнін; 2) модасын; 3) медианасын тап; 4) жиіліктер полигонын сал; 5) салыстырмалы жиіліктер кестесін құрастыр.

521. Егер: 1) цифрлар қайталанбаса; 2) цифрлар қайталануы мүмкін болса, 0, 1, 2, 3, 4, 5 цифрларынан жалпы неше 4 таңбалы сан құрауға болады?

522. 0, 3, 4, 5, 6, 7 цифрларынан жалпы неше 4 таңбалы тақ сан құрауға болады?

523. Әдетте, үшбұрыштың төбелері латын әліпбиінің бас әріптерімен белгіленеді. Латын әліпбиінде 26 әріп бар. Үшбұрыштың төбелерін неше түрлі тәсілмен белгілеуге болады?

524. 8 орындыққа 3 оқушыны неше түрлі тәсілмен отырғызуға болады?

525. Клиенттің үй телефоны 7 цифрлы болып, 218-ден басталады. Клиент мүшесі болған осы телефон станциясы неше клиентке қызмет көрсете алады?

526. 5 семсерлесу шеберінің 2-ін сайысқа қатысуы үшін неше тәсілмен іріктеп алуға болады?

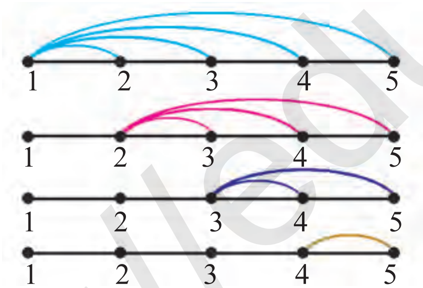
Әлінің шешімі: 5 семсерлесу шеберінің біреуін іріктеп алу мүмкіндігі 5. Ал 4 семсерлесуші қалады. Олардың біреуін 4 тәсілмен таңдауға болады. Демек, $5 \cdot 4 = 20$.

Жауабы: $5 \cdot 4 = 20$ тәсілі бар.

Нәзиманың шешімі: 5 семсерлесу шеберін „нөмірлеп“ шығамыз және олардан 2 адамдық топтар құрамыз: 12; 13; 14; 15; 23; 24; 25; 34; 35; 45.

Жауабы: 10 тәсілмен іріктеуге болады.

Мұбинабанудың шешімі:



4 жұптық: 12; 13; 14; 15;

3 жұптық: 23; 24; 25;

2 жұптық: 34; 35;

1 жұптық: 45.

Жалпы $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. **Жауабы:** 10 тәсілмен.

Кімнің шешімі дұрыс? Кімнің шешімі саған ұнады? Несімен ұнады?

527. Саған құрдас бір бала: „Қазірше мен әуесқой баламын, есейген соң үлкен ақын боламын“, деп жақсы ниетпен өлең жазады екен. Өлеңдерінің біріне „Жауқазын“ деп тақырып қояды. Осы өлеңнің 1-қатары „Көктемде қырда гүлдеді жауқазын“ екен. Қалған қатарлары 1-қатардағы сөздердің орын алмастыру нәтижесінде пайда болған. Осы „өлеңде“ ең көбі неше қатар бар?

528. Түзу сызықта: 1) 4; 2) 6 нүкте белгіленді. Әрбір жағдайда неше кесінді пайда болады?

529. „Райхан“ дәмханасының асмәзірінде 3 түрлі самса, 4 түрлі 1-тағам, 5 түрлі 2-тағам бар екен. 3 түрлі тағамға тапсырысты неше тәсілмен беруге болады?

530. 2 алма, 2 алмұрт, 2 шабдалы бар. 3 дос жемістерді әрбірі 2 түрлі жеміс алатындай етіп бөліп алмақшы? Мұны жалпы неше тәсілмен орындауға болады

IV тарауға қатысты сынақ жаттығулары – тест

1. Іріктеменің орташа мәнін тап: –3, –2, –1, 0, 1, 4, 5, 7, 8, 6.

A) 2,5; B) 11; C) $2\frac{7}{9}$; D) анықтауға болмайды.

2. Іріктеменің медианасын тап: –1, 0, 2, 6, 6, 5, 10.

A) 6; B) 5; C) 5,5; D) 4,5.

3. Іріктеменің медианасын тап: 10, 7, 6, 5, 4, 9.

A) B) 7; C) 6,5; D) 6,25.

4. Іріктеменің ендігін тап: 120, 100, 140, 170, 95.

A) 120; B) 312,5; C) 70; D) 75.

5. Іріктеменің модасын тап: –1, 0, 2, 2, 4, 5, 5, 7.

A) 2 va 5; B) 2 C) 5; D) 3.

6. Кестедегі деректерге орай іріктеменің орташа мәнін тап:

Бақылау нәтижелері	5	6	11	7	13	12
Жиілік	3	4	3	5	3	2

A) 9,5; B) 8,5; C) 10; D) 7.

7. 5-ке бөлінетін 6 таңбалы сандар нешеу?

A) $18 \cdot 10^4$; B) $9 \cdot 10^4$; C) $5 \cdot 6$; D) $6 \cdot 5^4$.

8. Цифрлар қайталанатын болса, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 цифрларынан неше 5 таңбалы сан құрауға болады?

A) 8^5; B) 5^8; C) $8^2 \cdot 5^3$; D) $5^4 \cdot 8$.

9. Екі параллель түзу сызық берілген болып, олардың бірінде 4, екіншісінде 3 нүкте белгіленген. Төбелері осы нүктелерде болатын неше үшбұрыш бар?

A) 30; B) 33; C) 40; D) 32.

10. 3 орындыққа 6 оқушыны неше түрлі тәсілмен отырғызуға болады?

A) 120; B) 130; C) 100; D) 480.

11. Футбол командасындағы 11 адамның арасынан команда жетекшісі мен оның көмекшісін неше тәсілмен іріктеп алуға болады?

A) 110; B) 55; C) 22; D) 121.

12. Бағыстан ауылынан Ташкентке 2 жолмен, Ташкенттен Үргенішке 4 жолмен баруға болады. Бағыстаннан Үргенішке бару жолдарының саны нешеу?

A) 8; B) 10; C) 6; D) 12.

13. Бір оқушыда қызықты математикаға қатысты 7 кітап, екінші оқушыда 9 әдеби кітап бар. Олар неше тәсілмен біреуінің бір кітабын екіншісінің бір кітабына айырбастауына болады?

A) 63; B) 49; C) 81; D) 126.

14. Атабектің туылған күніне оны құттықтауға 9 досы келді. Атабек олардың барлығымен, достары да өзара қол беріп сәлемдесті. Жалпы қол беріп сәлемдесулер саны нешеу?

A) 45; B) 90; C) 10; D) 50.

Іс жүзіндік және пәнаралық байланыс есептері

531. Әскери қызметке шақырылатын жігіттердің 50-інің бойы сантиметрлерде өлшенді. Өлшеу нәтижелері кестеде көрсетілген:

159	156	160	154	155	154	158	163	158	180
156	157	155	158	159	158	159	154	167	158
158	156	175	156	164	162	168	157	159	162
164	169	158	167	172	166	175	177	183	182
172	170	172	166	171	174	162	167	169	173

1) деректерді сыныптарға бөл (топта): 154–158, 159–163, 164–168, 169–173, 174–178, 179–183.
Әрбір сыныпқа деректердің нешеуі тиісті екенін анықта;
2) бағанды диаграмма сал;
3) жиіліктер полигонын сал.

532. Кездейсоқ түрде таңдалған 30 түп қоза өсімдігіндегі ашылған көсектердің саны кестеде берілген:

7	4	7	6	4	4	4	4	3	5	7	4	3	3	4
3	6	5	4	7	6	4	4	3	4	3	4	4	3	5

Деректерге орай:
1) жиіліктер кестесін құрастыр;
2) жиіліктер полигонын сал.

533. Өзбек жазушысының өзбек тіліндегі қандайда бір шығармасын таңда. (Мысалы: Х. Тухтабоевтың „Сары диюді мініп“; А. Қадыридің „Өткен күндер“ шығармалары.) Шығарманың кездейсоқ таңдалған, мысалы, 2 бетіндегі әріптерді сана. Өзбек әліпбиіндегі әрбір әріп сен таңдаған беттерде неше реттен кездеседі? Әріптердің: 1) жиіліктер бойынша; 2) салыстырмалы жиіліктер бойынша бөлінісін құрастыр; 3) жиіліктер полигонын сал.

534. 8-сынып оқушыларының арасында Әлішер Науаидың ғазалдарын жатқа мәнерлеп оқу бойынша жарыс өтті. Оған 10 қыз және 9 ұл бала қатысты.

x – қыздар оқыған ғазалдар саны,

y – ұлдар оқыған ғазалдар саны болсын. x және y сандарының жиіліктер бойынша бөлінісі төмендегі кестелерде берілген:

x – ғазалдар саны	4	5	6	8	12
n – жиілік	3	2	3	1	1

y – ғазалдар саны	4	5	6	8	9
n – жиілік	2	4	1	1	1

Кестеге орай x және y шамалардың:

1) модаларын; 2) медианаларын тап; 3) кестелерге сәйкес жиіліктер полигонын сал.

△ x және y шамалардың кесте көрінісінде берілген бөлінісін варианталардың төмендегі қатары түрінде де жазуға болады:

$$x: 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 12 \qquad (1)$$

$$y: 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 8, 9 \qquad (2)$$

(1) іріктемеде 2 мода бар: $M_{0_1} = 4$ және $M_{0_2} = 6$. Ал (2) іріктемедегі мода біреу: $M_0 = 5$.

(1) қатарда 10 (жұп сандағы) мүше бар. Бұл жағдайда медиана центріндегі екі мүшенің орташа арифметикалық мәніне тең:

$$M_e = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

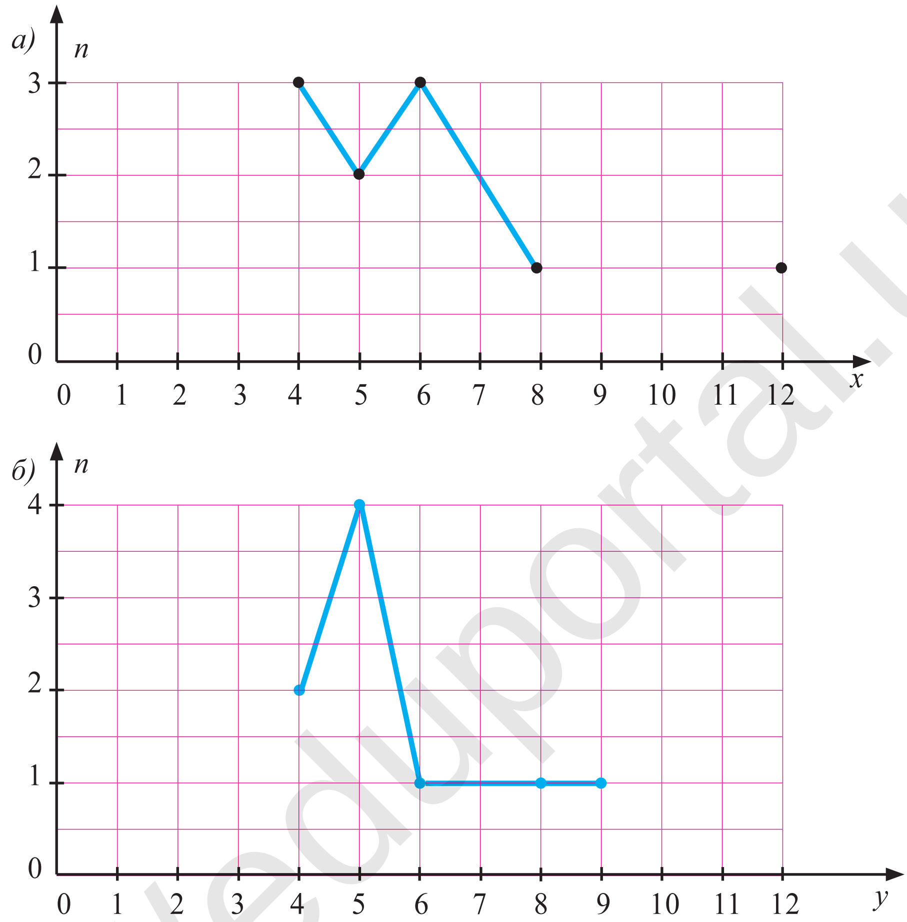
(2) қатарда 9 (тақ сандағы) мүше бар. Бұл жағдайда медилнаның мәні центрдегі мүшеге тең: $M_e = 5$.

Медиана вариациялық қатарды теңдей екіге бөледі: медианадан сол жақта да, оң жақта да вариациялық қатардың элементтерінің саны бірдей, өзара тең болады.

Жауабы: 1) (1) қатарға $M_{0_1} = 4$; $M_{0_2} = 6$; (2) қатарға $M_0 = 5$;

2) (1) қатарға $M_e = 5,5$; (2) қатарға $M_e = 5$;

3) x және y шамалардың жиіліктер полигоны 45-*а*, *б* суреттерде берілген. ▲



45-сурет.

535. Әрбір 8-сыныпқа, мысалы, I және II тоқсан нәтижелеріне сәйкес: 1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) жиіліктер полигонын сал; 3) полигондарды салыстыр және қорытынды шығар. Деректерді сынып журналдарынан оқытушылардың көмегімен ал.
Есепті қалай шығаратыныңды баянда.

536. Мектептің: 1) 5-; 2) 8-; 3) 11-сыныптары оқушыларының әрбір сынып үшін: а) бойларының орташа ұзындығын; b) орташа массасын тап. Деректерді мектеп медбикесінен ал. Сәйкес жиіліктер полигонын сал.

537. Бақылаудың нәтижелері негізінде мектебіңде 1 күнде орташа неше грамм бор жұмсалатынын анықта. 1 күнде, 1 айда республикамыз мектептерінде неше тонна бор жұмсалатынын шамала. Республикамызда жоғары оқу орындары, лицейлер мен мектептер санын бірге (есептеу оңай болу үшін) 10000 деп ал.

538. 3 гектар жерге қауын егілген. Олар пісейін деп қалды. 1 гектар жерден орташа неше тонна өнім алынатынын бағала. Бұл істі қалай жүзеге асыратыныңды кезең-кезеңімен баянда.

539. Автомашианаларды мемлекеттік тіркеуден өткізуде 3 цифр, 3 әріп және қала немесе облыс үшін белгіленген код пайдаланылады. Мысалы, автомашина нөміріндегі 01 коды – машина Ташкентте тіркелгенін білдіреді. Не деп ойлайсың, Ташкентте ең көбі неше автомашина тіркелуі мүмкін?

△ Нөмірлеуге 24 әріп қатысатын болсын. Нөмір 6 „орынды“ иелейді. 1-„орында“ 10 цифрдың кез келген біреуі болуы мүмкін. 2-„орынды“ 10 цифрдің бірі иелейді. 3-„орында“ 9 цифрдың кез келген біреуі болады. (3 бірдей цифр берілмейді, мұндай нөмірлер ауционда сатылады.) Нөмердегі 1-әріп те, 2-әріп те, 3-әріп те 24 әріптің кез келген біреуі болуы мүмкін. Демек, Ташкентте тіркелуі мүмкін болған автомашиналардың жалпы саны $10 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 24 = 24^3 \cdot 900 = 12\ 441\ 600$.

Бұл есептеуде әріптердің нөмірдегі 3 таңбалы саннан „бір әріп – 3 таңбалы сан – 2 әріп“ немесе „3 таңбалы сан – 3 әріп“ көірінісінде болуының айырмашылығы жоқ.

Жауабы: 12 441 600.▲

540. 2, 4, 7, 9 цифрларынан оларды қайталамастан неше 4 таңбалы сан құрауға болады? Олардың нешеуі: 2-ге, 4-ке, 11-ге бөлінеді?

541. Туылған күніңе шақырылған 4 досыңды 4 орындыққа неше түрлі тәсілмен отырғызуға болады?

542. Тәрелкеде 8 жаңғақ бар еді. Аббас кез келген 3-ін алмақ болды. Мұны ол неше тәсілмен жүзеге асыруға болады?

543. Залда 2 бос орын бар. 3 адамның 2-ін осы орынға неше тәсілмен отырғызуға болады?

V ТАРАУ 8-СЫНЫПТАҒЫ „АЛГЕБРА“ КУРСЫН ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ЖАТТЫҒУЛАР

544. Есепте:

1) $\frac{27}{32}\cdot\frac{8}{162}\cdot\frac{72}{69}$;

2) $\frac{38}{147}\cdot\frac{91}{152}:\frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\right)\cdot\left(3\frac{23}{58}-2\frac{9}{58}\right)$;

4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right)\cdot\left(2\frac{23}{56}-3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17:1{,}7+(2\frac{3}{4}+0{,}15):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}$;

6) $5{,}86-3\frac{5}{6}\cdot\frac{15}{23}+\frac{15}{28}:4\frac{2}{7}$;

7) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot2\frac{4}{7}}$;

8) $\dfrac{5\frac{1}{7}\cdot5\frac{1}{4}+5\frac{5}{8}\cdot3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13}:1\frac{1}{26}}$.

545. Екі санның бірі a-ға тең. Сандардың бірі a. Осы сандардың екі еселенген көбейтіндісін жаз. Осы көбейтіндінің мәнін $a=\frac{1}{2}$; 2 болғанда есепте.

546. Екі санның қосындысы 30-ға тең. Сандардың бірі a. Осы сандардың екі еселенген көбейтіндісін жаз. Осы көбейтіндінің мәнін $a = -2$ болғанда есепте.

547. a жүздік, b ондық және c бірліктен құралған натурал санда неше бірлік бар екенін көрсететін формула құрастыр. Дәл осы цифрлар көмегімен, бірақ кері ретпен жазылған санда неше бірлік бар?

548. a килограм мен c грамм неше граммды құрайды? Грамдар санын x әріпімен белгілеп, жауапты формуламен жаз.

Амалдарды орында (**549–552**):

549. 1) $\left(\frac{c-d}{c^2+dc}-\frac{c}{d^2+cd}\right):\left(\frac{d^2}{c^3-cd^2}+\frac{1}{c+d}\right);$

2) $\left(\frac{2n}{k+2n}-\frac{4n^2}{k^2+4nk+4n^2}\right):\left(\frac{2n}{k^2-4n^2}+\frac{1}{2n-k}\right);$

3) $\left(\frac{b^2}{b+x}-\frac{b^3}{b^2+x^2+2bx}\right):\left(\frac{b}{b+x}-\frac{b^2}{b^2-x^2}\right);$

4) $\left(\frac{2q}{2q+m}-\frac{4q^2}{4q^2+4mq+m^2}\right):\left(\frac{2q}{4q^2-m^2}+\frac{1}{m-2q}\right).$

550. 1) 1) $1+a-\frac{a-1}{a}+\frac{a-1}{2a}-\frac{3a}{2};$

2) $\frac{m+1}{m^2+m+1}-\frac{2}{1-m}+\frac{3m^2+2m+4}{1-m^3};$

3) $\frac{m+n}{3}-m+2n;$

4) $m+n-\frac{2m-n}{5}-\frac{m+n}{2}.$

551. 1) $\frac{a^3+2a^2}{a^2-1}\cdot\frac{(a+1)^3(a-1)}{a^2(a+2)};$ 2) $\frac{(a^2+ab)^2}{a^2-b^2}:\frac{(a+b)^2}{(ab-b^2)^2}.$

552. 1) $1,5\cdot\left(2b-\frac{3b}{7}\right)-1\frac{5}{7}\cdot(3b-5)+\frac{9b^2-16}{4-3b};$

2) $\frac{x+3a}{x+a}-\frac{x}{x-a}+\frac{2a^2-ax+x^2}{a^2x^2}:\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}.$

553. Егер $x>\frac{1}{2}$ және $y>4$ болса, онда

1) $4x+3y>14;$ 2) $2xy-3>1;$ 3) $x^2y>1;$ 4) $x^3+y^2>16$

екенін дәлелде.

554. (Ауызша.) Теңсіздікті қанағаттандыратын ең үлкен бүтін санды тап:

1) $n \leq -7$; 2) $n < -3,6$; 3) $n \leq 4,8$; 4) $n \leq -5,6$.

555. (Ауызша.) Теңсіздікті қанағаттандыратын ең кіші бүтін санды тап:

1) $n > -12$; 2) $n \geq -5,2$; 3) $n \geq 8,1$; 4) $n \geq -8,1$.

556. Теңсіздікті шеш:

1) $x + 4 > 3 - 2x$; 2) $5(y+2) \geq 8-(2-3y)$;

3) $2(0,4+x)-2,8 \geq 2,3+3x$; 4) $7(x + 5)+10 > 17$;

5) $\frac{3-x}{2}+\frac{x}{4} > 7$; 6) $\frac{x}{6}-\frac{2-x}{3} \leq 5$.

557. Егер

1) $0 \leq x \leq 7,2$; 2) $-5\frac{1}{3} \leq x \leq 0$; 3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$;

4) $11 < 3x < 13$; 5) $-3,1 < x \leq 4$; 6) $12 < 5x < 21$

болса, x қандай бүтін мәндерді қабылдайды?

558. Теңсіздіктер жүйесін шеш:

1) $\begin{cases} 5x-2 \geq 6x-1, \\ 4-3x > 2x-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1)-2x > 9-4x, \\ 3(5-2x)-1 \geq 4-5x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12x-3(x+2) \geq 7x-5, \\ 13x+6 \leq (x-5)\cdot 2+3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5}-1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$

559. Теңсіздіктер жүйесінің шешімдері болған бүтін сандарды тап:

1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4}-2 \leq \frac{3-x}{4}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3}-\frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geq \frac{3+7x}{4}-\frac{5+4x}{5}. \end{cases}$

560. Теңдеуді шеш:

1) $|x-2|=3,4$; 2) $|3-x|=5,1$; 3) $|2x+1|=5$;

4) $|1-2x|=7$; 5) $|3x+2|=5$; 6) $|7x-3|=3$.

561. Теңсіздікті шеш:

1) $|x-2|\le 5{,}4$; 2) $|x-2| \ge 5{,}4$; 3) $|2-x|<5{,}4$;
4) $|3x+2|\ge 5$; 5) $|2x+3|<5$; 6) $|3x-2{,}8| \ge 3$.

562. Түбірден шығар:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \ne 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y>0$.

563. Ықшамда:

1) $(3\sqrt{20}+7\sqrt{15}-\sqrt{5}):\sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{56}):\sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}}-\sqrt{7}+0{,}5\sqrt{343}$.

564. Өрнектердің мәндерін салыстыр:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ және $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ және $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

565. Өрнекті ықшамда:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

566. Көбейткішті түбір астынан шығар:

1) $\sqrt{9a^2b}$, мұнда $a<0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, мұнда $a>0, b>0$;

3) $\sqrt{8a^3b^5}$, мұнда $a<0$, $b<0$; 4) $\sqrt{12a^3b^3}$, мұнда $a<0$, $b<0$.

567. Көбейткішті түбір астына түсір:

1) $x\sqrt{5}$, мұнда $x\ge 0$; 2) $x\sqrt{3}$, мұнда $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, мұнда $a\ge 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, мұнда $a<0$.

568. Есепте:

1) $\sqrt[3]{1000}\cdot(0{,}0001)^{0{,}25}+(0{,}027)^{\frac{1}{3}}\cdot 7{,}1^{0}-\left(\frac{10}{13}\right)^{-1}$;

2) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}:\frac{1}{\sqrt{11\frac{1}{9}}}+(6{,}25)^{\frac{1}{2}}:(-4)^{-1}$;

3) $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0{,}008)^{\frac{1}{3}}:(-2)^{-2}$.

569. Өрнектің мәнін тап:

1) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a-b}\right)\cdot\frac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a}$, мұнда $a=3, b=12$;

2) $\frac{m+2\sqrt{mn}+n}{n}\cdot\frac{\sqrt{mn}+n}{m-n}-\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, мұнда $m=5, n=20$.

570. Теңдеуді шеш:

$x^{\frac{1}{2}}=2$; 2) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 3) $x^{-3}=8$; 4) $x^{\frac{5}{2}}=0$; 5) $x^{-\frac{1}{3}}=27$.

571. $y=-\frac{25}{x}$ функцияның графигіне:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1;\ 250)$

нүкте тиісті болуын немесе болмауын анықта.

572. Функцияның графигін сал:

1) $y=\frac{4}{x}$; 2) $y=-\frac{6}{x}$.

Функцияның қайсы аралықтарында өсуің, азаюын график бойынша анықта; функцияның жұп немесе тақ екенін анықта.

573. Өрнекті ықшамда:

1) $\dfrac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}}-\dfrac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}$;

3) $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{4}}}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}{(a^{-1}b)^{\frac{1}{2}}}$; 4) $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}$.

Өрнекті ықшамда (**574–575**):

574. 1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

575. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[4(a+1)+(\sqrt[3]{a\sqrt{a}}-1)^{2}-\left(\dfrac{\sqrt[6]{ab^{2}}+\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}+\sqrt[3]{a}\right)^{3}\right]^{\frac{1}{2}}$, мұнда $0<a\leq 1$;

2) $\dfrac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$; 3) $\dfrac{a^{-2}\cdot b^{-3}-a^{-1}\cdot b^{-2}}{a^{-\frac{9}{2}}\cdot b^{-\frac{11}{2}}-a^{-\frac{11}{2}}\cdot b^{-\frac{9}{2}}}$.

Теңдеуді шеш (**576–577**):

576. 1) $x^{2}=7$; 2) $x^{2}=11$; 3) $x^{2}+6x=0$;
4) $x^{2}+5x=0$; 5) $x^{2}=8x$; 6) $x^{2}=12x$.

577. 1) $1{,}5x-4x^{2}=6{,}3x-x^{2}$; 2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;

3) $3x(x+2)=2x(x-2)$; 4) $\dfrac{1}{4}(3x^{2}+1)-\dfrac{40x+3}{6}=\dfrac{x-3}{12}$;

5) $\dfrac{y^{2}-5}{4}-\dfrac{15-y^{2}}{5}=\dfrac{y^{2}-4}{3}$; 6) $\dfrac{2x^{2}-1}{4}=\dfrac{1+1{,}5x^{2}}{5}$.

578. Егер
1) $(y-3)^{2}>(3+y)(y-3)$ болса, онда $y<3$ болатынын;
2) $(3a+b)^{2}<(3a-b)^{2}$ болса, онда $ab<0$ болатынын дәлелде.

579. Егер $x<\dfrac{a+b}{2}$, $y<\dfrac{a+c}{2}$, $z<\dfrac{b+c}{2}$ болса, онда $x+y+z<a+b+c$ болатынын дәлелде.

580. Тік бұрышты параллелепипедтің биіктігі 15 см-ден артық, ені 2 см-ден, ал бойы 0,3 м-ден артық. Оның көлемі 0,9 $дм^3$-ден үлкен екенін дәлелде.

581. y-тің кез келген мәнінде
1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$
өрнек оң болатынын дәлелде.

582. k-нің $4y^2-3y+k=0$ теңдеуі нақты түбірлерге ие болмайтын мәндерінің жиынын тап.

583. k-нің қандай мәндерінде -2 саны $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$ теңдеуінің түбірі болады?

584. Теңдеуді шеш:

1) $3x^2+8x+5=0$;
2) $5x^2+4x-12=0$;
3) $\frac{6}{4x^2-1}-\frac{x}{2x-1}=\frac{5}{2x+1}$;
4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2x+2}=\frac{2x^2+8}{x^2-1}$;
5) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$;
6) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$.

585. Теңсіздікті шеш:

1) $(x+2)^2<(x-3)^2-8(x-5)$;
2) $\frac{2+x}{9}-x\le\frac{2x-5}{3}-(4-x)$;
3) $\frac{(x-3)(x+2)}{4}-\frac{(x-7)}{3}>\frac{(x-6)^2}{4}+x$;
4) $6x+\frac{(3+x)^2}{2}>\frac{8-2x}{5}+\frac{(x+3)(x+7)}{2}$.

586. Жуықтау қателігін тап:

1) 0,2781-дің 0,278-бен;
2) –2,154-тің –2,15-пен;
3) $-\frac{7}{18}$-нің $-\frac{1}{3}$-мен;
4) $\frac{3}{11}$-тің 0,272-мен.

587. 3,5 саны 3,5478 санының 0,05-ке дейінгі дәлдікпен алынған жуық мәні екенін дәлелде.

588. $\frac{7}{9}$ санының 0,777 санымен жуықтаудың салыстырмалы қателігін тап.

589. Кездейсоқ таңдалған 60 түп қоза өсімдігінің негізгі сабағындағы буындар саны төмендегі кестеде берілген:

10	11	10	10	10	9	9	11	9	9
11	11	11	7	9	10	10	10	10	10
10	10	11	11	11	10	10	11	10	10
9	10	9	9	9	9	10	9	10	10
10	10	10	10	11	9	11	9	9	12
9	10	8	11	10	10	9	10	10	11

Іріктеменің: 1) жиіліктер кестесін құрастыр; 2) орташа мәнін; 3) модасын; 4) медианасын; 5) ендігін есепте; 6) жиіліктер полигонын сал.

590. Неше 4 таңбалы санда тек бір ғана 0 цифрі бар?

591. 0, 1, 2, 3, 5, 8 цифрларынан оларды қайталамайтын жалпы неше 3 таңбалы сан құрауға болады?

592. 6 қонақты 6 орындыққа неше тәсілмен отырғызуға болады?

593. Әдебиет кітабыңнан қандайда бір мәтінді таңда. Оның екі бетіндегі барлық әріптерді сана. Дауысты әріптердің мәтінде кездесу жиілігін анықта. Жиіліктер кестесін құрастыр. Жиіліктер полигонын сал. Қорытынды шығар және оны дәптеріңе жаз.

ЖАТТЫҒУЛАРДЫҢ ЖАУАПТАРЫ

I тарау

1. 2) 0; 4) 5. **2.** 2) -2; 4) 0. **3.** $(7m)$т; 168 т. **4.** 1) $(60м)$ мин; 2) $\frac{p}{60}$ мин; 3) $\left(60м+l+\frac{p}{60}\right)$ мин. **5.** $3(x-y)$; 2) 4,5; 4) 2,5. **6.** $(x+y)$ $(x-y)$; 2) $-\frac{11}{64}$; 4) 0,104. **7.** 2) $-1\frac{2}{3}$. **8.** 2) 4. **9.** 1, 3, 15, 21. **10.** 2) $(m-1)m$; 4) $(2p+1)\times(2p+3)(2p+5)$. **12.** $(p-q)$t; 1) 5t; 2) q саны p-дан үлкен болмайды; q саны p-ға тең болуы мүмкін. **13.** $400n+500m$; 155000; 155000. **15.** 187200 м^3, $(37440м)$ м^3. **16.** $s=3\frac{1}{6}c+1\frac{2}{3}a+2\frac{1}{2}b$, 53 км. **23.** $\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$. **25.** 2) 5; 4) 1,9; 6) -4. **26.** 2) $V=\frac{m}{p}$; 4) $a=\frac{p}{2}-b$. **27.** $x=\frac{np}{1000a}$, $x=3$. **28.** $t=\frac{a}{cn}$, $t=15$. **30.** 2) $\frac{4}{5}$; 4) -2. **31.** 2) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{b}{2c}$. **32.** 2) $\frac{1}{b^4}$; 4) b^2. **33.** 2) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{b}{3a}$; 6) $\frac{a^2b}{5c}$. **34.** 2) $\frac{7a}{5}$; 4) $\frac{1}{3(a-b)}$; 6) $-\frac{1}{3}$. **35.** 2) $\frac{1}{(m+n)^3}$; 4) $3y-2x$; 6) $\frac{2}{a(a-b)}$. **36.** 2) $\frac{2a}{m-n}$; 4) $\frac{4a-1}{2a+3}$; 6) $\frac{1+b}{1-b}$. **37.** 2) $\frac{q^2}{p-q}$; 4) $\frac{m}{n}$; 6) $-\frac{x}{y}$. **38.** 2) $\frac{3a+2b}{2a+3b}$; 4) $-\frac{1}{ab}$. **39.** 2) $\frac{1}{a+b}$; 4) $5+x$; 6) $-\frac{c+2}{2a}$. **40.** 2) $10-7b$; 4) $\frac{y}{5+y}$; 6) $\frac{5ab}{a^2-b^2}$. **41.** 2) $\frac{1}{b+7}$; 4) $\frac{1}{1-2p}$. **42.** 2) $\frac{4a+1}{4a-1}$; 4) $\frac{10(m+n)}{3(m-n)}$. **43.** 2) $n-m$; 4) $\frac{1}{5-2x}$. **44.** 2) $\frac{3y-4x}{3y+4x}$; 4) $\frac{6-c}{6+c}$; 6) $\frac{3c-2b}{a}$. **45.** 2) $a+1$; 4) $\frac{1}{2}$. **46.** 2) $\frac{b}{ab}$ және $\frac{2a}{ab}$; 4) $\frac{2a}{2b}$ және $\frac{a}{2b}$; 6) $\frac{32}{60}$

және $\frac{25}{60}$. **47.** 2) $\frac{9x^2}{12xy}$, $\frac{72}{12xy}$ және $\frac{16y^2}{12xy}$; 4) $\frac{2ax^2}{4x^3}$ және $\frac{b}{4x^3}$. **48.** 2) $\frac{6b^2}{2b}$ және $\frac{a^2}{2b}$; 4) $\frac{2b^2}{6ab}$, $\frac{9ac}{6ab}$, $\frac{6a^2b^2}{6ab}$. **49.** 2) $\frac{3a^2}{18a^2b^2}$, $\frac{2(a^2+b^2)}{18a^2b^2}$ және $\frac{a(3-a^2)}{18a^2b^2}$; 4) $\frac{21y^3}{60x^4y^4}$, $\frac{310x^3y}{60x^4y^4}$ және $\frac{80x^2}{60x^4y^4}$. **50.** 2) $\frac{6a}{(a-1)a}$ және $\frac{2(a-1)}{(a-1)a}$; 4) $\frac{8a^2}{12(a+1)}$ және $\frac{15a^2}{12(a+1)}$.

51. 2) $\frac{7a(3x+y)}{9x^2-y^2}$ және $\frac{6b(3x-y)}{9x^2-y^2}$; 4) $\frac{6x}{8x+8y}$ және $\frac{x}{8x+8y}$. **52.** 2) $\frac{7a}{x^2-9}$ және $\frac{a(x-3)}{x^2-9}$; 4) $\frac{6x(x+y)}{x^2-y^2}$, $\frac{7xy(x-y)}{x^2-y^2}$ және $\frac{3}{x^2-y^2}$. **53.** 2) $\frac{28c(b+c)}{70(b^2-c^2)}$, $\frac{6a^2}{70(b^2-c^2)}$ және $\frac{35b(b-c)}{70(b^2-c^2)}$; 4) $\frac{15x(x+1)}{12x(x^2-1)}$, $\frac{-48x^2}{12x(x^2-1)}$ және $\frac{4(x-1)}{12x(x^2-1)}$. **54.** 2) $\frac{5a}{b^3}$; 4) $\frac{x-y}{n+a}$. **55.** 2) $\frac{2a}{c^2}$; 4) $\frac{7}{a^2}$; 6) $\frac{8}{ab}$. **56.** 2) $\frac{11}{28}$; 4) $\frac{3}{5b}$; 6) $\frac{3ad-b}{12d}$. **57.** $\frac{15+ab}{5a}$; 4) $\frac{2+7b}{b}$.

58. 2) $\frac{2c+4c^2-3}{c^2}$; 4) $\frac{mn-kn^2+m^2}{n^2}$. **59.** 2) $\frac{k-n}{mnk}$; 4) $\frac{bd+ba}{acd}$; 6) $\frac{2n^2-3m}{mn^3}$. **60.** 2) $\frac{4a^4-21cb^3}{18a^3b^4}$; 4) $\frac{20y-21x+22}{28x^2y^2}$; 6) $\frac{b(cd^2+d+c)}{(cd)^2}$. **61.** 2) $\frac{3x}{2(1-x)}$; 4) $\frac{8y-25x}{10(y-3)}$. **62.** 2) $\frac{11}{10(b+1)}$; 4) $\frac{5x}{8(x+y)}$. **63.** 2) $\frac{5b^2-2a^2}{ab(x+y)}$; 4) $\frac{a+b-y}{ab}$. **64.** 2) $\frac{2(2a+3)}{a(1-a)}$; 4) $\frac{67b-3a}{40(a^2-b^2)}$.

65. 2) $\frac{x-1}{x^2-9}$; 4) $\frac{2x^2+3x+2}{x^2-16}$. **66.** 2) $\frac{6n-47}{n^2-49}$; 4) $\frac{24y^2+y+1}{1-9y^2}$. **67.** 2) $\frac{13a+4}{(3a+1)^2}$. **68.** 2) $\frac{2-11x}{(3x+1)^2}$; 4) $\frac{4-7n+7m}{(n-m)^2}$; 6) $\frac{2x^2+18}{(x^2-9)^2}$. **69.** 2) $\frac{b^2-3b}{b-2}$; 4) $\frac{1}{a+1}$. **70.** 2) $-\frac{1}{x+y}$; 4) $\frac{2(24-a)}{4a^2-9}$. **71.** 2) $\frac{b-3b^2-14}{6(b^2-1)}$; 4) $\frac{28n^2-4m^2+9mn}{m(4n^2-m^2)}$; 6) $\frac{4a^2-4a-b}{a^2+2a}$. **72.** 2) $\frac{2a}{a^3+8}$; 4)

$-\frac{6m}{m^3-27}$. **73.** 2) $-\frac{12}{19}$. **74.** 2) $\frac{4}{13}$; 4) $\frac{15}{2}$. **75.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3mk}{4nd}$; 6) $\frac{2a^2b^2}{c^3}$. **78.** 2) 2; 4) $\frac{a}{bc}$; 6) $\frac{ac}{b}$. **79.** 2) $\frac{k^2}{mn}$; 4) $\frac{3md}{2nk}$; 6) $\frac{15a^2c^2}{d}$. **80.** 2) $\frac{18a^2}{7}$; 4) $\frac{1}{a}$; 6) $\frac{a^3b^3}{d^2}$. **81.** 2) $\frac{2y}{5c^3}$; 4) $\frac{2d^2a^2}{3c}$; 6) $\frac{22p^3n}{m^4}$. **82.** 2) $10a^2b$; 4) $\frac{1}{4a^2b}$. **83.** 2) $\frac{2b}{a}$; 4) $3b$; 6) $a-b$. **84.** 2) $\frac{b}{3(1+a)}$; 4) $\frac{1}{3m^2(m+n)}$; 6) $\frac{5}{3(a-b)}$. **85.** 2) $\frac{-3x^2(x+y)}{2(x^2+y^2)}$; 4) $\frac{-18(n-m)^2(n+m)}{n(n+p)^2}$; 6) $\frac{1}{a^2-b^2}$. **86.** 2) b–3; 4) $(a$–$1)(2a$–$1)$. **87.** 2) $\frac{2(a+1)}{3}$; 4) 1; 6) $\frac{b^2}{b^2+1}$. **88.** 2) $\frac{a^2(b^2-1)}{b^2}$; 4) $\frac{2(m+n)}{n}$. **89.** 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 4) $\frac{1}{6(c+d)}$. **90.** 2) $\frac{9z}{z+2}$; 4) $\frac{m+5}{m-2}$. **91.** 2) $\frac{b}{a+b}$; 4) $\frac{1}{c}$. **92.** 2) $\frac{4}{a-b}$; 4) $\frac{1}{c(a+b)}$. **95.** $\frac{v-v_1}{v+v_1}s$ км. **96.** 6 дана. **97.** 2) $x=-4$-те $y=-\frac{1}{2}$; 4) $x<0$ және $x\geq 2$-де $y\leq 1$. **99.** 2) (–2;4) және (2;–4); 4) (–4; –2) және (1;3). **106.** 2) 2; 4) 15. **107.** 2) 81; 4) $\frac{1}{81}$. **108.** 2) –1; 4) –4; 6) –8. **109.** 2) $x=-\frac{1}{2}$; 4) $x_1=-2$; $x_2=2$. **110.** 2) x – кез келген сан; 4) $\frac{2}{3}\leq x<2$. **111.** 2) 5; 4) –11; 6) $\frac{1}{30}$. **112.** 2) 2; 4) $4\sqrt{6}$. **113.** 1) $x-2$; 2) $(3-x)^3$, $x\leq 3$-те, $(x-3)^3$, $x>3$-те. **114.** 3974. **117.** 2) 3; 4) 27; 6) $\frac{1}{27}$. **118.** 2) 5; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$. **119.** 2) 49; 4) 125. **120.** 2) 121; 4) 150. **121.** 2) 3; 4) 2,7. **122.** 2) b; 4) a; 6) 1. **123.** 2) a^2b. **124.** 2) 1. **125**. 2) 3. **126**. 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 4) a+b; 6) $a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}$; 8) $\sqrt{c}-1$. **127.** 2) $\frac{a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}$; 4) $2\sqrt{b}$. **128.** 2) $2y$; 4) $2\sqrt[3]{b}$. **129.** 2) $2\sqrt[3]{b}$; 4) $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a+b}$. **130**. $3\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$. **131.** 27 **132.** $9a$. **133.**

$2b(a-b)$. **135.** $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **136.** $-4\sqrt{x}$. **137.** $\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{x})$. **138.** $-\sqrt{ab}$.

139. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$. **140.** 0. **141.** 3. **142.** 1. **143.** a. **144.** a^2x. **145.** $-x^3$. **146.** $\sqrt[6]{a}$.
147. 2) $\frac{3(x^2-2x+4)}{x^3+8}$, $\frac{x+1}{x^3+8}$ және $\frac{(x+2)^2}{x^3+8}$. **148.** 2) $\frac{55b-61}{24}$; 4) $\frac{5-27b}{36}$. **149.** 2) $\frac{7q-p}{3p-q}$; 4) $\frac{8a+8b-70}{2b-5}$. **150.** 2) $\frac{a^2-b^2}{7}$. **151.** 2) $\frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2+2)}$; 4) 1. **152.** 2) $-2(a-1)^2$; 4) $\frac{a^2+4}{4a}$. **153.** 2) 1,8; 4) $\frac{1}{16}$. **154.** 2) 51; 4) 0,04; 6) –0,1.

155. 2) 1000. **156.** 2) $\sqrt[4]{x}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **157.** 2) $\frac{95}{16}$; 4) $-609\frac{8}{27}$. **158.** 2) x – кез келген сан; 4) $x\le 2$, $x\ge 3$; 6) $0\le x\le 2$, $x\ge 3$. **159.** 2) $a+1$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}$; 6) $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

II тарау

178. 2) $\frac{1}{3}>0,3$; 4) $-\frac{5}{8}>-0,7$. **179.** 2) $b>a$; 4) $a<b$. **183.** Біріншісі. **185.** 2) $a<0$; 4) $a>0$. **186.** $-9<-3$. **187.** 2) $a+3b<-2b$. **188.** 2) $8>6$. **189.** 2) $a-3b<3a$. **190.** 2) $a-5<b-5$. **191.** 2) $19>12$; 4) $-12>-14$.

192. 2) $a<-0,25$; 4) $a<2$. **193.** 2) $0,9>-2$; 4) $5>3$. **194.** 2) $a<-2$; 4) $x<-\frac{4}{9}$. **196.** 2) $-5<7$; 4) $7y>1$. **197.** 2) $25<58$; 4) $12<4x^2-1$. **204.** 2) $n=3$; 4) $n=-6$; 6) $n=-1$. **205.** 2) $n=6$; 4) $n=-3$; 6) $n=4$. **206.** 2) $x=-9$. **207.** 2) $h\ge 5$; 4) $v\le 70$. **208.** 2) Дұрыс; 4) дұрыс емес. **209.** 2) Дұрыс; 4) дұрыс емес. **211.** 2) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-\frac{1}{4}}<(0,41)^{-\frac{1}{4}}$; 4) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-\sqrt{5}}>\left(\frac{12}{13}\right)^{-\sqrt{5}}$.

212. 2) $x=3$; 4) $x=2$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **213.** $\sqrt{\left(1\frac{1}{4}-1\frac{1}{5}\right)^3}>\sqrt{\left(1\frac{1}{6}-1\frac{1}{7}\right)^3}$. **214.** 2) $x=\frac{5}{2}$; 4) $y=5$. **215.** 2) $x=2{,}6$; 4) $x=4$. **216.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x=1$. **217.** 2) 6; 4) – 3. **218.** 2) $x=-1$; 4) $x=1$. **219.** 2) $13-x<2$; 4) $2(x-3)\le 2$; 6) $2x(-4)\ge x-(-4)$. **220.** 2) Берілген сандардың ешбірі де шешім болмайды; 4) $\frac{1}{2}$; 0; – 1. **221**. 2) $y>0$; 4) ешқандай да мәнінде; 6) $y\neq -2$. **222.** 2) $y<2$; 4) $y\le 0$. **223.** 2) $x\le -3$; 4) $x>0$; 6) $x<0$. **225.** 2) $x<14$; 4) $y>9$; 6) $z\le 4$. **226.** 2) $x\ge -8$; 4) $z>-15$; 6) $x\le -2$. **227.** 2) $x<6$; 4) $x>5$; 6) $x\le -2$. **228.** 2) $x\ge 3$; 4) $x>0$; 6) $x\ge 2$. **229.** 2) $x<\frac{5}{8}$; 4) $x<-3$; 6) $x<5\frac{1}{6}$. **230.** 2) $y>\frac{3}{8}$; 4) $y<\frac{5}{8}$; 6) $y>\frac{2}{3}$. **231.** 2) $y=3$; 4) $x=0$. **232.** 2) $x=-1$; 4) $x=-4$. **233.** 2) $b<-5\frac{2}{3}$; 4) $x>-1\frac{3}{7}$. **234.** 2) x – кез келген сан; 4) x – кез келген сан. **235.** 2) Шешімдері жоқ; 4) шешімдері жоқ. **236.** 2) $x>2$; 4) $x>-20$; 6) $x>0{,}5$. **237.** 2) $x<1{,}6$; 4) $x<0$. **238.** 2) $x\le 7$; 4) $x\le 5$. **239.** 2) $x<0{,}5$; 4) $x>-0{,}5$. **240.** 45-тен кем емес. **241**. 2) Берілген сандардың ешбірі де шешім болмайды. **242**. 2) 1. **243.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) –5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **244.** 2) [– 1; 3]; 4) (1;2); 6) (– 4; – 2]. **245.** 2) $-3\le x\le -1$; 4) $0<x<3$; 6) $-2\le x<2$. **246.** 2) $-1<x<2$, (1;2); 4) $-4<x\le 0$, (–4; 0]. **247.** Иә. **248.** Иә. **249.** b) $-3<x<1$; ешқандай мәнінде; e) $-5<x<0$; ешқандай мәнінде. **251.** 1) $x\ge 0{,}6$; 2) $x\le -\frac{1}{3}$; 3) $x\ge -3{,}5$; 4) $x\ge -4{,}5$. **252.** 2) $x>0$; 4) $x\ge -2$. **253.** 2) $x<-1$; 4) $x\le 0$. **254.** 2) $3<x<6$; 4) $0\le x<\frac{1}{2}$. **255.** 2) $-1{,}5\le x<1{,}5$;

4) $-0,5 \le x \le 7,5$. **256.** 2) $x \ge 4$; 4) $x > -3$. **257.** 2) $x \le -2$; 4) $x < 4$. **258.** 2) $x \le -2,5$; 4) $2 \le x \le 5$. **259.** 2) $-5 < x \le -1$; 4) $0 < x \le \frac{4}{3}$. **260.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **261.** 2) Ешқандай x-те; 4) $0 < x < 2$. **262.** 2) $x \le -2$; 4) $x \le 6$. **263.** 2) 4 м-ден үлкен, бірақ 13 м-ден кіші. **264.** 24. **265.** 36. **267.** 2) $x_{1,2} = \pm 1,5$; 4) $x=0$, $x_2=-6$. **268.** 2) $x=2$; 4) $x=\frac{3}{4}$. **269.** 2) $x_1=-0,25$, $x_2=-1,25$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. **270.** 2) $x_{1,2}=\pm 2,1$; 4) $x_1=-5$, $x_2=11$. **272.** 2) $-2 < x < 2$. **273.** 2) $|x| \le 0,3$. **274.** 2) $-2,2 < x < -1,8$; 4) $\frac{1}{4} < x < 1\frac{3}{4}$. **275.** 2) $-3 < x < 0$; 4) $1 \le x < 1,5$. **276.** 2) $x \le 0,9$, $x \ge 3,1$; 4) $x < 2\frac{3}{4}$, $x > 3\frac{2}{3}$. **277.** 2) $x < -1$, $x > -\frac{1}{3}$; 4) $x \le 0$, $x \ge 1,6$. **278.** 2) –1; 0; 4) 0; 1. **279.** 2) $-1 \le x \le 1\frac{2}{3}$; 4) $x \le 0$, $x \ge 3$. **282.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **283.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **284.** 2) 0,08; 4) 0,08. **285.** 3°. **286.** $\frac{1}{7}$. **287.** Дұрыс. **289.** 2) $141 \le x \le 143$; 4) $895 \le v \le 905$; 6) $m-n \le y \le m+n$. **290.** 2) 2,6 және 2,8; 4) –6,1 және –5,7. **291.** 2) Жоқ; 4) иә. **292.** 2) Иә; 4) жоқ. **293.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **298.** Жоқ. **301.** 2) 0,7; 4) 3,7. **302.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **303.** 2) 0,385; 4) 7,643. **304.** 3 және 7. **305.** 2) 0,41; ≈ 3,7%; 4) 0,108; 10,8%. **306.** 2) ≈2%. **307.** 2) Екіншісі. **308.** ≈1%; 0,1%; 0,01%. **309.** Біріншісі. **310.** 2) 0,000398. **311.** Екіншісі. **312.** 2) $x_1=0$, $x_2=1\frac{1}{3}$; 4) $x_1=-4$, $x_2=0,5$. **313.** 2) $x=0,5$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$. **314.** 2) $2+b-a>0$; 4) $a-3-b<0$. **315.** 2) y – кез келген сан; 4) $x>7$. **316.** 2) $x<2$. **317.** 2) $x_1=3,4$, $x_1=-1,4$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. **318.** 2) $x \le -2,4$, $x \ge 4,4$; 4) $x \le -2$, $x \ge 1$. **321.** 2) Ешбір мәнінде; 4) ешбір мәнінде. **322.** 34. **323.** 47. **326.** $3,5416 \cdot 10^{-5}\Omega$. **327.** 67Дж. **329.** 18800; 20400;13200; 4600.

III тарау

345. 2) $-x^2+9=0$; 4) $x^2=0$. **346.** 2) $x^2-4x-9=0$; 4) $5x^2+1=0$. **347.** 2) 0; 1; 4) 1; 6) берілген сандардың біреуі де түбір болмайды. **350.** 2) $x_{1,2}=\pm\frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2}=\pm1{,}5$; 6) $x_{1,2}=\pm\sqrt{13}$. **351.** 2) $x_{1,2}=\pm11$; 4) $x=0$; 6) нақты түбірлері жоқ. **352.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}6$; 6) $x=-3$. **353.** 2) $x=0$; 4) $x_{1,2}=\pm3$; 6) $x_{1,2}=\pm3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2}=\pm20$. **354.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_1=0$, $x_2=0{,}04$; 6) түбірлері жоқ. **355.** 2) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 6) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{3}$. **356.** $x_{1,2}=\pm2$; 4) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{3}$. **357.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2{,}5$. **358.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **359.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **360.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{23}$. **361.** $x_1=\frac{3}{5}$; $x_2=-\frac{1}{5}$. **362.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **363.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2{,}5$; 2) $x_1=2$, $x_1=-\frac{3}{5}$. **364.** 2) 0,4; 4) 85. **365.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0{,}5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **366.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6\pm\sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **367.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **368.** 1), 2), 3), 4) нақты түбірлері жоқ. **369.** 2) Екеу; 4) біреуде жоқ. **370.** нақты түбірлер жоқ; 4) $x=2{,}5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **371.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}$.

372. 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0{,}6$; $x_2=-3$. **373.** 2) $x_1=0{,}5$, $x_2=-1{,}5$; 4) $x_1=5$,

$x_2=\frac{1}{5}$. **376.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **381.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **382.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **383.** 2) $(x-1)$ $(x+5)$; 4) $(x+7)$ $(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **384.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **385.** 2) $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm 2$; 4) $x_{1,2}=2\left(\sqrt{7}\pm\sqrt{6}\right)$. **386.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)(x+2)$. **387.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **388.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **389.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm 1$, $x_3=\pm 7$. **390.** 2) $x_{1,2}=\pm 1$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. **391.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$, 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **392.** 2) $x_{1,2}=\pm 10$; 4) түбірлері жоқ; 6) $x=-3$. **393.** 2) Жоқ. **402.** 2) 14 және 15. **403.** 2) 19 және 21. **404.** 10 см, 40 см. **405.** 140 м, 175 м. **406.** 100 км/сағ, 80 км/сағ. **407.** 10 км/сағ. **408.** 20 күн, 30 күн. **409.** Квадраттың қабырғасы 15 см. **410.** 9 см, 40 см. **411.** 18 км/сағ, 15 км/сағ. **412.** 15 күн, 10 күн. **413.** 2) $x_{1,2}=\pm 5\sqrt{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=7{,}5$. **414.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3{,}6$, $x_2=-7$. **415.** 2) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$. **416.** 2) Екі; 4) бір. **417.** 2) $(x-8)$ $(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **418.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **419.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm 2$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **420.** 2) $x_2=\pm\sqrt{5}$; 4) $y=1$. **421.** 20 км/сағ. **422.** 15 км/сағ. **423.** 3 күн, 5 күн. **424.** 2) $x_1=0$, $x_2=2$. **425.** 2) $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **426.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2}=\pm 4$. **427.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **428.** 2) Біреу де жоқ; 4) екеу. **429.** 2) $x_1=3$, $x_2=1{,}4$. **430.** 36 күнде. **431.** 1 сағат 40 мин және 1 сағат 20 мин немесе 2 сағат және 1 сағат 40 мин. **432.** 12 сағат, 6 сағат. **437.** 3 сағат. **439.** 12 күн, 8 күн. **440.** 25 сағат, 20 сағат. **441.** 60 км/сағ. **442.** 8 күн, 12 күн. **444.** 120; –120. **445.**

6. **452.** 7 күнде. **453.** 20 км/сағ. **454.** 3 км/сағ. **455.** 8 күн. **456.** 37. **457.** 82. **458.** 20 күн, 30 күн, 60 күн. **459.** 9 сағат. **460.** 10%. **461.** 5%. **462.** 10 км. **463.** 16 адам. **464.** 35 адам. **465.** 60 км/сағ, 50 км/сағ. **466.** 55 км/сағ.

IV т а р а у

482. 6. **483.** 18. **484.** 27. **485.** 9. **487.** 9. **491.** 15. **492.** 120. **494.** d) $n(n-1):2$. **496.** 45. **497.** 2) 900. **499.** $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$. **500.** 30. **501.** 1) 125; 2) 625. **503.** 24. **504.** 10. **505.** $12 \cdot 8 \cdot 7 = 672$. **506.** $64 \cdot 49 = 3136$. **508.** 1) $4 \cdot 60$; 2) $24 \cdot 58$; 3) $36 \cdot 55$; жалпы 3612 тәсілмен. **509.** 6. **510.** 12. **512.** 20. **513.** 14. **521.** 1) $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$; 2) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$. **522.** $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$. **523.** $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$. **524.** $8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$. **525.** 10000. **527.** 24. **528.** 1) 6; 2) 15; 3) 45; 4) $n \cdot (n-1):2$. **529.** $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. **530.** 4.

V т а р а у

544. 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485. **545.** $7\frac{1}{2}$; 36. **546.** $2a(30-a)$; –128. **547.** $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$, $c \cdot 100 + b \cdot 10 + a$. **548.** $x = 1000a + c$. **549.** 2) $\frac{2n(2n-k)}{2n+k}$; 4) $\frac{2q(m-2q)}{m+2q}$. **550.** 4) $\frac{m+7n}{10}$. **552.** 2) 1. **556.** 2) $y \geq -2$; 4) $x > -4$; 6) $x \leq 11\frac{1}{3}$. **557.** 2) $-5; -4; -3; -2; -1; 0$; 4) 4. **558.** 2) $\frac{2}{9} < x \leq 32$; 4) $x > 7{,}2$. **559.** 2) $-15; -14; \ldots; -1; 0$. **560.** 2) $x_1 = 8{,}1$, $x_2 = -2{,}1$; 4) $x_1 = 4$, $x_2 = -3$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{6}{7}$. **561.** 2) $x \leq -3{,}4$; $x \geq 7{,}4$; 4) $x \leq -2\frac{1}{3}$; $x \geq 1$. **562.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **563.** 2) $3-\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **564.** 2) $2(\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$ **565.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **566.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **567.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **568.** 2) $-8\frac{1}{8}$. **569.** 2) $-4\frac{5}{6}$. **570.** 2) $x = \frac{1}{9}$; 4) $x = 0$. **571.** 2) Жоқ; **573.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **574.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **575.** 2) $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$. **576.** 2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{11}$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 6) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$. **577.** 2) $y_1 = 0$, $y_2 = 9$;

4) $x_1=0$, $x_2=9$; 6) $x_{1,2}=\pm 1{,}5$. **582.** $k>\frac{9}{16}$. **583.** $k_1=3$, $k_2=-1$. **584.** 2) $x_1=1{,}2$, $x_2=-2$; 4) $x=3$; 6) $x=2$. **586.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **588.** $\approx 0{,}1\%$.

„Өзіңді тексеріп көр“ тапсырмаларының жауаптары

I тарау. 1. $b\neq 0$, $c\neq 1$, $d\neq -2$. **2.** 1) $\frac{1}{a}$; 2) $\frac{4ab}{a^2-b^2}$; 3) 4; 4) $\frac{a-b}{b}$. **3.** $\frac{1}{x-3}$; –3. **4.** 1) $8\frac{3}{8}$; 2) 16. **5.** 1) 6; 2) $(y+x)xy$. **6.** $a^{\frac{3}{4}}$; 27.

II тарау. 2. 1) $x<2{,}4$; 2) $x\geq -15$; 3) $x<5$. **3.** 1) $4\frac{1}{3}<x<6\frac{1}{4}$; 2) $x\geq 3$; 3) $x<-5$.

III тарау. 1. 1) $x=0$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$; 3) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2}=\frac{1}{2}$; 6) $x_1=17$, $x_2=-1$; 7) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{3}$; 8) шешімі жоқ.

2. 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)\,(2x-3)$. **3.** 9 км/сағ; 12 км/сағ.

IV тарау. 1. $18\cdot 17=306$. **2.** $12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8=87\,480$. **3.** $5\cdot 4\cdot 3=60$. **4.** $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. **5.** 1) 1,2; 2) 4; 3) 2,5; 4) 15.

Қызықты есептердің жауаптары

1. 10 метр. **2.** Мүмкін емес. **3.** Қабырғалары 3 және 6 бірлік болған тік төртбұрыш немесе қабырғалары 4 бірлік болған квадрат. **4.** Сәйкесінше 8; 12; 6; –1. **5.** $(x^2+x+1)(x^2-x-2006)$.

МАЗМҰНЫ

I ТАРАУ
АЛГЕБРАЛЫҚ БӨЛШЕКТЕР ЖӘНЕ ОЛАРМЕН АМАЛДАР ОРЫНДАУ

II ТАРАУ
ТЕҢСІЗДІКТЕР

III ТАРАУ
КВАДРАТ ТЕҢДЕУЛЕР

IV ТАРАУ
ДЕРЕКТЕРДІ ТАЛДАУ

V ТАРАУ

Алимов Ш.А.

А 39

Алгебра: Жалпы орта білім беретін мектептердің 8-сыныбына арналған оқулық/Ш.А.Алимов, А.Р.Холмухамедов, М.А.Мирзаахмедов. – 4- басылымы. – Ташкент: «O‘qituvchi» БПШҮ, 2019. – 240 б.

ISBN 978-9943-5749-9-1

УЎК: 512(075.3)=512.122
КБК 22.14я72

Шавкат Арифджанович Алимов,
Алимджан Рахимович Халмухамедов,
Мирфазил Абдилхакович Мирзахмедов

Алгебра

(Qozoq tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
8-sinfi uchun darslik

Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘qituvchi» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket “Davr nashriyoti”da tayyorlandi.

Тәржіман *Т. Ахметов*
Редактор *Қ. Нұрбаева*
Көркемдеуші дизайнер *Р. Запаров*
Корректор *Қ. Нұрбаева*
Компьютерде беттеген *Х. Сафаралиев*
Мәтінді терген *С. Ниязова*

Баспа лицензиясы AI № 012. 20.07.2018.
Оригинал-макеттен басуға рұқсат етілді 23.07.2019. Пішімі $70\times90^{1}/_{16}$.
Таймс гарнитурасы. Офсеттік баспа тәсілімен басылды. Шартты б.т. 17,55. Нақты б.т. 16,6.
Таралымы 5 691 дана. Тапсырыс №

Өзбекстан Республикасы Президенті Әкімшілігі құзырындағы Ақпарат және бұқаралық коммуникациялар агенттігінің «O‘qituvchi» баспа-полиграфия шығармашылық үйі.
Ташкент – 206. Янгишахар көшесі, 1- үй. Келісім шарт № 54-19.

Жалға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

Р/с	Оқушының аты, фамилиясы	Оқу жылы	Оқулықты алғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы	Оқулықты тапсыр-ғандағы жағдайы	Сынып жетек-шісінің қолы
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Оқулық жалға беріліп, оқу жылының соңында қайтып алғанда жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалау өлшемдеріне орай толтырады:

Жаңа	Оқулықтың бірінші рет пайдалануға берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқабасы бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажырамаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, көшпеген, беттерінде жазу-сызу жоқ.
Қанағаттанарлы	Мұқабасы езілген, біршама сызылып, шеттері мүжілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыраған, қолданушы қанағаттанарлық жағдайға келтірген. Жыртылған парақтары қалпына келтірілген, кейбір беттері сызылған.
Қанағаттанарсыз	Мұқабасы мүжілген, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе бүтіндей жоқ, қанағаттанарлықсыз жөнделген. Беттері жыртылған, парақтары толық емес, сызылып боялған. Оқулықты қалпына келтіруге болмайды.