

SH.A. ALIMOV, Ó.R. XOLMUHAMEDOV,  
M.A. MIRZAAHMEDOV

# ALGEBRA

ULÍWMA BILIM BERIW MEKTEPLERININÍ  
9-KLASÍ USHÍN SABAQLÍQ

Ózbekshe 4-basılımina sáykes qaraqalpaqsha basılım

*Ózbekstan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrligi tárepinen  
basıwǵa usınıs etilgen*

“O‘QITUVCHI” BASPA-POLIGRAFIYALÍQ DÓRETIWSHILIK ÚYI  
TASHKENT – 2019

UO'K: 512(075.3)=512.121

KBK 22.14ya72

A 51

### *Pikir bildirishlar:*

**F.S. Raximova** – Al-Xorezmiy atındağı TATU matematika pání oqıtıwshısı;

**Ğ.A. Fazilova** – Tashkent qalası, Yunusobod rayonındağı 274-sanlı mekteptiń matematika pání muǵallımı;

**D.Sh. Abrayev** – Tashkent qalası, Olmazor rayonındağı 326-sanlı mekteptiń matematika pání muǵallımı.

### **Kitaptağı shártli belgiler:**



– biliw áhmiyetli hám eslep qalıw paydalı (yadlaw shárt emes) tekst;



– sheshiliwi májbúriy bolǵan máselelerdi ajıratıp turıwshı belgi;



– máseleni sheshiw baslandı;

33, 34...

– quramalıraq másele;



– máseleni sheshiw tamamlandı;



– tiykarǵı materialdı ajıratıw;



– tiykarǵı material boyınsha bilimdi tekseriw ushın óz betinshe jumıs;



– matematikalıq tastıyıqlawdı tiykarlaw yaki formulanı keltirip shıǵarıw baslandı;



– Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler;



– tiykarlaw yaki formulanı keltirip shıǵarıw tamamlandı;



– tarixiy máseleler;



– tariyxıy maǵlıwmatlar.

**Respublika maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan ijara ushın basıp shıǵarıldı.**

ISBN 978-9943-5750-7-3

© Sh.A.Alimov, Ó.R.Xolmuhamedov, M.A.Mirzaahmedov, Barlıq huquqlar qorǵalǵan. 2019.

© Original-maket «Davir nashriyoti» MShJ, 2019.

© «O'qituvchi BPDÚ, 2019.



## 8-KLASTA ÚYRENILGEN TEMALARDÍ TÁKIRARLAW

*Áziz oqıwshı! Sizge 8-klasta “Algebra”dan alğan bilimlerińizdi eske túsiriw maqsetinde bir neshe shınıǵıwlar usınıs etemiz.*

1. 1)  $y=2x+3$ ; 2)  $y=-3x+4$ ; 3)  $y=4x-1$ ; 4)  $y=-2x-5$   
funkciyalarınǵın grafigin sızıń. Grafik qaysı shereklerde jatadı? Grafiktiń  $Ox$  hám  $Oy$  kósherleri menen kesilisiw noqatlarınǵın koordinataların aytıń.
2.  $y=kx+b$  funkciya grafigi  $A(0; -7)$ ,  $B(2; 3)$  noqatlarınan ótedi.  $k$  hám  $b$  nı tabıń.
3. Tuwrı sızıq  $A(0; 5)$ ,  $B(1; 2)$  noqatlarınan ótedi. Tuwrı sızıqtıń teńlemesin jazıń.
4. Teńlemeler sistemasın sheshiń:  
 1)  $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$
5. 3 at hám 4 sıyrǵa bir kúnde 27 kg jem beriledi. Bir kúnde 9 atqa berilgen jem 5 súyrǵa berilgen jemnen 30 kg kóp. Bir atqa hám bir sıyrǵa 1 kúnde qansha jem beriledi?
6. Kitap hám dápter birgelikte 5 800 swm turadı. Kitap bahasınıń 10% i dápter bahasınıń 35% inen 220 swmǵa qımbat. Kitap hám dápterdiń hár qaysısı neshe swm turadı?
7. Teńsizlikti sheshiń:  
 1)  $3(x-4)+5x<2x+3$ ; 2)  $|5-2x|\leq 3$ ; 3)  $|3x-4|\geq 2$ .
8. Teńsizlikler sistemasın sheshiń:  
 1)  $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9.  $\frac{3x+4}{2} - \frac{1-x}{3} < \frac{7x-3}{2} - \frac{3-x}{3}$  teńsizliktiń eń kishi pútin sheshimin tabıń.

10. Esaplań:

1)  $\sqrt{121 \cdot 0,04 \cdot 289}$ ; 2)  $\sqrt{5\frac{1}{7} \cdot 3\frac{4}{7}}$ ; 3)  $(\sqrt{32} + \sqrt{8})^2$ .

11. Ápiwayılastırın:

1)  $(8\sqrt{63} + 3\sqrt{28} - 5\sqrt{112}) : 2\sqrt{7}$ ; 3)  $\frac{2}{\sqrt{11}+3} + \frac{7}{\sqrt{11}-2}$ ;  
2)  $(15\sqrt{1,2} + \frac{1}{3}\sqrt{270} - 2\sqrt{30})$ ; 4)  $\frac{4}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{2-\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{4}$ .

Teńlemenı sheshiń (12–14):

12. 1)  $|7-x| = -7$ ; 2)  $|x+6| = x+10$ ; 3)  $\sqrt{(x-9)^2} = x-9$ .

13. 1)  $x^2 - 12x + 11 = 0$ ; 2)  $x^2 - 15x + 56 = 0$ ;

3)  $6x^2 + 7x - 3 = 0$ ; 4)  $16x^2 + 8x + 1 = 0$ .

14. 1)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ ; 2)  $10x^4 + 7x^2 + 1 = 0$ .

15. 240 km aralıqtı bir avtomobil ekinshisine qaraǵanda 1 saat tezirek basıp ótedi. Eger birinshi avtomobildiń tezligi ekinshisinen 20 km/saat artıq bolsa, hár bir avtomobildiń tezligin tabıń.

16. 1) Eki sannıń ayırması 2,5 ke, kvadratlardıń ayırması bolsa 10 ǵa teń. Bul sanlardı tabıń.

2) Qosındısı 1,4 ke, kvadratlarınıń qosındısı 1 ge teń bolǵan eki sandı tabıń.

17.  $x^2 - 8x + 3 = 0$  teńlemenıń korenleri  $x_1$  hám  $x_2$  bolsa, 1)  $x_1^2 + x_2^2$ ;

2)  $x_1^3 + x_2^3$  3)  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ ; 4)  $x_1^2 - x_2^2$  ni tabıń.

18. Sandı júzden birge shekem dóńgelekkeń. Dóńgeleklewdiń salıstırmalı qáteligin tabıń.

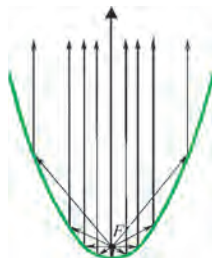
1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Sandı standart túrinde jazıń:

1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

# I BAP.

## KVADRAT FUNKCIYA. KVADRAT TEN'SIZLIKLER



### 1-§. KVADRAT FUNKCIYANÍŇ ANÍQLAMASI

Siz VIII klasta  $y = kx + b$  sızıqlı funkciya hám onıń grafigi menen tanısqansız.

Ilim hám texnikanıń túrli tarawlarında *kvadrat funkciyalar* dep atalatuǵın funkciyalar ushıraydı. Mısallar keltiremiz.

1) Tárepi  $x$  bolǵan kvadrattıń maydanı  $y = x^2$  formulası boyınsha esaplanadı.

2) Eger dene joqarıǵa  $v$  tezlik penen atılǵan bolsa, onda  $t$  waqıtta onnan Jer betine shekemgi aralıq  $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$  formulası menen anıqlanadı, bunda  $s_0$  – waqıttıń  $t = 0$  baslanǵısh waqtındaǵı deneden Jer betine shekemgi bolǵan aralıq.

Bul mısallarda  $y = ax^2 + bx + c$  túrindegi funkciyalar qaraladı. Birinshi mısalda  $a=1$ ,  $b=c=0$ , ózgeriwshileri  $x$  hám  $y$  ler boladı. Ekinshi mısalda  $a = -\frac{g}{2}$ ,  $b = v$ ,  $c = s_0$ , ózgeriwshileri  $t$  hám  $s$  háripleri menen belgilengen.



**Anıqlama.**  $y = ax^2 + bx + c$  funkciyası kvadrat funkciya dep ataladı, bunda  $a$ ,  $b$  hám  $c$  – berilgen haqıyqıy sanlar,  $a \neq 0$ ,  $x$  – haqıyqıy ózgeriwshi.

Mısalı, tómendegi funkciyalar kvadrat funkciyalar boladı:

$$y = x^2,$$

$$y = -2x^2,$$

$$y = x^2 - x,$$

$$y = x^2 - 5x + 6,$$

$$y = -3x^2 + \frac{1}{2}x.$$

**1- másele.**  $x = -2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$  bolganda

$$y(x) = x^2 - 5x + 6$$

funkciyasınıń mánisin tabıń:

$$\triangle y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20;$$

$$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6;$$

$$y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0. \triangle$$

**2- másele.**  $x$  tiń qanday mánislerinde  $y = x^2 + 4x - 5$  kvadrat funkciyası:

1) 7 ge; 2)  $-9$  ga; 3)  $-8$  ge; 4) 0 ge teń bolğan mánisti qabıl etedi?

$\triangle$  1) Shárt boyınsha  $x^2 + 4x - 5 = 7$ . Bul teńlemenı sheship, tómendegige iye bolamız:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

$$x_{1,2} = 2 - \sqrt{4 + 12} = -2 - 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -6.$$

Demek,  $y(2) = 7$  hám  $y(-6) = 7$ .

2) Shárt boyınsha  $x^2 + 4x - 5 = -9$ , bunnan

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3) Shárt boyınsha  $x^2 + 4x - 5 = -8$ , bunnan  $x^2 + 4x + 3 = 0$ .

Bul teńlemenı sheship,  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = -1$  ekenin tabamız.

4) Shárt boyınsha  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , bunnan  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5. \triangle$

Sońğı jaǵdayda  $x$  tiń  $y = x^2 + 4x - 5$  funkciyası 0 ge teń, yaǵnıy  $y(1) = 0$  hám  $y(-5) = 0$  bolğan mánisleri tabıldı.  $x$  tiń bunday mánisleri kvadrat funkciyanıń nolleri dep ataladı.

**3- másele.**  $y = x^2 - 3x$  funkciyasınıń nollerin tabıń.

$\triangle x^2 - 3x = 0$  teńlemenı sheship,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$  ekenligin tabamız.  $\triangle$

### Shınıǵıwlar

**1.** (Awızeki.) Tómendegi berilgen funkciyalardıń qaysıları kvadrat funkciya boladı:

1)  $y = 2x^2 + x + 3$ ;      2)  $y = 3x^2 - 1$ ;      3)  $y = 5x + 1$ ;

4)  $y = x^3 + 7x - 1$ ;      5)  $y = 4x^2$ ;      6)  $y = -3x^2 + 2x$ ?

**2.**  $x$  tiń sonday haqıyqıy mánislerin tabıń,  $y = x^2 - x - 3$  kvadrat funkciyası:

1)  $-1$  ge; 2)  $-3$  ke; 3)  $-\frac{13}{4}$  ga; 4)  $-5$  ke teń bolğan mánisti qabıl etsin.

3.  $x$  tiń qanday haqıyqıy mánislerinde  $y = -4x^2 + 3x - 1$  kvadrat funkciya:  
1)  $-2$ ; 2)  $-8$ ; 3)  $-0,5$ ; 4)  $-1$  ge teń mánisti qabıl etedi?
4.  $-2$ ;  $0$ ;  $1$ ;  $\sqrt{3}$  sanlarınan qaysıları tómendegi kvadrat funkciyanıń nolleri boladı:  
1)  $y = x^2 + 2x$ ; 2)  $y = x^2 + x$ ; 3)  $y = x^2 - 3$ ;  
4)  $y = 5x^2 - 4x - 1$ ; 5)  $y = x^2 - x$ ; 6)  $y = x^2 + x - 2$ ?
5. Kvadrat funkciyanıń nollerin tabıń:  
1)  $y = x^2 - x$ ; 2)  $y = x^2 + 3$ ;  
3)  $y = 12x^2 - 17x + 6$ ; 4)  $y = -6x^2 + 7x - 2$ ;  
5)  $y = 3x^2 - 5x + 8$ ; 6)  $y = 2x^2 - 7x + 9$ .
6. Eger  $y = x^2 + px + q$  kvadrat funkciyanıń  $x_1$  hám  $x_2$  nolleri belgili bolsa,  $p$  hám  $q$  koefficientlerin tabıń:  
1)  $x_1 = 2, x_2 = 3$ ; 2)  $x_1 = -4, x_2 = 1$ ;  
3)  $x_1 = -1, x_2 = -2$ ; 4)  $x_1 = 5, x_2 = -3$ .
7.  $x$  tiń  $y = x^2 + 2x - 3$  hám  $y = 2x + 1$  funkciyalar teń mánislerin qabıl etetuǵın mánislerdi tabıń.

## 2-§. $y = x^2$ FUNKCIYA

$y = x^2$  funkciyasın, yaǵnıy  $a = 1, b = c = 0$  bolǵandaǵı  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat funkciyasın qaraymız. Bul funkciyasınıń grafigin jasaw ushın onıń mánisleriniń kestegin dúzemiz:

| $x$       | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|-----------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $y = x^2$ | 16   | 9    | 4    | 1    | 0   | 1   | 4   | 9   | 16  |

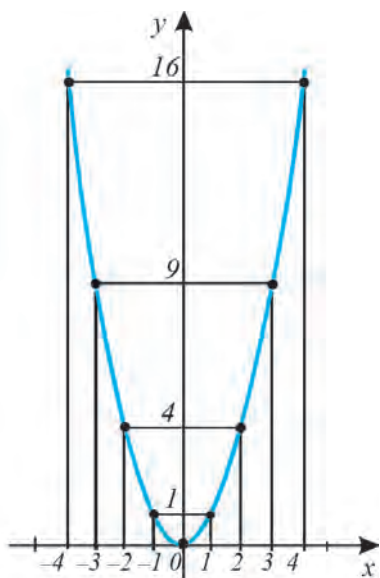
Kestede kórsetilgen noqatlardı jasap hám olardı bir tegis iymek sıızıq penen tutastırıp,  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigin payda etemiz (1-súwret).



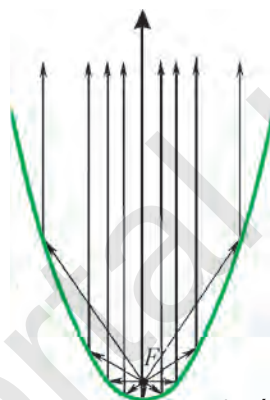
**$y = x^2$  funkciyasınıń grafigi bolǵan iymek sıızıq parabola dep ataladı.**

$y = x^2$  funkciyasınıń qásiyetlerin qaraymız.

1)  $y = x^2$  funkciyasınıń mánisi  $x \neq 0$  bolǵanda oń hám  $x = 0$  bolǵanda nolge teń. Demek,  $y = x^2$  parabola koordinatar basınan ótedi, parabolanıń



1-súwret.



2-súwret.

qalğan noqatları bolsa, abscissalar kósherinen joqarıda jatadı.  $y = x^2$  parabola abscissalar kósherine  $(0; 0)$  noqatında urınadı, delinedi.

2)  $y = x^2$  funkciyanıń grafigi *ordinatalar kósherine salıstırmalı simmetriyalı*, sebebi  $(-x)^2 = x^2$ . Mısalı,  $y(-3) = y(3) = 9$  (1-súwret). Solay etip, ordinatalar kósheri *parabolanıń simmetriya kósheri* boladı. Parabolanıń óz simmetriya kósheri menen kesilisiw noqatı *parabolanıń tóbesi* delinedi.  $y = x^2$  parabolası ushın kóoordinatalar bası onıń tóbesi boladı.

3)  $x \geq 0$  bolğanda  $x$  tiń úlken mánisine  $y$  tiń úlken mánisi sáykes keledi. Mısalı,  $y(3) > y(2)$ .  $y = x^2$  funkciyası  $x \geq 0$  aralıǵında ósiwshi delinedi (1-súwret).

$x \leq 0$  bolğanda  $x$  tiń úlken mánisine  $y$  tiń kishi mánisi sáykes keledi. Mısalı,  $y(-2) < y(-4)$ .  $y = x^2$  funkciyası  $x \leq 0$  aralıǵında kemeyiwshi delinedi (1-súwret).

**Másele.**  $y = x^2$  parabolası menen  $y = x + 6$  túwrı sızıǵınıń kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń.

△ Kesilisiw noqatları 
$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$$

sistemasınıń sheshimleri boladı.

Bul sistemadan  $x^2 = x + 6$ , ya'niy  $x^2 - x - 6 = 0$  di payda etemiz, bunnan  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -2$ .  $x_1$  hám  $x_2$  niń mánislerin sistemanıń teńlemeleriniń birine qoyıp,  $y_1 = 9$ ,  $y_2 = 4$  ti tabamız.

**Juwabı:** (3; 9), (-2; 4). ▲

Parabola texnikada keń kólemde paydalanatuǵın kóplegen qásiyetlerge iye. Mısalı, parabolanıń simmetriya kósherinde *parabolanıń fokusu* dep atalatuǵın  $F$  noqatı bar (2-súwret). Eger bul noqatta jaqtılıq deregi jaylasqan bolsa, onda parabolaǵan sáwlelengen barlıq jaqtılıq nurları paral-lel boladı. Bul qásiyetten projektor, lokator hám basqa ásbaplar tayarlawda paydalanıladı.

$y = x^2$  parolasınıń fokusu  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$  noqatı boladı.

### Shınıǵıwlar

8.  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigin millimetrli qaǵazda jasań. Grafik boyınsha:
  - 1)  $x = 0,8$ ;  $x = 1,5$ ;  $x = 1,9$ ;  $x = -2,3$ ;  $x = -1,5$  bolǵanda  $y$  tiń mánisin juwıq tabıń;
  - 2) eger  $y = 2$ ;  $y = 3$ ;  $y = 4,5$ ;  $y = 6,5$  bolsa,  $x$  tiń mánisin juwıq tabıń.
9.  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigin jasamastan:  $A(2; 6)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(12; 144)$ ,  $D(-3; -9)$  noqatlarınan qaysıları parabolaǵa tiyisli ekenligin anıqlań.
10. (Awızeki.) Ordinata kóshetine salıstırǵanda  $A(3; 9)$ ,  $B(-5; 25)$ ,  $C(4; 15)$ ,  $D(\sqrt{3}; 3)$  noqatlarına simmetriyalı bolǵan noqatlardı tabıń. Bul noqatlar  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigine tiyisli bolama?
11. (Awızeki.)  $y = x^2$  funkciyasınıń mánislerin,
 

|                                      |                             |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 1) $x = 2,5$ va $x = 3\frac{1}{3}$ ; | 2) $x = 0,4$ va $x = 0,3$ ; |
| 3) $x = -0,2$ va $x = -0,1$ ;        | 4) $x = 4,1$ va $x = -5,2$  |

 bolǵanda salıstırıń.
12.  $y = x^2$  parabolanıń:
 

|               |                   |                 |
|---------------|-------------------|-----------------|
| 1) $y = 25$ ; | 2) $y = 5$ ;      | 3) $y = -x$ ;   |
| 4) $y = 2x$ ; | 5) $y = 3 - 2x$ ; | 6) $y = 2x - 1$ |

 tuwrı sıwıq penen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń.

13.  $A$  noqati  $y = x^2$  parabola menen

1)  $y = -x - 6$ ,  $A(-3; 9)$ ;                      2)  $y = 5x - 6$ ,  $A(2; 4)$

tuwri sızıqtıń kesilisiw noqatı bolama?

14. Tasıyıqlaw durıs pa:  $y = x^2$  funkciyası:

- 1)  $[1; 4]$  kesindisinde;                      2)  $(2; 5)$  intervalda;  
3)  $x > 3$  intervalda;                      4)  $[-3; 4]$  kesindisinde ósedi.

15. Bir koordinata tegisliginde  $y = x^2$  parabola menen  $y = 3$  tuwri sızıq sızın.  $x$  tiń qanday mánislerinde parabolaniń noqatları tuwri sızıqtan joqarıda boladı; tómende boladı?

16.  $x$  tiń qanday mánislerinde  $y = x^2$  funkciyasınıń mánisi:

- 1) 9 dan úlken; 2) 25 ten úlken emes; 3) 16 dan kishi emes; 4) 36 dan kishi boladı?

### 3- §. $y = ax^2$ FUNKCIYA

**1-másele.**  $y = 2x^2$  funkciyasınıń grafigin sızın.

△  $y = 2x^2$  funkciyasınıń mánisleriniń kestegin dúzemiz:

| $x$        | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  |
|------------|----|----|----|---|---|---|----|
| $y = 2x^2$ | 18 | 8  | 2  | 0 | 2 | 8 | 18 |

Tabılǵan toqatlardı jasaymız hám olar arqalı bir tegis iymek sızıq júrgizemiz (3-súwret). ▲

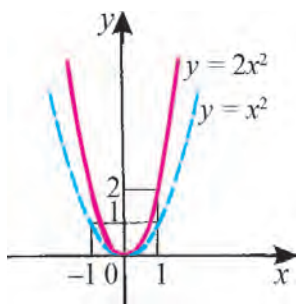
$y = 2x^2$  hám  $y = x^2$  funkciyalarınıń grafiklerin salıstıramız (3-súwret).  $x$  tiń anıq bir mánisinde  $y = 2x^2$  funkciyasınıń mánisi  $y = x^2$  funkciyasınıń mánisinen 2 márte artıq. Bul  $y = 2x^2$  funkciyası grafiginiń abscissalı noqatınıń ordinatasın 2 márte arttırıw menen payda etiw múmkin ekenligin bildiredi.

$y = 2x^2$  funkciyasınıń grafigi  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigin  $Ox$  kósherinen  $Oy$  kósheri boyınsha 2 márte sozıw menen payda boladı, delinedi.

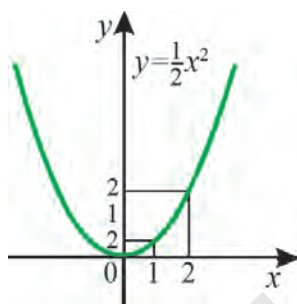
**2-másele.**  $y = \frac{1}{2}x^2$  funkciyasınıń grafigin jasań.

△  $y = \frac{1}{2}x^2$  funkciyasınıń mánisleriniń kestegin dúzemiz:





3- súwret.



4- súwret.

| $x$                  | -3  | -2 | -1  | 0 | 1   | 2 | 3   |
|----------------------|-----|----|-----|---|-----|---|-----|
| $y = \frac{1}{2}x^2$ | 4,5 | 2  | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 |

Tabilğan noqatlardı jasap, olar arqalı bir tegis iymek sıziq júrgizemiz (4-súwret). ▲

$y = \frac{1}{2}x^2$  hám  $y = x^2$  funkciyalarınıń grafiklerin salıstıramız.

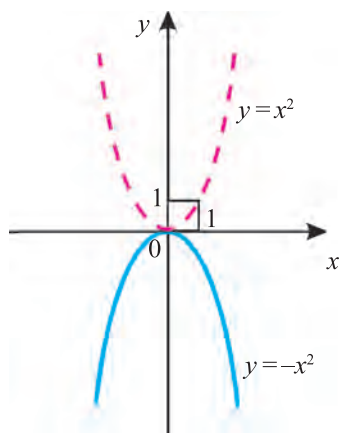
$y = \frac{1}{2}x^2$  funkciyası grafiginiń hár bir noqatın  $y = x^2$  funkciyası grafiginiń dál sonday abscissalı noqatınıń ordinatasın 2 márte kemeytiw arqalı payda etiw mümkin.

$y = \frac{1}{2}x^2$  funkciyasınıń grafigi  $y = x^2$  funkciyasınıń grafigin  $Ox$  kósherin  $Oy$  kósheri boyınsha 2 márte qısıw jolı menen payda etiledi, delinedi.

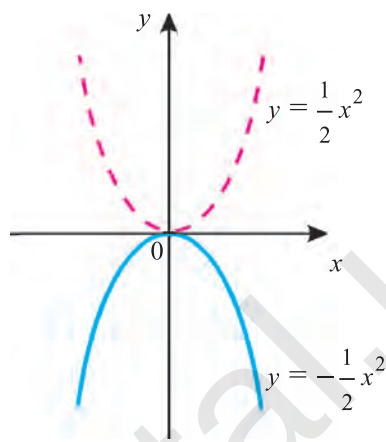
**3-másele.**  $y = -x^2$  funkciyasınıń grafigin jasań.

▲  $y = -x^2$  hám  $y = x^2$  funkciyaların salıstıramız.  $x$  tiń sonday bir mánisinde bul funkciyalardıń mánisleriniń modulleri boyınsha teń hám qarama-qarsı belgige iye. Demek,  $y = -x^2$  funkciyasınıń grafigin  $y = x^2$  funkciyası grafigi  $Ox$  kósherine salıstırğanda simmetriyalı kóriniside payda etiw mümkin (5-súwret). ▲

Usıǵan uqsas,  $y = -\frac{1}{2}x^2$  funkciyasınıń grafigi  $Ox$  kósherine salıstırğanda  $y = \frac{1}{2}x^2$  funkciyası grafigine simmetriyalı (6-súwret).



5-súwret.



6-súwret.



$y = ax^2$  funkciyasiniñ grafigi qálegen  $a \neq 0$  de de parabola dep ataladı.  $a > 0$  de parabolaniñ shaqaları joqarıǵa, al  $a < 0$  de bolsa tómenge baǵdarlangan boladı.

$y = ax^2$  parabolaniñ fokusı  $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$  noqatında jaylasqanın ańlaymız.

$y = ax^2$  funkciyasiniñ tiykargı qásiyetlerin atap ótemiz, bunda  $a \neq 0$ :

1) eger  $a > 0$  bolsa, onda  $y = ax^2$  funkciyası  $x \neq 0$  bolǵanda oń mánislerdi qabıl etedi;

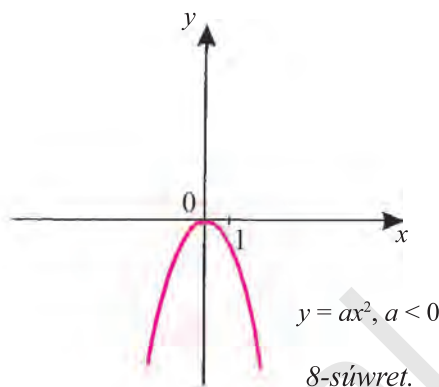
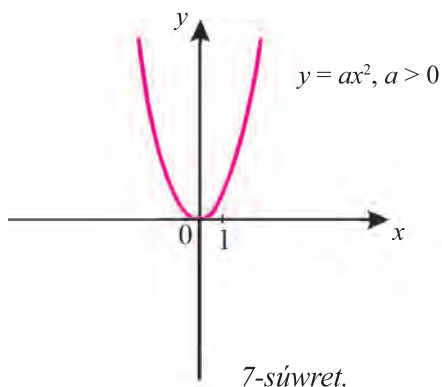
eger  $a < 0$  bolsa, onda  $y = ax^2$  funkciyası  $x \neq 0$  bolǵanda teris mánislerdi qabıl etedi;

$y = ax^2$  funkciyasiniñ mánisi tek  $x = 0$  bolǵanda ǵana nolge teń boladı.

2)  $y = ax^2$  parabolası ordinatalar kósherine salıstırǵanda simmetriyalı boladı.

3) eger  $a > 0$  bolsa, onda  $y = ax^2$  funkciyası  $x \geq 0$  bolǵanda ósiwshi hám  $x \leq 0$  bolǵanda kemeyiwshi;

eger  $a < 0$  bolsa, onda  $y = ax^2$  funkciyası  $x \geq 0$  bolǵanda kemeyiwshi hám  $x \leq 0$  bolǵanda ósiwshi.



Bul barlıq qásiyetler grafikten anıq kórinip tur (7-, 8-súwretler).

### *Shınıǵıwlar*

**17.** Millemetrli qagazda  $y = 3x^2$  funkciyasınıń grafigin jasań. Grafik boyınsha:

- 1)  $x = -2,8; -1,2; 1,5; 2,5$  bolsa,  $x$  tiń mánisin esaplań;
- 2) eger  $y = 9; 6; 2; 8; 1,3$  bolsa,  $x$  tiń mánisin juwıq tabıń.

**18.** (Awızeki.) Parabola shaqalarınıń baǵdarın anıqlań:

$$1) y = 3x^2; \quad 2) y = \frac{1}{3}x^2; \quad 3) y = -4x^2; \quad 4) y = -\frac{1}{3}x^2.$$

**19.** Tómendegı funkciyalardıń grafiklarin bir koordinata tegisliginde jasań:

- 1)  $y = x^2$  hám  $y = 3x^2$ ;      2)  $y = -x^2$  hám  $y = -3x^2$ ;
- 3)  $y = 3x^2$  hám  $y = -3x^2$ ;      4)  $y = \frac{1}{3}x^2$  hám  $y = -\frac{1}{3}x^2$ .

Grafiklerden paydalanıp, bul funkciyalardıń qaysıları  $x \geq 0$  aralıǵında ósıwshi ekenligin anıqlań.

**20.** Tómendegı funkciyalardıń grafikleriniń kesilisiw noqatlarınıń koordinatların tabıń:

$$1) y = 2x^2 \text{ hám } y = 3x + 2; \quad 2) y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ hám } y = \frac{1}{2}x - 3.$$

**21.** Funkciya  $x \leq 0$  aralıǵında kemeyiwshi funksiya bola ma:

1)  $y = 4x^2$ ;    2)  $y = -\frac{1}{4}x^3$ ;    3)  $y = -5x^2$ ;    4)  $y = -\frac{1}{5}x^2$ ?

**22.**  $y = -2x^2$  funksiya:

- 1)  $[-4; -2]$  kesindisinde;    3)  $(3; 5)$  intervalında;  
2)  $[-5; 0]$  kesindisinde;    4)  $(-3; 2)$  iintervalında;  
ósiwshi yaki kemeyiwshi bolıwın anıqlań

**23.** Deneniń turaqlı tezleniwshi qozǵalısta basıp ótken jolı  $s = \frac{at^2}{2}$  formula menen esaplanadı, bunda  $s$  – jol, metrde;  $a$  – tezleniw,  $m/s^2$  ta;  $t$  – waqıt sekundlarda ólshenedi. Eger dene 8 s ta 96 m joldı basıp ótken bolsa,  $a$  tezleniwin tańı.

#### 4-§. $y = ax^2 + bx + c$ FUNKCIYASI

**1-másele.**  $y = x^2 - 2x + 3$  funksiyaınıń grafigin jasań hám onıń  $y = x^2$  funksiyaı grafigi menen salıstırıń.

△  $y = x^2 - 2x + 3$  funksiyaınıń mánisleriniń kestegin dúzemiz:

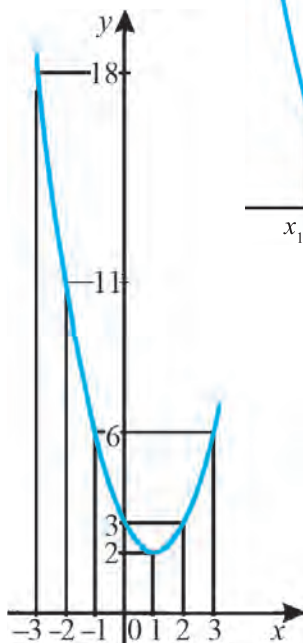
| $x$                | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|--------------------|----|----|----|---|---|---|---|
| $y = x^2 - 2x + 3$ | 18 | 11 | 6  | 3 | 2 | 3 | 6 |

Tabılǵan noqatlardı jasaymız hám olar arqalı bir tegis iymek sıyıq júrgizemiz (9-súwret).

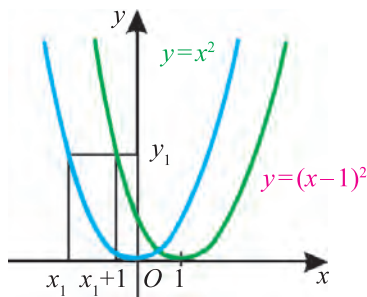
Grafiklerdi salıstırıw ushın tolıq kvadrattı jiklew usıllarınan paydalanıp,  $y = x^2 - 2x + 3$  formulasın túrlendiremiz:

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

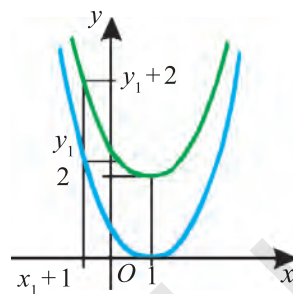
Dáslep  $y = x^2$  hám  $y = (x - 1)^2$  funksiyaınıń grafiklerin salıstıramız. Eger  $(x_1; y_1)$  noqatı  $y = x^2$  parabolasınıń noqatı, yaǵnıy  $y_1 = x_1^2$  bolsa, onda  $(x_1 + 1; y_1)$  noqatı  $y = (x - 1)^2$  funksiyaınıń grafigine tiyisli, sebebi,  $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$ . Demek,  $y = (x - 1)^2$  funksiyaınıń grafigi  $y = x^2$  paraboladan onı bir birlik ońǵa kóshiriw (parallel kóshiriw) arqalı payda etilgen parabola (10-súwret).



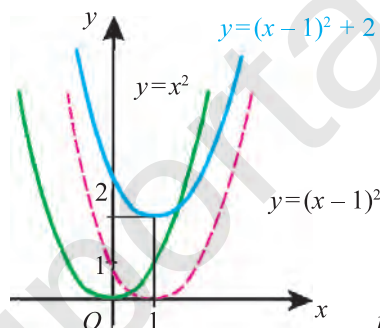
9-súwret.



10-súwret.



11-súwret.



12-súwret.

Endi  $y = (x - 1)^2$  hám  $y = (x - 1)^2 + 2$  funkciyasınıń grafiklerin salıstıramız.  $x$  tiń hárbir mánisinde  $y = (x - 1)^2 + 2$  funkciyasınıń mánisi  $y = (x - 1)^2$  funkciyasınıń mánisinen 2 ge artıq. Demek,  $y = (x - 1)^2 + 2$  funkciyasınıń grafiği  $y = (x - 1)^2$  parabolanı eki birlik joqarıǵa kóshiriw arqalı payda etilgen parabola boladı (11-súwret).

Solay etip,  $y = x^2 - 2x + 3$  funkciyasınıń grafiği  $y = x^2$  parabolanı bir birlik ońǵa hám eki birlik joqarıǵa kóshiriw arqalı payda etilgen parabola (12-súwret).  $y = x^2 - 2x + 3$  parabolanıń simmetriya kósheri ordinatalar kósherine parallel hám parabolanıń tóbesi bolǵan  $(1; 2)$  noqatınan ótiwshi tuwrı sızıq boladı. ▲

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$  funkciyasınıń grafiği  $y = ax^2$  parabolanı:

eger  $x_0 > 0$  bolsa, abscissalar kósheri boyınsha ońǵa qaray  $x_0$  ge, eger  $x_0 < 0$  bolsa, shepke  $|x_0|$ ǵa kóshiriw;

eger  $y_0 > 0$  bolsa, ordinatalar kósheri boyınsha joqarıǵa  $y_0$  ǵa, eger  $y_0 < 0$  bolsa, tómengge  $|y_0|$ ǵa kóshiriw jolı menen payda etiletuǵın parabola bolıwı usıǵan uqsas dálillenedi.

Qálegen  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat funkciyanı onnan tolıq kvadrattı jiklew formulası járdeminde

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

yaǵnıy,  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  túrinde jazıw múmkin, bunda

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Solay etip,  $y = ax^2 + bx + c$  funkciyasınıń grafigi  $y = ax^2$  parabolanı koordinatalar kósherleri boylap kóshiriw nátiyjesinde payda bolatuǵın parabola boladı.  $y = ax^2 + bx + c$  teńligi parabolanıń teńlemesi delinedi.  $y = ax^2 + bx + c$  parabola tóbesiniń  $(x_0; y_0)$  koordinataların tómendegi formula boyınsha tabıw múmkin:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

$y = ax^2 + bx + c$  parabolasınıń simmetriya kósheri ordinatalar kósherine parallel hám parabolanıń tóbesinen ótiwshi tuwrı sızıq boladı.

$y = ax^2 + bx + c$  parabolanıń shaqaları, eger  $a > 0$  bolsa, joqarıǵa baǵdarlangan, eger  $a < 0$  bolsa, tómenge baǵdarlangan boladı.

**2- másele.**  $y = 2x^2 - x - 3$  parabola tóbesiniń koordinataların tabıń.

△ Parabola tóbesiniń abscissası:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Parabola tóbesiniń ordinatası:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8}.$$

**Juwabı:**  $\left( \frac{1}{4}; -3\frac{1}{8} \right)$ . ▲

**3- másele.** Eger parabolanıń  $(-2; 5)$  noqatı arqalı ótetuǵın hám tóbesi  $(-1; 2)$  noqatında bolatuǵını belgili bolsa, parabolanıń teńlemesin jazıń.

△ Parabolanıń tóbesi  $(-1; 2)$  noqatında bolǵanı ushın parabolanıń teńlemesin tómendegishe jazıw múmkin.

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Shárt boyınsha  $(-2; 5)$  noqatı parabolağa tiyisli, demek,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

bunnan  $a = 3$ .

Solay etip, parabola

$$y = 3(x + 1)^2 + 2 \quad \text{yamasa} \quad y = 3x^2 + 6x + 5$$

teńlemesi menen beriledi. ▲

### Shınıǵıwlar

Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń **(24–26):**

**24.** (Awızeki.)

1)  $y = (x - 3)^2 - 2$ ;

2)  $y = (x + 4)^2 + 3$ ;

3)  $y = 5(x + 2)^2 - 7$ ;

4)  $y = -4(x - 1)^2 + 5$ .

**25.** 1)  $y = x^2 + 4x + 1$ ;

2)  $y = x^2 - 6x - 7$ ;

3)  $y = 2x^2 - 6x + 11$ ;

4)  $y = -3x^2 + 18x - 7$ .

**26.** 1)  $y = x^2 + 2$ ;

2)  $y = -x^2 - 5$ ;

3)  $y = 3x^2 + 2x$ ;

4)  $y = -4x^2 + x$ ;

5)  $y = -3x^2 + x$ ;

6)  $y = 2x^2 - x$ .

**27.**  $Ox$  kósherinen sonday noqattı tabıń, onnan parabolaniń simmetriya kósheri ótetuǵın bolsın:

1)  $y = x^2 + 3$ ;

2)  $y = (x + 2)^2$ ;

3)  $y = -3(x + 2)^2 + 2$ ;

4)  $y = (x - 2)^2 + 2$ ;

5)  $y = x^2 + x + 1$ ;

6)  $y = 2x^2 - 3x + 5$ .

**28.**  $y = x^2 - 10x$  parabolaniń simmetriya kósheri: 1)  $(5; 10)$ ; 2)  $(3; -8)$ ; 3)  $(5; 0)$ ; 4)  $(-5; 1)$  noqatınan óte me?

**29.** Parabolaniń koordinatalar kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń:

1)  $y = x^2 - 3x + 2$ ;

2)  $y = -2x^2 + 3x - 1$ ;

3)  $y = 3x^2 - 7x + 12$ ;

4)  $y = 3x^2 - 4x$ .

**30.** Eger parabolaniń  $(-1; 6)$  noqatı arqalı ótetuǵınlıǵı hám onıń tóbesi  $(1; 2)$  noqatı ekenligi belgili bolsa, parabolaniń teńlemesin jazıń.

31. (Awızeki.)  $(1; -6)$  noqatı  $y = -3x^2 + 4x - 7$  parabolağa tiyisli bola ma?  $(-1; 8)$  noqatı she?
32. Eger  $(-1; 2)$  noqatı: 1)  $y = kx^2 + 3x - 4$ ; 2)  $y = -2x^2 + kx - 6$  parabolasına tiyisli bolsa,  $k$  niñ mánisin tabıń.
33.  $y = x^2$  parabola ólshemi járdeminde funkciyanıń grafigin jasań:
- 1)  $y = (x + 2)^2$ ; 2)  $y = (x - 3)^2$ ; 3)  $y = x^2 - 2$ ;  
 4)  $y = -x^2 + 1$ ; 5)  $y = -(x - 1)^2 - 3$ ; 6)  $y = (x + 2)^2 + 1$ .
34.  $y = 2x^2$  parolasınıń onı:
- 1)  $Ox$  kósheri boyınsha 3 birlik oń tárepke kóshiriw;  
 2)  $Oy$  kósheri boyınsha 4 birlik joqarıǵa kóshiriw;  
 3)  $Ox$  kósheri boyınsha 2 birlik shep tárepke hám keyin  $Oy$  kósheri boyınsha bir birlik tómengen kóshiriw;  
 4)  $Ox$  kósheri boyınsha 1,5 birlik oń tárepke hám keyin  $Oy$  kósheri boyınsha 3,5 birlik joqarıǵa kóshiriw nátiyjesinde payda bolǵan parabolanıń teńlemesin jazıń.

## 5-§. KVADRAT FUNKCIYANÍŇ GRAFIGIN JASAW

**1-m a s a l a.**  $y = x^2 - 4x + 3$  funkciyasınıń grafigin jasań.

△ 1. Parabola tóbesiniń koordinataların esaplaymız:

$$x_0 = -\frac{-4}{2} = 2,$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1.$$

$(2; -1)$  noqatın jasaymız.

2.  $(2; -1)$  noqatları arqalı ordinatalar kósherine parallel tuwrı sıziq, yaǵnıy parabolanıń simmetriya kósherin júrgizemiz (13-a, súwret).

3. Mina,

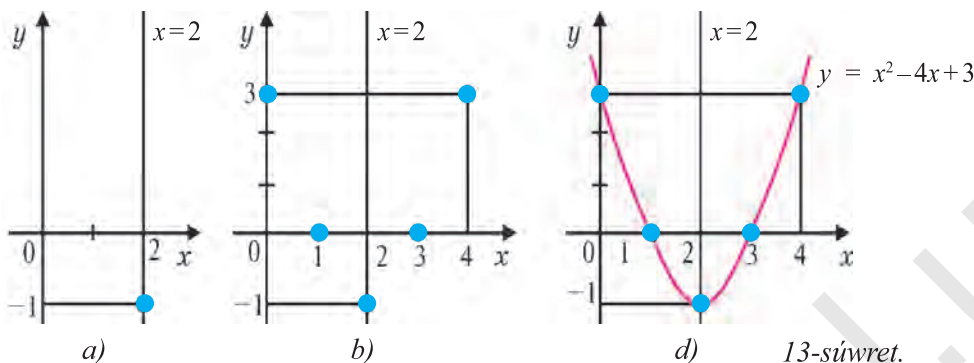
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

teńlemesin sheship, funkciyanıń nollerin tabamız:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ .  $(1; 0)$  hám  $(3; 0)$  noqatların jasaymız (13-b, súwret).

4.  $Ox$  kósherinde  $x = 2$  noqatına salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan eki noqatı, mısalı,  $x = 0$  hám  $x = 4$  noqatların alamız. Funkciyanıń usı noqatlardaǵı mánislerin esaplaymız:  $y(0) = y(4) = 3$ .

$(0; 3)$  hám  $(4; 3)$  noqatların jasaymız (13-b, súwret).





5. Jasalgan noqatlar orqali parabolani júrgizemiz (13-d, súwret). ▲

Bunday sxema boyinsha *qálegen*  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat funkciyasınıń grafiğın jasawğa boladı:

1.  $x_0, y_0$  lerdı  $x_0 = -\frac{b}{2a}, y_0 = y(x_0)$  formulalarından paydalanıp esaplap, parabolaniń  $(x_0; y_0)$  tóbesi jasaladı.

2. Parabolaniń tóbesinen ordinatalar kósherine parallel tuwrı sızıq – parabolaniń simmetriya kósheri júrgiziledi.

3. Funkciyanıń nolleri (olar bar bolsa) tabıladı hám abscissalar kósherinde parabolaniń sáykes noqatları jasaladı.

4. Parabolaniń onıń kósherine salıstırğanda simmetriyalı bolğan qanday da eki noqatı jasaladı. Bunıń ushın  $Ox$  kósherinde  $x_0 (x_0 \neq 0)$  noqatına salıstırmalı simmetriyalı bolğan eki noqattı alıp hám funkciyanıń sáykes mánislerin (mánisler birdey) esaplaw kerek. Mısalı, parabolaniń abscissaları  $x = 0$  hám  $x = 2x_0$  bolğan noqatların (noqatlardıń ordinataları  $c$  ğa teń) jasaw múmkin.

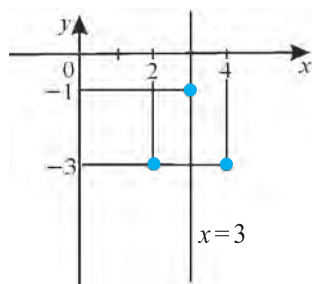
5. Jasalgan noqatlar orqali parabola júrgiziledi. Grafikti jáne de anıǵıraq jasaw ushın parabolaniń taǵı da bir neshe noqatın tabıw paydalı.

**2- másele.**  $y = -2x^2 + 12x - 19$  funkciyasınıń grafiğın jasań.

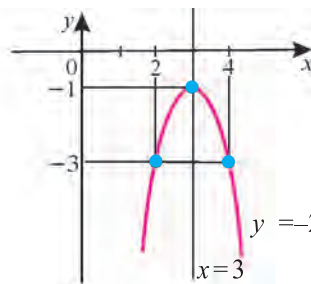
▲ 1. Parabola tóbesiniń koordinataların esaplaymız:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

$(3; -1)$  noqatın – parabolaniń tóbesin jasaymız (14-súwret).



14-súwret.



15-súwret.

2.  $(3; -1)$  noqatı arqalı parabolaniń simmetriyalı kósherin ótkeremiz (14-súwret).

3.  $-2x^2 + 12x - 19 = 0$  teńlemesin sheship, haqıyqıy korenler joqlıǵına hám sonıń ushın parabola  $Ox$  kósherin kespewine isenim payda etemiz.

4.  $Ox$  kósherinde  $x = 3$  noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan eki noqattı, máselen  $x = 2$  hám  $x = 4$  noqatların alamız. Funkciyanıń bul noqatlardaǵı mánislerin esaplaymız:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

$(2; -3)$  hám  $(4; -3)$  noqatların jasıymız (14-súwret).

5. Jasalǵan noqatlar arqalı parabola júrgizemiz (15-súwret). ▲

**3-m a s a l a .**  $y = -x^2 + x + 6$  6 funkciyasınıń grafigin jasań hám bul funksiya qanday qásiyetke iye ekenligin anıqlań.

△ Funkciyanıń grafigin jasaw ushın onıń nollerin tabamız:  $-x^2 + x + 6 = 0$ , bunnan  $x_1 = -2$ ,  $x_1 = 3$ . Parabola tóbesiniń koordinataların tómendegishe tabıwǵa boladı:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

$a = -1 < 0$  bolǵanı ushın parabolaniń shaqaları tómenge baǵdarlangan.

Parabolaniń jáne bir neshe noqatın tabamız:  $y(-1) = 4$ ,  $y(0) = 6$ ,  $y(1) = 6$ ,  $y(2) = 4$ . Parabolanı jasıymız (16-súwret).

Grafik járdeminde  $-x^2 + x + 6$  funkciyasınıń tómendegi qásiyetlerin payda etemiz:

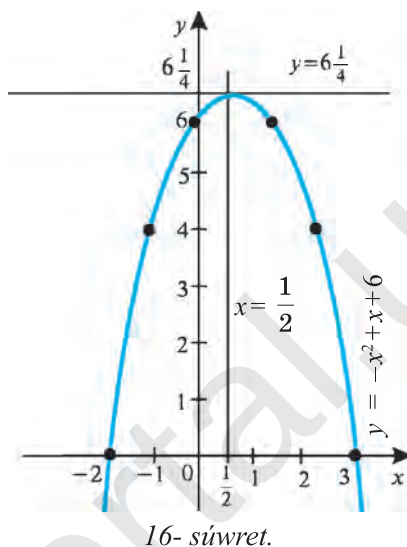
1)  $x$  tiñ qálegen mánislerinde funkciyanıń mánisleri  $6\frac{1}{4}$  ge teń yaki onnan kishi;

2)  $-2 < x < 3$  te funkciyanıń mánisleri oń,  $x < -2$  de hám  $x > 3$  te teris,  $x = -2$  hám  $x = 3$  te nolge teń;

3) funkciya  $x \leq \frac{1}{2}$  aralıqta ósiwshi,  $x \geq \frac{1}{2}$  aralıqta kemeyiwshi;

4)  $x = \frac{1}{2}$  bolǵanda funkciya  $6\frac{1}{4}$  ge teń bolǵan eń úlken mánisti qabıl etedi;

5) funkciyanıń grafigi  $x = \frac{1}{2}$  tuwrı sızıqqa salıstırǵanda simmetriyalı. ▲



$y = ax^2 + bx + c$  funkciya  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  noqatında eń kishi yamasa eń úlken mánislerdi qabıl etedi; bul  $x_0$  noqatı parabola tóbesiniń abscissası boladı.

Funkciyanıń  $x_0$  noqatındaǵı mánisin  $y_0 = y(x_0)$  formulası boyınsha tabıw múmkin. Eger  $a > 0$  bolsa, onda funkciya eń kishi mániske iye boladı, eger  $a < 0$  bolsa, onda funkciya eń úlken mániske iye boladı.

Mısalı,  $y = x^2 - 4x + 3$  funkciyası  $x = 2$  bolǵanda  $-1$  ge teń bolǵan eń kishi mánisin qabıl etedi (13-d, súwret);  $y = -2x^2 + 12x - 9$  funkciyası  $x = 3$  bolǵanda  $-1$  ge teń bolǵan eń úlken mánisin qabıl etedi (15-súwret).

**4- másele.** Eki oń sannıń qosındısı 6 ǵa teń. Eger olardıń kvadratlarınıń qosındısı eń kishi san bolsa, usı sanlardı tabıń. Bul sanlardıń kvadratlarınıń qosındısı eń kishi mánisi qanday boladı?

▲ Birinshi sandı  $x$  háribi menen belgileymiz, onda ekinshi san  $6 - x$ , olardıń kvadratlarınıń qosındısı bolsa  $x^2 + (6 - x)^2$  boladı. Bul ańlatpanıń jazılıwın túrlendiremiz:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = 2x^2 - 12x + 36.$$

Мáселе,  $y=2x^2-12x+36$  funkciyasınıń eń kishi mánisin tabıwǵa keltirile-di. Parabola tóbesiniń koordinatasın tabamız:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \quad y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Demek,  $x=3$  bolǵanda funkciya 18 ge teń eń kishi mánisti qabıl etedi. Solay etip, birinshi san 3 ke teń, ekinshi san da  $6 - 3=3$  ke teń. Bul sanlardıń kvadratlarınń qosındısınıń mánisi 18 ge teń. ▲

### Shınıǵıwlar

**35.** Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń:

- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $y = x^2 - 4x - 5;$  | 2) $y = x^2 + 3x + 5;$  |
| 3) $y = -x^2 - 2x + 5;$ | 4) $y = -x^2 + 5x - 1.$ |

**36.** Parabolaniń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatlarınń koordinataların tabıń:

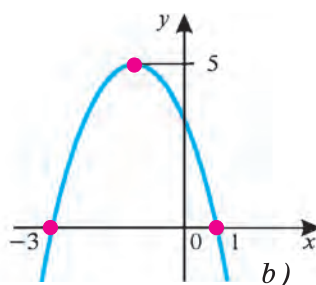
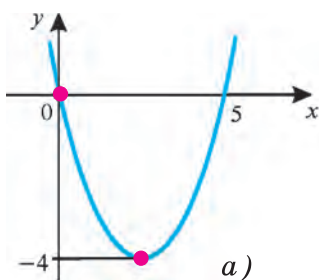
- |                        |                           |
|------------------------|---------------------------|
| 1) $y = x^2 - 3x + 5;$ | 2) $y = -2x^2 - 8x + 10;$ |
| 3) $y = -2x^2 + 6;$    | 4) $y = 7x^2 + 14.$       |

Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha: 1)  $x$  tiń mánisleri oń, teris bolatuǵın mánislerin tabıń; 2) funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń; 3)  $x$  tiń qanday mánislerinde funkciya eń úlken yaki eń kishi mánislerdi qabıl etetuǵının anıqlań hám tabıń **(37–38)**:

- |                                    |                          |
|------------------------------------|--------------------------|
| <b>37.</b> 1) $y = x^2 - 7x + 10;$ | 2) $y = -x^2 + x + 2;$   |
| 3) $y = -x^2 + 6x - 9;$            | 4) $y = x^2 + 4x + 5.$   |
| <b>38.</b> 1) $y = 4x^2 + 4x - 3;$ | 2) $y = -3x^2 - 2x + 1;$ |
| 3) $y = -2x^2 + 3x + 2;$           | 4) $y = 3x^2 - 8x + 4.$  |

**39.** Kvadrat funkciyanıń berilgen grafigi (17-súwret) boyınsha onıń qási-yetlerin anıqlań.

**40.** 15 sanın eki sannıń qosındısı túrinde sonday etip kórsetiń, bul sanlardıń kóbeymesi eń úlkeni bolsın.



17-súwret.

41. Eki sannıń qosındısı 10 ǵa teń. Eger bul sanlardıń kublarınń qosındısı eń kishi bolsa, onda usı sanlardı tabıń.
42. Úy diywalları qaptalındaǵı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydandı úsh tárepinen 12 m li pánjere menen orap alıw talap etiledi. Maydannıń ólshemleri qanday bolǵanda onıń maydanı eń úlken boladı?
43. Úshmúyeshlikte ultanı menen usı ultanǵa túsirilgen biyikliktiń qosındısı 14 cm ge teń. Bunday úshmúyeshlik 25 cm<sup>2</sup> qa teń maydanǵa iye bolıwı múmkin be?
44. Grafikti jasamay turıp,  $x$  tiń qanday mánisinde funkciya eń úlken (eń kishi) mániske iye bolatuǵının anıqlań; usı mánisti tabıń:
- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $y = x^2 - 6x + 13$ ; | 2) $y = x^2 - 2x - 4$ ;  |
| 3) $y = -x^2 + 4x + 3$ ; | 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$ . |
45. Eger:
- 1) parabolanıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlangan, onıń tóbesiniń abscissası teris, ordinatası oń bolsa;
  - parabolanıń shaqaları tómengen baǵdarlangan, onıń tóbesiniń abscissası hám ordinatası teris bolsa,  $y = ax^2 + bx + c$  parabola teńlemesiniń koefficientleriniń belgilerin anıqlań.
46. 5 m biyiklikten oq jaydan 50 m/s tezlik penen joqarıǵa vertikal tárizde nayza atıldı. Nayzanıń  $t$  sekundtan keyin kóterilgen biyikligi, metrlerde  $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$  formulası menen esaplanadı, bunda  $g = 10$  m/sek<sup>2</sup>. Nayza neshe sekundtan keyin: 1) eń úlken biyiklikke erisedi hám ol qanday biyiklik boladı? 2) Jerge túsedi?

## 6-§. KVADRAT TE՛NSIZLIK H՛AM ONI՛N SHESHIMI

**1 - másele.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń tárepleri 2 hám 3 dm ge teń. Onıń hárbir tárepi bir qıylı sandaǵı decimetrlerge sonday etip arttırıladı, nátiyjede tuwrımúyeshliktiń maydanı 12 dm<sup>2</sup> tan artıq boladı. Hárbir tárep qáytıp ózgergen?

△ Tuwrı tórtmúyeshliktiń hárbir tárepi  $x$  decimetrge arttırılǵan bolsın. Onda jańa tórtmúyeshliktiń tárepleri  $(2+x)$  hám  $(3+x)$  decimetrge, onıń maydanı bolsa  $(2+x)(3+x)$  kvadrat decimetrge teń boladı. Máseleniń shártı boyınsha  $(2+x)(3+x) > 12$  bunnan  $x^2 + 5x + 6 > 12$  yaqı  $x^2 + 5x - 6 > 0$ .

Bul teńsizliktiń shep bólimin kóbeytiwshilerge jikleymiz:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Máseleni shárt boyınsha,  $x > 0$  bolǵanı ushın  $x + 6 > 0$ .

Teńsizliktiń eki bólimin  $x + 6$  oń sanǵa bólip,  $x - 1 > 0$ , yaǵnıy  $x > 1$  di payda etemiz.

**Juwapı:** Tuwrı tórtmúyeshliktiń hárbir tárepi 1 dm den kóbirek arttırılǵan. ▲

$x^2 + 5x - 6 > 0$  teńsizliginde  $x$  penen belgisiz san belgilengen. Bul kvadrat teńsizlikke mısál bola aladı.



*Eger teńsizliktiń shep bóliminde kvadrat funkciya, al oń bóliminde nol tursa, bunday teńsizlik kvadrat teńsizlik dep ataladı.*

Mısalı,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \quad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

teńsizlikleri kvadrat teńsizlikler boladı.

Bul belgisizli *teńsizliktiń sheshimi* dep, belgisizdiń usı teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylandırıwshı mánisine ayılatuǵının esletip ótemiz.

*Teńsizlikti sheshiw* – onıń barlıq sheshimlerin tabıw yamasa olardıń joq ekenligin kórsetiw degen sóz.

**2- másele.** Teńsizlikti sheshiń:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△  $x^2 - 5x + 6 = 0$  kvadrat teńlemesi eki túrli  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$  korenge iye. Demek,  $x^2 - 5x + 6$  kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklewge boladı:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Sonın ushın berilgen teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$(x - 2)(x - 3) > 0.$$

Eger eki kóbeytiwshi birdey belgige iye bolsa, olardıń kóbeymesi oń boladı.

1) Eki kóbeytiwshi oń, yaǵnıy  $x - 2 > 0$  hám  $x - 3 > 0$  bolǵan jaǵdaydı qaraymız.

Bul eki teńsizlik tómendegi sistemanı dúzedi:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$$

Sistemanı sheship,  $\begin{cases} x > 2, \\ x > 3 \end{cases}$  ti payda etemiz, bunnan  $x > 3$ .

Demek, barlıq  $x > 3$  sanları  $(x - 2)(x - 3) > 0$  teńsizliginiń sheshimleri boladı.

2) Endi eki kóbeytiwshi teris, yaǵnıy  $x - 2 < 0$  hám  $x - 3 < 0$  bolǵan jaǵdaydı qaraymız.

Bul eki teńsizlik tómendegi sistemanı dúzedi:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

Sistemanı sheship,  $\begin{cases} x < 2, \\ x < 3 \end{cases}$  ti payda etemiz, bunnan  $x < 2$ .

Demek, barlıq  $x < 2$  sanları  $(x - 2)(x - 3) > 0$  teńsizliginiń sheshimleri boladı.

Solay etip,  $(x - 2)(x - 3) > 0$  teńsizliginiń, demek, berilgen  $x^2 - 5x + 6 > 0$  teńsizliginiń de, sheshimleri  $x < 2$ , sonday-aq,  $x > 3$  sanları boladı.

**Juwabı:**  $x < 2$ ,  $x > 3$ . ▲



Uhwma, eger  $ax^2 + bx + c = 0$  kvadrat teńlemesi eki kórengge iye bolsa, onda  $ax^2 + bx + c > 0$  hám  $ax^2 + bx + c < 0$  kvadrat teńsizliklerin sheshiwdi, kvadrat teńsizliktiń shep bólimin kóbeytiwshilerge jiklep, birinshi dárejeli teńsizlikler sistemasın sheshiwge keltiriw múmkin.

**3- másele.**  $-3x^2 - 5x + 2 > 0$  teńsizligin sheshiń.

△ Esaplawlardı qolaylıraq alıp barıw ushın berilgen teńsizliktiń birinshi koefficienti oń bolǵan teńsizlikler túrinde kórsetemiz. Bunıń ushın onıń eki bólimin  $-1$  ge kóbeytemiz:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0.$$

$3x^2 + 5x - 2 = 0$  teńlemesiniń korenlerin tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{-5 - \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 - 7}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -2.$$

Kvadrat úsh aǵzalını kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2) < 0.$$

Bunnan eki sistemanı payda etemiz:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{3} > 0, \\ x + 2 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - \frac{1}{3} < 0, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

Birinshi sistemanı tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x < -2, \end{cases}$$

bunnan sistema sheshimlerge iye emesligi kórinip tur.

Ekinshi sistemanı sheship, tómendegini tabamız:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{3}, \\ x > -2, \end{cases}$$

bunnan  $-2 < x < \frac{1}{3}$ .

Demek,  $3(x - \frac{1}{3})(x + 2) < 0$  teńsizliginiń, yaǵnıy  $-3x^2 - 5x + 2 > 0$

teńsizliginiń sheshimleri  $\left(-2; \frac{1}{3}\right)$  intervaldaǵı barlıq sanlar boladı.

**Juwabı:**  $-2 < x < \frac{1}{3}$ . ▲



## Shinigiwlar

**47.** (Awizeki.) Tóمندegi teńsizliklerden qaysıları kvadrat teńsizlik ekenin kórsetiń:

- 1)  $x^2 - 4 > 0$ ;                      2)  $x^2 - 3x - 5 \leq 0$ ;                      3)  $3x + 4 > 0$ ;  
4)  $4x - 5 < 0$ ;                      5)  $x^2 - 1 \leq 0$ ;                      6)  $x^4 - 16 > 0$ .

**48.** Tóمندegi teńsizlikti kvadrat teńsizlikke keltiriń:

- 1)  $x^2 < 3x + 4$ ;                      2)  $3x^2 - 1 > x$ ;  
3)  $3x^2 < x^2 - 5x + 6$ ;                      4)  $2x(x + 1) < x + 5$ .

**49.** (Awizeki.) 0; -1; 2 sanlarınan qaysıları

- 1)  $x^2 + 3x + 2 > 0$ ;                      2)  $-x^2 + 3,5x + 2 \geq 0$ ;  
3)  $x^2 - x - 2 \leq 0$ ;                      4)  $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

teńsizliktiń sheshimleri boladı?

Teńsizlikti sheshiń (**50–52**):

**50.** 1)  $(x - 2)(x + 4) > 0$ ;                      2)  $(x - 11)(x - 3) < 0$ ;  
3)  $(x - 3)(x + 5) < 0$ ;                      4)  $(x + 7)(x + 1) > 0$ .

**51.** 1)  $x^2 - 4 < 0$ ;                      2)  $x^2 - 9 > 0$ ;                      3)  $x^2 + 3x < 0$ ;                      4)  $x^2 - 2x > 0$ .

**52.** 1)  $x^2 - 3x + 2 < 0$ ;                      4)  $x^2 + 2x - 3 > 0$ ;  
2)  $x^2 + x - 2 < 0$ ;                      5)  $2x^2 + 3x - 2 > 0$ ;  
3)  $x^2 - 2x - 3 > 0$ ;                      6)  $3x^2 + 2x - 1 > 0$ .

**53.** Teńsizlikti sheshiń:

- 1)  $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$ ;                      2)  $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \leq 0$ ;  
3)  $3x^2 - 3 < x^2 - x$ ;                      4)  $(x - 1)(x + 3) > 5$ .

**54.** Funkciyanıń grafigin jasań. Grafik boyınsha funkciya  $x$  tiń oń mánisler; teris mánisler; nolge teń mánisti qabıl etetuǵın barlıq mánislerin tabıń:

- 1)  $y = 2x^2$ ;                      2)  $y = -(x + 1,5)^2$ ;  
3)  $y = 2x^2 - x + 2$ ;                      4)  $y = -3x^2 - x - 2$ .

**55.**  $x_1$  hám  $x_2$  sanlar (bunda  $x_1 < x_2$ )  $y = ax^2 + bx + c$  funkciyasınıń nolleri ekeni belgili. Eger  $x_0$  san  $x_1$  hám  $x_2$  arasında jatsa, yaǵnıy  $x_1 < x_0 < x_2$  bolsa, onda  $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$  teńsizliktiń orınlanatuǵının dálilleń.

## 7-§. KVADRAT TEŇSIZLIKTI KVADRAT FUNKCIYA JÁRDEMINDE SHESHIW

Kvadrat funksiya  $y = ax^2 + bx + c$  (bunda  $a \neq 0$ ) formulası menen beriletuǵının esletip ótemiz. Sonıń ushın kvadrat teńsizlikti sheshiw, kvadrat funksiyanıń nollerin hám kvadrat funksiya oń yaki teris mánislerdi qabıl etetuǵın aralıqlardı tabıwǵa keltiriledi.

**1- másele.** Teńsizlikti grafik járdeminde sheshiń:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0.$$

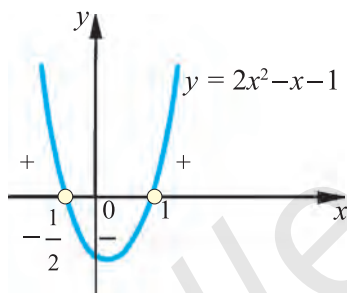
△  $y = 2x^2 - x - 1$  kvadrat funksiyanıń grafigi – shaqaları joqarıǵa baǵdarlangan parabola.

Bul parabolanıń  $Ox$  kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız. Bunıń ushın  $2x^2 - x - 1 = 0$  kvadrat teńlemenı sheshemiz. Bul teńlemenıń korenleri:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Demek, parabola  $Ox$  kósherin  $x = -\frac{1}{2}$  hám

$x = 1$  noqatlarında kesip ótedi (18-súwret).



18-súwret.

$2x^2 - x - 1 \leq 0$  teńsizlikti  $x$  tiń funksiya nolge teń bolǵan yaki funksiyanıń mánisleri teris bolǵan mánisleri qanaatlándıradı, yaǵnıy  $x$  tiń sonday mánisleri bolıp, bul mánislerde parabolanıń noqatları  $Ox$  kósherinde yaki usı kósherden tómende jatadı. 18-súwretten, bul mánisler  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$  kesindidegi barlıq sanlar

bolatuǵını kórinip tur.

**Juwabı:**  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ . ▲

Bul funksiyanıń grafiginen berilgen teńsizliktiń tek belgisi menen ózgeshelenetuǵın basqa teńsizliklerdi sheshiwde de paydalanıwǵa boladı. 18-súwrette kórinip turǵanıday:

1)  $2x^2 - x - 1 < 0$  teńsizlikleriniń sheshimleri  $-\frac{1}{2} < x < 1$ , yaǵnıy

$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$  intervalındaǵı barlıq sanlar boladı;

2)  $2x^2 - x - 1 > 0$  teńsizlikleriniń sheshimleri  $x < -\frac{1}{2}$  hám  $x > 1$  aralıǵındaǵı barlıq sanlar boladı.

3)  $2x^2 - x - 1 \geq 0$  teńsizlikleriniń sheshimleri  $x \leq -\frac{1}{2}$  hám  $x \geq 1$  aralıǵındaǵı barlıq sanlar boladı.

**2- másele.** Teńsizlikti sheshiń:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

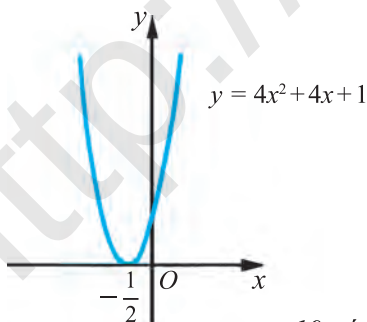
△  $y = 4x^2 + 4x + 1$  funkciyası grafiginıń eskizin sızamız. Bul parabolanıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlangan  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  teńleme bir  $x = -\frac{1}{2}$  korengge iye, sonıń ushın parabola  $Ox$  kósherine  $(-\frac{1}{2}; 0)$  noqatında urınadı. Bul funkciyanıń grafigi 19-súwrette kórsetilgen. Berilgen teńsizlikti sheshiw ushın  $x$  tiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisleri ón bolatuǵının anıqlaw ker-ek. Solay etip,  $4x^2 + 4x + 1 > 0$  teńsizlikti parabolanıń noqatları  $Ox$  kósherinen joqarıda jatiwshı  $x$  tiń mánisleri qanaatlándıradı. 19-súwretten, bunday mánisler  $x = -0,5$  ten basqa barlıq haqıyqıy sanlar bolatuǵınlıǵı belgili.

**Juwbabı:**  $x \neq -0,5$ . ▲

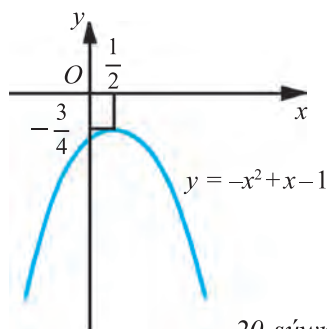
19-súwrette kórinip turǵanıday:

1)  $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$  teńsizliginiń sheshimi barlıq haqıyqıy sanlar boladı;

2)  $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$  teńsizligi bir  $x = -\frac{1}{2}$  sheshimge iye;



19-súwret.



20-súwret.

3)  $4x^2 + 4x + 1 < 0$  teńsizligi sheshimlerge iye emes.

Eger  $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$  ekeni itibarğa alınsa, bul teńsizliklerdi awızeki sheshiwge boladı.

**3-masala.**  $-x^2 + x - 1 < 0$  teńsizlikti sheshiń.

△  $y = -x^2 + x - 1$  funkciya grafiginıń eskizin sızamız. Bul parabolanıń shaqaları tómengen baǵdarlanǵan.  $-x^2 + x - 1 = 0$  teńlemesin haqıyqıy korenleri joq, sonıń ushın parabola  $Ox$  kósherin kesip ótpeydi. Demek, bul parabola  $Ox$  kósherinen tómende jaylasqan (20-súwret). Bul barlıq  $x$  larda kvadrat funkciyanıń mánisleri teris, yaǵnıy  $-x^2 + x - 1 < 0$  teńsizligi  $x$  tiń barlıq haqıyqıy mánisinde orınlanatúǵının bildiredi. ▲

20-súwretten de  $-x^2 + x - 1 \leq 0$  teńsizliginiń sheshimleri  $x$  tiń barlıq haqıyqıy mánisleri bolıwı,  $-x^2 + x - 1 > 0$  hám  $-x^2 + x - 1 \geq 0$  teńsizligi sheshimlerge iye emesligi kórinip tur.

Solay etip, kvadrat teńsizlikti grafik járdeminde sheshiw ushın:

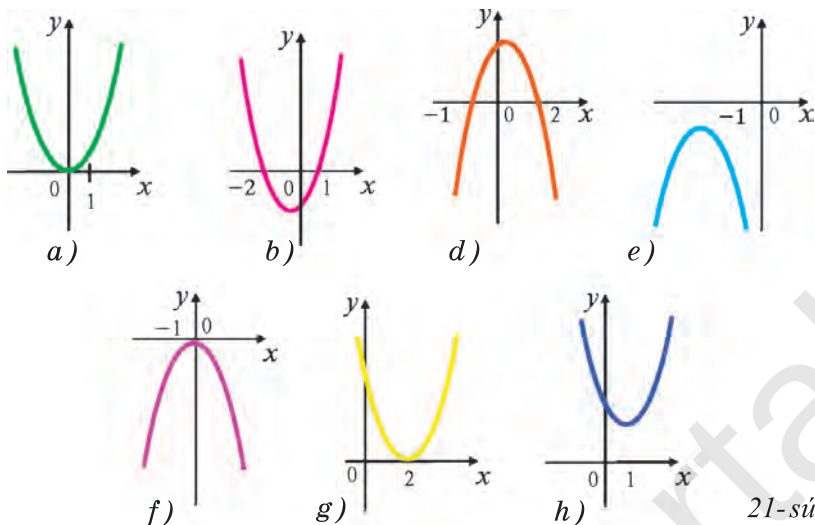
- 1) kvadrat funkciyanıń birinshi koefficientiniń belgisi boyınsha parabola shaqalarınıń baǵdarın anıqlaw;
- 2) tiyisli kvadrat teńlemeniniń haqıyqıy korenlerin tabıw yaqi olardıń joq ekenligin anıqlaw;
- 3) kvadrat funkciyanıń  $Ox$  kósheri menen kesilisiw noqatları (eger olar bar bolsa) yaqi urınbadan paydalanıp, kvadrat funkciya grafiginıń eskizin jasaw;
- 4) grafik boyınsha funkciya kerekli mánislerdi qabıl etetuǵın aralıqların anıqlaw kerek.

### Shınıǵıwlar

**56.**  $y = x^2 + x - 6$  funkciyasınıń grafigin jasań. Grafik boyınsha  $x$  tiń funkciya oń mınislerdi; teris mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

**57.** (Awızeki.)  $y = ax^2 + bx + c$  funkciya grafiginen paydalanıp (21-súwret),  $x$  tiń qanday mánislerinde bul funkciya oń mánislerge, teris mánislerge, nolge teń mánisti qabıl etiwın kórsetiń.

Kvadrat teńsizlikti sheshiń (**58–62**):



21-súwret.

- 58.** 1)  $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ ;  
3)  $-x^2 + 3x - 2 < 0$ ;
- 59.** 1)  $2x^2 + 7x - 4 < 0$ ;  
3)  $-2x^2 + x + 1 \geq 0$ ;
- 60.** 1)  $x^2 - 6x + 9 > 0$ ;  
3)  $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$ ;
- 61.** 1)  $x^2 - 4x + 6 > 0$ ;  
3)  $x^2 + x + 2 > 0$ ;  
5)  $2x^2 - 3x + 7 < 0$ ;
- 62.** 1)  $5 - x^2 \geq 0$ ;  
3)  $-2,1x^2 + 10,5x < 0$ ;
- 63.** (Awizeki.) Teńsizlikti sheshiń:  
1)  $x^2 + 10 > 0$ ;  
3)  $(x - 1)^2 + 1 > 0$ ;  
5)  $-(x + 1)^2 - 2 < 0$ ;
- 2)  $x^2 - 3x - 4 \geq 0$ ;  
4)  $-x^2 + 3x + 4 > 0$ ;
- 2)  $3x^2 - 5x - 2 > 0$ ;  
4)  $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$ ;
- 2)  $x^2 - 14x + 49 \leq 0$ ;  
4)  $4x^2 - 20x + 25 < 0$ ;
- 2)  $x^2 + 6x + 10 < 0$ ;  
4)  $x^2 + 3x + 5 < 0$ ;  
6)  $4x^2 - 8x + 9 > 0$ ;
- 2)  $-x^2 + 7 < 0$ ;  
4)  $-3,6x^2 - 7,2x < 0$ ;
- Kvadrat teńsizlikti sheshiń (**64–66**):
- 64.** 1)  $4x^2 - 9 > 0$ ;  
3)  $x^2 - 3x + 2 > 0$ ;
- 2)  $9x^2 - 25 > 0$ ;  
4)  $x^2 - 3x - 4 < 0$ ;

- 5)  $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$ ;                      6)  $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$ .
65. 1)  $2x^2 - 8x \leq -8$ ;                      2)  $x^2 + 12x \geq -36$ ;  
 3)  $9x^2 + 25 < 30x$ ;                      4)  $16x^2 + 1 > 8x$ ;  
 5)  $2x^2 - x \geq 0$ ;                      6)  $3x^2 + x \leq 0$ .
66. 1)  $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$ ;                      2)  $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$ ;  
 3)  $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$ ;                      4)  $2x(x - 1) < 3(x + 1)$ .
67.  $x$  tiñ funkciya nolden úlken bolmağan mánislerin qabıl etetuğın barlıq mánislerin tabıń:
- 1)  $y = -x^2 + 6x - 9$ ;                      2)  $y = x^2 - 2x + 1$ ;  
 3)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$ ;                      4)  $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$ .
68. 1)  $x^2 - 2x + q > 0$  teńsizliktiñ  $q > 1$  bolğandağı sheshimleri  $x$  tiñ barlıq haqıyqıy mánisleri bolatuğının kórsetiń:  
 2)  $x^2 + 2x + q \leq 0$  teńsizlik  $q > 1$  bolğanda haqıyqıy sheshimlerge iye emesligin kórsetiń.
69.  $r$  dıń  $x^2 - (2 + r)x + 4 > 0$  teńsizlik  $x$  tiñ barlıq haqıyqıy mánislerinde orınlanatuğın barlıq mánislerin tabıń.

## 8-§.

## INTERVALLAR USULI

Teńsizlikti sheshiwde kóbinese intervallar usılı qollanıladı. Bul usıldı mısallarda túsindiremiz.

**1- másele.**  $x$  tiñ qanday mánislerinde  $x^2 - 4x + 3$  kvadrat úsh aǵzalı oń mánisler, qanday mánislerinde bolsa teris mánislerdi qabıl etetuğının anıqlań.

△  $x^2 - 4x + 3 = 0$  teńlemenıń korenlerin tabamız:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Sonıń ushın  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ .

$x = 1$  hám  $x = 3$  noqatlar (22-súwret) san kósherin úsh aralıqqa bóledi:

$$x < 1; \quad 1 < x < 3; \quad x > 3.$$



22-súwret.

$1 < x < 3$  aralıq sıyaqlı  $x < 1$ ,  $x > 3$  aralıqlar da *intervallar* delinedi.

San kósheri boyınsha ońnan shepke jılıtıp,  $x > 3$  intervalda  $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$  úsh aǵzalı oń mánislerin qabıl etetuǵının kóremiz, sebebi, bul jaǵdayda eki  $x - 1$  hám  $x - 3$  kóbeytiwshisi de oń.

Keyingi  $1 < x < 3$  intervalda bul úsh aǵzalı teris mánislerdi qabıl etedi hám  $x = 3$  noqatı arqalı ótkende belgisin ózgertedi. Bul jaǵday sonıń ushin da bolıp ótedi,  $(x - 1)(x - 3)$  kóbeymede  $x = 3$  noqatı arqalı ótkende  $x - 1$  kóbeytiwshi belgisin ózgertpeydi, ekinshi  $x - 3$  kóbeytiwshisi bolsa belgisin ózgertedi.

$x = 1$  noqat arqalı ótkende úsh aǵzalı jáne belgisin ózgertedi, sebebi,  $(x - 1)(x - 3)$  kóbeymede birinshi  $x - 1$  kóbeytiwshi belgisin ózgertedi, ekinshi  $x - 3$  kóbeytiwshisi belgisin ózgertpeydi.

Demek, san kósheri boyınsha ońnan shepke qarap jılıtıp bir intervaldan qońsıl as intervalǵa ótip barǵanda  $(x - 1)(x - 3)$  kóbeymeniń belgileri almasıp baradı.

Solay etip,  $x^2 - 4x + 3$  kvadrat úsh aǵzalınıń belgisi haqqındaǵı másele ni tómendegi usıl menen sheshiwge boladı.

$x^2 - 4x + 3 = 0$  teńlemesiniń korenlerin san kósherinde belgiley-miz:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ . Olar san kósherin úsh kestege intervalǵa ajıratadı (22-súwret).  $x > 3$  intervalda  $x^2 - 4x + 3$  úsh aǵzalınıń oń bolatuǵının anıqlap, úsh aǵzalınıń qalǵan intervaldaǵı belgilerin almasıp baratuǵın tártipte belgiley-miz (23-súwret). 23-súwretten kórinip turǵanıday,  $x < 1$  hám  $x > 3$  bolǵanda  $x^2 - 4x + 3 > 0$ ,  $1 < x < 3$  bolǵanda  $x^2 - 4x + 3 < 0$ . ▲



23-súwret.

Qarap ótilgen usıl *intervallar usılı* delinedi. Bul usıldan kvadrat teńsizliklerdi hám basqa teńsizliklerdi sheshiwde paydalanıladı.

Máselen, 1-máseleni sheshkende biz negizinde  $x^2 - 4x + 3 > 0$  hám  $x^2 - 4x + 3 < 0$  teńsizliklerin intervallar usılı menen sheshtik.

**2- másele.**  $x^3 - x < 0$  teńsizligin sheshiń.

△  $x^3 - x$  kóp aǵzalını kóbeytiwshilerge jikleybiz:

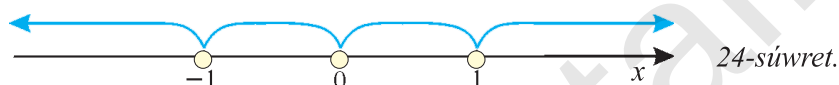
$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Demek, teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

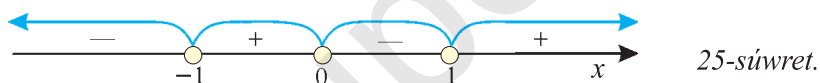
$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

San kósherinde  $-1$ ,  $0$  hám  $1$  noqatların belgileybiz. Bul noqatlar san kósherin tórt intervalǵa bóledi (24-súwret):

$$x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < 1, x > 1.$$



$x > 1$  bolǵanda  $(x + 1)x(x - 1)$  kóbeymeniń barlıq kóbeytiwshileri oń, sonıń ushın  $x > 1$  intervalda  $(x + 1)x(x - 1) > 0$  boladı. Qońsı intervalǵa ótiwde kóbeyme belgisiniń almasıwın itibarǵa alıp, hárbir interval ushın  $(x + 1)x(x - 1)$  kóbeymeniń belgisin tabamız (25-súwret).



Solay etip, teńsizliktiń sheshimleri  $x$  tiń  $x < -1$  hám  $0 < x < 1$  intervallardaǵı barlıq mánisleri boladı.

**Juwabı:**  $x < -1, 0 < x < 1$ . ▲

**3- másele.**  $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$  teńsizligin sheshiń.

△ Berilgen teńsizlikti tómendegishe jazıwǵa boladı:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \quad (1)$$

Barlıq  $x \neq -3$  da  $(x + 3)^2 > 0$  bolǵanı ushın  $x \neq -3$  te (1) teńsizliktiń sheshimleriniń kópligi,

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \quad (2)$$

teńsizlik sheshimleriniń kópligi menen ústi-ústine túsedı.

$x = -3$  mánisi (1) teńsizliktiń sheshimi bolmaydı, sebebi  $x = -3$  bolǵanda teńsizliktiń shep bólimi  $0$  ge teń.

(2) teńsizlikti intervallar usılı menen sheship,  $x < 2$ ,  $x > 3$  ti payda etemiz (26-súwret).





26-súwret.

$x = -3$  berilgen teńsizliktiń sheshimi bola almaytuǵının itibarǵa alıp, sońında nátiyjeni tómendegishe jazamız:

$$x < -3, \quad -3 < x < 2, \quad x > 3. \quad \blacktriangle$$

**4- másele.** Tómendegi teńsizlikti sheshiń:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

$\triangle$  Bólshektiń alımın hám bólimin kóbeytiwshilerge jiklep, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \quad (3)$$

San kósherinde bólshektiń alımı yaki bólimi nolge aylanatuǵın  $-3$ ;  $-1$ ;  $1$ ;  $4$  noqatların belgileyміз. Bul noqatlar san tuwrısın bes intervalǵa bóledi (27-súwret).  $x > 4$  bolǵanda bólshektiń alımı hám bólimindegi barlıq kóbeytiwshileri oń bolǵanı ushın bólshek oń boladı.



27-súwret.

Bir intervaldan keyingisine ótiwde, bólshek belgisin ózǵertedi, sonıń ushın bólshektiń belgilerin 27-súwrettegidey etip qoyıwǵa boladı.  $x = -3$  hám  $x = 1$  mánisleri (3) teńsizlikti qanaatlandıradı,  $x = -1$  hám  $x = 4$  bolǵanda bolsa, bólshek mániske iye emes. Solay etip, berilgen teńsizlik tómendegi sheshimlerge iye.

$$x \leq -3, \quad -1 < x \leq 1, \quad x > 4. \quad \blacktriangle$$

### Shınıǵıwlar

**70.** (Awızeki.)  $x = 5$  mánisi teńsizliktiń sheshimi bolatuǵının kórsetiń:

- 1)  $(x - 1)(x - 3) > 0$ ;      2)  $(x + 2)(x + 5) > 0$ ;
- 3)  $(x - 7)(x - 10) > 0$ ;      4)  $(x + 1)(x - 4) > 0$ .

Teńsizliklerdi intervallar usılı menen sheshiń (**71–77**):

- 71.** 1)  $(x + 2)(x - 7) > 0$ ;                      2)  $(x + 5)(x - 8) < 0$ ;  
 3)  $(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$ ;                      4)  $(x + 5)\left(x - 3\frac{1}{2}\right) > 0$ .
- 72.** 1)  $x^2 + 5x > 0$ ;                      2)  $x^2 - 9x > 0$ ;                      3)  $2x^2 - x < 0$ ;  
 4)  $x^2 + 3x < 0$ ;                      5)  $x^2 + x - 12 < 0$ ;                      6)  $x^2 - 2x - 3 > 0$ .
- 73.** 1)  $x^3 - 16x < 0$ ;                      2)  $4x^3 - x > 0$ ;  
 3)  $(x^2 - 1)(x + 3) < 0$ ;                      4)  $(x^2 - 4)(x - 5) > 0$ .
- 74.** 1)  $(x - 5)^2(x^2 - 25) > 0$ ;                      2)  $(x + 7)^2(x^2 - 49) < 0$ ;  
 3)  $(x - 3)(x^2 - 9) < 0$ ;                      4)  $(x - 4)(x^2 - 16) > 0$ .
- 75.** 1)  $\frac{x-2}{x+5} > 0$ ;                      2)  $\frac{x-4}{x+3} < 0$ ;                      3)  $\frac{1,5-x}{3+x} \geq 0$ ;  
 4)  $\frac{3,5+x}{x-7} \leq 0$ ;                      5)  $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3} < 0$ ;                      6)  $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1} \geq 0$ .
- 76.** 1)  $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2} \leq 0$ ;                      2)  $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1} \geq 0$ ;                      3)  $\frac{x^2-x}{x^2-4} > 0$ ;                      4)  $\frac{9x^2-4}{x-2x^2} < 0$ .
- 
- 77.** 1)  $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 1) > 0$ ;                      2)  $(x + 2)(x^2 + x - 12) > 0$ ;  
 3)  $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - x + 2) \leq 0$ ;                      4)  $(x^2 - 3x - 4)(x^2 - 2x - 15) \leq 0$ .

Teńsizlikti sheshiń (**78–80**):

- 78.** 1)  $\frac{x^2-x-12}{x-1} > 0$ ;                      2)  $\frac{x^2-4x-12}{x-2} < 0$ ;                      3)  $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2} \leq 0$ ;  
 4)  $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6} \geq 0$ ;                      5)  $\frac{x^2+5x+6}{x+3} \geq 0$ ;                      6)  $\frac{x^2-8x+7}{x-1} \leq 0$ .
- 79.** 1)  $\frac{x}{x-2} + \frac{3}{x} > \frac{3}{x-2}$ ;                      2)  $\frac{x^2}{x^2+3x} + \frac{2-x}{x+3} < \frac{5-x}{x}$ .
- 80.** 1)  $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64} < 0$ ;                      2)  $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4} > 0$ ;                      3)  $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2} \geq 0$ ;

## 9- §. FUNKCIYANÍŇ ANÍQLANÍW OBLASTÍ

Siz 7-klasta funkciya túsini menen tanısqansız. Usı túsini esletip ótemiz.



**Eger sanlardıń bazı bir kópliginen alınğan  $x$  tiń hárbir mánisine  $y$  sanı sáykes keltirilgen bolsa, usı kóplikte  $y(x)$  funkciyası berilgen dep ayıladı. Bunda  $x$  erkli ózgeriwshi yaki argument, al  $y$  erksiz ózgeriwshi yaki funkciya dep ataladı.**

Siz  $y=kx+b$  sıızıqlı funkciyası hám  $y=ax^2+bx+c$  kvadrat funkciyası menen tanıssız.

Bul funkciyalar ushın argumenttiń mánisi qálegen haqıyqıy san bolıwı múmkin.

Endi hárbir teris emes  $x$  sanına  $\sqrt{x}$  sanı sáykes qoyılatuǵın funkciyanı, yaǵnıy  $y=\sqrt{x}$  funkciyasın qaraymız. Bul funkciya ushın argument tek teris emes mánislerdi qabıl etiwı múmkin:  $x \geq 0$ . Bul jaǵdayda funkciya barlıq teris emes sanlar kópliginde anıqlanğan delinedi hám bul kóplik  $y=\sqrt{x}$  funkciyasınıń *anıqlanıw oblasti* dep ataladı.

Ulıwma funkciyanıń *anıqlanıw oblasti* dep onıń argumenti qabıl etiwı múmkin bolğan barlıq mánisleriniń kópligine ayıladı.

Máselen,  $y=\frac{1}{x}$  formula menen berilgen funkciya  $x \neq 0$  de anıqlanğan, yaǵnıy bul funkciyanıń anıqlanıw oblasti – nolden basqa barlıq haqıyqıy sanlar kópligi boladı.

Eger funkciya formula menen berilgen bolsa, onda funkciya argumentiniń berilgen formula maǵanaǵa iye bolatuǵın (yaǵnıy, formulanıń oń bóleginde turǵan ańlatpada kórsetilgen barlıq ámeller ornınlatuǵın) barlıq mánislerinde anıqlanğan, dep esaplaw qabıl etilgen.

Formula menen berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıw – argumenttiń maǵanaǵa iye bolatuǵın barlıq mánislerin tabıw degendi bildiredi.

# 1- másele. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1)  $y(x) = 2x^2 + 3x + 5$ ;

2)  $y(x) = \sqrt{x-1}$ ;

3)  $y(x) = \frac{1}{x+2}$ ;

4)  $y(x) = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$ .

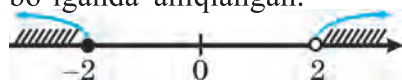
△ 1)  $2x^2 + 3x + 5$  ańlatpası  $x$  tiń qálegen mánisinde maǵanaǵa iye bolıwı ushın funksiya barlıq  $x$  larda anıqlanǵan.

**Juwabı:**  $x$  – qálegen san.

2)  $\sqrt{x-1}$  ańlatpası  $x-1 \geq 0$  bolǵanda maǵanaǵa iye, yaǵnıy funksiya  $x \geq 1$  bolǵanda anıqlanǵan.

**Juwabı:**  $x \geq 1$ .

3)  $\frac{1}{x+2}$  ańlatpası  $x+2 \neq 0$  bolǵanda maǵanaǵa iye, yaǵnıy funksiya  $x \neq -2$  boǵanda anıqlanǵan.



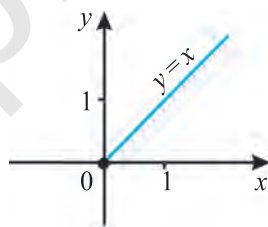
28-súwret.

**Juwabı:**  $x \neq -2$ .

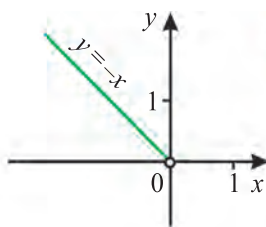
4)  $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-2}}$  ańlatpası  $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$  bolǵanda maǵanaǵa iye. Bul teńsizlikti sheship, mınaǵan iye bolamız (28-súwret):  $x \leq -2$  hám  $x > 2$ , yaǵnıy funksiya  $x \leq -2$  hám  $x > 2$  bolǵanda anıqlanǵan.

**Juwabı:**  $x \leq -2$ ,  $x > 2$ . ▲

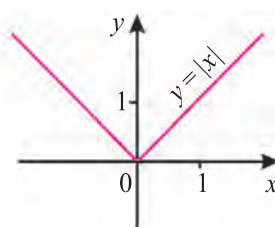
**Funkciyanıń grafigi** dep, koordinatar tegisliginiń abscissaları, usı funksiyanıń anıqlanıw oblastınan alınǵan erkli ózgeriwshiniń mánislerine, al ordinatarları funksiyanıń sáykes mánislerine teń bolǵan noqatlar kópligine ayılatuǵımnıń esletip ótemiz.



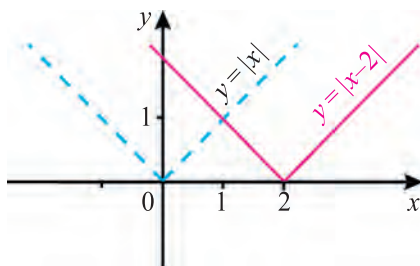
29-súwret.



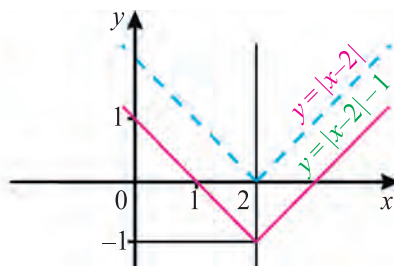
30-súwret.



31-súwret.



32-súwret.



33-súwret.

**2- másele.**  $y = |x|$  funkciyasınıń anıqlanıw oblastın tabıń hám onıń grafigin jasań.

△ Esletip ótemiz:

$x$ , eger  $x^3 \geq 0$  bolsa,  
 $-x$ , eger  $x < 0$  bolsa.

Solay etip,  $|x|$  ańlatpa qálegen haqıyqıy  $x$  ta maǵanaǵa iye, yaǵnıy  $y = |x|$  funkciyasınıń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópiginen ibarat.

Eger  $x \geq 0$  bolsa, onda  $|x| = x$  boladı hám sonlıqtan da  $x \geq 0$  bolǵanda  $y = |x|$  funkciyasınıń grafigi birinshi koordinata múyeshiniń bissektrisası boladı (29-súwret).

Eger  $x < 0$  bolsa, onda  $|x| = -x$  boladı. Demek, teris  $x$  ler ushın  $y = |x|$  funkciyasınıń grafigi ekinshi koordinata múyeshiniń bissektrisası boladı (30-súwret).

$y = |x|$  funkciyasınıń grafigi 31-súwrette kórsetilgen. ▲

Qálegen  $x$  ushın  $|-x| = -x$ . Sonlıqtan da  $y = |x|$  funkciyasınıń grafigi ordinatorlar kósherine qarata simmetriyalı jaylasqan.

**3- másele.**  $y = |x-2| - 1$  funkciyasınıń grafigin jasań.

△  $y = |x-2|$  funkciyasınıń grafigi  $y = |x|$  funkciyası grafiginen onı  $Ox$  kósheri boyınsha 2 birlik ońǵa kóshiriw menen payda etiledi (32-súwret).

$y = |x-2| - 1$  funkciyasınıń grafigin payda etiw ushın  $y = |x-2|$  funkciyasınıń grafigin bir birlik tómengge qaray kóshiriw jetkilikli (33-súwret). ▲

## *Shinigiwlar*

**81.** Funkciya  $y(x) = x^2 - 4x + 5$  formula menen berilgen:

- 1)  $y(-3)$ ,  $y(-1)$ ,  $y(0)$ ,  $y(2)$  ni tabiń;
- 2) eger  $y(x) = 1$ ,  $y(x) = 5$ ,  $y(x) = 10$ ,  $y(x) = 17$  bolsa,  $x$  tiń mánisin tabiń;

**82.** Funkciya  $y(x) = \frac{x+5}{x-1}$  formula menen berilgen:

- 1)  $y(-2)$ ,  $y(0)$ ,  $y(\frac{1}{2})$ ,  $y(3)$  ti tabiń;
- 2) eger  $y(x) = -3$ ,  $y(x) = -2$ ,  $y(x) = 13$ ,  $y(x) = 19$  bolsa,  $x$  tiń mánisin tabiń;

Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabiń **(83–84)**:

**83.** (Awızeki).

- 1)  $y = 4x^2 - 5x + 1$ ;
- 2)  $y = 2 - x - 3x^2$ ;
- 3)  $y = \frac{2x-3}{x-3}$ ;
- 4)  $y = \frac{3}{5-x^2}$ ;
- 5)  $y = \sqrt[4]{6-x}$ ;
- 6)  $y = \sqrt{\frac{1}{x+7}}$ .

**84.** 1)  $y = \frac{2x}{x^2 - 2x - 3}$ ;

2)  $y = \sqrt[6]{x^2 - 7x + 10}$ ;

- 3)  $y = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 5}$ ;
- 4)  $y = \sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$ ;
- 5)  $y = \sqrt{\frac{3x-2}{4-x}}$ .

**85.** Funkciya  $y(x) = |2-x| - 2$  formula menen berilgen:

- 1)  $y(-3)$ ,  $y(-1)$ ,  $y(1)$ ,  $y(3)$  ti tabiń;
- 2) eger  $y(x) = -2$ ,  $y(x) = 0$ ,  $y(x) = 2$ ,  $y(x) = 4$  bolsa,  $x$  tiń mánisin tabiń.

**86.** Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabiń:

- 1)  $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$ ;
- 2)  $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ ;
- 3)  $y = \sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$ ;
- 4)  $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}$ .
- 5)  $y = \sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$ ;
- 6)  $y = \sqrt[8]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$ ;

87.  $(-2; 1)$  nuqati funkciya grafigine tiyisli bola ma:

1)  $y = 3x^2 + 2x + 29$ ;

2)  $y = |4 - 3x| - 9$ ;

3)  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ ;

4)  $y = |\sqrt{2 - x} - 5| - 2$ ?

88. Funkciya grafigin jasañ:

1)  $y = |x + 3| + 2$ ;

2)  $y = -|x|$ ;

3)  $y = 2|x| + 1$ ;

4)  $y = 1 - |1 - x|$ ;

5)  $y = |x| + |x - 2|$ ;

6)  $y = |x + 1| - |x|$ .

89.  $y = ax^2 + bx + c$  funkciyası  $A(0; 1)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(\frac{5}{6}; 1)$  nuqatlaridan ótedi. 1)  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ti tabıñ; 2)  $x$  tiñ qanday mánislerinde  $y = 0$  boladi? 3) funksiya grafigin sıızıñ.

## 10- §. FUNKSIYANÍŇ ÓSIW HÁM KEMEYIWI

Siz  $y = x$  hám  $y = x^2$  funkciyalar menen tanıssız. Bul funkciyalar *dárejeli funksiyanıñ*, yaǵnıy

$$y = x^r \quad (1)$$

(bunda  $r$  – berilgen san) funkciyasınıñ jeke hallarınan ibarat.

$r$  – natural san bolsın,  $r = n = 1, 2, 3, \dots$  deyik. Bul jaǵdayda natural kórsetkishli dárejeli funksiya  $y = x^n$  di payda etemiz.

Bul funksiya barlıq haqıyqıy sanlar kópliginde, yaǵnıy san kósheriniñ barlıq jerinde anıqlanǵan. Adette, barlıq haqıyqıy sanlar kópligi  $\mathbf{R}$  háribi menen belgilenedi. Solay etip, natural kórsetkishli dárejeli funksiya  $y = x^n$ ,

$x \in \mathbf{R}$  ushın anıqlanǵan. Eger (1) de  $r = -2k$ ,  $k \in \mathbf{N}$  bolsa, onda  $y = x^{-2k} = \frac{1}{x^{2k}}$

funkciyası payda boladı. Bul funksiya  $x$  tiñ nolden basqa barlıq mánislerinde anıqlanǵan. Onıñ grafigi  $Oy$  kóshetine salıstırǵanda simmetriyalı boladı.  $r = -(2k - 1)$ ,  $k \in \mathbf{N}$  bolsa, onda  $y = x^{-(2k-1)} = \frac{1}{x^{2k-1}}$  funksiya kelip shıǵadı.

Onıñ qásiyetleri sizge tanı  $y = \frac{1}{x}$  funksiya qásiyetleri sıyaqlı boladı.  $p$

hám  $q$  – natural sanlar hám  $r = \frac{p}{q}$  – qısqarmaytuǵın bólshek bolsın.  $y = \sqrt[q]{x^p}$

funksiyasının anıqlanıw oblastı  $p$  hám  $q$  nıń jup – taqlıǵına qaray hár qıylı boladı. Máselen,,  $y = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$  funkciyaları erkli  $x \in \mathbf{R}$  de anıqlanǵan.  $y = \sqrt[4]{x^3}$  bolsa,  $x$  tiń teris emes, yaǵnıy  $x \geq 0$  mánislerinde anıqlanǵan.

8-klass “Algebra” kursınan málim bolǵanıday, hárbir irracional sandı shekli onlıq bólshek penen, yaǵnıy racional san menen almasırwǵa boladı. Ámeliy islerde irracional sanlar tásirinde ámeller, olardıń racional juwıqlasıwları járdeminde orınlanadı. Bul ámeller, teńlik hám teńsizliklerdiń racional sanlar ushın qásiyetleri irracional sanlar ushın da tolıq saqlanıwı menen kiritiledi.

$r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$  racional sanlar  $r$  irracional sannıń racional juwıqlasıwı bolsın. Bul jaǵdayda  $x$  oń san bolǵanda  $x$  tiń racional dárejeleri, yaǵnıy  $x^{r_1}, x^{r_2}, \dots, x^{r_k}, \dots$  sanları  $x^r$  dárejenıń (dárejeli sannıń) juwıqlasıwları boladı. Bunday anıqlanǵan dáreje *irracional kórsetkishli dáreje* dep ataladı. Demek,  $x > 0$  ushın dáreje kórsetkishi qálegen  $r$  bolǵan  $y = x^r$  funkciyasın anıqlawǵa boladı.

Dárejeli funkciya  $x$  tiń (1) formula maǵanaǵa iye bolatuǵın mánisleri ushın anıqlanǵan. Máselen,  $y = x$  hám  $y = x^2$  ( $r = 1$  hám  $r = 2$ ) funkciyalarınıń anıqlanıw oblastı barlıq haqıyqıy sanlar kópligi boladı;  $y = \frac{1}{x}$  ( $r = 1$ ) funkciyalarınıń anıqlanıw oblastı nolge teń bolmaǵan haqıyqıy sanlar kópligi boladı;  $y = \sqrt{x}$  ( $r = \frac{1}{2}$ ) funkciyasınıń anıqlanıw oblastı barlıq teris emes sanlar kópliginen ibarat.



**Eger argumenttiń bazı bir aralıqtan alınǵan úlken mánisine funkciyanıń úlken mánisi sáykes kelse, yaǵnıy usı aralıqqa tiyisli qálegen  $x_1, x_2$  ushın  $x_2 > x_1$  teńsizliginen  $y(x_2) > y(x_1)$  teńsizligi kelip shıqsa,  $y(x)$  funkciyası usı aralıqta *ósiwshi* funkciya delinedi.**



**Eger bazı bir aralıqqa tiyisli qálegen  $x_1, x_2$  ushın  $x_2 > x_1$  teńsizliginen  $y(x_2) < y(x_1)$  kelip shıqsa,  $y(x)$  funkciya usı aralıqta *kemeyiwshi* funkciya delinedi.**

Mısalı,  $y = x$  funkciyası sanlar kósherinde ósedı.  $y = x^2$  funkciyası  $x \geq 0$  aralıqta ósedı,  $x \leq 0$  aralıqta kemeyedi.



$y = x^r$  därejeli funkciyanın ósiwi yaki kemeyiwi däreje kórsetkishiniñ belgisine baylanışlı.



**Eger  $r > 0$  bolsa, onda  $y = x^r$  därejeli funkciya  $x \geq 0$  aralıǵında ósedi.**

○  $x_2 > x_1 \geq 0$  bolsın.  $x_2 > x_1$  teńsizlikti oń  $r$  därejege kóterip,  $x_2^r > x_1^r$  di, yaǵnıy  $y(x_2) > y(x_1)$  di payda etemiz. ●

Máselen,  $y = \sqrt{x}$  hám  $y = x^{\frac{3}{2}}$  funkciyalar  $x \geq 0$  aralıǵında ósedi. Bul funkciyalardıń grafikleri 34-súwrette kórsetilgen. Bul súwrette  $y = \sqrt{x}$  funkciyasınıń grafigi  $0 < x < 1$  aralıqta  $y = x$  funkciyasınıń grafiginen joqarıda,  $x > 1$  aralıqta bolsa  $y = x$  funkciyasınıń grafiginen tómende jatatuǵınlıǵı kórinip tur.

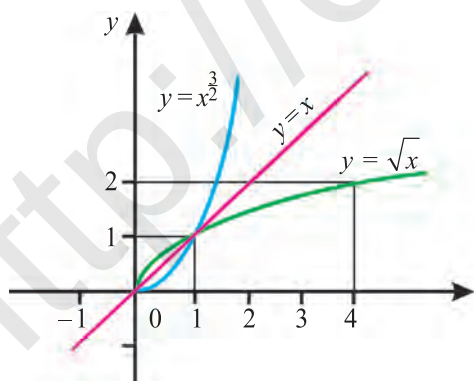
Eger  $0 < r < 1$  bolsa,  $y = x^r$  funkciyasınıń grafigi tap usınday qásiyetke iye boladı.

$y = x^{\frac{3}{2}}$  funkciyasınıń grafigi  $0 < x < 1$  aralıqta  $y = x$  funkciya grafiginen tómende,  $x > 1$  aralıqta bolsa  $y = x$  funkciyasınıń grafiginen joqarıda jatadı.

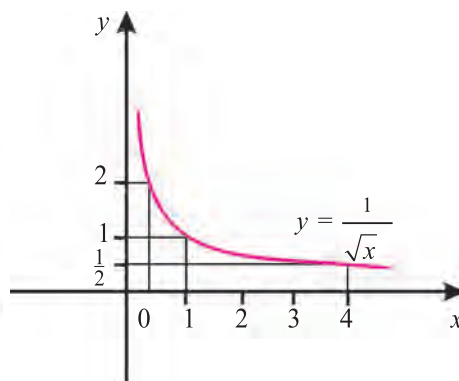
$r > 1$  bolsa,  $y = x^r$  funkciyasınıń grafigi de tap usınday qásiyetke iye boladı. Endi  $r > 1$  bolǵan jaǵdaydı qarap shıǵamız.



**Eger  $r < 0$  bolsa, onda  $y = x^r$  därejeli funkciya  $x > 0$  aralıqta kemeyedi.**



34-súwret.



35-súwret.

○  $x_2 > x_1 > 0$  bolsin.  $x_2 > x_1$  teńsizlikti oń  $r$  dárejege kóterip, shep hám oń tárepleri oń bolǵan teńsizliklerdiń qásiyetine muwapıq  $x_2^r > x_1^r$  di, yaǵnıy  $y(x_2) < y(x_1)$  payda etemiz. ●

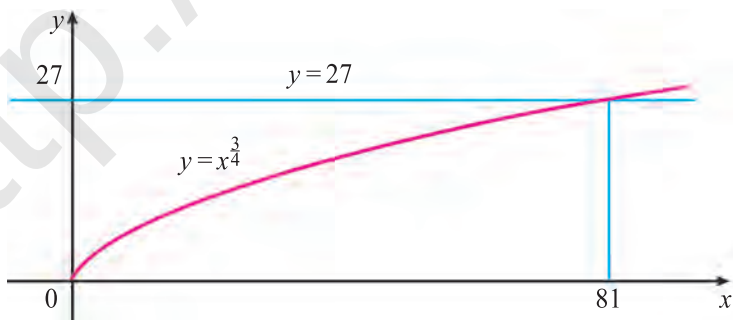
Máselen,  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , yaǵnıy  $y = x^{-\frac{1}{2}}$  funkciya  $x > 0$  aralıǵında kemeyedi. Bul funkciyanıń grafigi 35-súwrette kórsetilgen.

**1- másele.**  $x^{\frac{3}{4}} = 27$  teńlemeıni sheshiń.

△  $y = x^{\frac{3}{4}}$  funkciya  $x \geq 0$  e anıqlanǵan. Sonıń ushın berilgen teńleme tek teris emes korenlerge ǵana iye bolıwı múmkin. Bunday kórenlerden biri:  $x = 27^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{27})^4 = 3^4 = 81$ . Teńlemenıń basqa korenleri joq, sebebi  $y = x^{\frac{3}{4}}$  funkciya  $x \geq 0$  bolǵanda ósedi hám sonlıqtan da, eger  $x > 81$  bolsa, onda  $x^{\frac{3}{4}} > 27$ , eger  $x < 81$  bolsa, onda  $x^{\frac{3}{4}} < 27$  boladı (36-súwret). ▲

$x^r = b$  (bunda  $r \neq 0$ ,  $b > 0$ ) teńlemesiniń báhulla oń  $x = b^{\frac{1}{r}}$  korenge iye ekenligi, sonıń menen birge bul korenniń jalǵız birew ǵana ekenligi usıǵan uqsas dálillenedi. Demek,  $y = x^r$  (bunda  $r > 0$ ) funkciya  $x > 0$  bolǵanda *barlıq oń mánislerdi qabıl etedi*.

Bul bolsa, máselen,  $y = x^{\frac{3}{4}}$  (36-súwret) funkciyanıń ástelik penen ósiwine qaramastan, onıń grafigi  $Ox$  kósherinen kem-kem uzaqlasıwı hám  $y = b$



36-súwret.

tuwrı sızıǵın,  $b$  nıń qanday oń san bolıwına qaramastan kesip ótetuǵınlıǵın bildiredi.

**2- másele.**  $y = x + \frac{1}{x}$  funkciyasınıń  $x > 1$  aralıqta ósetuǵının dálilleń.

△  $x_2 > x_1 > 1$  bolsın.  $y(x_2) > y(x_1)$  ekenligin kórsetemiz.

$y(x_2) - y(x_1)$  ayırmasın qaraymız:

$$y(x_2) - y(x_1) = x_2 + \frac{1}{x_2} - (x_1 + \frac{1}{x_1}) = (x_2 - x_1) \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2}.$$

$x_2 > x_1$ ,  $x_1 > 1$ ,  $x_2 > 1$  bolǵanı ushın  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $x_1 x_2 > 1$ ,  $x_1 x_2 > 0$ .

Sonıń ushın  $y(x_2) - y(x_1) > 0$ , yaǵnıy  $y(x_2) > y(x_1)$ . ▲

### Shınıǵıwlar

**90.** Funkciyanıń grafigin jasań hám onıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:

1)  $y = 2x + 3$ ;

2)  $y = 1 - 3x$ ;

3)  $y = x^2 + 2$ ;

4)  $y = 3 - x^2$ ;

5)  $y = (1 - x)^2$ ;

6)  $y = (2 + x)^2$ .

**91.** (Awızeki). Funkciya  $x > 0$  aralıqta óse me yaki kemeye me:

1)  $y = x^{\frac{3}{7}}$ ;

2)  $y = x^{-\frac{3}{4}}$ ;

3)  $y = x^{-\sqrt{2}}$ ;

4)  $y = x^{\sqrt{3}}$  ?

**92.**  $x > 0$  bolǵanda funkciya grafigi eskizin sızıń:

1)  $y = x^{\frac{3}{2}}$ ;

2)  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ;

3)  $y = x^{-\frac{3}{2}}$ ;

4)  $y = x^{-\frac{2}{3}}$ .

**93.** Teńlemenıń oń korenin tabıń:

1)  $x^{\frac{1}{2}} = 3$ ;

2)  $x^{\frac{1}{4}} = 2$ ;

3)  $x^{-\frac{1}{2}} = 3$ ;

4)  $x^{\frac{1}{4}} = 2$ ;

5)  $x^{\frac{5}{6}} = 32$ ;

6)  $x^{-\frac{4}{5}} = 81$ ;

7)  $x^{-\frac{1}{3}} = 8$ ;

8)  $x^{\frac{4}{5}} = 16$ .

**94.** Millimetrli qaǵazda  $y = \sqrt[4]{x}$  funkciyasınıń grafigin sızıń. Grafik boyınsha:

1)  $y = 0,5$ ; 1; 4; 2,5 bolǵanda  $x$  tiń mánislerin tabıń;

2)  $\sqrt[4]{1,5}$ ;  $\sqrt[4]{2}$ ;  $\sqrt[4]{2,5}$ ;  $\sqrt[4]{3}$  mánislerin juwıq túrde tabıń.

**95.** Funkciyalar grafiklari kesilisiw noqatlarini koordinatalarini tabii:

- 1)  $y = x^{\frac{4}{3}}$  hám  $y=625$ ;                      2)  $y = x^{\frac{6}{5}}$  hám  $y=64$ ;  
 3)  $y = x^{\frac{3}{2}}$  hám  $y=216$ ;                      4)  $y = x^{\frac{7}{3}}$  hám  $y=128$ .

**96.** 1)  $y = x + \frac{1}{x}$  funksiyasini  $0 < x < 1$  aralıqta kemeyiwini dälilleñ;

2)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  funksiyasini  $x \geq 0$  aralıqta kemeyiwini hám  $x \leq 0$  aralıqta ósetuğini dälilleñ;

3)  $y = x^3 - 3x$  funksiyasini  $x \geq -1$  hám  $x \geq 1$  aralıqlarda ósetuğini  $-1 \leq x \leq 1$  kesindisinde kemetuğini dälilleñ;

4)  $y = x - 2\sqrt{x}$  funksiyasini  $x \geq 1$  aralıqta ósetuğini hám va  $0 \leq x \leq 1$  kesindisinde kemetuğini dälilleñ.

**97.** Funksiya grafigin jasan hám ósiw hám kemeyiw aralıqlarini tabii:

1)  $y = \begin{cases} x + 2, & \text{eger } x \leq -1 \text{ bolsa,} \\ x^2, & \text{eger } x > -1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

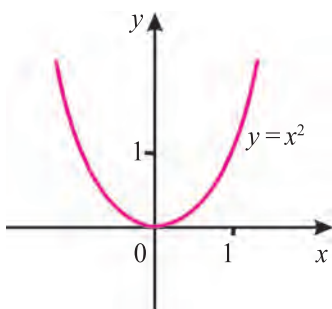
2)  $y = \begin{cases} x^2, & \text{eger } x \leq 1 \text{ bolsa,} \\ 2 - x^2, & \text{eger } x > 1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

3)  $y = \begin{cases} -x - 1, & \text{eger } x < -1 \text{ bolsa,} \\ -x^2 + 1, & \text{eger } x \geq -1 \text{ bolsa,} \end{cases}$

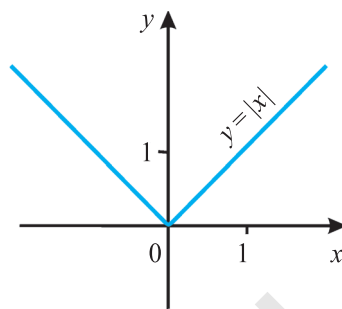
4)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{eger } x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ -x^2 + 2x, & \text{eger } x \geq 1 \text{ bolsa.} \end{cases}$

## 11-§. FUNKCIYANIN JUPLILIGI HAM TAQLIGI

Siz  $y = x^2$  hám  $y = |x|$  funksiyasini grafiklari ordinatalar kósherine qarata simmetriyalı (37 hám 38-súwretler) ekenligini bilersiz. Bunday funksiyalar *jup funksiyalar* dep ataladı.



37-súwret.



38-súwret.



**Eger  $y(x)$  funkciyasınıń anıqlanıw oblastınan alınğan qálegen  $x$  ushın  $y(-x)=y(x)$  bolsa, bul funkciya jup funkciya delinedi.**

Máselen,  $y=x^4$  hám  $y=\frac{1}{x^2}$  funkciyaları jup funkciyalar, sebebi qálegen  $x$  ushın  $(-x)^4=x^4$  hám qálegen  $x \neq 0$  ushın  $\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}$ .

**1 - másele.**  $y=x^3$  funkciyasınıń grafigi koordinatar basına salıstırǵanda simmetriyalı ekenligin dálilleń hám grafigin jasań.

△ 1)  $y=x^3$  funkciyasınıń anıqlanıw oblastı – barlıq haqıyqıy sanlar kópligi.

2)  $y=x^3$  funkciyasınıń mánisleri  $x>0$  bolǵanda óń,  $x<0$  bolǵanda teris,  $x=0$  bolǵanda nolge teń.

○ Meyli,  $(x_0; y_0)$  noqatı  $y=x^3$  funkciyasınıń grafigine tiyisli, yaǵnıy  $y_0=x_0^3$  bolsın.  $(x_0; y_0)$  noqatına koordinatar basına salıstırǵanda simmetriyalı bolǵan noqat  $(-x_0; -y_0)$  koordinatarına iye boladı. Bul noqat ta  $y=x^3$  funkciyanıń grafigine tiyisli boladı, sebebi,  $y_0=x_0^3$  tuwrı teńliktiń eki jasawǵa imkaniyat beredi: dáslep grafik  $y_0=x_0^3$  tuwrı teńliktiń eki jaǵın da -1 ge kóbeytip,  $-y_0=-x_0^3$  eki  $-y_0=(-x_0)^3$  payda etemiz. ●

Bul qásiyet  $y=x^3$  funkciyasınıń grafigin jasawǵa imkan beredi; dáslep grafik  $x \geq 0$  ushın jasaladı, al sońınan onı koordinatar basına qarata simmetriyalı sáwlelentiriledi.

3)  $y=x^3$  funkciyası pútkil anıqlanıw oblastı boyınsha ósedi. Bul óń kórsetkishli dárejeli funkciyanıń  $x \geq 0$  bolǵanda ósiw qásiyetinen

hám grafiktiń koordinatalar basına qarata simmetriyalılıǵınan kelip shıǵadı.

4)  $x \geq 0$  bazı bir mánisleri (máselen,  $x=0, 1, 2, 3$ ) ushın  $y=x^3$  funkciyasınıń mánisleri kestegin dúzemiz,  $x \geq 0$  bolǵanda grafiktiń bir bólegin jasaymız hám sońınan simmetriya járdeminde grafiktiń  $x$  tiń teris mánislerine sáykes keliwshi bólegin jasaymız (39-súwret).

Grafikleri koordinatalar basına qarata simmetriyalı bolǵan funkciyalar taq funkciyalar dep ataladı. Solay etip,  $y=x^3$  – bul taq funkciya.



**Eger  $y(x)$  funkciyasınıń anıqlaw oblastınan alınǵan qálegen  $x$  ushın**

$$y(-x) = -y(x)$$

**bolsa, bul funkciya taq funkciya delinedi.**

Máselen,  $y=x^5$ ,  $y=\frac{1}{x^3}$  funkciyaları taq funkciyalar, sebebi qálegen  $x$  ushın  $(-x)^5 = -x^5$  hám qálegen  $x \neq 0$  ushın  $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$ .

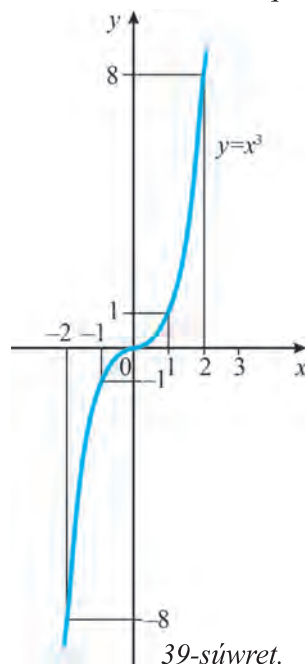
Jup hám taq funkciyalardıń anıqlanıw oblastı koordinatalar basına qarata simmetriyalı ekenligin eskertip ótemiz.

Juplıq yaki taqlıq qásiyetlerine iye bolmaǵan funkciyalar da bar. Máselen,  $y=2x+1$  funkciyasınıń jup ta, taq ta funkciya emesligin kórsetemiz. Eger bul funkciya jup bolǵanında, onda barlıq  $x$  ushın  $2(-x)+1 = 2x+1$  teńlik orınlangan bolar edi; biraq, máselen,  $x=1$  bolǵanda bul teńlik nadurıs:  $-1 \neq 3$ . Eger bul funkciya taq bolǵanında, onda barlıq  $x$  ushın  $2(-x)+1 = -(2x-1)$  teńlik orınlangan bolar edi; biraq, máselen,  $x=2$  bolǵanda bul teńlik nadurıs:  $-3 \neq -5$ .

**2- másele.**  $y=\sqrt[3]{x}$  funkciyasınıń grafigin jasań.

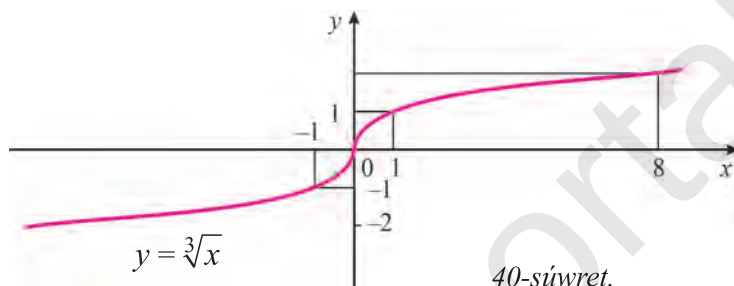
△ 1) Anıqlanıw oblastı – barlıq haqıyqıy sanlar kóp-ligi;

2) funkciya – taq, sebebi, qálegen  $x$  ushın  $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$ ;



39-súwret.

- 3)  $x \geq 0$  boʻlganda, funkciya oʻn kʻorsetkishli dʻarejeli funkciyaning qasi-yetine muvapiq ʻosedi, sebebi  $x \geq 0$  boʻlganda  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ;
- 4)  $x > 0$  boʻlganda funkciyaning manisi oʻn;  $y(0) = 0$ ;
- 5) grafikke tiyisli bir neshe, maselen,  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(8; 2)$  noqatlarin tawip,  $x \geq 0$  din manisleri ushyn grafikning bir boʻlegin jasaymiz ham soʻninan simmetriya jʻardeminde  $x < 0$  ushyn grafikning ekinshi boʻlegin jasaymiz (40-sʻuwret). ▲



$y = \sqrt[3]{x}$  funkciyasi barliq  $x$  lar ushyn,  $y = x^{\frac{1}{3}}$  funkciyasi bolsa tek  $x \geq 0$  ushyn aniqlanganin eskertip ʻotemiz.

### Shuniʻigʻiqlar

Funkciyaning taq yoki jup bolivini aniqlan (98–99):

**98.** 1)  $y = 2x^4$ ; 2)  $y = 3x^5$ ; 3)  $y = x^2 + 3$ ; 4)  $y = x^3 - 2$ .

**99.** 1)  $y = x^{-4}$ ; 2)  $y = x^{-3}$ ; 3)  $y = x^4 + x^2$ ; 4)  $y = x^3 + x^5$ .

**100.** Funkciya grafigining eskizin sizin:

1)  $y = x^4$ ; 2)  $y = x^5$ ; 3)  $y = -x^2 + 3$ ; 4)  $y = \sqrt[5]{x}$ .

**101.** Funkciya jup ta, taq ta emesligin kʻorsetin:

1)  $y = \frac{x+2}{x-3}$ ; 2)  $y = \frac{x^2+x-1}{x+4}$ ; 3)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

**102.** Funkciyaning taq yoki jup bolivini aniqlan:

1)  $y = x^4 + 2x^2 + 3$ ; 2)  $y = x^3 - 2x + 1$ ; 3)  $y = \frac{3}{x^3} + \sqrt[3]{x}$ ;

4)  $y = x^4 + |x|$ ; 5)  $y = |x| + x^3$ ; 6)  $y = \sqrt[3]{x-1}$ .

**103.** Simmetriyadan paydalanıp, jup funkciyanıń grafigin jasań:

1)  $y = x^2 - 2|x| + 1$ ;                      2)  $y = x^2 - 2x$ .

**104.** Simmetriyadan paydalanıp, taq funkciyanıń grafigin jasań:

1)  $y = x|x| - 2x$ ;                      2)  $y = x|x| + 2x$ .

**105.** Funkciyanıń qásiyetlerin anılqań, onıń grafigin jasań:

1)  $y = \sqrt{x-5}$ ;      2)  $y = \sqrt{x} + 3$ ;      3)  $y = x^4 + 2$ ;      4)  $y = 1 - x^4$ ;

**106.** Funkciyanıń grafigin jasań:

$$\begin{array}{l|l} 1) \ y = \begin{cases} x^2, & \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa,} \\ x^3, & \text{eger } x < 0 \text{ bolsa;} \end{cases} & 2) \ y = \begin{cases} x^3, & \text{eger } x > 0 \text{ bolsa,} \\ x^2, & \text{eger } x \leq 0 \text{ bolsa;} \end{cases} \\ 3) \ y = \begin{cases} -x^3, & \text{eger } x \leq 0 \text{ bolsa,} \\ -x^2, & \text{eger } x \geq 0 \text{ bolsa;} \end{cases} & 4) \ y = \begin{cases} x^4, & \text{eger } x \leq 1 \text{ bolsa,} \\ -x^2 + 2x, & \text{eger } x \geq 1 \text{ bolsa.} \end{cases} \end{array}$$

Argumenttiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisleri oń bolatuǵının anıqlań. Ósiw hám kemeyiw aralıqların kórsetiń.

**107.**  $y$  funkciyası berilgen:

1)  $y = x$ ;      2)  $y = x^2$ ;      3)  $y = x^2 + x$ ;      4)  $y = x^2 - x$ .

$x > 0$  bolǵanda  $y$  funkciyasınıń grafigin jasań.  $x < 0$  ushın usı funkciyalardıń hárbiriniń grafigin jasań, jasalǵan grafik: a) jup funkciyanıń; b) taq funkciyanıń grafigi bolsın. Payda etilgen hárbir funkciyanı bir formula menen beriń.

**108.** Funkciya grafiginiń simmetriya kósheriniń teńlemesin jazıń:

1)  $y = (x+1)^6$ ;      2)  $y = x^6 + 1$ ;      3)  $y = (x-1)^4$ .

**109.** Funkciya grafiginiń simmetriya orayınıń koordinataların kórsetiń:

1)  $y = x^3 + 1$ ;      2)  $y = (x+1)^3$ ;      3)  $y = x^5 - 1$ .



## 12-§. DÁREJE QATNASQAN TEŇSIZLIK HÁM TEŇLEMELER

Dárejeli funkciyanıń qásiyetlerinen hár qıylı teńleme hám teńsizliklerdi sheshiwde paydalanıladı.

**1 - másele.**  $x^5 > 32$  teńsizlikti sheshiń.

△  $y = x^5$  funkciyası  $x$  tiń barlıq haqıyqıy mánislerinde anıqlanğan hám anıqlanıw oblastında ósiwshi funkciya.  $y(2)=32$  bolğanlıqtan  $x > 2$  bolğanda  $y(x) > 32$  hám  $x < 2$  bolğanda  $y(x) < 32$ .

**Juwabı:**  $x > 2$ . ▲

**2 - másele.**  $x^4 \leq 81$  teńsizligin sheshiń.

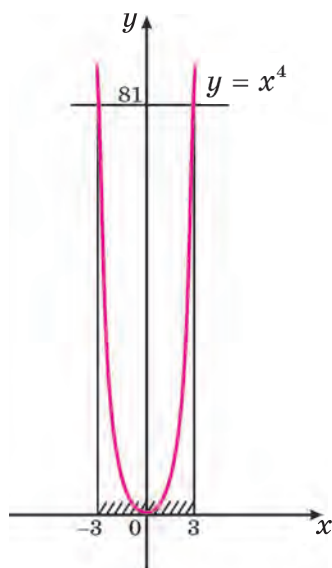
△  $y = x^4$  funkciyası  $x \leq 0$  bolğanda kemeyedi hám  $x \geq 0$  bolğanda ósedi.  $x^4 \leq 81$  teńlemesi eki haqıyqıy korengge iye:  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 3$ . Sonlıqtan da  $x^4 \leq 81$  teńsizligi  $x \leq 0$  bolğanda  $-3 \leq x \leq 0$  sheshimlerine hám  $x \geq 0$  bolğanda  $0 \leq x \leq 3$  sheshimlerine iye (41-súwret).

**Juwabı:**  $-3 \leq x \leq 3$ . ▲

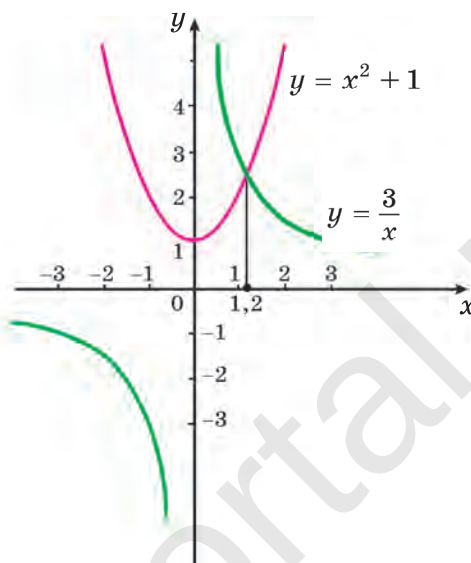
**3 - másele.** Funkciyanıń grafikleri járdeminde  $\frac{3}{x} = x^2 + 1$  teńlemesin sheshiń.

Bir koordinatalar tegisliginde  $y = \frac{3}{x}$  hám  $y = x^2 + 1$  funkciyalarınń grafi-  
gin jasaymız (42-súwret).

△  $x < 0$  bolğanda  $\frac{3}{x} = x^2 + 1$  teńlemesi korenlerge iye emes, sebebi  $\frac{3}{x} < 0$ , biraq  $x^2 + 1 > 0$ .  $x > 0$  bolğanda bul teńleme usı funkciyalar kesisiw noqatınıń abscissasına teń bolğan bir ǵana korengge iye. 42-súwretten bul korenniń  $x_1 \approx 1,2$ . ekenligi kórinip tur. Teńleme basqa oń korenlerge iye emes, sebebi  $x > x_1$  bolğanda  $y = \frac{3}{x}$  funkciyası kemeyedi, al  $y = x^2 + 1$  funkciyası



41-súwret.



42-súwret.

ósedí. Demek, funkciyalardıń grafikleri  $x > x_1$  bolǵanda kesilispeydi. Tap usı sebepten baylanıslı, olar  $0 < x < x_1$  bolǵanda kesilispeydi.

**J u w a b ı :**  $x_1 \approx 1,2$ . ▲

**4- másele.** Teńlemenı sheshiń:

$$\sqrt{2-x^2} = x. \quad (1)$$

△ Meyli,  $x$  – berilgen teńlemenıń koreni bolsın, yaǵnıy  $x$  – sonday san bolıp, (1) teńlemenı durıs teńlikke aylandıradı. Teńlemenıń eki jaǵın da kvadratqa kóterip, mınaǵan iye bolamız:

$$2-x^2=x^2. \quad (2)$$

Bunnan  $x^2=1$ ,  $x_{1,2}=\pm 1$ .

Demek, (1) teńleme korenlerge iye dep bolǵan, biz bul korenler tek 1 hám  $-1$  bolıwı múmkınlıǵın bilip aldıq. Endi, bul sanlar (1) teńlemenıń korenleri bolıw yaki bolmaslıǵın tekseremiz.  $x = 1$  bolǵanda (1) teńleme durıs teńlikke aylanadı:  $\sqrt{2-1^2} = 1$ . Sonlıqtan da  $x=1$  (1) teńlemenıń koreni.

$x = -1$  bolǵanda teńlemenin shep jaǵı  $\sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$  ge teń, al oń jaǵı  $-1$  ge teń, yaǵnıy  $x = -1$  (1) teńlemenin koreni bola almaydı.

**Juwabı:**  $x = 1$ . ▲

Qaralǵan máselede (1) teńleme onıń eki jaǵın da kvadratqa kóteriw jolı menen sheshiledi. Bunda (2) teńleme payda boladı.

(1) teńleme tek bir ǵana korenge iye:  $x = 1$ , (2) teńleme eki korenge iye:  $x_{1,2} = \pm 1$ , yaǵnıy (1) teńlemeden (2) teńlemege ótiwge *jat korenler* dep atalıwshı korenler payda boldı. Sonıń ushın da  $x = -1$  bolǵanda (1) teńleme  $1 = -1$  den ibarat naduris teńlikke aylanadı, al bul naduris teńliktiń eki jaǵın da kvadratqa kóteriwge bolsa  $1^2 = (-1)^2$  tan ibarat duris teńlik payda boldı.



**Teńlemenin eki jaǵın da kvadratqa kóteriwde jat korenler payda bolıwı múmkin.**

**Teńlemenin onıń eki jaǵın da kvadratqa kóteriw menen sheshiwde tekseriw ótkeriw kerek.**

(1) teńleme – *irrational teńlemege misal.*

Jáne irrational teńlemelerge misallar keltiremiz:

$$\sqrt{3 - 2x} = 1 \quad x; \sqrt{x + 1} = 2 - \sqrt{x - 3}.$$

Bir neshe irrational teńlemelerdi sheshiwdi qaraymız.

**5- másele.** Teńlemesin sheshiń:  $\sqrt{5 - 2x} = 1 - x$ .

▲ Teńlemenin eki jaǵın da kvadratqa kóteremiz:

$$5 - 2x = x^2 - 2x + 1$$

yaki  $x^2 = 4$ , bunnan  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$ . Tabılǵan korenlerdi tekseremiz.

$x = 2$  bolǵanda berilgen teńlemenin shep jaǵı  $\sqrt{5 - 2 \cdot 2} = 1$  ge teń, oń jaǵı  $1 - 2 = -1$  ge teń.  $1 \neq -1$  bolǵanlıqtan  $x = 2$  berilgen teńlemenin koreni bola almaydı.

$x = -2$  bolǵanda berilgen teńlemenin shep jaǵı  $\sqrt{5 - 2 \cdot (-2)} = 3$  ke teń, oń jaǵı  $1 - (-2) = 3$  ke teń. Demek,  $x = -2$  berilgen teńlemenin koreni.

**Juwabı:**  $x = -2$ . ▲

**6- másele.** Teńlemenı sheshiń:  $\sqrt{x-2}+3=0$ .

△ Bul teńlemenı  $\sqrt{x-2}=-3$  túrinde jazıp alamız.

Arifmetikalıq koren teris bolıwı múmkın emes, demek, bul teńleme korenlerge iye emes.

**Juwabı:** korenleri joq. ▲

**7- másele.** Teńlemenı sheshiń:  $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$ .

△ Teńlemenıń eki jaǵın kvadratqa kóterip, mınaǵan iye bolamız:

$$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16.$$

Uqsas aǵzaların jıynap, teńlemenı tómendegi túrde jazamız:

$$2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6 \text{ yoki } \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3.$$

Aqırǵı teńlemenıń eki jaǵın da kvadratqa kótereyik:

$$(x-1)(11-x)=9 \text{ yoki } x^2-12x+20=0,$$

bunnan  $x_1=2$ ,  $x_2=10$ . Tekseriw 2 hám 10 sanlarınan hárberi berilgen teńlemenıń koreni bolatuǵının kórsetedi.

**Juwabı:**  $x_1=2$ ,  $x_2=10$ . ▲

**8- másele.** Teńsizlikti sheshiń:  $\sqrt{5-x}\leq 7+x$ .

△ Teńsizlik  $x$  tiń  $-7\leq x\leq 5$  mánislerinde sheshimge iye. Eger, teńsizlik sheshimge iye bolsa, sheshim  $[-7; 5]$  kesindige tiyisli boladı. Teńsizliktiń hár eki bólegin kvadratqa kóteremiz hám ápiwayılastırılǵannan soń  $x^2+15x+44\geq 0$  teńsizligine iye bolamız. Onıń sheshimi  $x\leq -11$ ,  $x\geq -4$  ekenligi belgili. Bul aralıqlardıń  $[-7; 5]$  kesindi menen ulıwma bólegi  $[-7; 5]$  yaǵnıy,  $[-4; 5]$  kesindisi boladı:

**Juwabı:**  $-4\leq x\leq 5$ . ▲

### Shınıǵıwlar

**110.** Teńsizlikti sheshiń:

- |                   |                   |                    |                   |
|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1) $x^7>1$ ;      | 2) $x^3\leq 27$ ; | 3) $y^3\geq 64$ ;  | 4) $y^3<125$ ;    |
| 5) $x^4\leq 16$ ; | 6) $x^4>625$ ;    | 7) $x^5\leq 243$ ; | 8) $x^6\geq 64$ . |

- 111.** 1) Eger kvadrattin maydani  $361 \text{ cm}^2$  tan ulken ekenligi belgili bolsa, onin tarepinin uzunligi qanday bolwi mumkin?  
 2) Kvadrattin maydani  $343 \text{ dm}^3$  tan ulken ekenligi belgili bolsa, onin qiri qanday bolwi mumkin?

**112.** (Awizeki.) 7 sanı teńlemenin koreni bolatuǵının kórsetin:

$$1) \sqrt{x-3}=2; \quad 2) \sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3; \quad 3) \sqrt{2x+11}=5.$$

**113.** (Awizeki.) Teńlemenı sheshin:

$$1) \sqrt{x}=3; \quad 2) \sqrt{x}=7; \quad 3) \sqrt{2x-1}=0; \quad 4) \sqrt{3x+2}=0.$$

Teńlemenı sheshin (**114–117**):

$$\begin{aligned} \mathbf{114.1)} \quad & \sqrt{x+1}=2; & 2) \sqrt{x-1}=3; & 3) \sqrt{1-2x}=4; \\ & 4) \sqrt{2x-1}=3; & 5) \sqrt{3x+1}=10; & 6) \sqrt{9-x}=4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{115.1)} \quad & \sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}; & 2) \sqrt{x-2}=\sqrt{3x-6}; \\ & 3) \sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}; & 4) \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{116.1)} \quad & \sqrt{x+2}=x; & 2) \sqrt{3x+4}=x; & 3) \sqrt{20-x^2}=2x; \\ & 4) \sqrt{0,4-x^2}=3x; & 5) \sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}; & 6) \sqrt{26-x^2}=5x. \end{aligned}$$

$$\mathbf{117.1)} \quad \sqrt{x^2-x-8}=x-2; \quad 2) \sqrt{x^2+x-6}=x-1.$$

**118.** Teńsizlikti sheshin:

$$\begin{aligned} 1) (x-1)^3 > 1; & 2) (x+5)^3 > 8; & 3) (2x-3)^7 \geq 1; \\ 4) (3x-5)^7 < 1; & 5) (3-x)^4 > 256; & 6) (4-x)^4 > 81. \end{aligned}$$

**119.** Berilgen teńleme ne ushın korenlerge iye emesligin túsindirin:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{x} &= -8; & 2) \sqrt{x} + \sqrt{x-4} &= -3; & 3) \sqrt{-2-x^2} &= 12; \\ 4) \sqrt{7x-x^2-63} &= 5; & 5) \sqrt{x^2+7} &= 2; & 6) \sqrt{x-2} &= x. \end{aligned}$$

Teńlemenı sheshiń (120–122):

120. 1)  $\sqrt{x^2 - 4x + 9} = 2x - 5$ ; 2)  $\sqrt{x^2 + 3x + 6} = 3x + 8$ ;

3)  $2x = 1 + \sqrt{x^2 + 5}$ ; 4)  $x + \sqrt{13 - 4x} = 4$ .

121. 1)  $\sqrt{x + 12} = 2 + \sqrt{x}$ ; 2)  $\sqrt{4 + x} + \sqrt{x} = 4$ .

122. 1)  $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{3x + 4} = 3$ ; 2)  $\sqrt{4x - 3} + \sqrt{5x + 4} = 4$ ;

3)  $\sqrt{x - 7} - \sqrt{x + 17} = -4$ ; 4)  $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1} = 1$ .

123.  $x$  tiń qanday mánislerinde funkciyalar birdey mánislerdi qabıl etedi:

1)  $y = \sqrt{4 + \sqrt{x}}$ ,  $y = \sqrt{19 - 2\sqrt{x}}$ ; 2)  $y = \sqrt{7 + \sqrt{x}}$ ,  $y = \sqrt{11 - \sqrt{x}}$  ?

124. Teńsizlikti sheshiń:

1)  $\sqrt{x - 2} > 3$ ; 2)  $\sqrt{x - 2} \leq 1$ ; 3)  $\sqrt{2 - x} \geq x$ ;

4)  $\sqrt{2 - x} < x$ ; 5)  $\sqrt{5x + 11} > x + 3$ ; 6)  $\sqrt{x + 3} \leq x + 1$ .

### I Bapqa tiyisli shınıǵıwlar

125.  $x$  tiń  $y = 2x^2 - 5x + 3$  kvadrat funkciyası: 1) 0 ge; 2) 1 ge; 3) 10 ǵa; 4)  $-1$  ge teń mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

126. Teńsizlikti sheshiń:

1)  $x^2 \leq 5$ ; 2)  $x^2 > 36$ ; 3)  $x^2 \geq 9$ ; 4)  $x^2 < 8$ .

127. Parabolanıń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatları koordinataların tabıń:

1)  $y = x^2 + x - 12$ ; 2)  $y = -x^2 + 3x + 10$ ;

3)  $y = -8x^2 - 2x + 1$ ; 4)  $y = 7x^2 + 4x - 11$ .

128. Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń:

1)  $y = x^2 - 4x - 5$ ; 2)  $y = -x^2 - 2x + 3$ ;

3)  $y = x^2 - 6x + 10$ ; 4)  $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$ .

**129.** Funkciyanıń grafigin jasań hám grafik boyınsha onıń qásiyetlerin anıqlań:

- 1)  $y = x^2 - 5x + 6$ ;                      2)  $y = x^2 + 10x + 30$ ;  
3)  $y = -x^2 - 6x - 8$ ;                      4)  $y = 2x^2 - 5x + 2$ .

**130.** Tuwrı tórtmúyeshliktiń perimetri 600 m. Tuwrı tórtmúyeshliktiń maydanı eń úlken bolıwı ushın onıń ultanı menen biyikligi qanday bolıwı kerek?

**131.** Eger  $y = x^2 + px + q$  kvadrat funkciyası:

- 1)  $x=0$  bolǵanda 2 ge teń mánisti,  $x=1$  bolǵanda 3 ke teń mánisti qabıl este, onda  $p, q$  koefficientin tabıń;  
2)  $x=0$  bolǵanda 0 ge teń mánisti,  $x=2$  bolǵanda bolsa 6 ǵa teń mánisti qabıl etse, onda  $p, q$  koefficientin tabıń.

**132.**  $x$  tiń qanday mánislerinde funkciyalar teń mánislerdi qabıl etedi:

- 1)  $y = x^2 + 3x + 2$  va  $y = |7 - x|$ ;  
2)  $y = 3x^2 - 6x + 3$  va  $y = |3x - 3|$ ?

Teńsizlikti sheshiń (**133–137**):

- 133.** 1)  $(x - 5,7)(x - 7,2) > 0$ ;                      2)  $(x - 2)(x - 4) > 0$ ;  
3)  $(x - 2,5)(3 - x) < 0$ ;                      4)  $(x - 3)(4 - x) < 0$ .

- 134.** 1)  $x^2 > x$ ;                      2)  $x^2 > 36$ ;                      3)  $4 > x^2$ ;                      4)  $\frac{9}{16} \geq x^2$ .

- 135.** 1)  $-2x^2 + 4x + 30 < 0$ ;                      2)  $-2x^2 + 9x - 4 > 0$ ;  
3)  $4x^2 + 3x - 1 < 0$ ;                      4)  $2x^2 + 3x - 2 < 0$ ;

- 136.** 1)  $x^2 - 3x + 8 > 0$ ;                      2)  $x^2 - 5x + 10 < 0$ ;  
3)  $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$ ;                      4)  $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$ ;  
5)  $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$ ;                      6)  $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$ .

- 137.** 1)  $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$ ;                      2)  $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$ ;  
3)  $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$ ;                      4)  $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$ ;                      5)  $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$ ;  
6)  $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$ ;                      7)  $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$ ;                      8)  $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$ .

Teńsizlikti sheshiń (138–139):

138. 1)  $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}x^2 \geq 1 - x$ ;

2)  $\frac{1}{3}x(x+1) \leq (x+1)^2$ ;

3)  $x(1-x) > 1,5-x$ ;

4)  $\frac{1}{3}x - \frac{4}{9} \geq x(x-1)$ .

139. 1)  $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3} > 0$ ;

2)  $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2} < 0$ ;

3)  $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1} \leq 0$ ;

4)  $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1} \geq 0$ ;

5)  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6} > 0$ ;

6)  $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2} \leq 0$ .

140. Kater 4 saattan kóp bolmağan waqıt dawamında dárya aǵısı boyınsha 22,5 km júziwi hám keyinge qaytıwı kerek. Eger, dárya aǵısının tezligi 3 km/saat bolsa, kater suwǵa salıstırǵanda qanday tezlik penen júziwi kerek?

141. Funkciyalardıń grafiklerin bir kordinata sistemasında jasań hám  $x$  tiń qanday mánislerinde funkciyanıń mánisi ekinshisinen úlken (kishi) bolatuǵının anıqlań. Nátiyjeni tiyisli teńsizlikti sheship, tekseriń:

1)  $y=2x^2$ ,  $y=2-3x$ ;

2)  $y=x^2-2$ ,  $y=1-2x$ ;

3)  $y=x^2-5x+4$ ,  $y=7-3x$ ;

4)  $y=3x^2-2x+5$ ,  $y=5x+3$ .

Funkciyalar grafikleriniń kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń(142–143):

142. 1)  $y=x^2$ ,  $y=x^3$ ;

2)  $y=\frac{1}{x}$ ,  $y=2x$ ;

3)  $y=3x$ ,  $y=\frac{3}{x}$ .

143. 1)  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=|x|$ ;

2)  $y=\sqrt[3]{x}$ ,  $y=\frac{1}{x}$ ;

3)  $y=\sqrt{x}$ ,  $y=x$ .

144. Teńsizlikti sheshiń:

1)  $x^4 \leq 81$ ;

2)  $x^5 > 32$ ;

3)  $x^6 > 64$ ;

4)  $x^5 \leq -32$ .

Teńlemeńni sheshiń (145–146):

145. 1)  $\sqrt{3-x}=2$ ;

2)  $\sqrt{3x+1}=7$ ;

3)  $\sqrt{3-11x}=2x$ .

146. 1)  $\sqrt{2x-1}=x-2$ ;

2)  $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$ ;

3)  $\sqrt{2-2x}=x+3$ .



**147.** Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1)  $y = \sqrt[5]{x^3 + x - 2}$ ; | 2)  $x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 15}$ ; | 3)  $x = \sqrt[6]{6 - x - x^2}$ ;

4)  $y = \sqrt[4]{13x - 22 - x^2}$ ; | 5)  $y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 7}}$ ; | 6)  $y = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^2 + 8x + 7}}$ .

**148.** Funkciyanıń kórsetilgen aralıqta ósiwi yaki kemeyiwın anıqlań:

1)  $y = \frac{1}{(x-3)^2}, x > 3$  aralıqta; 2)  $y = \frac{1}{(x-2)^3}, x < 2$  aralıqta;

3)  $y = \sqrt[3]{x+1}, x \geq 0$  aralıqta; 4)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, x < -1$  aralıqta.

### **ÓZINIZDI TEKSERIP KÓRİN!**

**1.**  $y = -x^2 + 2x + 3$  funkciyasınıń grafigi járdeminde  $x$  tiń qanday mánisinde funkciyanıń mánisi 3 ke teń bolatuǵının tabıń.

**2.**  $y = 1 - x^2$  funkciyasınıń grafigi boyınsha  $x$  tiń funkciyası oń: teris mánislerdi qabıl etetuǵın mánislerin tabıń.

**3.** 1)  $y = 2x^2$ ; 2)  $y = -3x^2$  funkciya qanday aralıqlarda ósedı? Kemiydi? Bul funkciyanıń grafigin jasań.

**4.** Teńsizliklerdi intervallar usılı menen sheshiń:

1)  $x(x-1)(x+2) \geq 0$ ; 2)  $(x+1)(2-x)(x-3) \leq 0$ .

**5.** Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1)  $y = \frac{8}{x-1}$ ; 2)  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ; 3)  $y = \sqrt{4 - 2x}$ .

**6.** Teńlemeńi sheshiń:

1)  $\sqrt{x-3} = 5$ ; 2)  $\sqrt{3-x-x^2} = x$ ; 3)  $y = \sqrt{32-x^2} = x$ .

**149.** Funkciyanıń jup yaki taq ekenligin anıqlań:

1)  $y = x^6 - 3x^4 + x^2 - 2$ ;                      2)  $y = x^5 - x^3 + x$ ;

3)  $y = \frac{1}{(x-2)^2} + 1$ ;                      4)  $y = x^7 + x^5 + 1$ .

**150.** Teńsizlikti sheshiń:

1)  $(3x+1)^4 > 625$ ;    2)  $(3x^2+5x)^5 \leq 32$ ;    3)  $(x^2-5x)^5 > 216$ .

**151.** Teńsizlikti sheshiń:

1)  $\sqrt{2x^2+5x-3} = x+1$ ;                      2)  $\sqrt{3x^2-4x+2} = x+4$ ;

3)  $\sqrt{x+11} = 1+\sqrt{x}$ ;                      4)  $\sqrt{x+19} = 1+\sqrt{x}$ .

**152.** Teńsizlikti sheshiń:

1)  $\sqrt{x^2-8x} > 3$ ;                      2)  $\sqrt{x^2-3x} < 2$ ;                      3)  $\sqrt{3x-2} > x-2$ ;  
4)  $\sqrt{2x+1} \leq x-1$ ;                      5)  $\sqrt{3-x} > 1-x$ ;                      6)  $\sqrt{4x-x^2} > 4-x$ .

### ***I babqa tiyisli sinaq (test) shınıǵıwları***

*Sinaq shınıǵıwlardıń hárbirine 4 ewden “juwap” berilgen. Tórt “juwap”tıń tek birewi durıs, qalǵanları bolsa nadurıs. Oqıwshılardıń sinaq shınıǵıwları orınlaw yaki basqa talqılawlar járdeminde usı durıs juwaptı tabıw (onı bel-gilew) talap etiledi.*

**1.**  $a$  nıń sonday mánisin tabıń, ol  $y = ax^2$  parabola menen  $y = 5x + 1$  tuwrı sıziqtıń kesilisiw noqatlarınan biriniń abscissası  $x = 1$  bolsın.

A)  $a = 6$ ;                      B)  $a = -6$ ;                      C)  $a = 4$ ;                      D)  $a = -4$ .

Parabolanıń koordinata kósherleri menen kesilisiw noqatlarınıń koordinataların tabıń **(2–3)**:

**2.**  $y = x^2 - 2x + 4$ .

A)  $(-1; 3)$ ;                      B)  $(3; 1)$ ;                      C)  $(1; 3)$ ;                      D)  $(0; 4)$ .

**3.**  $y = 6x^2 - 5x + 1$ .

A)  $(\frac{1}{3}; 0)$ ,  $(\frac{1}{2}; 0)$ ,  $(0; 1)$ ;                      B)  $(-\frac{1}{3}; 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}; 0)$ ,  $(1; 0)$ ;  
C)  $(0; \frac{1}{3})$ ,  $(0; \frac{1}{2})$ ,  $(0; 1)$ ;                      D)  $(\frac{1}{3}; 0)$ ,  $(-\frac{1}{2}; 0)$ ,  $(0; -1)$ .

Parabola tóbesiniń koordinataların tabıń (4–5):

4.  $y = x^2 - 4x$ .

- A) (0; 4); B) (4; 2); C) (2; -4); D) (-4; 2).

5.  $y = x^2 + 6x + 5$ .

- A) (-3; -4); B) (-5; -1); C) (-1; -5); D) (3; 4).

6. Abcissalar kósherın  $x = 1$  hám  $x = 2$  noqatında, ordinata kósherın bolsa  $y = \frac{1}{2}$  noqatında kesip ótiwshi parabolaniń teńlemesin jazıń.

A)  $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ ;

B)  $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ ;

C)  $y = x^2 - 3x + 2$ ;

D) durıs juwap berilmegen.

Parabola qaysı shereklerde jaylasqan? (7–8):

7.  $y = 3x^2 + 5x - 2$ .

A) I, II, III;

B) II, III, IV;

C) I, III, IV;

D) I, II, III, IV;

8.  $y = -x^2 - 6x - 11$ .

A) III, IV;

B) I, II, III;

C) II, III, IV;

D) I, II.

9. Eki oń sannıń qosındısı 160. Eger sanlardıń kublarınıń qosındısı eń kishi bolsa, usı sanlardı tabıń.

A) 95; 65;

B) 155; 5;

C) 75; 85;

D) 80; 80.

10.  $y = x^2 - 4x + 3$  funksiyaasınıń eń kishi mánisin tabıń.

A) -1;

B) 1;

C) 7;

D) -8.

Teńsizlikti sheshiń (11–17):

11.  $2x^2 - 8 \leq 0$ .

A)  $-2 \leq x \leq 2$ ;

B)  $-2 \leq x$ ;

C)  $x \geq 2$ ;

D)  $0 \leq x \leq 4$ .

12.  $3x^2 - 9 \geq 0$ .

A)  $x < \sqrt{3}$ ;

B)  $x > \sqrt{3}$ ;

C)  $x < -\sqrt{3}, x > \sqrt{3}$ ;

D)  $x \geq 3$ .

13.  $6x^2 + 5x - 6 > 0$ .

A)  $x > \frac{2}{3}$ ;

B)  $x < \frac{3}{2}$ ;

C)  $x < -\frac{3}{2}, x > \frac{2}{3}$ ;

D)  $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$ .

14.  $\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$ .  
 A)  $-2 < x \leq 2$ ; B)  $-2 < x < 5$ ; C)  $x \neq -2, x \neq 5$ ; D)  $-2 < x < 0$ .
15.  $\frac{x^2 + x}{-x^2 + 6x - 8} \geq 0$ .  
 A)  $-2 < x < 3$ ; B)  $x < -2; -1 \leq x \leq 1, x > 3$ ;  
 C)  $-1 \leq x < 3$ ; D)  $x \neq -2, x \neq 3$ .
16.  $x^2 + 6x + 5 < 0$  teńsizliktiń barlıq pútin sheshimleriniń qosındısıń tabıń.  
 A) 10; B) 9; C) -9; D) -10.
17.  $a$  nıń qanday mánislerinde  $ax^2 + 4x + 9a < 0$  teńsizlik  $x$  tiń barlıq mánislerinde orınlı boladı?  
 A)  $a < -\frac{2}{3}$ ; B)  $a > \frac{2}{3}$ ; C)  $a < -1$ ; D)  $a > 1$ .
18.  $a$  nıń qanday mánislerinde  $ax^2 - 8x - 2 < 0$  teńsizlik  $x$  tiń barlıq mánislerinde orınlı boladı?  
 A)  $-8 < a < 8$ ; B)  $a \geq 8$ ; C)  $a < 8$ ; D)  $a < -8$ .
19. Funkciyanıń anıqlanıw oblastıń tabıń:  $y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ .  
 A)  $1 \leq x \leq 2$ ; B)  $1 < x < 2$ ; C)  $x \geq 2, x \leq 1$ ; D)  $-2 \leq x \leq -1$ .
20. Funkciyalardıń qaysıları jup funksiya?  
 1)  $y = x + \frac{1}{x}$ ; 2)  $y = x^2 + |x|$ ; 3)  $y = -3 + \frac{5}{x^4}$ ; 4)  $y = x^2 - \frac{3}{x}$ .  
 A) 1, 2; B) 3, 4; C) 2, 3; D) 1, 4.
21. Funkciyalardıń qaysıları taq funksiya?  
 1)  $y = 6x$ ; 2)  $y = \sqrt[3]{x}$ ; 3)  $y = 4x + 7$ ; 4)  $y = 2x^3 - 10$ .  
 A) 1, 2; B) 2, 3; C) 3, 4; D) 1, 4.



## Ámeliy-usınılğan hám pánlerara baylanışlı máseleler

**1-másele.** Jeńil avtomobil ózgermeytuǵın  $v$  tezlik penen háreketlenip kiyatır. Stop sızıǵına shekem 50 metr qalǵanda svetofordıń jasıl sveti óship jana basladı. Sonnan yarım sekund ótkennen keyin shofer tormozlawdı basladı hám stop sızıǵına jetpey toqtadı. Jol háreketi qaǵıydalarınan belgili bolǵanıday,  $v_0=50$  km/saat tezlik penen háreketlenip kiyatırǵan avtomobildıń tormozlanıw jolı  $S_0=23,5$  m, bunda tormozlanıw jolı dep tormozlanıw baslanıwdan, toqtaǵanǵa shekemgi avtomobil basıp ótken jolǵa ayıladı. Avtomobildıń svetofor óship, janıwı baslaǵandaǵı tezligin bahalań.

△ Svetofor óship, jana baslaǵanınan, tormozlanıw baslanaman degenshe, avtomobil  $0,5$   $v$  metr aralıqtı, keyin bolsa fizika kursınan málim bolǵan  $kv^2$  tormozlanıw jolın basıp ótedi, bunda

$$k = \frac{s_0}{v_0^2} = \frac{23,5}{13,88^2} \approx 0,12.$$

Demek, ulıwma basıp ótilgen aralıq, 50 km/saat tezliktiń metr sekundlarda 13,88 m/sek ekenligin esapqa alsaq, 50 metrden aspaı kerek ekenliginen

$$0,5v + 0,12v^2 \leq 50,$$

yaǵnıy

$$0,12v^2 + 0,5v - 50 \leq 0. \quad (1)$$

△ Bul teńsizlikti sheshiw ushın, dáslep  $0,12v^2 + 0,5v - 50$  úsh aǵzalınıń korenlerin tabamız:

$$0,12v^2 + 0,5v - 50 = 0,$$

bunnan

$$12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Teńlemenı sheshemiz:

$$v_{1,2} = \frac{-50 - \sqrt{50^2 - 4 \cdot 12(-5000)}}{2 \cdot 12} = \frac{-25(1 - \sqrt{97})}{12},$$

$$\text{bunnan } v_1 = \frac{-25(1 + \sqrt{97})}{12} \quad \text{hám} \quad v_2 = \frac{25(\sqrt{97} - 1)}{12}.$$

Onda, (1) teńsizliktiń sheshimi  $v_1 \leq v \leq v_2$  aralıqtaǵı sanlardan ibarat boladı. Biraq, máseleńiń mazmunında  $v > 0$ , demek, bahalanıp atırǵan tezlik  $0 < v \leq v_2$

aralıqtan sırtqa shıǵıp ketpewi kerek. Yaǵnıy,  $v \leq \frac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18,43$  m/sek yaki 66,35 km/saat dan aspawı kerek.

**Juwapı:** tezlik 66,35 km/saattan aspawı kerek. ▲

**2-másele.** Bazarda belgili bir túrdegi tovarlardan  $n$  danası bar hám olardıń danası  $p$  púl birligine satılmaqta dep alayıq. Monitoring, bul tovarǵa bolǵan talap asqanda, onıń bahası kóteriledi hám keltiriletuǵın usınday tovarlar sanı  $n=40p$  formula boyınsha ósetuǵının kórsetti. Ekinshi tárepten, bazarǵa kirip kelip, tutınıwshıǵa usınıs etiletuǵın tovarlar sanı  $n$  óse baslawı menen onıń bahası keri proporcional túrde túsip barıwı belgili:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Bazarǵa kirip kelip atırǵan tovarlar sanına qoyılatuǵın shártti anıqlań.

▲ Máselede soralıp atırǵan shártti anıqlaw ushın usınıs etilip atırǵan baha  $\frac{150}{n-40}$  talapqa baylanıslı, baha  $\frac{n}{40}$  den tómén bolmawı kerek shártinen paydalanamız:

$$\frac{150}{n-40} \geq \frac{n}{40}.$$

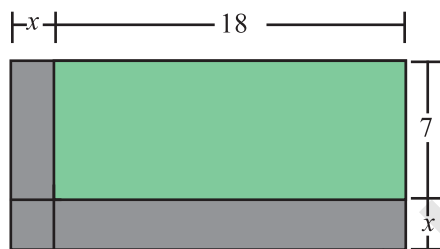
Bunnan

$$n^2 - 40n - 6000 \leq 0$$

teńsizlikti payda etemiz. Onıń sheshimleri  $-60 \leq n \leq 100$ . Máseleńiń mazmunı boyınsha bazarǵa kirip keletuǵın tovarlar sanı  $n$  natural san hám ol 100 den aspawı kerek.

**Juwapı:**  $n \leq 100$ . ▲

**3-másele.** Siz 18 metrli baǵınızdın eki tárepine 7 metrli tastan trotuar isleyjaqsız (43-súwret). Biraq, Siz bunıń ushın 54 kvadrat metrden aspaytuǵın jerdi qaplap alıwǵa jetetuǵın qarǵı ajırata alasız. Bunda trotuardıń eni kóbi menen qanday bolıwı kerek?



43-súwret.

△ Máseleniń sheshimin tabıw ushın ulıwma maydan  $(x + 18) \cdot (x + 7)$  kv.m den baǵdın maydanı  $18 \cdot 7 = 126$  ni alıp, nátiyjede trotuardıń maydanı 54 kv.m den asraytuǵınlıǵın esapqa alıwıńız kerek:

$$(x + 18) \cdot (x + 7) - 18 \cdot 7 \leq 54. \quad (1)$$

Bunnan

$$x^2 + 25x - 54 \leq 0 \quad (2)$$

kvadrat teńsizlikti payda etemiz.  $x^2 + 25x - 54$  kvadrat úsh aǵzalınıń korenleri  $x_1 = -27$  hám  $x_2 = 2$  bolǵanı ushın (2) teńsizliktiń sheshimleri  $-27 \leq x \leq 2$  aralıqtaǵı sanlardan ibarat boladı. Biraq, máseleniń mazmunında trotuardıń eni  $x$  teris san yaki nol bola almaydı. Sonıń ushın trotuardıń eni  $0 < x \leq 2$  teńsizlikti qanaatlardıwshı san bola aladı. Demek, trotuardıń eni 2 metrden aspay kerek.

**Juwabı:** trotuardıń eni kóbi menen 2 metr. ▲

### Máseleler

1. Júk mashinası  $v$  turaqlı tezlik penen háreketlenip kiyatır. Stop sızıǵına shekem 50 metr qalǵanda svetofordıń jasıl sveti óship jana basladı. Sonnan yarım sekund ótkennen keyin shofer tormozlawdı basladı hám stop sızıǵına jetpey toqtadı. Jol háreketi qaǵıydalarından belgili bolǵanıday,  $v_0 = 50$  km/saat tezlik penen háreketlenip kiyatırǵan júk mashinasınıń tormozlanıw jolı  $S_0 = 28,9$  m. Júk mashinasınıń svetofor óship, janıwı baslaǵandaǵı  $v$  tezligin 0,01 anıqlıqta bahalań.

2. Bazarda belgili bir túrdegi tovarlardan  $n$  danası bar hám olardıń danası  $p$  púl birligine satılmaqta dep alayıq. Monitoring, bul tovarǵa bolǵan talap asqanda, onıń bahası kóteriledi hám keltiriletuǵın usınday tovarlar sanı  $n=60p$  formula boyınsha ósetuǵının kórsetti. Ekinshi tárepten, bazarǵa kirip kelip, tutınıwshıǵa usınıs etiletuǵın tovarlar sanı  $n$  óse baslawı menen onıń bahası kerı proporcional túrde túsip barıwı belgili:

$$p = \frac{60}{n - 40}.$$

Bazarǵa kirip kelip atırǵan tovarlar sanına qoyılatuǵın shártti anıqlań.

3. Kompaniya reklama ushın ulıwma  $x$  (100 mıńlarda) swm jumsadı hám onıń nátiyjesinde  $P$  payda kórdi dep alayıq, bunda  $P(x) = 20 + 40x - x^2$ . Reklamaga qansha pul sarıplansa, nátiyjede eń kóp payda kóredi?
4. Ónim islep shıǵarıwshı kishi kárxananiń aylıq paydası  $P=250n-n^2$  (mıń swmlarda) model menen kórsetiledi dep alayıq, bul jerde  $n$  – islep shıǵarılatuǵın hám satılatuǵın ónim sanı. Eń kóp payda alıw ushın kishi kárxana ayına qansha ónim islep shıǵarıwı hám satıwı kerek?
5. Qubla Amerikanıń jawınlı toǵaylarınıń birinde siyrek ushırasatuǵın shıbın-shirkeydiń túri tabıldı hám dógerek – átiraptı úyreniwshi qánige shıbın-shirkeylerdi qorshalǵan territoriyaǵa ótkizdi. Ótkizilgennen keyin olardıń sanı  $t$  ayda

$$P(t) = 45(1 + 0,6t)(3 + 0,02t)$$

nızam boyınsha kóbeyip bargan bolsa:

- 1)  $t = 0$  shıbın-shirkeyler sanı qansha bolǵan?
- 2) 10 jıldan keyin olardıń sanı qansha boladı?
- 3) Qashan olardıń sanı 549 boladı?





## *Tariyxiy maǵlıwmatlar*



**Abu Rayxan Beruniy**  
(973–1048)

«Funkciya» sózi latinsha «func-tio» sózinen alingan bolip, ol «ámelge asırıw», «orınlaw» degen mánini bildiredi. Funkciyanıń dáslepki anıqlamaları **G. Leybnis** (1646 – 1716), **I. Bernulli** (1667–1748), **N.I. Lobachevskiy** (1792 –1856) miynetlerinde berilgen.

Funkciyanıń házirgi anıqlamasın bilmese de, áyyemgi alımlar shamalar arasında funkcional qatnas bolıwı lazım ekenligin túsingen.

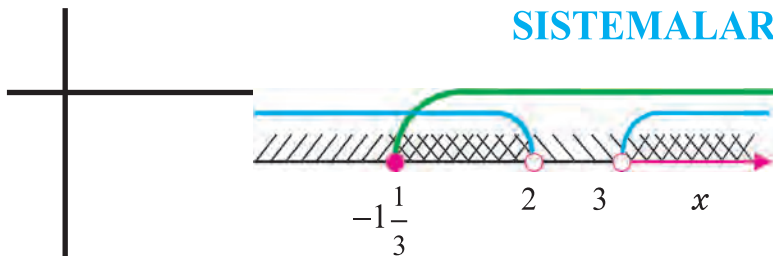
Tórt mın jıldan burınraq Bobil alımları radiusı  $r$  bolǵan dóńgelektiń maydanı ushın shamalap bolsa da  $S = 3r^2$  formulasın keltirip shıǵargan.

Sannıń dárejesi haqqındaǵı dáslepki maǵlıwmatlar, áyyemgi bobilliklerden bizge shekem jetip kelgen áyyemgi jazıwlarda keltirilgen. Ásirese, olarda natural sanlardıń kvadratları, kublarınıń kesteleri berilgen.

Natural sanlardıń kvadratları, kublarınıń kesteleri, logarifmлер kestesi, trigonometriyalıq kesteler, kvadrat korenler kesteleri shamalar arasındaǵı qatnastıń (funkciyanıń) keste usılında beriliwi bolıp tabıladı.

Ullı alım **Abu Rayxan Beruniy** de óz miynetlerinde funkciya túsiniginen, onıń qásiyetlerinen paydalanǵan. Abu Rayxan Beruniy belgili «Qonuni Masudiy» miynetiniń 6-maqalasında argument (erkli ózgeriwshi) hám funkciyanıń (erksiz ózgeriwshiniń) ózgeriw aralıqları, funkciyanıń belgileri, eń úlken hám eń kishi mánislerin táriyipleydi.

## II BAP. TEŃLEMELER HÁM TEŃSIZLIKLER SISTEMALARÍ



### 13-§. EKINSHI DÁREJELI TEŃLEME QATNASQAN EŃ ÁPIWAYÍ SISTEMALARDÍ SHESHIW

**1- másele.** Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası  $\sqrt{13}$  sm ge teń, onıń maydanı  $3 \text{ cm}^2$ . Úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

△ Úshmúyeshliktiń katetleri  $x$  hám  $y$  santimetrge teń bolsın. Pifagor teoreması hám tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanınıń formulasınan paydalanıp, másele shártin tómendegishe jazamız:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \frac{1}{2}xy = 3. \end{cases} \quad (1)$$

Sistemanıń birinshi teńlemesine 4 ke kóbeytilgen ekinshi teńlemesin qosıp, tómendegini payda etemiz:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

bunnan  $(x + y)^2 = 25$  yaki  $x + y = \pm 5$ .  $x$  hám  $y$  ler oń sanlar bolǵanı ushın  $x + y = 5$  boladı. Bul teńlemede  $y$  ti  $x$  arqalı ańlatamız hám (1) sistema teńlemeleriniń birine, máselen, ekinshi teńlemege qoyamız:

$$y = 5 - x, \quad \frac{1}{2}x(5 - x) = 3.$$

Payda bolǵan teńlemenı sheshemiz:

$$5x - x^2 = 6, \quad x^2 - 5x + 6 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Bul mánislerdi  $y = 5 - x$  formulağa qoyıp,  $y_1 = 3, y_2 = 2$  ni tabamız. Eki jaǵdayda da katetlerden biri 2 cm, ekinshisi 3 cm.

**Juwabi:** 2 cm, 3 cm. ▲

**2- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ Viet teoremasına keri teorema boyınsha,  $x$  hám  $y$  sanlar

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

kvadrat teńlemenıń korenleri boladı. Bul teńlemenı sheship, tómendegige iye bolamız:  $z_1 = 5, z_2 = -2$ . Demek, sistemanıń sheshimleri tómendegi sanlar jubi boladı:  $x_1 = 5, y_1 = -2$  hám  $x_2 = -2, y_2 = 5$ .

**Juwabi:**  $(5; -2), (-2; 5)$ . ▲

**3- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0, \end{cases}$$

△ Bul sistemanı ornına qoyıw usılı menen sheshemiz:

$$y = 3x - 6,$$

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Bul teńlemenı ápiwayılastırıp, tómendegige iye bolamız:  $5x^2 - 48x + 43 = 0$ , bunnan  $x_1 = 1, x_2 = 8,6$ .  $x$  tiń mánisin  $y = 3x - 6$  formulağa qoyıp,  $y_1 = -3, y_2 = 19,8$  ekenin tabamız.

**Juwabi:**  $(1; -3), (8,6; 19,8)$ . ▲

**4- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Sistemaniń birinshi teńlemesin tómendegishe jazamız:

$$(x-y)(x+y) = 16.$$

Buǵan  $x-y=2$  ni qoyıp,  $x+y=8$  di payda etemiz, solay etip,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Bul sistemani qoyıw usılı menen sheship,  $x=5$ ,  $y=3$  ekenin tabamız.

**Juwabı:** (5; 3). ▲

### Shınıǵıwlar

**153.** Eki belgisizge iye birinshi dárejeli teńlemeler sistemasın sheshiń:

1)  $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (**154–158**):

**154.** 1)  $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$

5)  $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$

6)  $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

**155.** 1)  $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$

5)  $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$

6)  $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

- 156.** 1)  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 11; \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10; \end{cases}$  5)  $\begin{cases} xy = 2, \\ x + y = 3; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} x + y = -11, \\ xy = 18. \end{cases}$
- 157.** 1)  $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$  5)  $\begin{cases} x + y = -3, \\ x^2 - y^2 = -3; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x + y = 7. \end{cases}$
- 158.** 1)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$
- 4)  $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26; \end{cases}$  5)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ xy = 7. \end{cases}$

**159.** Eki sannıń qosındısı 18 ge, olardıń kóbeymesi 65 ke teń. Usı sanlardı tabıń.

**160.** Eki sannıń arifmetikalıq ortası 20 ğa, olardıń geometriyalıq ortası 12 ge teń. Usı sanlardı tabıń.

**161.** Teńlemeler sistemasın sheshiń (**161–163**):

- 1)  $\begin{cases} x + 2y = -3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$
- 162.** 1)  $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10; \end{cases}$
- 163.** 1)  $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} x - y = 4, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

- 164.** Tuwrı tórtmúyeshlik formasındaǵı maydandı 1 km uzınlıqtaǵı diywal menen orap shıǵıw kerek. Eger, maydannıń beti 6 gektar bolsa, onıń boyı hám eni qanday bolıwı kerek?

## 14-§. TEŃLEMELER SISTEMASÍN SHESHIWDİŃ TÚRLI USÍLLARÍ

**1- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Sistema teńlemelerin aǵzama-aǵza qosıp, payda etemiz:  $2x+2y=8$ , bunnan  $y=4-x$ . Bul teńlikti sistemanıń qálegen, máselen, ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$\begin{aligned} x + 4 - x - 2x(4-x) &= -2, \\ 4 - 8x + 2x^2 &= -2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 &= 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

$y=4-x$  bolǵanı ushın,  $y_1=3$ ,  $y_2=1$ .

**Juwapı:** (1; 3), (3; 1). ▲

**2- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Sistemanıń birinshi teńlemesinen  $y^2=x-3$ . Bul teńlikti sistemanıń ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$x(x-3)=28, \quad x^2-3x-28=0,$$

Bunnan  $x_1=7$ ,  $x_2=-4$ .

$y^2=x-3$  bolǵanı ushın  $y$  tiń mánisin tabamız:

- 1) Egerde  $x=7$  bolsa, onda  $y^2=7-3$ ,  $y^2=4$ , bunnan  $y=2$  yaki  $y=-2$ ;
- 2) Egerde  $x=-4$  bolsa, onda  $y^2=-4-3<0$ , demek, haqıyqıy korenlerge iye emes.

**Juwapı:** (7; 2), (7; -2). ▲

Sonı aytıp ótiwimiz kerek, egerde birinshi teńlemede  $x$  ti  $y$  arqalı ańlatıp, ekinshi teńlemege qoyılsa, bikvadrat teńlemenı sheshiwge alıp keletuǵın edi.

**3-másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Egerde,  $(x; y)$  – sistemanıń sheshimi bolsa, onda  $x \neq 0$  hám  $y \neq 0$ .

Sistemanıń ekinshi teńlemesın tómendegishe jazamız:  $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}$ .

Payda bolǵan teńlemege  $x+y=12$  mánisti qoyamız:  $\frac{12}{xy} = \frac{3}{8}$ , bunnan  $xy = 32$ .

Berilgen sistemanı sheshiw tómendegi sistemanı sheshiwge keltiriledi:

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 32. \end{cases}$$

Viet teoremasına keri teorema boyınsha tómendegini payda etemiz:  $x_1=4$ ,  $y_1=8$ ;  $x_2=8$ ,  $y_2=4$ .

**Juwbı:**  $(4; 8)$ ,  $(8; 4)$ . ▲

**4- másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y - xy^2 = 2. \end{cases}$$

△ Sistemanıń ekinshi teńlemesın  $xy(x-y) = 2$  túrinde jazıp alamız. Bunda  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , hám  $x-y \neq 0$ , ekenligi anıq, bul jaǵdayda sistemanıń birinshi teńlemesın ekinshi teńlemege bólip, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2y - xy^2} = \frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)} = \frac{7}{2};$$

$$2(x-y)(x^2+xy+y^2) = 7xy,$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0.$$

Payda bolgan teńlemeni  $x$  ge keltirilgen kvadrat teńleme sıpatında qarap, korenlerin tabamız:

$$x_{1,2} = \frac{5y - \sqrt{25y^2 - 16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2} = \frac{5y - 3y}{4}.$$

Bunnan  $x_1 = 2y$  yaki  $x_2 = \frac{y}{2}$ .

Sistemanıń ekinshi teńlemesine  $x$  tiń  $y$  arqalı tabılğan mánislerin qoyıp, tómendegini payda etemiz:

1) egerde  $x = 2y$  bolsa, onda  $4y^3 - 2y^3 = 2$ , bunnan  $y^3 = 1$  hám  $x = 2$ ;

2) egerde  $x = \frac{y}{2}$  bolsa, onda  $\frac{y^3}{4} - \frac{y^2}{2} = 2$ , bunnan  $y^3 = -8$ ,  $y = -2$  hám  $x = -1$ .

**Juwabı:** (2; 1), (-1; -2).

**5-másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4y^2 = 7, \\ x^3 + 8y^3 = 35. \end{cases}$$

Kublar qosındısı formulasın qollanıp, sistemanıń ekinshi teńlemesin tómendegishe jazamız:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 35.$$

Bul teńlemeni sisteamnıń birinshi teńlemesine bólip, tabamız:  
 $x + 2y = 5$ .



Bul teńlemeden  $2y$  ti  $x$  arqalı ańlatamız:  $2y=5-x$  hám sistemanıń ekinshi teńlemesine qoyamız:

$$\begin{aligned}x^3 + (5-x)^3 &= 35, \\x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 &= 35, \\15x^2 - 75x + 90 &= 0, \\x^2 - 5x + 6 &= 0, \\x_1 &= 3, \quad x_2 = 2.\end{aligned}$$

Sáykes túrde  $y$  tiń mánislerin tabamız:

$$1) \quad 2y=5-3, \text{ bunnan } y_1=1, \quad 2) \quad 2y=5-2, \text{ bunnan } y_2 = \frac{3}{2}.$$

**Juwabı:**  $(3; 1), (2; \frac{3}{2})$ .

**6-másele.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases}x - y = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}.\end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = t$  dep belgilesek,  $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$  boladı. Onda sistemanıń ekinshi

teńlemesii  $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$  kóriniske iye boladı. Bul teńlemenıń eki jaǵın da  $t$  ǵa jikleymiz:

$$t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0.$$

$$\text{Bunnan } t_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}, \quad t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = -\frac{2}{3}.$$

$t > 0$  bolǵanı ushın  $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$  yaki  $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$ , bunnan  $x = \frac{9}{4}y$ .  $x$  ushın bul

teńlikti sistemanıń birinshi teńlemesine qoyıp, payda etemiz:  $\frac{9}{4}y - y = 5$ ,

$$\frac{5}{4}y = 5, \quad y=4, \text{ sonıń ushın } x=9.$$

**Juwabı:**  $(9; 4)$ .

## *Shinigiwlar*

Teñlemeler sistemasın sheshiñ (165–175):

- 165.** 1)  $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$
- 166.** 1)  $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$
- 167.** 1)  $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$
- 168.** 1)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$
- 169.** 1)  $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$
- 170.** 1)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$
- 171.** 1)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x - y = 3, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

$$172. \quad 1) \begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2 y = 18; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2 y - 1 = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$$

$$173. \quad 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2 y = 12; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$$

$$174. \quad 1) \begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$$

$$175. \quad 1) \begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{41}{20}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$$

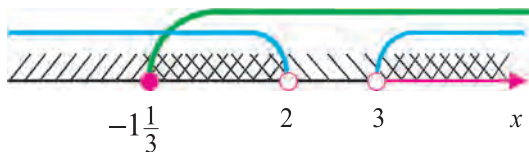
## 15-§. EKinshi DÁREJELI BIR BELGISIZLI TEŇSIZLIKLER SISTEMALARI

**1- másele.** TeŇsizlikler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

△ Bul teŇsizliklerden birinshisi kvadrat teŇsizlik, ekinshisi bola sızıqlı teŇsizlik. Birinshi teŇsizliktiń sheshimleri 6-paragraftaǵı 2-máselede kórsetilgendeı  $x < 2$  hám  $x > 3$  aralıqlarındaǵı barlıq sanlardan ibarat. Ekinshi teŇsizliktiń sheshimleri bolsa  $x \geq -1\frac{1}{3}$  aralıqtaǵı sanlar boladı. San kósherinde birinshi hám ekinshi teŇsizliktiń sheshimlerin tabıwdı kórseteyik. Bun-

da sistemaniñ eki teñsizligin bir waqıttıñ ózinde qanaatlandırıwshı sanlar  $-1\frac{1}{3} \leq x < 2$  hám  $x < 3$  aralıqlarınan ibarat (44-súwret).



44-súwret.

**Juwapı:**  $-1\frac{1}{3} \leq x < 2, x < 3$ . ▲

**2- másele.** Teñsizlikti sheshiñ:

$$|x^2 - x - 1| < 1.$$

△  $|x^2 - x - 1| < 1$  teñsizlik eki tárepleme teñsizlikke teñ kúshli ekenin bilemiz:

$$-1 < x^2 - x - 1 < 1.$$

Bul eki teñsizlikten ibarat sistemağa teñ kúshli:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

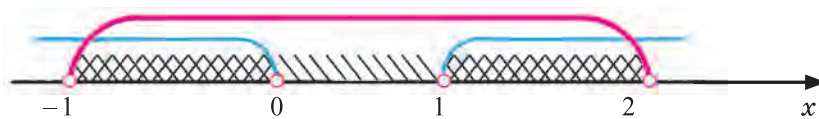
yaki

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Dáslep, birinshi teñsizlikti sheshemiz:  $D = (-1)^2 - 4(-2) = 9 > 0$ , demak,  $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ ,  $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$ . Bunnan birinshi teñsizlikti qanaatlandırıwshı sanlar  $-1 < x < 2$  aralıǵı ekenligi kelip shıǵadı.

Ekinshi teñsizlikti sheshemiz:  $x^2 - x = x(x-1) > 0$ . Demek, bul teñsizliktiñ sheshimi  $x < 0$  hám  $x > 1$  aralıqlardaǵı barlıq sanlar boladı.

Eki teñsizliktiñ sheshimlerin san kósherinde kórsetemiz (45-súwret).



45-сúwret.

Bunnan sistemanıń sheshimi  $-1 < x < 0$  hám  $1 < x < 2$  aralıqlarda jatqan barlıq sanlardan ibarat ekenligi kelip shıǵadı.

**Juwapı:**  $-1 < x < 0$ ,  $1 < x < 2$ . ▲

**3-másele.** Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

$$y = \sqrt{3x^2 - x - 14} + \sqrt{-x}.$$

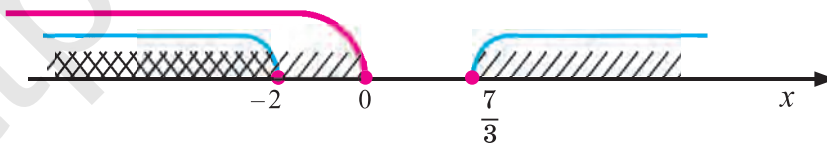
△ Kvadrat korende turǵan sanlar teris bolmawı shárt bolǵanı ushın, berilgen funkciyanıń anıqlanıw oblastı tómendegi teńsizlikler sistemasınıń sheshiminen ibarat:

$$\begin{cases} 3x^2 - x - 14 \geq 0, \\ -x \geq 0. \end{cases}$$

Dáslep, birinshi teńsizlikti sheshemiz.  $3x^2 - x - 14$  kvadrat úsh aǵzalı diskriminantı  $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14) = 169$ , demek,  $x_1 = \frac{1-13}{6} = -2$ ,  $x_2 = \frac{1+13}{6} = \frac{7}{3}$ . Sonıń ushın hám kvadrat úsh aǵzalınıń shaqaları joqarıǵa baǵdarlanganı ushın birinshi teńsizliktiń sheshimleri  $x \leq -2$  hám  $x \geq \frac{7}{3}$  aralıqlarınan ibarat.

Ekinshi teńsizlikti  $-1$  ge jiklep, onıń sheshimleri  $x \leq 0$  aralıqtan alınǵan barlıq sanlardan ibarat ekenligin kóriwimizge boladı.

Birinshi hám ekinshi teńsizliklerdiń sheshimlerin san kósherinde kórsetemiz (46-súwret).



46-súwret.

Bunnan sistemanıń sheshimi  $x \leq -2$  ekenligi kelip shıǵadı.

**Juwapı:**  $x \leq -2$ . ▲

## *Shinigiwlar*

**176.** Teńsizlikler sistemasın sheshiń:

$$1) \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 < 0, \\ 4x + 9 > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x^2 + 5x - 2 \leq 0, \\ 2x + 7 < 0. \end{cases}$$

**177.** Teńsizlikti sheshiń:

$$1) |x^2 - 6x| < 27;$$

$$2) |x^2 + 6x| \leq 27;$$

$$3) |x^2 + 4x| < 12;$$

$$4) |x^2 - 4x| \leq 12.$$

Teńsizlikler sistemaların sheshiń (**178–181**):

$$178. \quad 1) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -x^2 + 2x + 3 \leq 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + x + 6 > 0. \end{cases}$$

$$179. \quad 1) \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

$$180. \quad 1) \begin{cases} 7x - x^2 > 0, \\ 36 - x^2 > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 8x + x^2 < 0, \\ 49 - x^2 > 0. \end{cases}$$

$$181. \quad 1) \begin{cases} -x^2 + x + 20 \leq 0, \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + 4x < 0, \\ -x^2 + x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

**182.** Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

$$1) y = \sqrt{-x^2 - 6x - 8} + \sqrt{\frac{1}{3}x + 2},$$

$$2) y = \sqrt{x - x^2} - \sqrt{-x^2 + 12x - 35}.$$

### 16-§. ÁPIWAYÍ TEŇSIZLIKLERDI DÁLILLEW

Teńsizliklerdi dálillewdiń hár túrli usılları bar. Olardan ayırımlarınıń qollanılıwın kórip shıǵamız.

**1-másele.** Eki  $a$  hám  $b$  oń sanınıń arifmetikalıq ortası, usı sanlardıń geometriyalıq ortasınan kishi emesligin dálilleń:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

△ Теңsizlikti tikkeley anıqlama boyınsha dálilleymiz, bunda  $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$  ekenin dálillew talap etiledi.

Bul teñsizliktiñ shep bóleginiñ formasın almasırap, tómendegini payda etemiz:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

(1) qatnasta teñlik belgisi tek  $a=b$  bolğanda ğana durıs bolıwın aytıp ótemiz. ▲

**2-másele.** Eki  $a$  hám  $b$  oń sanınıñ geometriyalıq ortası, usı sanlardıñ gormonikalıq ortasınan kishi emesligin dálilleñ:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (2)$$

△ Bul teñsizlikti *aldın dálillengen* (1) *teñsizlikten paydalanıp* hám alımı ózgermey bólimi kishileskende, oń bólshek úlkeyiwinen paydalanıp dálilley-miz:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}. \quad \blacktriangle$$

**3-másele.** Hár qanday  $a$  oń san ushın teñsizlikti dálilleñ:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2. \quad (3)$$

△ Bul teñsizlikti *kerisinshe pikir júritiw usılı* menen dálilley-miz. Bunda (3) teñsizlik  $a$  nıñ geybir oń mánisinde orınlanbadı dep oylasaq, yaǵnıy

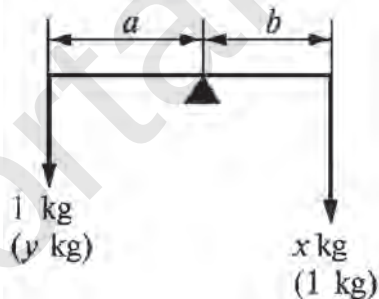
$$a + \frac{1}{a} < 2$$

теңсизлик orinli bolsin. Теңсизликтің екі тәрепин де  $a$  көбейтип, төмендегини payda etemiz:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

Yaғniy,  $a^2 + 1 - 2a < 0$  yaki  $(a - 1)^2 < 0$ , bul bolsa naduris теңсизлик. Sebebi, hár qanday haqıyqiy sannıń kvadratı (yaғniy  $(a - 1)^2$  ta) teris emes. Payda bolğan qarama-qarsılıqtan (3) теңсизлик hár qanday  $a$  oń bolğanda duris теңсизлик ekenligi kelip shıǵadı. ▲

**4-másele.** Bir satıwshi. almalarđı qol tárezide ólshep atır. Qarıydar 1 kg alma satıp aldı, keyin jáne satıwshıdan almalarđı ekinshi mártebe ólshegende almalar menen taslardıń orınların almasırtıp ólshewdi ótinish etti hám solay etip jáne 1 kg alma aldı. Eger tárezi durislanbağan bolsa, kim zıyan kóredi?



47-rasm.

△ Aytayıq, táreziniń iyinleri  $a$  hám  $b$  bolsın (47-súwret). Súwretten kórinip turıptı,  $a \neq b$ .

Birinshi mártebe ólshegende qarıydar  $x$  kilogramm alma aldı. Fizika kursınan málim bolğanınday,  $x \cdot b = 1 \cdot a$ , bunnan  $x = \frac{a}{b}$ . Ekinshi mártebe ólshewde qarıydar  $y$  kilogramm alma aldı. Teppe-teńlik shártinen  $y \cdot a = 1 \cdot b$ , bunnan

$y = \frac{b}{a}$ . Solay etip,  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  kilogramm alma satıp alınğan.

$\frac{a}{b}$  hám  $\frac{b}{a}$  sanlarınıń arifmetikalıq ortası hám geometriyalıq ortası ushın теңсизlikten paydalanıp, төмендегини payda etemiz:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$



bunnan  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ .

**Juwabi:** satıwshı zıyan kóredi. ▲

### Shınıǵıwlar

**183.** Qálegen haqıyqıy  $a, b, x$  larda teńsizliklerdiń orınlı ekenligin dálilleń:

$$1) \frac{a^2+1}{2} \geq a; \quad 2) \frac{b^2+16}{4} \geq b; \quad 3) \frac{2x}{x^2+1} \leq 1; \quad 4) \frac{2x}{4x^2+9} \leq \frac{1}{6}.$$

**184.** Egerde  $ab > 0$  bolsa, teńsizlikti dálilleń:

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \quad 2) (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

**185.** Egerde  $a \geq -1$ ,  $a \neq 0$  bolsa, teńsizlikti dálilleń:

$$\frac{4a^2 + a + 1}{4|a|} \geq \sqrt{a+1}.$$

**186.**  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  hám  $a \neq b$  bolsa, onda  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$  hám  $2\sqrt{2(a+b)}\sqrt{ab}$  lardıń qaysı biri úlken?

**187.** Teńsizlikti dálilleń:

$$(a+1)(a+2)(a+3)(a+6) > 96a^2,$$

bunda  $a > 0$ .

**188.** Egerde  $a > 0$  bolsa, teńsizlikti dálilleń:

$$\frac{a+4}{2} + \frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}.$$

**189.** Egerde  $a, b, c, d$  lar oń sanlar bolsa, onda

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

teńsizlikti dálilleń.

**190.** Egerde  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  hám  $c > 0$  bolsa, onda  $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$  bolıwın dálilleń:

**191.** Egerde  $a > 0$ ,  $b > 0$  bolsa, onda  $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$  bolıwın dálilleń:

**192.** Egerde  $a > 0$ ,  $b > 0$  hám  $c > 0$  bolsa, onda

$$\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$$

teńsizlik ornın bolıwın dálilleń:

## *II bapqa tiyisli shıńǵıwlar*

**193.** Berilgen teńlemelerdi bir ózgeriwshi boyınsha kvadrat úsh aǵzalı túrinde jazıń:

1)  $2y^2 - xy + 3$ , egerde  $y = 3x + 1$ ;

2)  $2xy + 3x^2 - 7$ , egerde  $x = 2y + 1$ .

**194.** Teńlemeler sistemasın ornına qoyıw usılı menen sheshiń:

1)  $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

**195.** Viet teoremasına kerı teoremanı qollanıp, teńlemeler sistemasın sheshiń:

1)  $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (196–198):

- 196.** 1)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$
- 197.** 1)  $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$
- 198.** 1)  $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Teńlemeler sistemasın sheshiń (199–204):

- 199.** 1)  $\begin{cases} (x + 2)(y - 3) = 1, \\ \frac{x + 2}{y - 3} = 1; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} (y - 3)(x + 1) = 4, \\ \frac{x + 1}{y - 3} = 1. \end{cases}$
- 200.** 1)  $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$
- 201.** 1)  $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$
- 3)  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1)  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1)  $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1)  $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Eki tañbalı san óziniñ sanlarınıñ qosındısınan úsh ese úlken. Sanlardıñ qosındısıniñ kvadratı bolsa, berilgen sannan úsh ese úlken. Usı sandı tabıñ.

2) Jup san óziniñ sanları qosındısınan 4 esege úlken. Sanlardıñ qosındısıniñ kvadratı bolsa, berilgen sannan  $\frac{3}{2}$  bólegin quraydı. Usı sandı tabıñ.

206. 1) Eki kvadrat tárepleriniñ qatnası 5:4. Egerde hárbir kvadrattıñ tárepleri 2 cm ge kemeytilse, onda payda bolğan kvadratlar maydanınıñ ayırması  $2,8 \text{ cm}^2$  qa teñ boladı. Berilgen kvadratlardıñ táreplerin tabıñ.

2) Tuwrı tórtmúyeshliktiñ uzınlıgınıñ enine qatnası 3:2. Egerde olardı 1 cm den arttırsaq, payda bolğan tuwrı tórtmúyeshliktiñ maydanı birins-hi tuwrı tórtmúyeshliktiñ maydanınan  $3 \text{ cm}^2$  qa úlken boladı. Birinshi tórtmúyeshliktiñ uzınlıgı hám enenin tabıñ.

207. Teñsizlikler sistemasın sheshiñ:

1)  $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$

3)  $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

- 208.** 1) Egerde  $xy = 9$  hám  $x > 0$  ekeni belgili bolsa,  $x + y$  tiń eń kishi mánisin tabıń.  
2) Egerde  $ab = 8$  hám  $b > 0$  bolsa, onda  $2a+b$  nıń eń kishi mánisin tabıń.

**209.** Teńlemenıń eń kishi mánisin tabıń:

$$\begin{array}{ll} 1) 4x + \frac{81}{25x}, (x > 0); & 2) \frac{(x+3)(x+12)}{x}, x > 0; \\ 3) \frac{4y^2 - 7y + 25}{y}, (y > 0); & 4) \frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}. \end{array}$$

**210.** Egerde  $x+y=10$  hám  $x > 0$ ,  $y > 0$  bolsa, onda  $xy$  tiń eń úlken mánisin tabıń.

**211.** Egerde  $2x+y=6$  hám  $x > 0$ ,  $y > 0$  bolsa, onda  $xy$  tiń eń úlken mánisin tabıń.

**212.** Teńsizlikti dálilleń:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

## II Bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwlar

**1.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$

- A)  $x = -4$ ,  $y = -1$ ;                      B)  $x = 1$ ,  $y = -4$ ;  
C)  $x = 4$ ,  $y = -1$ ;                      D)  $(1; 4)$  va  $(4; 1)$ .

**2.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:  $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$

- A)  $x = 3$ ,  $y = 1$ ;                      B)  $x = 5$ ,  $y = -1$ ;  
C)  $x = 4$ ,  $y = 0$ ;                      D)  $x = 1$ ,  $y = 3$ .

**3.** Eki sannıń ayırması 3 ke, olardıń kóbeymesi 28 ge teń. Usı sanlardı tabıń.

- A) 7 hám 4;      B) 5 hám 2;      C) 14 hám 2;      D) 11 hám 8.

4. Tuvrı tórtmúyeshliktiń perimetri 30 m ge, maydanı 56 m<sup>2</sup> qa teń. Onıń biyikligi eninen neshe metrge uzın?  
A) 1,2 m;      B) 1 m;      C) 2 m;      D) 2,5 m.
5. 60 m aralıqtı bir velosipedshi ekinshisine qaraǵanda 1 saat keshlew basıp ótti. Eger birinshi velosipedshiniń tezligi ekinshisiniń tezliginen 5 km/saatqa kem bolsa, hárbir velosipedshiniń tezligin tabıń.  
A) 20 km/s, 25 km/s;      B) 10 km/h, 15 km/s;  
C) 15 km/s, 20 km/s;      D) 12 km/h, 17 km/s.
6. Teńlemeler sistemasın sheshiń: 
$$\begin{cases} x + 20y + 10xy = 40, \\ x + 20y - 10xy = -8. \end{cases}$$
  
A) (0,6; 4) hám (12; 0,2);      B) (0,4; 6) hám (0,12; 2);  
C) (4; 0,6) hám (12; 0,2);      D) (4; 0,2) hám (12; 0,6).
7. Teńlemeler sistemasın sheshiń: 
$$\begin{cases} x - y^2 = -3, \\ xy^2 = 54. \end{cases}$$
  
A) (6; 4) hám (4; 3);      B) (-3; 6) hám (6; -3);  
C) (6; 3) hám (3; -6);      D) (6; 3) hám (6; -3).
8. Teńlemeler sistemasın sheshiń: 
$$\begin{cases} x - 5y = -20, \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 2. \end{cases}$$
  
A) (-10; 5) hám (2; 5);      B) (-10; 2) hám (5; 5);  
C) (5; -10) hám (-10; 2);      D) (5; 5) hám (-2; 10).
9. Teńlemeler sistemasın sheshiń: 
$$\begin{cases} x^3 - 64y^3 = 56, \\ x^2y - 4xy^2 = 4. \end{cases}$$
  
A) (4;  $\frac{1}{2}$ ) va (-2; -1);      B) (-2;  $\frac{1}{2}$ ) va (4; -1);  
C) (4; 1) va (-4; -2);      D) (-2; -1) va (2; 1).

10. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\frac{y+5}{x-2}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

A)  $(-1;12)$ ;      B)  $(12;-1)$ ;      C)  $(-1;11)$ ;      D)  $(11;-1)$ .

11. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

A)  $-4 < y < \frac{2}{3}$ ;    B)  $-4,5 < y < \frac{2}{3}$ ;    C)  $x > -4,5$ ;    D)  $x < \frac{2}{3}$ .

12. Teńsizliklerdi sheshiń:  $|x^2 + x - 1| \leq 1$ .

A)  $-2 \leq x \leq 1, 2 < x \leq 3$ ;      B)  $-2 \leq x \leq -1, 0 \leq x \leq 1$ ;  
C)  $-1 \leq x \leq 0, 1 < x \leq 2$ ;      D)  $x \leq -2, x \geq 1$ .



### Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máseleler

**Másele.** Eki júk mashinası birgelikte islep, júkti 6 saatta tasıwı kerek edi. Ekinshi mashina jumıs baslawğa kesh qalğanı ushın, ol kelemen degenshe birinshi mashina tolıq júktiń  $\frac{3}{5}$  bólegin tasıp boldı. Júktiń qalğan bólegin tek ekinshi mashina tasıdı hám sonıń ushın júkti tasıwğa 12 saat waqıt ketti. Júkti hár bir mashinanıń jalǵız ózi qansha waqıtta tasıǵan bolar edi?

△ Júk mashinaları tasıwları kerek bolǵan júkti bir dep alayıq. Tolıq júkti bólek-bólek tasıwı ushın birinshi mashina sarplaytuǵın waqıttı  $x$  saat, ekinshi mashina sarplaytuǵın waqıttı bolsa  $y$  saat arqalı belgileyik. Onda bir saatta birinshi mashina júktiń  $\frac{1}{x}$  bólegin, ekinshisi  $\frac{1}{y}$  bólegin tasıǵan bolar edi.

Birgelikte islep, olar bir saatta toliq júktiń  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$  bólegin tasıǵan bolar edi hám máseleniń shártinde berilgendeı 6 saatta tasıǵan bolar edi. Sol sebepli,  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1$ .

Biraq, negizinde birinshi mashina, júktiń  $\frac{3}{5}$  bólegin tasıwǵa óz waqtınıń  $\frac{3}{5}$  bólegin jumsadı, júktiń qalǵan bólegin bolsa ekinshi mashina tasıdı hám oǵan óz waqtınıń  $\frac{2}{5}$  bólegin jumsadı. Bul jaǵdayda toliq júkti tasıwǵa 12 saat ketkenligin esapqa alsaq, ekinshi teńlemeni payda etemiz:

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12.$$

Másele tómendegi teńlemeler sistemasın sheshiwge keltiriledi:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot 6 = 1, \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = 12. \end{cases}$$

Dáslep, sistemanı ápiwayılastırıp, keyin onı ornına qoyıw usılı menen sheshemiz:

$$\begin{cases} 6x + 6y = xy, \\ 3x + 2y = 60, \end{cases}$$

$$3x = 60 - 2y, \quad 120 - 4y + 6y = (20 - \frac{2}{3}y)y,$$

$$60 + y = 10y - \frac{1}{3}y^2,$$

$$\text{bunnan, } y^2 - 27y + 180 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{27}{2} - \sqrt{\frac{729}{4} - 180} = \frac{27}{2} - \frac{3}{2}, \quad y_1 = 15, \quad y_2 = 12.$$



$x = -20 - \frac{2}{3}y$  formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız

$$x_1 = 10, x_2 = 12.$$

**Juwabi:** 10 saat hám 15 saat – egerde mashinalardıń júk kóteriw imkaniyatları túrlishe bolsa;

12 saat hám 12 saat – egerde mashinalardıń júk kóteriw imkaniyatları birdey bolsa. ▲

### *Máseleler*

1. 1) Birinshi tamashalaw zalında 420, ekinshi zalda 480 orınlıq bar. Ekinshi zalda birinshisine qaraǵanda 5 qatarǵa kem, biraq hárbir qatarda birinshi zaldaǵı hárbir qatardan 10 orınlıqqa kóp. Birinshi zaldıń hárbir qatarında neshe orınlıq bar?

2) Qızıl zalda 320, kók zalda 360 orınlıq bar. Qızıl zalda kók zaldaǵıǵa qaraǵanda 2 qatarǵa kóp, biraq hárbir qatarında kók zaldıń hárbir qatarındaǵıǵa qaraǵanda 4 ewden az orınlıq bar. Qızıl zalda neshe qatar bar?

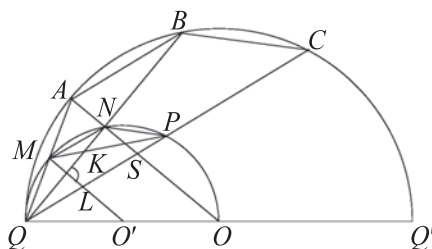
2. 1) Eki nasos birgelikte  $80 \text{ m}^3$  kólemli basseyndi toltıradı. Egerde ónimdarlıǵın  $1\frac{1}{3}$  ese asırǵan birinshi nasostıń tek ózi islegende basseyn toltırıwǵa 2 saat kóbirek waqıt kerek bolar edi. Egerde tek ǵana ekinshi nasos óz ónimdarlıǵın saatına  $1 \text{ m}^3$  qa kemeytip islegende, basseyndi toltırıwǵa ketken waqıt  $3\frac{1}{3}$  ese kóbirek bolar edi (eki nasos birgelikte islegendege waqıtqa salıstırǵanda). Hárbir nasostıń ónimdarlıǵın tabıń.

2) Hár túrli qánigeliktegi jumısshılardan ibarat eki brigada detallar tayarlaydı, bunda hárbir jumısshı jumıs kúni dawamında 2 detal tayarlaydı. Dáslep, tek birinshi brigada islep 32 detal tayarladı. Keyin ekinshi brigadanıń ózi islep, jáne 48 detal tayarladı. Bul jumısshılardıń barlıǵına 4 kún waqıt ketti. Sonnan keyin birgelikte 6 kún islep, 240 detal tayarladı. Hárbir brigadada neshewden jumısshı bar?

3. 1) Ónimniń yarımı 10 % payda menen, ekinshi yarımınıń yarımı 20 % payda menen satıldı. Egerde barlıq ónimdi satıwdan túsken ulıwma payda 12 % ti qurasa, ónimniń qalğan sheregi neshe procent paydağa satılğan?  
 2) Sawda firması dúkanlarğa tovardı qosımsha baha menen jetkerip beredi: tovarlardıń  $\frac{3}{5}$  bólegine 5 % ústeme baha qoyıp, qalğan tovarlardıń yarımına 4 % ústeme baha qoyıp satıldı. Egerde barlıq tovarlarğa qoyılğan ústeme baha 7 % ti quraytuğın bolsa, qalğan tovarlardıń ekinshi yarımına neshe procent esabında qanday ústeme baha qoyılğan?
4. 1) Eki zattıń aralaspası bar. Egerde bul aralaspaga ekinshi zattan 3 kg qosılsa, onda onıń aralaspadağı muğdarı procentlerde eki esege kóbeyedi, egerde baslanğısh aralaspaga birinshi zattan 3 kg qosılsa, onda ekinshi zattıń muğdarı procent esabında eki ese azayadı. Hárbir zattıń baslanğısh aralaspadağı massasın tabıń.  
 2) Eki suyıqlıqtıń aralaspası bar. Egerde bul aralaspaga birinshi suyıqlıqtan 8 litr quyılsa, onda onıń aralaspadağı konsentraciyası eki esege kóbeyedi, egerde baslanğısh aralaspaga ekinshi suyıqlıqtan 8 litr quyılsa, onda birinshi suyıqlıqtıń konsentraciyası bir yarım esege azayadı. Hárbir suyıqlıqtıń aralaspadağı kólemin tabıń.
5. Samolyot  $A$  hám  $B$  ға shekem samal bağıtında hám  $B$  dan  $A$  ға samal bağıtına qarsı ushıp ótti, bunda samaldıń tezligi ózgermedi. Basqa waqıtta samolyot usı jónelis boyınsha reysti samalsız hawa-rayında ámelge asırdı. Eki jaǵdayda da samolyot motorları birdey quwatta isleydi. Qaysı jaǵdayda párwazǵa azlaw waqıt ketedi?
6. Eki traktorshı jer maydanın  $p$  kúnde súrip shıǵadı. Egerde birinshi traktorshı maydannıń yarımın súrse, al keyin ekinshi traktorshı qalğan bólegin súrse, onda  $q$  kún waqıt kerek bolar edi.  $q \geq 2p$  ekenligin dálilleń.

### III BAP.

# TRIGONOMETRİYA ELEMENTLERİ

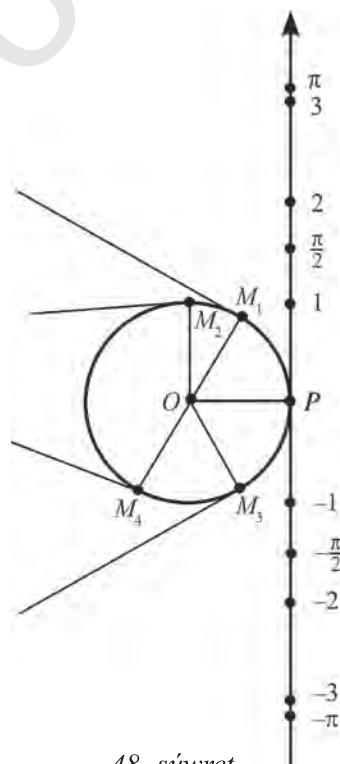


## 17-§. MÚYESHTIŇ RADIÁN ÓLSHEMI

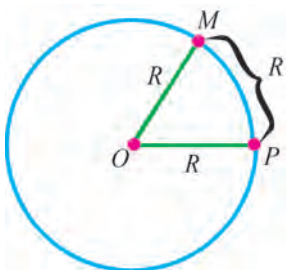
Meyli, vertikal tuwrısı orayı  $O$  noqatında hám radiusı 1 ge teń bolğan sheńberge  $P$  noqatında urınsın (48-súwret). Bul tuwrını bası  $P$  noqatında bolğan san kósheri dep, al joqarıǵa qaraǵan baǵıttı oń baǵıt dep esaplaymız. San kósherinde uzınlıq birliǵi retinde sheńberdiń radiusın alamız. Tuwrınıń boyınan bir neshe

noqatı belgileyik:  $\pm 1, \pm \frac{\pi}{2}, \pm 3, \pm \pi$  ( $\pi$  – shama menen 3,14 ke teń ekenin esletip ótemiz). Bul tuwrını sheńberdiń  $P$  noqatına bekitilgen sozılmaıtuǵın jip sıpatında kóz aldığa keltirip, onı sheńberge oray baslaymız. Bunda san tuwrısınıń (kósheriniń), máselen,  $1, \frac{\pi}{2}, -1, -2$  koordinatalı noqatları, sheńberdiń sáykes túrde  $M_1, M_2, M_3, M_4$  noqatlarınan ótip,  $PM_1$  doǵasınıń uzınlıǵı 1 ge teń,  $PM_2$  doǵasınıń uzınlıǵı  $\frac{\pi}{2}$  ge teń boladı hám t.b.

Solay etip, *tuwrınıń hárbir noqatına sheńberdiń qanday da bir noqatı sáykes keltiriledi.*



48- súwret.



49- súwret..

Tuwrınıń koordinatası 1 ge teń bolǵan noqatına  $M_1$  noqatı sáykes keltirilgenlikten,  $POM_1$  múyeshin birlik múyesh dep esaplaw hám usı múyeshtiń ólshemi menen basqa múyeshlerdi ólshew tábiyiy boladı. Máselen,  $POM_2$  múyeshin  $\frac{\pi}{2}$  ge teń,  $POM_3$  múyeshin  $-1$  ge teń,  $POM_4$  múyeshin  $-2$  ge teń dep esaplaw kerek. Múyeshlerdi ólshewdıń bunday usılı matematika hám fizikada keń qollanıladı. Múyeshlerdiń usılayınsha ólsheniwine múyeshlerdiń *radianlarda ólsheniwi* dep aytıladı.  $POM_1$  múyeshi 1 radianǵa (1 rad) teń múyeshi dep aytıladı. Sheńberdiń  $PM_1$  doǵasınıń uzınlıǵı radiusqa teń ekenligin atap ótemiz (48-súwret).

Endi qálegen  $R$  radiuslı sheńberdi qaraymız hám onıń uzınlıǵı  $R$  ge teń bolǵan  $PM$  doǵasın hám  $POM$  múyeshin belgileybiz (49-súwret).



**Uzınlıǵı sheńberdiń radiusına teń bolǵan doǵaǵa tirelgen oraylıq múyesh 1 radian múyesh dep ataladı.**

Bunda 1 radian múyesh uzınlıǵı  $R$  ge teń bolǵan doǵanı tartıp turadı deymiz.

1 rad múyeshtiń graduslıq ólshemin tabayıq.  $180^\circ$  lıq oraylıq múyeshti uzınlıǵı  $\pi R$  (yarım sheńber) ge teń bolǵan doǵa keripo turǵanlıqtan, uzınlıǵı  $R$  bolǵan doǵanı  $\pi$  ese kishi bolǵan múyeshti kerip turadı, yaǵnıy

$$1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

$\pi \approx 3,14$  bolǵanlıqtan  $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$  boladı..

Eger múyesh  $\alpha$  radiannan ibarat bolsa, onda onıń graduslıq ólshemi tómendegige teń boladı:

$$1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} a \right)^\circ.$$

(1)

**1-másele.** 1)  $\pi$  rad; 2)  $\frac{\pi}{2}$  rad; 3)  $\frac{3\pi}{4}$  rad ға тең мýyeshtiñ graduslıq ólshemin tabıń.

△ (1) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

$$1) \pi \text{ rad} = 180^\circ; \quad 2) \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ; \quad 3) \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 135^\circ. \quad \blacktriangle$$

1° lıq mýyeshtiñ radian ólshemin tabamız. 180° lıq mýyeshtıń ...  $r$  ға тең болғанлықтан,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

boladı.

Eger mýyeshtıń  $a$  gradusqa тең bolsa, onda onıń radianlıq ólshemi,

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ rad} \quad (2)$$

ға тең

**2-másele.** 1) 45° qa тең мýyeshtiñ; 2) 15° qa тең мýyeshtiñ radian ólshemin tabıń.

△ (2) formula boyınsha tómendegilerge iye bolamız:

$$1) 45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}; \quad 2) 15^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ rad} = \frac{\pi}{12} \text{ rad}. \quad \blacktriangle$$

Máseleler sheshiwde kóbirek ushırasatuğın mýyeshtlerdiñ graduslıq ólshemin hám olarğa sáykes radianlıq ólshemin keltiremiz:

|        |   |                 |                 |                 |                 |       |
|--------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------|
| Gradus | 0 | 30              | 45              | 60              | 90              | 180   |
| Radian | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |

Ádette, mýyeshtiñ ólshemi radianlarda berilse, «rad» ataması túsirip qaldırıladı.

Mýyeshtiñ radianlıq ólshemi sheńber doğalarınıń uzınlıqların esaplaw ushın qolaylı. 1 rad mýyeshtıń uzınlıǵı  $R$  radiusqa тең doğanı kerip turğanlıqtan  $\alpha$  radian mýyeshtıń

$$l = \alpha R \quad (3)$$

uzınlıqtaǵı doğanı kerip turadı.

**3-másele.** Qala kurantlariniń minutlıq tiliniń ushı radiusı  $R \approx 0,8$  m bolǵan sheńber boylap háreket etedi. Bul minutlıq tiliniń ushı 15 min dawamında qanday joldı basıp ótedi?

△ Saattıń minutlıq tili 15 min dawamında  $\frac{\pi}{2}$  radiangá teń múyeshke buriladı. (3) formula boyınsha  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  bolǵanda mınaǵan iye bolamız:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3,14}{2} \cdot 0,8 \text{ m} \approx 1,3 \text{ m}.$$

**Juwabı:** 1,3 m. ▲

(3) (3) formula sheńberi radiusı  $R=1$  bolǵanda júdá ápiwayı kóriniske iye. Bul jaǵdayda doǵanıń uzınlıǵı usı doǵa menen tartılıp turǵan oraylıq múyeshtiń shamasına teń, yaǵnıy  $l = \alpha$  boladı. Radian ólsheminiń matematika, fizika, mexanika hám basqa pánlerde qollanılıwınıń qolaylılıǵı usınıń menen túsindiriledi.

**4-másele.** Radiusı  $R$  bolǵan dóńgelek sektor  $\alpha$  rad múyeshke iye. Usı sektordıń maydanı

$$S = \frac{R^2}{2} \alpha$$

ge teń ekenligin dálilleń, bunda  $0 < \alpha < \pi$ .

△  $\pi$  rad lıq dóńgelek sektordıń (yarım dóńgelek) maydanı  $\frac{\pi R^2}{2}$  ge teń.

Sonlıqtan 1 rad sektordıń maydanı  $\pi$  ese kishi, yaǵnıy  $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$ . Demek,  $\alpha$  rad sektordıń maydanı  $\frac{R^2}{2} \alpha$  ge teń. ▲

### Shınıǵıwlar

**213.** Gradusta berilgen múyeshtiń radian ólshemlerin tabıń:

- 1)  $40^\circ$ ;      2)  $120^\circ$ ;      3)  $105^\circ$ ;      4)  $150^\circ$ ;  
5)  $75^\circ$ ;      6)  $32^\circ$ ;      7)  $100^\circ$ ;      8)  $140^\circ$ .

**214.** Radianda berilgen múyeshtiń gradus ólshemin tabıń:

- 1)  $\frac{\pi}{6}$ ;      2)  $\frac{\pi}{9}$ ;      3)  $\frac{2}{3}\pi$ ;      4)  $\frac{3}{4}\pi$ ;      5) 2;  
6) 4;      7) 1,5;      8) 0,36;      9)  $\frac{2\pi}{5}$ ;      10) 4,5.

**215.** Sanlardı 0,01 ge shekemgi dállek penen jazıń:

- 1)  $\frac{\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{3}{2}\pi$ ; 3)  $2\pi$ ; 4)  $\frac{2}{3}\pi$ ; 5)  $\frac{3\pi}{4}$ .

**216.** Sanlardı salıstırın:

- 1)  $\frac{\pi}{2}$  hám 2; 2)  $2\pi$  hám 6,7; 3)  $\pi$  hám  $3\frac{1}{5}$ ;  
4)  $\frac{3}{2}\pi$  hám 4,8; 5)  $-\frac{\pi}{2}$  hám  $-\frac{3}{2}$ ; 6)  $-\frac{3}{2}\pi$  hám  $-\sqrt{10}$ .

**217.** (Awızeki.) a) teń tárepli úshmúyeshlik; b) teń qaptallı túwrı múyeshli úshmúyeshlik; d) kvadrat; e) durıs altı múyeshliktiń múyeshleriniń graduslıq hám radian ólshemlerin anıqlań.

**218.** Eger sheńberdiń 0,36 m uzınlıqtaǵı doǵası 0,9 rad oraylıq múyeshti tartıp tursa, onıń radiusın esaplań.

**219.** Eger sheńberdiń radiusı 1,5 cm ge teń bolsa, sheńberdiń uzınlıǵı 3 cm bolǵan doǵası tartıp turǵan múyeshtiń radian ólshemin tabıń.

**220.** Dóngelek sektor doǵası  $\frac{3\pi}{4}$  rad múyeshti tartıp turadı. Eger dóngelektiń radiusı 1 cm ge teń bolsa, sektordıń maydanın tabıń.

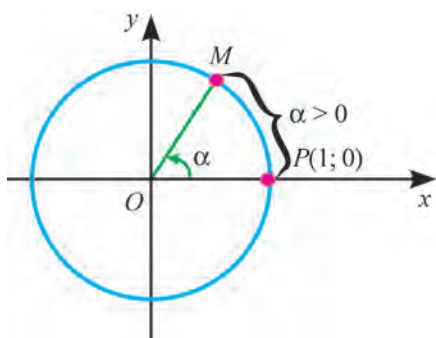
**221.** Dóngelektiń radiusı 2,5 cm ge teń, al dóngelek sektordıń maydanı 6,25 cm<sup>2</sup> qa teń. Usı dóngelek sektordıń doǵası tartıp turǵan múyeshin tabıń.

## 18-§.

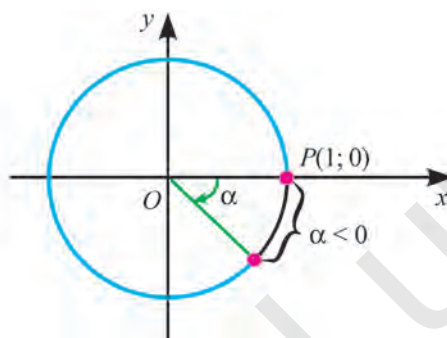
## NOQATTÍ KOORDINATALAR BASÍ ÁTIRAPÍNDÁ BURÍW

Aldıńǵı paragrafta san tuwrısınıń noqatları menen sheńber noqatları ortasında sáykeslik ornatiwdıń kórgizbeli usılınan paydalandıq. Endi haqıyqıy sanlar menen sheńber noqatları ortasında sheńber noqatların burıw járdeminde sáykeslik ornatiw múmkinligin kórsetemiz.

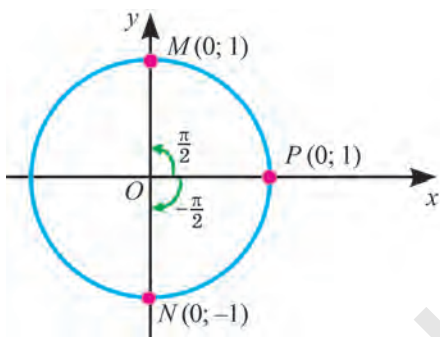
Koordinata tegisliginde radiusı 1 ge teń hám orayı koordinata basında jatqan sheńberdi qaraymız. Ol birlik sheńber delinedi. Birlik sheńberdiń noqatın koordinata bası átirapında  $\alpha$  radian múyeshke burıw túsiniǵın kiritemiz (bunda  $\alpha$  – qálegen haqıyqıy san).



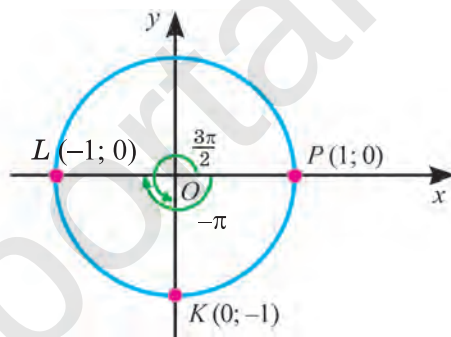
50- súwret.



51- súwret.



52- súwret.



53- súwret.

1. Meyli,  $\alpha > 0$  bolsin. Noqat birlik sheńber boylap  $P$  noqatınan saat tili bağıtına qarama-qarsı häreket etip,  $\alpha$  uzınlıqtağı joldı basıp ótti dep aytayıq (50-súwret). Joldıń sońğı noqatın  $M$  menen belgileymiz.

Bul jaǵdayda  $M$  noqatı  $P$  noqatın koordinata bası átirapında  $\alpha$  radian múyeshke burıw arqalı payda etiledi, dep aytamız.

2. Meyli,  $\alpha < 0$  bolsin. Bul jaǵdayda  $\alpha$  radian múyeshke burıw noqatın qozǵalı häreketi saat tiliniń qozǵalı bağıtında júzege kelgenligin hám de noqat  $|\alpha|$  uzınlıqtağı joldı basıp ótkenligin bildiredi (51-súwret).

0 rad ǵa burıw noqatın óz ornında qalǵanlıǵın ańlatadı.

### Мисаллар:

1)  $P(1; 0)$  noqatın  $\frac{\pi}{2}$  rad múyeshke burıwda  $(0; 1)$  koordinatalarına iye  $M$  noqatı payda etiledi (52-súwret).

2)  $P(1; 0)$  noqatın  $-\frac{\pi}{2}$  rad múyeshke burıwda  $N(0; -1)$  noqatı payda etiledi (52-súwret).



3)  $P(1; 0)$  noqatın  $\frac{3\pi}{2}$  rad múyeshke burıwda  $K(0; -1)$  noqatı payda etiledi (53-súwret).

4)  $P(1; 0)$  noqatın  $-\pi$  rad múyeshke burıwda  $L(-1; 0)$  noqatı payda etiledi (53-súwret).

Geometriya kursında  $0^\circ$  tan  $180^\circ$  qa shekemgi múyeshler qaralğan. Birlik sheńberdiń noqatların koordinatalar bası átirapında burıwdan paydalanıp,  $180^\circ$  tan úlken múyeshlerdi, sonday-aq teris múyeshlerdi de qaraw múmkin. Burıw múyeshin graduslarda da, radianlarda da beriwge boladı. Mısalı,  $P$

$(1; 0)$  noqatın  $\frac{3\pi}{2}$  múyeshke burıw, onı  $270^\circ$  qa burıwdı ańlatadı;  $-\frac{\pi}{2}$  múyeshke burıw

$-90^\circ$  qa burıwdan ibarat

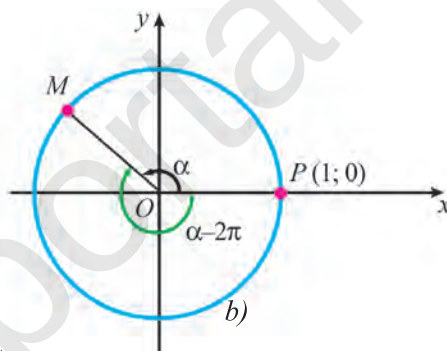
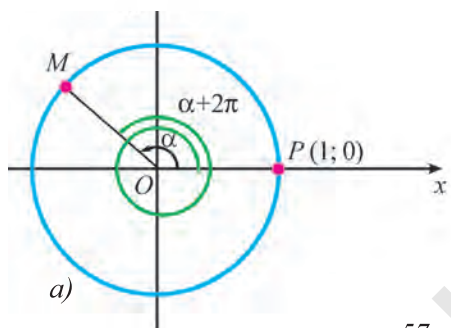
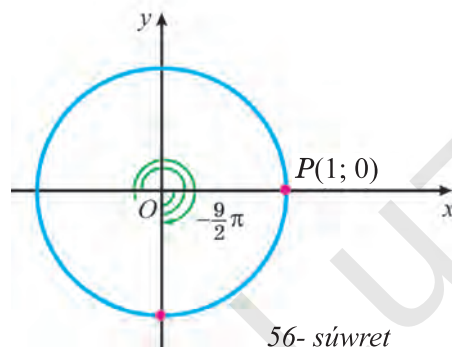
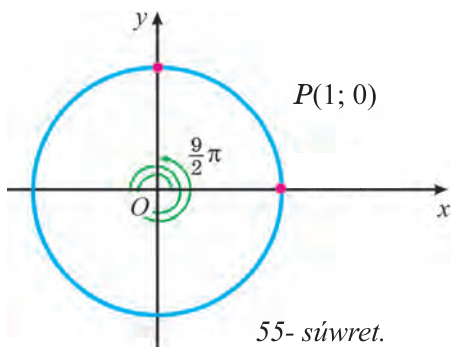
Bazı bir múyeshlerge burıwdıń radian hám graduslardağı ólshemleriniń kesetin keltiremiz (54-súwret).

$P(1; 0)$  noqatın  $2\pi$  ge, yaǵnıy  $360^\circ$  qa burıwda noqat aldınǵı jaylasqan ornına qaytatuǵının atap ótemiz (kestegе qarań). Usı noqattı  $-2\pi$  ge, yaǵnıy  $-360^\circ$  qa burıwda, ol jáne aldınǵı halına qaytadı.

Noqattı  $2\pi$  den úlken múyeshke hám  $-2\pi$  den kishi múyeshke burıwǵa tiyisli mısallardı qaraymız. Mısalı  $\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}$  múyeshke burıwda noqat saat tiliniń qozǵalısqı baǵıtına

|  |                  |              |
|--|------------------|--------------|
|  | $\frac{\pi}{6}$  | $30^\circ$   |
|  | $\frac{\pi}{4}$  | $45^\circ$   |
|  | $\frac{\pi}{3}$  | $60^\circ$   |
|  | $\frac{\pi}{2}$  | $90^\circ$   |
|  | $\pi$            | $180^\circ$  |
|  | $\frac{3\pi}{2}$ | $270^\circ$  |
|  | $2\pi$           | $360^\circ$  |
|  | $-\frac{\pi}{2}$ | $-90^\circ$  |
|  | $-\pi$           | $-180^\circ$ |

54- súwret..



57- súwret.

qarama-qarsı bağıtta eki tolıq aylanıstı hám jáne usı bağıtta  $\frac{\pi}{2}$  joldı ótedi (55-súwret).

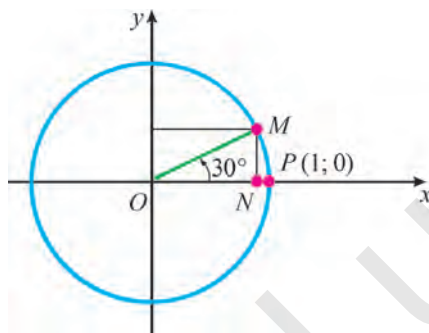
$-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$  múyeshke burıwda noqat saat tiliniń qozǵalıstı baǵıtında eki tolıq aylanıstı hám jáne usı bağıtta  $\frac{\pi}{2}$  joldı basıp ótedi (56-súwret).

$P(1; 0)$  noqatın  $\frac{9\pi}{2}$  múyeshke burıwda  $\frac{\pi}{2}$  múyeshke burıwdaǵı noqatnıń ózi payda bolatuǵının kórsetemiz (55-súwret)  $-\frac{9\pi}{2}$  múyeshke burıwda  $-\frac{\pi}{2}$  múyeshke burıwdaǵı noqatnıń ózi payda boladı (56-súwret).

Ulıwma, eger  $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$  (bunda  $k$  – pútın san) bolsa, onda  $a$  múyeshke burıwda  $\alpha_0$  múyeshke burıwdaǵı noqatnıń ózi payda boladı.

Solay etip, hárbir  $\alpha$  haqıyqiy sangá birlik sheńberdın (1; 0) noqatın  $\alpha$  rad múyeshke burıw menen payda etiletuǵın bir ǵana noqatı sáykes keledi.

Biraq, birlik sheńberdın jalǵız ǵana bir  $M$  noqatına ( $P(1; 0)$  noqatın burıwda  $M$  noqatı payda etiletuǵın) sheksiz kóp  $\alpha + 2\pi k$  haqıyqiy sanlar sáykes keledi,  $k$  – pútın san (57-súwret).



58- súwret.

**1- másele.**  $P(1; 0)$  noqatın: 1)  $7\pi$ ; 2)

$-\frac{5\pi}{2}$  múyeshke burıwdan payda bolǵan noqattın koordinataların tabıń.

△ 1)  $7\pi = \pi + 2\pi \cdot 3$  bolǵanı ushın  $7\pi$  ge burıwda  $\pi$  ge burıwdaǵı noqattın ózi, yaǵnıy  $(-1; 0)$  koordinatalı noqat payda boladı.

2)  $-\frac{5\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$  bolǵanlıqtan  $-\frac{5\pi}{2}$  ge burıwda  $-\frac{\pi}{2}$  ge burıwdaǵı noqattın ózi, yaǵnıy  $(0; -1)$  koordinatalı noqat payda boladı. ▲

**2- másele.**  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  noqatın payda etiw ushın  $(1; 0)$  noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń.

△  $NOM$  tuwrı múyeshli úshmúyeshliginen (58-súwret)  $NOM$  múyeshiniń  $\frac{\pi}{6}$  ǵa teńligi kelip shıǵadı, yaǵnıy múmkın bolǵan burıw múyeshlerinen biri  $\frac{\pi}{6}$  ǵa teń. Sonlıqtan  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  noqatın payda etiw ushın  $(1; 0)$  noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshler bılay ańlatıladı:  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ , bundaǵı  $k$  – qálegen pútın san, yaǵnıy  $k=0; \pm 1; \pm 2; \dots$  ▲

### Shınıǵıwlar

**222.** Birlik sheńberdın  $P(1;0)$  noqatın:

- 1)  $90^\circ$ ;      2)  $-\pi$ ;      3)  $180^\circ$ ;      4)  $\frac{\pi}{2}$ ;      5)  $270^\circ$ ;      6)  $2\pi$   
múyeshke burıwdan payda bolǵan noqatlardıń koordinataların tabıń.

**223.** Birlik sheńberde  $P(1; 0)$  nuqtın:

- 1)  $\frac{\pi}{4}$ ;      2)  $-\frac{\pi}{3}$ ;      3)  $-\frac{2}{3}\pi$ ;      4)  $\frac{3}{4}\pi$ ;  
5)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ;      6)  $-\pi - 2\pi$ ;      7)  $\frac{\pi}{4} - 4\pi$ ;      8)  $-\frac{\pi}{3} + 6\pi$   
múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattı belgileń.

**224.**  $P(1; 0)$  noqatın:

- 1)  $2,1\pi$ ;      2)  $2\frac{2}{3}\pi$ ;      3)  $-\frac{13}{3}\pi$ ;      4)  $-\frac{25}{4}\pi$ ;      5)  $727^\circ$ ;      6)  $460^\circ$   
múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat jaylasqan koordinatalar sheregın tabıń.

**225.**  $P(1; 0)$  noqatın:

- 1)  $3\pi$ ;      2)  $-\frac{7}{2}\pi$ ;      3)  $-\frac{15}{2}\pi$ ;      4)  $5\pi$ ;  
5)  $540^\circ$ ;      6)  $810^\circ$ ;      7)  $-\frac{9}{2}\pi$ ;      8)  $450^\circ$

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqattıń koordinataların tabıń.

**226.** 1)  $(-1; 0)$ ; 2)  $(1; 0)$ ; 3)  $(0; 1)$ ; 4)  $(0; -1)$  noqatların payda etiw ushın  $P(1;0)$  noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń:

**227.**  $P(1; 0)$  noqatın belgileń:

- 1) 1;      2) 2,75;      3) 3,16;      4) 4,95;      5) 1,8.

múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat jaylasqan koordinatalar sheregın tabıń.

**228.** Eger:

- 1)  $a = 6,7\pi$ ;      2)  $a = 9,8\pi$ ;      3)  $a = 4\frac{1}{2}\pi$ ;  
4)  $a = 7\frac{1}{3}\pi$ ;      5)  $a = \frac{11}{2}\pi$ ;      6)  $a = \frac{17}{3}\pi$

bolsa,  $a = x + 2\pi k$  teńligi orınlanatuǵın  $x$  sannıń (bul jerde  $0 \leq x \leq 2\pi$ ) hám  $k$  natural sandı tabıń.

**229.** Birlik sheńberde  $P(1;0)$  noqatın:

- 1)  $\frac{\pi}{4} - 2\pi$ ;      2)  $-\frac{\pi}{3} - 2\pi$ ;      3)  $\frac{2\pi}{3} - 6\pi$ ;      4)  $-\frac{3\pi}{4} - 8\pi$ ;  
5)  $4,5\pi$ ;      6)  $5,5\pi$ ;      7)  $-6\pi$ ;      8)  $-7\pi$

múyeshke buriwdan payda bolǵan noqattı jasań.

**230.**  $P(1; 0)$  noqatın:

- 1)  $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ ;      2)  $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$ ;      3)  $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$ ;      4)  $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$

múyeshke (bul jerde  $k$  – pútin san) buriwdan payda bolǵan noqattıń koordinataların tabıń.

**231.**  $(1; 0)$  noqatın:

- 1)  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;      2)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ;      3)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;      4)  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

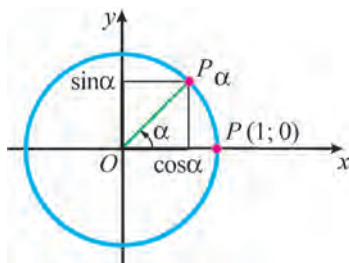
koordinatalı noqat payda etiw ushın buriw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi jazıń.

## 19-§. MÚYESHTIŇ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSINIŇ ANÍQLAMALARI

Geometriya kursında graduslarda ańlatılǵan múyeshtiń sinusı, kosinusı hám tangensi berilgen edi. Bul múyesh  $0^\circ$  tan  $180^\circ$  qa shekemgi aralıqta qaralǵan. Qálegen múyeshtiń sinusı hám kosinusı tómendegishe anıqlanadı



**1-Anıqlama.**  *$\alpha$  múyeshiniń sinusı dep  $(1; 0)$  noqatın koordinatar bası átirapında  $\alpha$  múyeshke buriw nátiyjesinde payda bolǵan noqattıń ordinatasına ayıladı ( $\sin \alpha$  tırinde belgilenedi).*





**2-aniqlama.**  $\alpha$  múyeshtiñ kosinusi dep  $(1; 0)$  noqatın koordinatalar bası átirapında  $\alpha$  múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolğan noqatın abscissasına ayıladı (*cosa túrinde belgilenedi*).

Bul aniqlamalarda  $\alpha$  múyeshi graduslarda, sonday-aq, radianlarda da ańlatılıwı múmkin.

Máselen,  $(1; 0)$  noqatın  $\frac{\pi}{2}$  múyeshke, yaǵnıy  $90^\circ$  qa burıwda  $(0; 1)$  noqatı payda etiledi.  $(0; 1)$  noqatınıń ordinatası 1 ge teń, yaǵnıy

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1;$$

bul noqatın abscissası 0 ge teń, yaǵnıy

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0.$$

Múyesh  $0^\circ$  tan  $180^\circ$  qa shekemgi aralıqta bolğan jaǵdayda sinus hám kosinuslardıń aniqlamaları geometriya kursınan málim bolğan sinus hám kosinuslardıń aniqlamaları menen sáykes túsetuǵının atap ótemiz.

Mısalı,

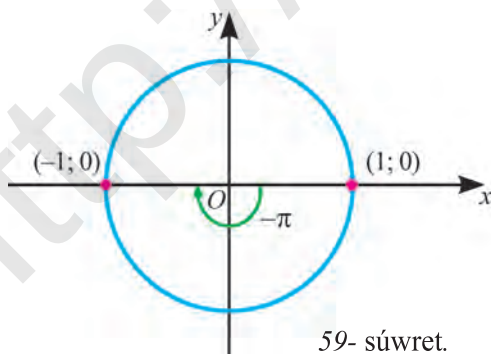
$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos \pi = \cos 180^\circ = -1.$$

**1-másele.**  $\sin(-\pi)$  hám  $\cos(-\pi)$  dı tabıń.

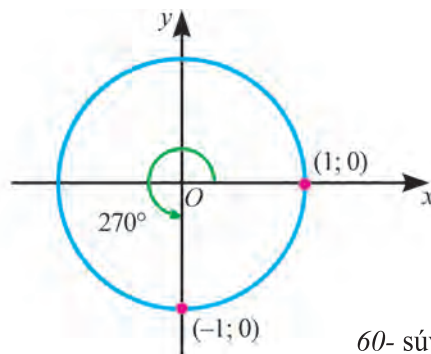
△  $(1; 0)$  noqatın  $-\pi$  múyeshke burǵanda ol  $(-1; 0)$  noqatına ótedi (59-súwret). Sonlıqtan  $\sin(-\pi) = 0$ ,  $\cos(-\pi) = -1$ . ▲

**2- másele.**  $\sin 270^\circ$  hám  $\cos 270^\circ$  tı tabıń.

△  $(1; 0)$  noqatın  $270^\circ$  múyeshke burǵanda ol  $(0; -1)$  noqatına ótedi (60-súwret). Sonlıqtan  $\cos 270^\circ = 0$ ,  $\sin 270^\circ = -1$ . ▲



59- súwret.



60- súwret.

### 3- másele. $\sin t = 0$ teńlemesin sheshiń.

△  $\sin t = 0$  teńlemesin sheshiw – bul sinusi nolge teń bolǵan barlıq múyeshlerdi tabıw degendi ańlatadı.

Birlik sheńberde ordinatası nolge teń bolǵan eki noqat bar:  $(1; 0)$  hám  $(-1; 0)$  (59-súwret). Bul noqatlar  $(1; 0)$  noqatın  $0, \pi, 2\pi, 3\pi$  hám taǵı basqa, sonday-aq,  $-\pi, -2\pi, -3\pi$  hám taǵı basqa múyeshlerge burıw menen payda etiledi.

Demek,  $t = k\pi$  bolǵanda (bunda  $k$  – qálegen pútın san)  $\sin t = 0$  boladı. ▲

Pútın sanlar kópłigi  $\mathbb{Z}$  háribi menen belgilenedi.  $k$  sanı  $\mathbb{Z}$  ke tiyisli ekenin belgilew ushın  $k \in \mathbb{Z}$  jazıwınan paydalanıladı („ $k$  sanı  $\mathbb{Z}$  ke tiyisli” dep oqıladı). Sonlıqtan 3-máseleniń juwabın bılay jazıw múmkin:

$$t = \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

### 4- másele. $\cos t = 0$ teńlemesin sheshiń.

△ Birlik sheńberde abscissası nolge teń bolǵan eki noqat bar:  $(0; 1)$  hám  $(0; -1)$  (61-súwret).

Bul noqatlar  $(1; 0)$  noqatın  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi$  hám taǵı basqa, sonday-aq,  $\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi$  hám taǵı basqa múyeshlerge, yaǵnıy  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  (bunda  $k \in \mathbb{Z}$ ) múyeshlerge burıw menen payda boladı.

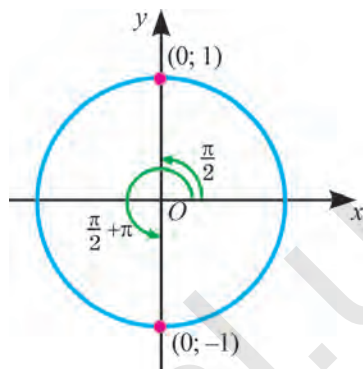
**Juwabı:**  $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$  ▲

### 5- másele. Teńlemenı sheshiń: 1) $\sin t = 1$ ; 2) $\cos t = 1$ .

△ 1) Birlik sheńberdiń  $(0; 1)$  noqatı birge teń ordinataǵa iye. Bul noqat  $(1; 0)$  noqatı  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  múyeshke burıw menen payda etiledi.

2)  $(1; 0)$  noqatı  $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  múyeshke burıw menen payda etilgen noqatıń abscissası birge teń boladı.

**Juwabı:**  $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  bolǵanda  $\sin t = 1$ ,  
 $t = 2\pi k$  bolǵanda  $\cos t = 1, k \in \mathbb{Z}.$  ▲



61- súwret.



**3-aniqlama.**  $\alpha$  múyeshiniń tangensi dep  $a$  múyeshiniń sinusiniń onıń kosinusına qatnasına aytladı (tga túrinde belgilenedi).

Solay etip,  $\text{tga} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

Máselen,  $\text{tg}0^\circ = \frac{\sin0^\circ}{\cos0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$ ,  $\text{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$ .

Geyde  $\alpha$  múyeshiniń kotangensinen de paydalanıladı (ctg $\alpha$  túrinde jazılıp belgilenedi). Ol  $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$  formulası menen anıqlanadı.

Máselen,  $\text{ctg}270^\circ = \frac{\cos270^\circ}{\sin270^\circ} = \frac{0}{-1} = 0$ ,  $\text{ctg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} = 1$ .

$\sin\alpha$  hám  $\cos\alpha$  lar qálegen múyeshler ushın táriplengenligin, al olardıń mánisleri  $-1$  den  $1$  ge shekemgi aralıqta ekenligin atap ótemiz;  $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$  tek

$\cos\alpha \neq 0$  bolğan múyeshler ushın, yaǵnıy  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  ten basqa qálegen múyeshler ushın anıqlanğan.

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenslerdiń kóbirek ushırasatuǵın mánisleriniń kesesin keltiremiz.

| $\alpha$           | $0$<br>( $0^\circ$ ) | $\frac{\pi}{6}$<br>( $30^\circ$ ) | $\frac{\pi}{4}$<br>( $45^\circ$ ) | $\frac{\pi}{3}$<br>( $60^\circ$ ) | $\frac{\pi}{2}$<br>( $90^\circ$ ) | $\pi$<br>( $180^\circ$ ) | $\frac{3}{2}\pi$<br>( $270^\circ$ ) | $2\pi$<br>( $360^\circ$ ) |
|--------------------|----------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| $\sin\alpha$       | 0                    | $\frac{1}{2}$                     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$              | 1                                 | 0                        | -1                                  | 0                         |
| $\cos\alpha$       | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$              | $\frac{\sqrt{2}}{2}$              | $\frac{1}{2}$                     | 0                                 | -1                       | 0                                   | 1                         |
| $\text{tg}\alpha$  | 0                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$              | 1                                 | $\sqrt{3}$                        | Anıq emes                         | 0                        | Anıq emes                           | 0                         |
| $\text{ctg}\alpha$ | Mavjud emas          | $\sqrt{3}$                        | 1                                 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$              | 0                                 | Anıq emes                | 0                                   | Anıq emes                 |



## 6- másele. Esaplañ:

$$4\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}.$$

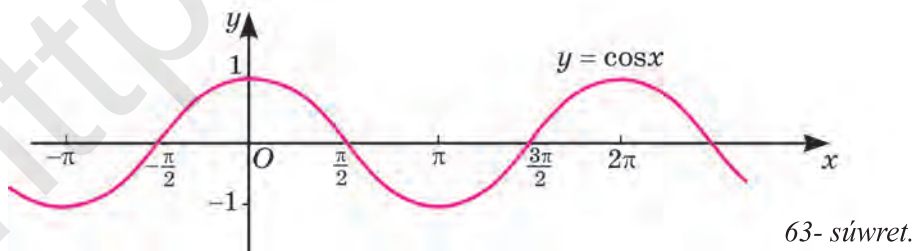
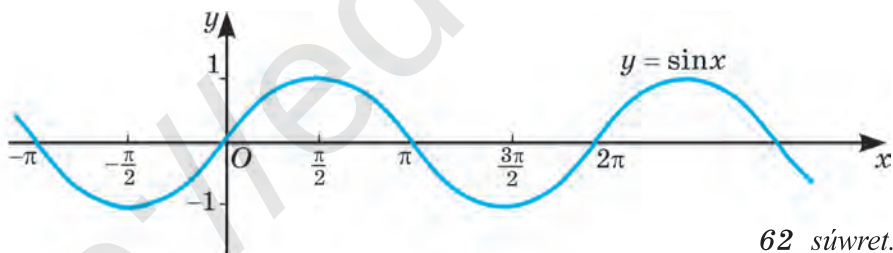
△ Kesteden paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$4\sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 2,5. \blacktriangle$$

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenslerdiñ bul kestege kirmegen múyeshleri ushın mánislerin V.M. Bradistiñ tórt tañbalı matematikalıq kes-telerin, sonday-aq, mikrokalkulyator járdeminde tabıw múmkin.

Eger hárbir haqıyqıy  $x$  sanına  $\sin x$  sanı sáykes qoyılsa, onda haqıyqıy sanlar kópliginde  $y = \sin x$  funkciyası berilgen boladı.  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  hám  $y = \operatorname{ctg} x$  funkciyaları soğan uqsas anıqlanadı.  $y = \cos x$  funkciya barlıq  $x \in \mathbf{R}$  da anıqlanğan,  $y = \operatorname{tg} x$  funkciya  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  bolsa  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  bolğanda anıqlanğan.  $y = \sin x$  hám  $y = \cos x$  funkciyalarınıñ grafikleri 62- hám 63-súwretlerde kórsetilgen.

$y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  funkciyaları trigonometriyalıq funkciyalar dep ataladı.



### Shinigiwlar

**232.** Esaplań:

$$1) \sin \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \cos \frac{2\pi}{3}; \quad 3) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}; \quad 4) \sin(-90^\circ);$$

$$5) \cos(-180^\circ); \quad 6) \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right); \quad 7) \cos(-135^\circ); \quad 8) \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right).$$

**233.** Eger:

$$1) \sin \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 3) \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$4) \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \quad 5) \sin \alpha = -0,6; \quad 6) \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

bolsa, birlik shenberde  $\alpha$  múyeshke sáykes keliwshi noqattı kórsetiń.  
Esaplań (**234–236**):

**234.** 1)  $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2}$ ; 2)  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos \frac{\pi}{2}$ ; 3)  $\sin \pi - \cos \pi$ ;  
4)  $\sin 0 - \cos 2\pi$ ; 5)  $\sin \pi + \sin 1,5\pi$ ; 6)  $\cos 0 - \cos \frac{3}{2}\pi$ .

**235.** 1)  $\operatorname{tg} \pi + \cos \pi$ ; 2)  $\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ$ ; 3)  $\operatorname{tg} \pi + \sin \pi$ ;  
4)  $\cos \pi - \operatorname{tg} 2\pi$ ; 5)  $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$ ; 6)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$ .

**236.** 1)  $3\sin \frac{\pi}{6} + 2\cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ ; 2)  $5\sin \frac{\pi}{6} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 10\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ ;  
3)  $\left(2\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) : \cos \frac{\pi}{6}$ ; 4)  $\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .

**237.** Teńlemenı sheshiń:

$$1) 2\sin x = 0; \quad | \quad 2) \frac{1}{2}\cos x = 0; \quad | \quad 3) \cos x - 1 = 0; \quad | \quad 4) 1 - \sin x = 0.$$

**238.** (Awızeki.)  $\sin \alpha$  yaki  $\cos \alpha$ :

$$1) 0,49; \quad 2) -0,875; \quad 3) -\sqrt{2}; \quad 4) 2 - \sqrt{2}; \quad 5) \sqrt{5} - 1$$

ge teń bolıwı múmkin be?

**239.**  $\alpha$  nıń berilgen mánisinde ańlatpanıń mánisin tabıń:

$$1) 2\sin \alpha + \sqrt{2}\cos \alpha, \text{ bunda } \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 2) 0,5\cos \alpha - \sqrt{3}\sin \alpha, \text{ bunda } \alpha = 60^\circ;$$

$$3) \sin 3\alpha - \cos 2\alpha, \text{ bunda } \alpha = \frac{\pi}{6}; \quad 4) \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}, \text{ bunda } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

**240.** Teñlemeni sheshiñ:

- 1)  $\sin x = -1$ ;      2)  $\cos x = -1$ ;      3)  $\sin 3x = 0$ ;  
4)  $\cos 0,5x = 0$ ;      5)  $\cos 2x - 1 = 0$ ;      6)  $1 - \cos 3x = 0$ .

**241.** Teñlemeni sheshiñ:

- 1)  $\sin(x + \pi) = -1$ ;      2)  $\sin \frac{1}{2}(x-1) = 0$ ;      3)  $\cos(x + \pi) = -1$ ;  
4)  $\cos 2(x+1) - 1 = 0$ ;      5)  $\sin 3(x-2) = 0$ ;      6)  $1 - \cos 3(x-1) = 0$ .

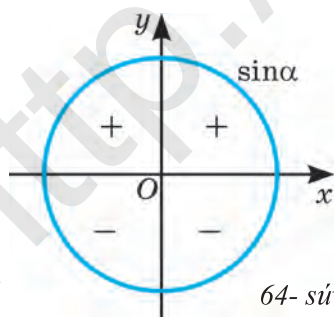
## 20-§. SINUS, KOSINUS HÁM TANGENSTIŇ BELGILERI

### 1. Sinus hám kosinustıń belgileri

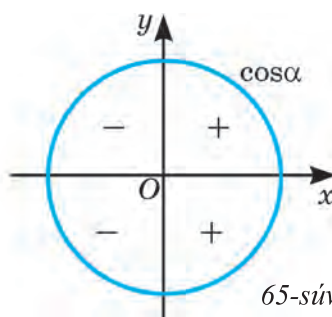
Meyli,  $(1; 0)$  noqatı birlik sheńber boyınsha saat tiliniń qozǵalısqına qarama-qarsı baǵıtta qozǵalısta bolsın. Bul jaǵdayda birinshi sherekte (kvadratta) jaylasqan noqatlardıń ordinataları hám abcissaları oń. Sonlıqtan, eger  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  bolsa,  $\sin \alpha > 0$  hám  $\cos \alpha > 0$  boladı (64–65-súwretler).

Ekinshi sherekte jaylasqan noqatlar ushın ordinatalar oń, al abcissalar bolsa teris. Sonlıqtan eger  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\sin \alpha > 0$ ,  $\cos \alpha < 0$  boladı (64-65-súwretler). Soǵan uqsas, úshinshi sherekte  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha < 0$ , al tórtinshi sherekte  $\sin \alpha < 0$ ,  $\cos \alpha > 0$  boladı (64-65-súwretler). Noqattıń sheńber boyınsha bunnan keyingi háreketinde sinus hám kosinuslardıń belgileri noqattıń qaysı sherekte turǵanlıǵı menen anıqlanadı.

Sinustıń belgileri 64-súwrette, kosinustıń belgileri bolsa 65-súwrette kórsetilgen.



64- súwret.



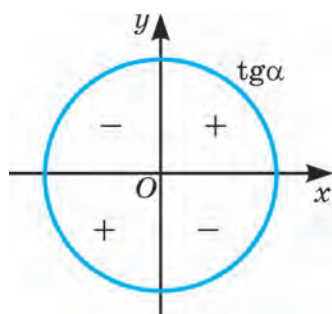
65-súwret.

Eger  $(1; 0)$  noqatı saat tiliniñ qozğalıı bağıtında háreket etse, *bul jaǵdayda da sinus hám kosinustıń belgileri noqattıń qaysı sherekte jaylasqanlıǵına qarap anıqlanadı*; bul 64-, 65-súwretlerde kórsetilgen.

**1-másele.** Múyeshtiń sinusi hám kosinuslarınıń belgilerin anıqlań.

1)  $\frac{3\pi}{4}$ ; 2)  $745^\circ$ ; 3)  $-\frac{5\pi}{7}$ .

△ 1)  $\frac{3\pi}{4}$  múyeshine birlik sheńberdiń ekinshi shereginde jaylasqan noqat sáykes keledi. Sonlıqtan da  $\sin \frac{3\pi}{4} > 0$ ,  $\cos \frac{3\pi}{4} < 0$ .



66-súwret.

2)  $745^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 25^\circ$  bolǵanlıqtan  $(1; 0)$  noqatın  $745^\circ$  múyeshke burıwda, bul múyeshke birinshi sherekte jaylasqan noqat sáykes keledi. Sonlıqtan da  $\sin 745^\circ > 0$ ,  $\cos 745^\circ > 0$ .

3)  $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$  bolǵanlıǵı sebepli  $(1; 0)$  noqatın  $-\frac{5\pi}{7}$  múyeshke burǵanda, úshinshi sherekte jaylasqan noqat payda etiledi. Sonıń ushın  $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$ ,  $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$ . ▲

## 2. Tangenstiń belgileri

Anıqlamaǵa muwapıq  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ . Sonlıqtan da, eger  $\sin \alpha$  hám  $\cos \alpha$  birdey belgige iye bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,  $\sin \alpha$  hám  $\cos \alpha$  qarama-qarsı belgilerge iye bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha < 0$  boladı. Tangenstiń belgileri 66-súwrette kórsetilgen.

$\operatorname{ctg} \alpha$  belgileri  $\operatorname{tg} \alpha$  nıń belgileri menen birdey boladı.

**2-másele.** Múyeshtiń tangensiniń belgilerin anıqlań:

1)  $260^\circ$ ; 2) 3.

△ 1)  $180^\circ < 260^\circ < 270^\circ$  bolǵanlıǵı ushın  $\operatorname{tg} 260^\circ > 0$ .

2)  $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$  bolǵanlıǵı ushın  $\operatorname{tg} 3 < 0$ . ▲

### Shinigiwlar

242. Eger:

- 1)  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;      2)  $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ ;      3)  $\alpha = 210^\circ$ ;      4)  $\alpha = -210^\circ$ ;  
 5)  $\alpha = 735^\circ$ ;      6)  $\alpha = 848^\circ$ ;      7)  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ ;      8)  $\alpha = \frac{5\pi}{8}$ .

bolsa, (1; 0) noqatın  $\alpha$  múyeshke buriwda payda bolǵan noqat qaysı sherekte jaylasatuǵının anıqlań.

243. Eger:

- 1)  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ;      2)  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ ;      3)  $\alpha = -\frac{5}{8}\pi$ ;      4)  $\alpha = -\frac{4}{3}\pi$ ;  
 5)  $\alpha = 740^\circ$ ;      6)  $\alpha = 510^\circ$ ;      7)  $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$ ;      8)  $\alpha = 361^\circ$

bolsa,  $\sin \alpha$  sanınıń belgisin anıqlań.

244. Eger:

- 1)  $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ ;      2)  $\alpha = \frac{7}{6}\pi$ ;      3)  $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$ ;      4)  $\alpha = -\frac{2}{5}\pi$ ;  
 5)  $\alpha = 290^\circ$ ;      6)  $\alpha = -150^\circ$ ;      7)  $\alpha = \frac{6\pi}{5}$ ;      8)  $\alpha = -100^\circ$

bolsa,  $\cos \alpha$  sanınıń belgisin anıqlań.

245. Eger:

- 1)  $\alpha = \frac{5}{6}\pi$ ;      2)  $\alpha = \frac{12}{5}\pi$ ;      3)  $\alpha = -\frac{3}{5}\pi$ ;      4)  $\alpha = -\frac{5}{4}\pi$ ;  
 5)  $\alpha = 190^\circ$ ;      6)  $\alpha = 283^\circ$ ;      7)  $\alpha = 172^\circ$ ;      8)  $\alpha = 200^\circ$

bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha$  hám  $\operatorname{ctg} \alpha$  sanlarınıń belgilerin anıqlań.

246. Eger:

- 1)  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;      2)  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$ ;      3)  $\frac{7}{4}\pi < \alpha < 2\pi$ ;  
 4)  $2\pi < \alpha < 2,5\pi$ ;      5)  $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ ;      6)  $1,5\pi < \alpha \leq 1,8\pi$

bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  hám  $\operatorname{ctg} \alpha$  sanlarınıń belgilerin anıqlań.

247. Eger:

- 1)  $\alpha = 1$ ;    2)  $\alpha = 3$ ;    3)  $\alpha = -3,4$ ;    4)  $\alpha = -1,3$ ;    5)  $\alpha = 3,14$

bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  sanlarınıń belgilerin anıqlań.

248.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  bolsın. Sannıń belgilerin anıqlań:

- |                                                |                                                |                                                              |                                                              |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ; | 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ; | 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$ ; | 4) $\sin(\pi - \alpha)$ ;                                    |
| 5) $\cos(\alpha - \pi)$ ;                      | 6) $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$ ;         | 7) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ ;               | 8) $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ . |

**249.** Sinus hám kosinuslardıń belgileri birdey (hár túrli) bolatúǵın  $\alpha$  sannıń 0 den  $2\pi$  ge shekemgi aralıqta jaylasqan barlıq mánislerin tabıń.

**250.** Sannıń belgisin anıqlań:

$$1) \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{3\pi}{4}; \quad 2) \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6}; \quad 3) \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{3\pi}{4}}; \quad 4) \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}.$$

**251.** Ańlatpalardıń mánislerin salıstırıń:

$$1) \sin 0,7 \text{ hám } \sin 4; \quad 2) \cos 1,3 \text{ hám } \cos 2,3.$$

**252.** Teńlemenı sheshiń:

$$1) \sin(5\pi + x) = 1; \quad 2) \cos(x - 3\pi) = 0;$$

$$3) \cos\left(\frac{5}{2}\pi + x\right) = -1; \quad 4) \sin\left(\frac{9}{2}\pi + x\right) = -1.$$

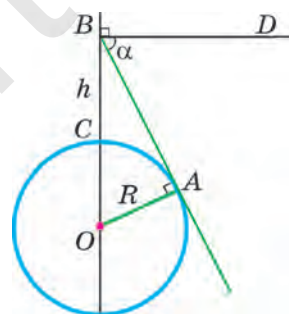
**253.** Eger:

$$1) \sin \alpha + \cos \alpha = -1,4; \quad 2) \sin \alpha - \cos \alpha = 1,4;$$

$$3) \sin \alpha + \cos \alpha = 1,4; \quad 4) \cos \alpha - \sin \alpha = 1,2$$

bolsa,  $\alpha$  sanına sáykes keliwshi noqat qaysı she-rekte jaylasqan?

**254.** (*Beruniy máselesi*). Tawdıń biyikligi  $h = BC$  hám  $\alpha = \angle ABD$  múyeshi belgili bolsa, Jerdıń radiusı  $R$  dı tabıń (67-súwret).



67 súwret.

## 21-§. BERILGEN BIR MÚYESHTIŇ SINUSÍ, KOSINUSÍ HÁM TANGENSI ARASÍDAǴÍ QATNASLAR

*Sinus penen kosinus arasındagı qatnastı anıqlaymız.*

Meyli, birlik sheńberdiń  $M(x; y)$  noqatı (1; 0) noqatın  $\alpha$  múyeshke buriw nátiyjesinde payda etilgen bolsın (68-súwret). Sonda sinus hám kosinustıń anıqlamasına muwapıq,

$$x = \cos \alpha, \quad y = \sin \alpha$$

boladı.

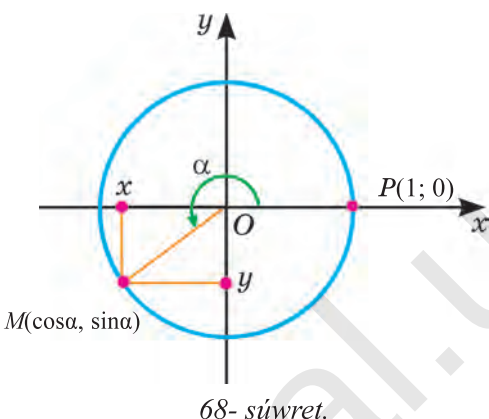
$M$  noqatı birlik sheńberge tiyisli, sonlıqtan da onıń  $(x; y)$  koordinataları  $x^2 + y^2 = 1$  teńlemesin qanaatlandıradı.

Demek,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

(1) teńlik  $\alpha$  nıń qálegen mánisinde orınlanadı hám *tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik* dep ataladı.

(1) teńlikten  $\sin\alpha$  nı  $\cos\alpha$  arqalı hám kerisinshe,  $\cos\alpha$  nı  $\sin\alpha$  arqalı ańlatıw múmkin:



$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \quad (3)$$

Bul formulada koren aldındaǵı belgi formulanıń shep jaǵında turǵan ańlatpanıń belgisi menen anıqlanadı.

**1-másele.** Eger  $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$  hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin\alpha$  nı esaplań.

△ (2) formuladan paydalanamız.  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolǵanlıqtan  $\sin\alpha < 0$  boladı, sonıń ushın (2) formulada koren aldına „-“ belgisin qoyıw kerek.

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}. \quad \blacktriangle$$

**2-másele.** Eger  $\sin\alpha = \frac{1}{3}$  hám  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  bolsa,  $\cos\alpha$  nı esaplań.

△  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  bolǵanlıqtan  $\cos\alpha > 0$  boladı hám sonlıqtan (3) formulada koren aldına „+“ belgisin qoyıw kerek.

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \blacktriangle$$

Endi *tangens* penen *kotangens* arasındagi baylanisti qaraymiz.  
Tangens hám kotangenstín anıqlaması boyınsha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Bul teńlikti kóbeytip,

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (4)$$

teńligin payda etemiz. (4) teńlikten  $\operatorname{tg} \alpha$  nı  $\operatorname{ctg} \alpha$  arqalı hám kerisinshe,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nı  $\operatorname{tg} \alpha$  arqalı ańlatıw múmkin:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}, \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

(4)–(6) teńlikler  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$  bolǵanda orınlı boladı.

**3-másele.** Eger  $\operatorname{tg} \alpha = 13$  bo‘lsa, bolsa,  $\operatorname{ctg} \alpha$  nı esaplań.

△ (6) formula boyınsha tabamız:  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{13}$ . ▲

**4-másele.** Eger  $\sin \alpha = 0,8$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha$  nı esaplań.

△ (3) formula boyınsha  $\cos \alpha$  nı tabamız.  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolǵanı ushın  $\cos \alpha < 0$  boladı. Sonıń ushın

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -0,6.$$

Demek,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$ . ▲

Tiykargı trigonometriyalıq birdeylikten hám tangenstín anıqlamasınan paydalanıp, *tangens* penen *kosinus* arasındagi qatnasıqtı tabamız.

△  $\cos \alpha \neq 0$  dep boljap,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  teńliginiń eki tárepın de  $\cos^2 \alpha$  ǵa bólemiz:  $\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , bunnan



$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \quad \blacktriangle \quad (7)$$

Eger  $\cos \alpha \neq 0$  bolsa, ya'niy  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  bolsa, (7) formula duris boladi.

(7) formuladan tangensti kosinus ham kosinustı tangens orqali a'nlatiw mumkin.

**5-másele.** Eger  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  ham  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha$  ni esaplań.

$\triangle$  (7) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Tangens ekinshi sherekte teris, sonliqtan  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ .  $\blacktriangle$

**6-másele.** Eger  $\operatorname{tg} \alpha = 3$  ham  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\cos \alpha$  ni esaplań.

$\triangle$  (7) formuladan tabamız:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{10}.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bol'ganliqtan  $\cos \alpha < 0$  ham sonliqtan  $\cos \alpha = -\sqrt{0,1}$ .  $\blacktriangle$

### Shınıǵıwlar

**255.** Eger:

- 1)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$  ham  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  bolsa,  $\sin \alpha$  ham  $\operatorname{tg} \alpha$  ni;
- 2)  $\sin \alpha = 0,8$  ham  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\cos \alpha$  ham  $\operatorname{tg} \alpha$  ni;
- 3)  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  ham  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  ham  $\operatorname{ctg} \alpha$  ni;
- 4)  $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$  ham  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  ham  $\operatorname{ctg} \alpha$  ni;
- 5)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{8}$  ham  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin \alpha$  ham  $\cos \alpha$  ni;
- 6)  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$  ham  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  bolsa,  $\sin \alpha$  ham  $\cos \alpha$  ni esaplań.

**256.** Tiykargı trigonometriyalıq birdeylik járdeminde teńlikler bir waqıtta orınlanatuǵınlıǵın yaqı orınlanbaytuǵının anıqlań:

- 1)  $\sin \alpha = 1$  hám  $\cos \alpha = 1$ ;                      2)  $\sin \alpha = 0$  hám  $\cos \alpha = -1$  ;  
 3)  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$  hám  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$  ;                      4)  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  hám  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$  .

**257.** Teńlikler bir waqıtta orınlanıw múmkın be:

- 1)  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$  hám  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$  ;                      2)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$  hám  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  ?

**258.** Meyli, tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń múyeshlerinen biri bolsın. Eger  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{11}$  bolsa,  $\cos \alpha$  hám  $\operatorname{tg} \alpha$  nı tabıń.

**259.** Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshiniń tangensi  $2\sqrt{2}$  teń. Usı úshmúyeshliktiń kosinusın tabıń.

**260.** Eger  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{1}{8}$  bolsa,  $\cos \alpha$  nı tabıń.

- 261.** 1)  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$  bolsa,  $\cos \alpha$  nı tabıń;  
 2)  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$  bolsa,  $\sin \alpha$  nı tabıń.

**262.**  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  ekenligi belgili. Ańlatpanıń mánisin tabıń:

- 1)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$  ;                      2)  $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  ;                      3)  $\frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\sin \alpha - 5\cos \alpha}$  ;  
 4)  $\frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$  ;                      5)  $\frac{3\sin \alpha - 2\cos \alpha}{4\sin \alpha + \cos \alpha}$  ;                      6)  $\frac{3\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$  .

**263.**  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$  ekenligi belgili. 1)  $\sin \alpha \cos \alpha$ ; 2)  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$  ańlatpalarınıń mánisin tabıń.

**264.** Teńlemenı sheshiń:

- 1)  $2\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ; 2)  $\sin^2 x - 2 = \sin x - \cos^2 x$ ;  
 3)  $2\cos^2 x - 1 = \cos x - 2\sin^2 x$ ; 4)  $3 - \cos x = 3\cos^2 x + 3\sin^2 x$ .

## 22-§. TRIGONOMETRIYALÍQ BIRDEYLIKLER

**1-másele.**  $\alpha \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  bolǵanda

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (1)$$

teńliginiń orınlı ekenligin dálilleń.

△ Kotangenstıń anıqlamasına muwapıq  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  hám sonlıqtan,

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

$\alpha \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  bolǵanda  $\sin \alpha \neq 0$ . ▲

(1) teńlik  $\alpha$  nıń múmkin bolǵan (barlıq ruqsat etiletuǵın) mánisleri ushın orınlı, yaǵnıy onıń shep hám oń tárepleri maǵanaǵa iye bolatuǵın barlıq mánisleri ushın durıs boladı. Bunday teńlikler birdeylikler dep ataladı hám bunday teńliklerdi dálillewge tiyisli máseleler birdeyliklerdi dálillewge tiyisli máseleler dep ayıladı.

Bunnan bılay birdeyliklerdi dálillewge, eger máseleniń shártinde talap etilmegen bolsa, múyeshlerdiń ruqsat etiletuǵın mánislerin izlep otırmaymız.

**2-másele.** Birdeylikte dálilleń:  $\cos^2 \alpha = (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ .

$$\triangle (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \quad \blacktriangle$$

**3-másele.** Birdeylikte dálilleń:  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

△ Bul birdeylikte dálillew ushın onıń shep hám oń tárepleriniń ayırması nolge teń bolatuǵının kórsetiw jetkilikli:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 - \sin \alpha)} = 0. \quad \blacktriangle$$

1–3- máselelerdi sheshiwde *birdeyliklerdi dálillewdiń tómendegi usıllarınan* paydalanıladı: oń tárepın túrlendiriw menen onıń shep tárpine teńligin kórsetiw; oń hám shep tárepleriniń ayırması nolge teń bolatuǵının kór-

setiw. Geyde birdeyliklerdi dálillewde onıń on hám shep táreplerin túrlendiriw menen olardı bir qıylı ańlatpaǵa keltirgen qolaylı.

**4- másele.** Birdeylikti dálilleń:  $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$ .

$$\triangle \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Birdeylik dálillendi, sebebi, onıń shep hám on tárepleri  $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$  ǵa teń. 

**5- másele.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:  $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$ .

$$\triangle \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha. \quad \triangle$$

Trigonometriyalıq ańlatpalardı ápiwayılastırıwǵa tiyisli máselelerdi sheshiwde, eger máseleniń shártinde talap etilmegen bolsa, múyeshlerdiń qabıl etiwı múmkin bolǵan ruqsat etiletuǵın mánislerin tappaymız.

### ***Shınıǵıwlar***

**265.** Birdeylikti dálilleń:

- |                                                                          |                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| 1) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha) = \sin^2\alpha$ ;                   | 2) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1$ ;                                |
| 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$ ; | 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} = \operatorname{ctg}^2\alpha$ ; |
| 5) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \sin^2\alpha = 1$ ;        | 6) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1$ .        |

**266.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

- |                                                               |                                                                      |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 1) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha - 2\sin\alpha$ ; | 2) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ ;        |
| 3) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$ ;                    | 4) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha}$ ;                           |
|                                                               | 5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ . |

**267.** Añlatpanı ápiwayılastırın hám onıń san mánisin tabıń:

- 1)  $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;      2)  $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ;
- 3)  $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;
- 4)  $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

**268.** Birdeylıkti dálilleń:

- 1)  $(1 - \sin^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 1$ ;    2)  $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha) - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ .

**269.**  $\alpha$  nıń barlıq múmkin bolǵan mánislerinde tómendegi añlatpaǵa birdey mánisti qabıl etetuǵınlıǵın, yaǵnıy  $\alpha$  ǵa ǵárezli emesligin dálilleń:

- 1)  $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$ ;      2)  $\sin^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$ ;
- 3)  $\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ ;      4)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$ .

**270.** Birdeylıkti dálilleń:

- 1)  $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha) = \sin^2 2\alpha$ ;      2)  $\frac{\sin\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{1 + \sin\alpha}$ ;
- 3)  $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ;
- 4)  $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ ;
- 5)  $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$ ;      6)  $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$ ;
- 7)  $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = 1$ ;      8)  $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$ .

**271.** Añlatpanı ápiwayılastırın hám onıń san mánisin tabıń:

- 1)  $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha} - (1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ;
- 2)  $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$ , bunda  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

**272.** Eger  $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,6$  bolsa,  $\sin\alpha\cos\alpha$  nıń mánisin tabıń.

**273.** Eger  $\cos\alpha - \sin\alpha = 0,2$  bolsa,  $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$  nıń mánisin tabıń.

**274.** Teńlemenı sheshiń:

- 1)  $3\cos^2x - 2\sin x = 3 - 3\sin^2x$ ;    2)  $\cos^2x - \sin^2x = 2\sin x - 1 - 2\sin^2x$ .

## 23- §. $\alpha$ HÁM $-\alpha$ MÚYESHLERINIŇ SINUSÍ, KOSINUSÍ, TANGENSI HÁM KOTANGENSI

Meyli, birdeylik sheńberiniń  $M_1$  hám  $M_2$  noqatları  $P(1; 0)$  noqatın sáykes túrde  $\alpha$  hám  $-\alpha$  múyeshlerge burıw nátiyjesinde payda etilgen bolsın (69-súwret). Onda  $Ox$  kósheri  $M_1OM_2$  múyeshin teń ekige bóledi hám sonlıqtan  $M_1$  hám  $M_2$  noqatları  $Ox$  kósherine salıstırǵanda simmetriyalı jaylasqan. Bul noqatlardıń abscissaları birdey, al ordinataları tek belgileri menen ǵana ózgeshelenedi.  $M_1$  noqatı  $(\cos\alpha; \sin\alpha)$  koordinatalarına,  $M_2$  noqatı  $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$  koordinatalarına iye. Sonlıqtan,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \cos(-\alpha) = \cos\alpha. \quad (1)$$

Tangenstiń anıqlamasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

Demek,

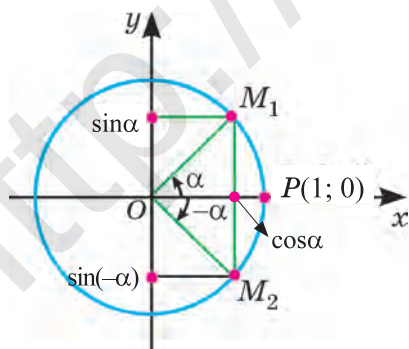
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \quad (2)$$

Soǵan uqsas,

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha. \quad (3)$$

(1) formula  $\alpha$  nıń qálegen mánisinde orınlı boladı, al (2) formula  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$  bolǵanda orınlı.

Eger  $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$  bolsa, onda  $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$  bolatuǵınlıǵın kórsetiw múmkin.



69 súwret.

(1)–(2) formulalar teris múyeshler ushın sinus, kosinus hám tangenstiń mánislerin tabıwǵa imkaniyat beredi.

Máselen:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

## *Shinigiwlar*

**275.** Esaplań:

- 1)  $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3}) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$ ;      2)  $\frac{1+\operatorname{tg}^2(-30^\circ)}{1+\operatorname{ctg}^2(-30^\circ)}$ ;
- 3)  $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6}) + \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) + \sin^2(-\frac{\pi}{4})$ ;
- 4)  $\cos(-\pi) + \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{3}{2}\pi) + \operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4})$ .

**276.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

- 1)  $\operatorname{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$ ;      2)  $\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$ ;
- 3)  $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ ;      4)  $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) + \cos^2(-\alpha) + \sin^2\alpha$ .

**277.** Birdeylikti dálilleń:  $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)} + \operatorname{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ .

**278.** Esaplań::

- 1)  $\frac{3-\sin^2(-\frac{\pi}{3})-\cos^2(-\frac{\pi}{3})}{2\cos(-\frac{\pi}{4})}$ ;
- 2)  $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 7,5\operatorname{tg}(-\pi) + \frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$ .

**279.** Ápiwayılastırın:

- 1)  $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$ ;
- 2)  $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$ .

### 24-§.

### QOSÍW FORMULALARÍ

*Qosıw formulaları* dep  $\cos(\alpha \pm \beta)$  hám  $\sin(\alpha \pm \beta)$  lardı  $\alpha$  hám  $\beta$  múyeshleriniń sinus hám kosinusları arqalı ańlatıwshı formulağa ayıladı.



**Teorema. Qálegen  $\alpha$  hám  $\beta$  ushın tómendegi teńlik dúris boladı:**

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

○  $M_0(1; 0)$  noqatın koordinatalar bası átirapında  $\alpha, -\beta, \alpha + \beta$  radian múyeshlerge burıw nátiyjesinde sáykes túrde,  $M_\alpha, M_{-\beta}$  hám  $M_{\alpha+\beta}$  noqatları payda bolatuǵın bolsın (70-súwret).

Sinus hám kosinustıń anıqlaması boyınsha, bul noqatlar tómendegi koordinatalarǵa iye:

$$M_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha), \quad M_{-\beta}(\cos(-\beta); \sin(-\beta)),$$

$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha + \beta); \sin(\alpha + \beta)).$$

$\angle M_0OM_{\alpha+\beta} = \angle M_{-\beta}OM_\alpha$  bolǵanlıqtan  $M_0OM_{\alpha+\beta}$  hám  $M_{-\beta}OM_\alpha$  teń qaptalı úshmúyeshlikleri teń hám demek, olardıń  $M_0M_{\alpha+\beta}$  hám  $M_{-\beta}M_\alpha$  ultanları da teń. Sonlıqtan

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2 = (M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

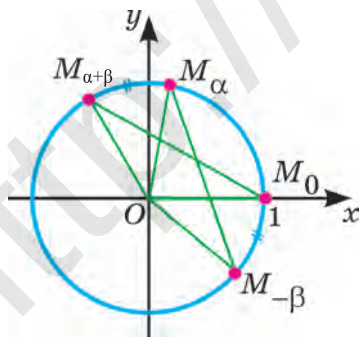
Geometriya kursınan belgili bolǵan eki noqat arasındagı aralıq formulasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$(1 - \cos(\alpha + \beta))^2 + (\sin(\alpha + \beta))^2 = (\cos(-\beta) - \cos\alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin\alpha)^2.$$

23-§ dagı (1) formuladan paydalanıp, bul teńlemenı túrlendiremiz:

$$\begin{aligned} 1 - 2\cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) &= \\ = \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Tiykargı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, tómendegige iye bolamız:



70 súwret.

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta,$$

bundan  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ . ●

**1-másele.**  $\cos 75^\circ$  tı esaplań.

△ (1) formula boyınsha tabamız:

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$



(1) formulada  $\beta$  ni  $-\beta$  ga almashtirip, tomondigige iye bolamiz:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta),$$

Bunnan



$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

**2-másele.**  $\cos 15^\circ$  ni esaplan.

$\triangle$  (2) formulağa muvapiq, tomondigige iye bolamiz:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**3-másele.** Tomondigi formulalardi dälilleñ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \quad (3)$$

$\triangle$   $\alpha = \frac{\pi}{2}$  bolganda (2) formulağa tiykarlanip:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta,$$

yağniy

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta. \quad (4)$$

Bul formulada  $\beta$  ni  $\alpha$  ga almashtirip, mınağan iye bolamiz:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

(4) formulada  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  dep oylasaq:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha. \quad \blacktriangle$$

(1)–(4) formulalardan paydalanip, *sinus ushin qosiw formulasin* keltirip shıǵaramiz:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

Solay etip



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

(5) formulada  $\beta$  ni  $-\beta$  ga almashtirip, tomondegige iye bolamiz:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta),$$

bunnan



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (6)$$

**4-másele.**  $\sin 210^\circ$  ni esaplañ.

$$\begin{aligned} \triangle \sin 210^\circ &= \sin(180^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 180^\circ \cos 30^\circ + \cos 180^\circ \sin 30^\circ = 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**5-másele.** Esaplañ:

$$\begin{aligned} &\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} \cdot \\ \triangle \sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} &= \sin \left( \frac{8\pi}{7} - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \pi = 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**6-másele.** Teñlikti dálilleñ:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}. \quad (7)$$

$$\triangle \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Bul bólshektiñ alımı hám bólimin  $\cos\alpha\cos\beta$  ga bólip, (7) formulani payda etemiz.  $\blacktriangle$

(7) formula esaplawlarda paydalı bolıwı múmkin.

Máselen, usı formula boyınsha tómendeni tabamız:

$$\operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 180^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = 1.$$

### Shınıǵıwlar

Qosıw formulası járdeminde esaplañ **(280–281)**:

**280.** 1)  $\cos 135^\circ$ ;      2)  $\cos 120^\circ$ ;      3)  $\cos 150^\circ$ ;      4)  $\cos 240^\circ$ .

- 281.** 1)  $\cos 57^\circ 30' \cos 27^\circ 30' + \sin 57^\circ 30' \sin 27^\circ 30'$ ;  
 2)  $\cos 19^\circ 30' \cos 25^\circ 30' - \sin 19^\circ 30' \sin 25^\circ 30'$ ;  
 3)  $\cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{11\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \frac{11\pi}{9}$ ;  
 4)  $\cos \frac{8\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7}$ .

- 282.** 1)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ , bunda  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  hám  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;  
 2)  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ , bunda  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Аñлатпанı ápiwayılastırın (**283–284**):

- 283.** 1)  $\cos 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha$ ; 2)  $\cos 5\beta \cos 2\beta + \sin 5\beta \sin 2\beta$ ;  
 3)  $\cos\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7} + \alpha\right) \sin\left(\frac{5\pi}{14} - \alpha\right)$ ;  
 4)  $\cos\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{5} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5} + \alpha\right)$ .

- 284.** 1)  $\cos(\alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ ;  
 2)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \cos(\alpha - \beta)$ .

Qosıw formulaları járdeminde esaplań (**285–286**):

- 285.** 1)  $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ$ ;  
 2)  $\sin 73^\circ \cos 13^\circ - \cos 73^\circ \sin 13^\circ$ ;  
 3)  $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ ; 4)  $\sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$ .

- 286.** 1)  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$ , bunda  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ , hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;  
 2)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ , bunda  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

**287.** Анилатпани апиwayыластирин:

1)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$ ; 2)  $\cos(-\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha - \beta)$ ;

3)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - \sin(\alpha - \beta)$ ;

4)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$ .

**288.** Eger  $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$  hám  $\sin\beta = \frac{8}{17}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  bolsa,  $\cos(\alpha + \beta)$  hám  $\cos(\alpha - \beta)$  ni esaplañ.

**289.** Eger  $\cos\alpha = -0,8$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  hám  $\sin\beta = -\frac{12}{13}$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin(\alpha - \beta)$  ni esaplañ.

**290.** Анилатпани апиwayыластирин:

1)  $\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ ; 2)  $\sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ ;

3)  $\frac{2\cos\alpha\sin\beta + \sin(\alpha - \beta)}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}$ ; 4)  $\frac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$ .

**291.** Birdeylikti dálilleñ:

1)  $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$ ;

2)  $\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$ ;

3)  $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$ ; 4)  $\frac{\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3}\sin\alpha} = -\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ .

**292.** Анилатпани апиwayыластирин: 1)  $\frac{\operatorname{tg}29^\circ + \operatorname{tg}31^\circ}{1 - \operatorname{tg}29^\circ \operatorname{tg}31^\circ}$ ; 2)  $\frac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi - \operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1 + \operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi \operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$ .

## 25-§. QOS MÚYESHTIŃ SINUSÍ HÁM KOSINUSÍ

Qosıw formulalarınan paydalanıp, *qos múyeshtiñ sinusi hám kosinusi formulasın* keltirip shıgaramız.

1)  $\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ .

Solay etip,



$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

(1)

**1-másele.** Eger  $\sin\alpha = -0,6$  hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin 2\alpha$  nı esaplań.

△ (1) formula boyınsha tabamız:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot (-0,6) \cdot \cos\alpha = -1,2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolǵanı ushın  $\cos\alpha < 0$  boladı hám sonlıqtan:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0,36} = -0,8.$$

Demek,  $\sin 2\alpha = -1,2 \cdot (-0,8) = 0,96$ . ▲

2)  $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ .

Solay etip,



$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

(2)

**2-másele.** Eger  $\cos\alpha = 0,3$  bolsa,  $\cos 2\alpha$  nı esaplań.

△ (2) formuladan hám tiykargı trigonometriyalıq birdeylikten paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot (0,3)^2 - 1 = -0,82. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

**3-másele.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:  $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$ .

$$\begin{aligned}\triangle \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

**4-másele.** Eger  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$  bolsa,  $\operatorname{tg} 2\alpha$  nı esaplań.

$$\triangle \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Formulada  $\beta = \alpha$  dep boljap (24-§ qa qarań), tómendegige iye bolamız:



$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (3)$$

Eger  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$  bolsa, onda (3) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangle$$

### Shınıǵıwlar

Esaplań (293–294):

**293.** 1)  $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ ; 2)  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ ;  
3)  $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$ ; 4)  $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$ .

**294.** 1)  $2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$ ; 2)  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ ;  
3)  $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left( \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right)^2$ .

**295.** Eger:

1)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ; 2)  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  hám  $\pi < - < \frac{3\pi}{2}$   
bolsa,  $\sin 2\alpha$  ni hisoblang.

**296.** Eger:

1)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ; 2)  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  bolsa,  $\cos 2\alpha$  ni esaplań.

Ańlatpanı ápiwayılastırın (297–298):

**297.** 1)  $\sin \alpha \cos \alpha$ ; 2)  $\cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ;  
3)  $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$ ; 4)  $\sin 2\alpha + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .

**298.** 1)  $\frac{\cos 2\alpha + 1}{2\cos \alpha}$ ; 2)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ ; 3)  $\frac{\sin^2 \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}$ ; 4)  $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$ .

**299.** Birdeylıktı dálıllıń:

$$1) \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1; \quad 2) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha;$$

$$3) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha; \quad 4) 2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha = 1.$$

**300.** Eger:

$$1) \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}; \quad 2) \sin \alpha - \cos \alpha = -\frac{1}{3}; \quad 3) \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

bolsa,  $\sin 2\alpha$  nı esaplań.

**301.** Birdeylıktı dálıllıń:

$$1) 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha; \quad 2) 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha.$$

**302.** Esaplań:

$$1) 2\cos^2 15^\circ - 1; \quad 2) 1 - 2\sin^2 22,5^\circ; \quad 3) 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1; \quad 4) 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{12}.$$

**303.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

$$1) 1 - 2\sin^2 5\alpha; \quad 2) 2\cos^2 3\alpha - 1; \quad 3) \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}};$$

$$4) \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}; \quad 5) 1 + \cos 4\alpha; \quad 6) 1 - 2\cos^2 5\alpha.$$

**304.** Birdeylıktı dálıllıń:

$$1) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha - 1; \quad 2) \frac{\sin 2\alpha - 2\cos \alpha}{\sin \alpha - \sin^2 \alpha} = -2\operatorname{ctg} \alpha;$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha (1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha; \quad 4) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

**305.** Eger:  $\operatorname{tg} \alpha = 0,6$  bo'lsa,  $\operatorname{tg} 2\alpha$  nı esaplań.

**306.** Esaplań: 1)  $\frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}};$  2)  $\frac{6\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ};$  3)  $\frac{4\operatorname{tg} 75^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}.$

## 26-§.

## KELTIRIW FORMULALARI

Sinus, kosinus, tangens hám kotangenstıń mánisleriniń kesteleri  $0^\circ$  dan  $90^\circ$  qan shekem (yaki 0 den  $\frac{\pi}{2}$  ge shekem) múyeshler ushın dúziledi. Bul jaǵday olardıń basqa múyeshler ushın mánisleri súyir múyeshler ushın mánislerine keltiriw menen túsindiriledi.

**1-másele.**  $\sin 870^\circ$  hám  $\cos 870^\circ$  tı esaplań.

△  $870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$ . Sonlıqtan da  $P(1; 0)$  noqatın koordinatalar bası átirapında  $870^\circ$  qa burǵanda noqat eki tolıq aylanıs jasadı hám jáne  $150^\circ$  qa burıladı, yaǵnıy  $150^\circ$  burıwdaǵı  $M$  noqatınıń dál ózi payda boladı (71-súwret). Sonlıqtan  $\sin 870^\circ = \sin 150^\circ$   $\cos 870^\circ = \cos 150^\circ$ .

$M$  noqatına Oy kósherine qarata simmetriyalı bolǵan  $M_1$  noqatın jasaymız (72-súwret).  $M$  hám  $M_1$  noqatlarınıń ordinataları birdey, al abscissaları tek belgileri menen ǵana ózgeshelenedi. Sonlıqtan  $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Juwabı:**  $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . ▲

1-máseleni sheshiwde

$$\sin(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ, \cos(2 \cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \quad (1)$$

$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ \quad (2)$$

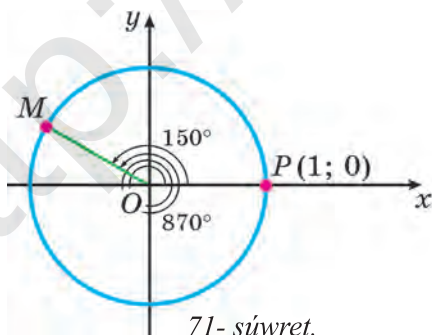
teńliklerden paydalanıladı.

(1) teńlik durıs teńlik, sebebi  $P(1; 0)$  noqatın  $\alpha + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  múyeshke burǵanda onı  $\alpha$  múyeshke burǵandaǵı noqattıń dál ózi payda boladı.

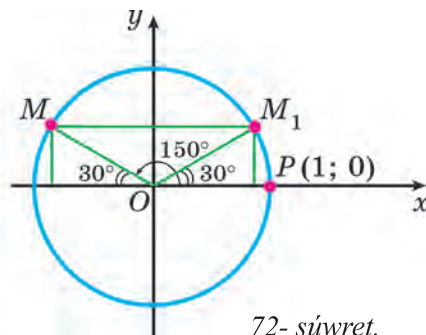
Sonlıqtan da tómendegi formulalar durıs boladı:



$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha, \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha, k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$



71- súwret.



72- súwret.



Atap aytqanda,  $k = 1$  bolganda:

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

teńlikleri orınlı boladı.

(2) teńlik



$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \quad (4)$$

formulalardıń dara jaǵdayı bolıp sanaladı.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$  formulasın dálilleymiz.

○ Sinus ushın qosıw formulasın paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \\ &= 0 \cdot \cos\alpha - (-1) \cdot \sin\alpha = \sin\alpha. \end{aligned}$$

||| (4) formulalardıń ekinshisi de usıǵan uqsas dálillenedi. (4) formulalar *keltiriw formulaları* dep ataladı. (3) hám (4) formulalar járdeminde qále-gen múyeshtiń sinusı hám kosinusın esaplawdı, olardıń súyir múyeshter ushın mánislerin esaplawǵa keltiriw múmkin.

**2-másele.**  $\sin 930^\circ$  tı esaplań.

△ (3) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\sin 930^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 150^\circ) = \sin(-150^\circ).$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$  formulası boyınsha  $\sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ$  tı payda etemiz.

(4) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$-\sin 150^\circ = -\sin(180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}.$$

**Juwabı:**  $\sin 930^\circ = -\frac{1}{2}$ . ▲

**3-másele.**  $\cos \frac{15\pi}{4}$  tı esaplań.

$$\triangle \cos \frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangle$$

Endi qálegen múyeshtiń tangensin esaplawdı súyir múyeshtiń tangensin esaplawǵa qalay keltiriwge bolatuǵının kórsetemiz.

(3) formuladan hám tangenstıń anıqlamasınan

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha, k \in \mathbb{Z}$$

teńligi kelip shıǵadı.

Usı teńlik hám (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Sonlıqtan tómendegi formula orınlı boladı:



$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

(5)

**4-másele.** Esaplań: 1)  $\operatorname{tg} \frac{11\pi}{3}$ ; 2)  $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{4}$ .

$$\triangle 1) \operatorname{tg} \frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1. \blacktriangle$$

24- § da (3-másele.)



$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

formulaları dálillengen edi. Bul formulalar *keltiriw formulaları* dep ataladı.

Usı formulalardan paydalanıp,  $\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6}$ ,  $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$  nı payda etemiz.

$x$  tiń qálegen mánisi ushın  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ ,  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  teńlik-leri durıs bolatuǵını belgili.

Bul tengliklerden, argument  $2\pi$  ge ózgergende sinus hám kosinustıń mánisleri periodlı tákirarlanatuǵınlıǵı kórinedi. Bunday funkciyalar *periodı  $2\pi$  bolǵan periodlı funkciyalar* dep ataladı



Eger sonday bir  $T \neq 0$  sanı bar bolıp,  $y = f(x)$  funksiyanıń anıqlanıw oblastındaǵı qálegen  $x$  ushın

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T)$$

teńligi orınlansa, onda  $f(x)$  funksiya *periodlı funksiya* dep ataladı.  $T$  sanı  $f(x)$  funksiyanıń *periodı* dep ataladı.

Bul anıqlamadan, eger  $x$  san  $f(x)$  funksiyanıń anıqlanıw oblastına tiyisli bolsa, onda  $x + T$ ,  $x - T$  sanları da, ulıwma,  $x + Tn$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sanları da usı periodlı funksiyanıń anıqlanıw oblastına tiyisli hám  $f(x + Tn) = f(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  boladı.

|||  $2\pi$  sanı  $y = \cos x$  funksiyanıń *eń kishi óń periodı* ekenligin kórsetemiz.

○  $T > 0$  kosinustıń periodı bolsın, yaǵnıy qálegen  $x$  ushın  $\cos(x + T) = \cos x$  teńligi orınlanadı.  $x = 0$  dep,  $\cos T = 1$  di payda etemiz. Bunda  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $T > 0$  bolǵanlıqtan  $T$  tómendegi  $2\pi$ ,  $4\pi$ ,  $6\pi$ , ... mánislerin qabıl ete aladı hám sonlıqtan da  $T$  nıń mánisi  $2\pi$  den kishi bolıwı múmkın emes. ●

|||  $y = \sin x$  funksiyanıń *eń kishi óń periodı*  $2\pi$  ge teń ekenin dálillew múmkın.

### Shınıǵıwlar

Esaplań (307–310):

307. 1)  $\sin \frac{13}{2}\pi$ ;      2)  $\sin 17\pi$ ;      3)  $\cos 7\pi$ ;      4)  $\cos \frac{11}{2}\pi$ ;

5)  $\sin 720^\circ$ ;      6)  $\cos 540^\circ$ ;      7)  $\sin 12,5\pi$ ;      8)  $\cos 2025^\circ$ .

308. 1)  $\cos 420^\circ$ ;      2)  $\operatorname{tg} 570^\circ$ ;      3)  $\sin 3630^\circ$ ;      4)  $\operatorname{ctg} 960^\circ$ ;

5)  $\sin \frac{13\pi}{6}$ ;      6)  $\operatorname{tg} \frac{11}{6}\pi$ ;      7)  $\operatorname{tg} 585^\circ$ ;      8)  $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4}$ .

309. 1)  $\cos 150^\circ$ ;      2)  $\sin 135^\circ$ ;      3)  $\cos 120^\circ$ ;      4)  $\sin 315^\circ$ .

- 310.** 1)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ ;                      2)  $\sin \frac{7\pi}{6}$ ;                      3)  $\cos \frac{5\pi}{3}$ ;  
 4)  $\sin \left( -\frac{11\pi}{6} \right)$ ;                      5)  $\cos \left( -\frac{7\pi}{3} \right)$ ;                      6)  $\operatorname{tg} \left( -\frac{2\pi}{3} \right)$ .

**311.** Аñлатпанıñ сан мánисин табиñ:

- 1)  $\cos 630^\circ - \sin 1470^\circ - \operatorname{ctg} 1125^\circ$ ;  
 2)  $\operatorname{tg} 1800^\circ - \sin 495^\circ + \cos 945^\circ$ ;  
 3)  $\sin(-7\pi) - 2\cos \frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ ;  
 4)  $\cos(-9\pi) + 2\sin \left( -\frac{49\pi}{6} \right) - \operatorname{ctg} \left( -\frac{21\pi}{4} \right)$ .

**312.** Аñлатпанı ápiwayılastırıñ:

- 1)  $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$ ;  
 2)  $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$ .

**313.** Esaplañ:

- 1)  $\cos 7230^\circ + \sin 900^\circ$ ;                      2)  $\sin 300^\circ + \operatorname{tg} 150^\circ$ ;  
 3)  $2\sin 6,5\pi - \sqrt{3}\sin \frac{19\pi}{3}$ ;                      4)  $\sqrt{2}\cos 4,25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos \frac{61\pi}{6}$ ;  
 5)  $\frac{\sin(-6,5\pi) + \operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi) + \operatorname{ctg}(-16,25\pi)}$ ;                      6)  $\frac{\cos(-540^\circ) + \sin 480^\circ}{\operatorname{tg} 405^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ}$ .

**314.** Аñлатпанı ápiwayılastırıñ:

- 1)  $\frac{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) + \sin(2\pi - \alpha)}$ ;                      2)  $\frac{\cos(\pi - \alpha) + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin(\pi - \alpha) - \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$ ;  
 3)  $\frac{\sin(\alpha - \pi)}{\operatorname{tg}(\alpha + \pi)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$ ;                      4)  $\frac{\sin^2(\pi - \alpha) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)}{\sin(\pi - \alpha)} \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ .

**315.** Úshmúyeshliktiñ eki ishki múyeshiniñ qosındısıniñ sinusı úshinshi múyeshiniñ sinusına teñligin dálilleñ.

**316.** Birdeyltki dálilleń:

$$\begin{aligned} 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\alpha; & 2) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin\alpha; \\ 3) \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) &= -\sin\alpha; & 4) \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) &= -\cos\alpha. \end{aligned}$$

**317.** Teńlemenı sheshiń:

$$\begin{aligned} 1) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= 1; & 2) \sin(\pi - x) &= 1; & 3) \cos(x - \pi) &= 0; \\ 4) \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= 1; & 5) \cos(\pi - 2x) &= 1; & 6) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= 0. \end{aligned}$$

## 27-§. SINUSLARDIŇ QOSINDISI HÁM AYIRMASI. KOSINUSLARDIŇ QOSINDISI HÁM AYIRMASI.

**1 - másele.** Anlatpanı ápiwayılastırıń:

$$\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \sin \frac{\pi}{12}.$$

△ Qosıw formulası hám qos múyeshtiń sinusı formulasınan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$\begin{aligned} &\left(\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right)\right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= \left(\sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} + \cos\alpha \sin \frac{\pi}{12} + \sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} - \cos\alpha \sin \frac{\pi}{12}\right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ &= 2\sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \sin\alpha \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin\alpha. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Eger *sinuslardıń qosındısınıń formulası*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1)$$

dep qollanılsa, bul máselenı ápiwayıraq sheshiwge boladı. Bul formula járdeminde tómendegini payda etemiz:

$$\begin{aligned} & \left( \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{12}\right) \right) \sin \frac{\pi}{12} = \\ & = 2\sin\alpha \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sin\alpha. \end{aligned}$$

Endi (1) formulaniń orınlı ekenin dálilleymiz.

○  $\frac{\alpha+\beta}{2} = x, \frac{\alpha-\beta}{2} = y$  belgilewlerin kiritemiz. Sonda  $x+y=\alpha, x-y=\beta$  boladı hám sonlıqtan  $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2\sin x \cos y = 2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ . ●

(1) formula menen bir qatarda tómendegi *sinuslar ayırmasınıń formulası*, *kosinuslardıń qosındısı* hám *ayırmasınıń formulalarından* da paydalanıladı:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

(3) hám (4) formulalar da (1) formulaniń dálilleniwiwe uqşas dálillenedi; (2) formula  $\beta$  ni  $-\beta$  menen almastırıw arqalı (1) formuladan keltirilip shıǵarıladı (*buni ózińizshe dálillen*).

**2-másele.**  $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$  tı esaplań.

$$\begin{aligned} & \triangle \sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \\ & = 2\sin \frac{75^\circ+15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ-15^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**3-másele.**  $2\sin\alpha + \sqrt{3}$  kóbeymege túrlendirin.

$$\begin{aligned} & \triangle 2\sin\alpha + \sqrt{3} = 2\left(\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\sin\alpha + \sin \frac{\pi}{3}\right) = \\ & = 4\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**4-másele.**  $\sin\alpha + \cos\alpha$  aňlatpasınıń eń kishi mánisi  $\sqrt{2}$  ge, al eń úlken mánisi  $\sqrt{2}$  ge teń ekenin dálilleń.

△ Berilgen aňlatpanı kóbeymege túrlendiremiz:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

Kosinustıń eń kishi mánisi -1 ge, al eń úlken mánisi 1 ge teń bolǵanlıqtan, berilgen aňlatpanıń eń kishi mánisi  $\sqrt{2} \cdot (-1) = -\sqrt{2}$  ge, al eń úlken mánisi  $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$  ge teń. ▲

### Shınıǵıwlar

**318.** Aňlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$

2)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right);$

3)  $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$

4)  $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$

**319.** Esaplań:

1)  $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ;$

2)  $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ;$

3)  $\cos \frac{11\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12};$

4)  $\cos \frac{11\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{12};$

5)  $\sin \frac{7\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12};$

6)  $\sin 105^\circ + \sin 165^\circ.$

**320.** Kóbeymege túrlendiriń:

1)  $1 + 2\sin\alpha;$

2)  $1 - 2\sin\alpha;$

3)  $1 + 2\cos\alpha;$

4)  $1 + \sin\alpha;$

5)  $1 - \cos\alpha;$

6)  $1 + \cos\alpha;$

**321.** Birdeylıkti dálilleń:

1)  $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$

2)  $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$

**322.** Aňlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\frac{2(\cos\alpha + \cos 3\alpha)}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha};$

2)  $\frac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}.$

Birdeylikti dálilleń (323–324):

323. 1)  $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right);$

2)  $\cos\alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = 0.$

324. 1)  $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha;$

2)  $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

325. Kóbeyme túrinde jazıń:

1)  $\cos 22^\circ + \cos 24^\circ + \cos 26^\circ + \cos 28^\circ;$  2)  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{6}.$

326.  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$  birdeylikti dálilleń hám esaplań:

1)  $\operatorname{tg} 267^\circ + \operatorname{tg} 93^\circ;$  2)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12};$  3)  $\operatorname{tg} 99^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ.$

327. Kóbeytiwshilerge jikleń:

1)  $1 - \cos\alpha + \sin\alpha;$  2)  $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha;$   
3)  $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha;$  4)  $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha.$

### III bobga doir mashqlar

328.  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  bolsın. P(1; 0) noqatın:

1)  $\frac{\pi}{2} - \alpha;$  | 2)  $\alpha - \pi;$  | 3)  $\frac{3\pi}{2} - \alpha;$  | 4)  $\frac{\pi}{2} + \alpha;$  | 5)  $\alpha - \frac{\pi}{2};$  | 6)  $\pi - \alpha$

múyesheke burıw nátiyjesinde payda bolǵan noqat qaysı sherekte jatatuǵının anıqlań.

329. Múyeshtiń sinusı hám kosinusınıń mánisin tabıń:

1)  $3\pi;$  2)  $4\pi;$  3)  $3,5\pi;$  4)  $\frac{5}{2}\pi;$   
5)  $\pi k, k \in \mathbb{Z};$  6)  $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z};$  7)  $2k\pi, k \in \mathbb{Z};$  8)  $6,5\pi.$



**330.** Esaplań:

- 1)  $\sin 3\pi - \cos \frac{3\pi}{2}$ ;
- 2)  $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3,5\pi$ ;
- 3)  $\sin \pi k + \cos 2k\pi$ , bunda  $k$  – butun son;
- 4)  $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin \frac{(4k+1)\pi}{2}$ , bunda  $k$  – butun son.

**331.** Tabiń:

- 1) eger  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\cos \alpha$  nı;
- 2) eger  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$  hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\operatorname{tg} \alpha$  nı;
- 3) eger  $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$  hám  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  bolsa,  $\sin \alpha$  nı;
- 4) eger  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2}$  hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin \alpha$  nı.

**332.** Birdeylıkti dálilleń:

- 1)  $5\sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha + 5\cos^2 \alpha = 5 + \sin \alpha$ ;
- 2)  $\operatorname{ctg} \alpha \sin \alpha - 2\cos^2 \alpha - 2\sin^2 \alpha = \cos \alpha - 2$ ;
- 3)  $\frac{3}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha} = 3\cos^2 \alpha$ ;
- 4)  $\frac{5}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha} = 5\sin^2 \alpha$ .

**333.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

- 1)  $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ;
- 2)  $3\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ;
- 3)  $(1-\operatorname{tg}(-\alpha))(1-\operatorname{tg}(\pi+\alpha))\cos^2 \alpha$ ;
- 4)  $(1+\operatorname{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(-\alpha)}\right)$ .

**334.** Ańlatpanı ápiwayılastırın hám onıń san mánisin tabıń:

- 1)  $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$ , bunda  $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ ;
- 2)  $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$ , bunda  $\sin \alpha = \frac{1}{6}$ .

**335.** Esaplań:

- 1)  $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$ ;      2)  $\sin 15^\circ$ ;      3)  $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$ ;  
4)  $\sin 75^\circ$ ;      5)  $\cos 75^\circ$ ;      6)  $\sin 135^\circ$ .

**ÓZINI ZDI TEKSERIP KÓRIŇ!**

**1.** Eger: 1)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  bolsa,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\sin 2\alpha$  nı,

2)  $\cos \alpha = -0,6$  hám  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa,  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  nı esaplań.

**2.** Ańlatpanıń mánisin tabıń:

1)  $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos \pi$ ;

2)  $\cos 150^\circ$ ;    3)  $\sin \frac{8\pi}{3}$ ;    4)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$ ;    5)  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ .

**3.** (*Ğiyosiddin Jamshid al-Koshiy máselesi.*)

$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$  ekenin dálilleń.

**4.** Birdeylikti dálilleń.

1)  $3 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2$ ;    2)  $1 - \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \sin^2 \alpha$ .

**5.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$ ;    2)  $\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$ ;

3)  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$ .

**336.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;

2)  $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;

3)  $\frac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ ;

4)  $\frac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$ .

Esaplań (337–338):

337. 1)  $\sin \frac{47\pi}{6}$ ; 2)  $\operatorname{tg} \frac{25\pi}{4}$ ; 3)  $\operatorname{ctg} \frac{27\pi}{4}$ ; 4)  $\cos \frac{21\pi}{4}$ .

338. 1)  $\cos \frac{23\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4}$ ; 2)  $\sin \frac{25\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3}$ ;  
3)  $3\cos 3660^\circ + \sin(-1560^\circ)$ ; 4)  $\cos(-945^\circ) + \operatorname{tg} 1035^\circ$ .

339. Sanlardi salıstırın.

1)  $\sin 3$  hám  $\cos 4$ ; 2)  $\cos 0$  hám  $\sin 5$ ; 3)  $\sin 1$  hám  $\cos 1$ .

340. Sannıń belgisin anıqlań:

1)  $\sin 3,5 \operatorname{tg} 3,5$ ; 2)  $\cos 5,01 \sin 0,73$ ; 3)  $\frac{\operatorname{tg} 13}{\cos 15}$ ;  
4)  $\sin 1 \cos 2 \operatorname{tg} 3$ ; 5)  $\sin 2 \cos 2$ ; 6)  $\operatorname{tg} 1 \cos 1$ .

341. Esaplań:

1)  $\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}$ ; 2)  $\sin 165^\circ$ ; 3)  $\sin 105^\circ$ ;  
4)  $\sin \frac{\pi}{12}$ ; 5)  $1 - 2\sin^2 195^\circ$ ; 6)  $2\cos^2 \frac{3\pi}{8} - 1$ .

342. Ańlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $(1 + \operatorname{tg}(-\alpha))(1 - \operatorname{ctg}(-\alpha)) - \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$ ; 2)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos \alpha + \sin(-\alpha)} + \frac{\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin \alpha}$ .

343. Berilgen:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$  hám  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  lardıń mánislerin esaplań.

Ańlatpanı ápiwayılastırın (344–346):

344. 1)  $\cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha$ ; 2)  $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ .

345. 1)  $\frac{\sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{4\cos \alpha}$ ; 2)  $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}$ ;  
3)  $\frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\sin^2 \alpha - 1}$ ; 4)  $\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}{\sin 2\alpha \cos 2\alpha - \cos 2\alpha}$ .

346. 1)  $\frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} - \sin(\pi - x)$ ; 2)  $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} + \cos(1,5\pi + x)$ ;  
3)  $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} - \sin(1,5\pi + x)$ ; 4)  $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} + \cos(3\pi - x)$ .

- 347.** 1) Eger  $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$  hám  $\operatorname{tg}\beta = 2,4$  bolsa,  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  ni;  
2) eger  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$  hám  $\operatorname{ctg}\beta = -1$  bolsa,  $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$  ni esaplań.

**348.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

$$1) 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right); \quad 2) 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right).$$

### III babqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

**1.**  $153^\circ$  tıń radian ólshemin tabıń

A)  $\frac{17\pi}{20}$ ;    B)  $\frac{19\pi}{20}$ ;    C)  $17\pi$ ;    D)  $\frac{2\pi}{9}$ .

**2.**  $0,65\pi$  diń gradus ólshemin tabıń.

A)  $11,7^\circ$ ;    B)  $117^\circ$ ;    C)  $116^\circ$ ;    D)  $118^\circ$ .

**3.** Kóbeymeniń qaysı biri teris?

A)  $\cos 314^\circ \sin 147^\circ$ ;    B)  $\operatorname{tg} 200^\circ \operatorname{ctg} 201^\circ$ ;  
C)  $\cos 163^\circ \cos 295^\circ$ ;    D)  $\sin 170^\circ \operatorname{ctg} 250^\circ$ .

**4.** Kóbeymeniń qaysı biri oń?

A)  $\sin 2^\circ \cos 2^\circ \sin 1^\circ \sin 1^\circ$ ;    B)  $\operatorname{tg} 8^\circ \operatorname{ctg} 8^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} \sqrt{10}$ ;  
C)  $\sin 9^\circ \sin 9^\circ \cos 9^\circ \cos 9^\circ$ ;    D)  $\cos 10^\circ \cos 10^\circ \cos 11^\circ \cos \sqrt{11}$ .

**5.**  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$  noqatına túsıw ushın  $(1; 0)$  noqatın burıw kerek bolǵan barlıq múyeshlerdi tabıń:

A)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;    B)  $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;  
C)  $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ ;    D)  $2\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

**6.**  $(1; 0)$  noqatın  $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  múyeshke burıwdan payda bolatuǵın noqattıń koordinataların tabıń:

A)  $(0; 1)$ ;    B)  $(0; -1)$ ;    C)  $(1; 0)$ ;    D)  $(-1; 0)$ .

7. Sanlardi ósiw tártibinde jazıń:

$$a = \sin 1,57; \quad b = \cos 1,58; \quad c = \sin 3.$$

A)  $a < c < b$ ; B)  $b < c < a$ ; C)  $c < a < b$ ; D)  $b < a < c$ .

8. Sanlardi kemeyiw tártibinde jazıń:

$$a = \cos 2; \quad b = \cos 2^\circ; \quad c = \sin 2; \quad d = \sin 2^\circ.$$

A)  $a > c > d > b$ ; B)  $d > c > b > a$ ;  
C)  $b > c > d > a$ ; D)  $c > d > b > a$ .

9. Esaplań:  $\frac{\sin 136^\circ \cdot \cos 46^\circ - \sin 46^\circ \cdot \cos 224^\circ}{\sin 110^\circ \cdot \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \cdot \cos 50^\circ}$ .

A)  $\cos 40^\circ$ ; B) 0,5; C)  $\sin 44^\circ$ ; D) 2.

10. Esaplań:  $\frac{\sin 10^\circ \cdot \sin 130^\circ - \sin 100^\circ \cdot \sin 220^\circ}{\sin 27^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 157^\circ \cdot \cos 153^\circ}$ .

A) 1; B) -1; C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; D)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

11. Esaplań:  $\cos(-225^\circ) + \sin 675^\circ + \operatorname{tg}(-1035^\circ)$ .

A) 1; B) -1; C)  $\sqrt{2}$ ; D)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

12.  $\sin \alpha = 0,6$  bolsa,  $\operatorname{tg} 2\alpha$  nı tabıń.  $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ .

A) 3,42; B)  $3\frac{3}{7}$ ; C)  $\frac{7}{24}$ ; D)  $-\frac{7}{24}$ .

13.  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$  bolsa,  $\sin 2\alpha$  nı tabıń.

A)  $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ; B)  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ ; C)  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ; D)  $\sqrt{5}$ .

14.  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$  bolsa,  $\cos 2\alpha$  nı tabıń.

A)  $\frac{4}{3}$ ; B)  $-\frac{4}{3}$ ; C)  $\frac{3}{4}$ ; D)  $-\frac{3}{4}$ .

15. Ápiwayılastırın:  $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$ .
- A)  $-1$ ;      B)  $1$ ;      C)  $0,5$ ;      D)  $-\frac{1}{2}$ .
16. Ápiwayılastırın:  $\frac{\sin 2\alpha + \sin(\pi-\alpha) \cdot \cos \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ .
- A)  $3\sin\alpha$ ;      B)  $\frac{1}{3}\sin\alpha$ ;      C)  $-\sin\alpha$ ;      D)  $\frac{1}{3}\cos\alpha$ .
17.  $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{7}$  bolsa,  $\frac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha + 15\cos^2\alpha}$  ni esaplań.
- A)  $0,59$ ;      B)  $0,49$ ;      C)  $-0,49$ ;      D)  $0,2$ .
18.  $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{1}{3}$  bolsa,  $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$  ni tabıń.
- A)  $\frac{81}{49}$ ;      B)  $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$ ;      C)  $\frac{49}{81}$ ;      D)  $-1\frac{32}{49}$ .
19. Esaplań:  $\sin 100^\circ \cdot \cos 440^\circ + \sin 800^\circ \cdot \cos 460^\circ$ .
- A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      B)  $1$ ;      C)  $-1$ ;      D)  $0$ .
20. Ápiwayılastırın:  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$ .
- A)  $4\cos 2\alpha$ ;      B)  $-2\sin 4\alpha$ ;      C)  $\sin 4\alpha$ ;      D)  $2\cos 2\alpha$ .
21.  $8x^2 - 6x + 1 = 0$  teńlemesiniń korenleri  $\sin\alpha$  hám  $\sin\beta$  bolıp,  $\alpha, \beta$  lar I shekte bolsa,  $\sin(\alpha + \beta)$  ni tabıń.
- A)  $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$ ;      B)  $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$ ;      C)  $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$ ;      D)  $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$ .
22.  $6x^2 - 5x + 1 = 0$  teńlemesiniń korenleri  $\cos\alpha$  hám  $\cos\beta$  bolıp,  $\alpha, \beta$  lar I sherekte bolsa,  $\cos(\alpha + \beta)$  ni tabıń.
- A)  $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$ ;      B)  $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ ;      C)  $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$ ;      D)  $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$ .

23.  $x$  ni tabiń:  $2(x + \sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$ .

- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      B)  $\sqrt{2}$ ;      C)  $\sqrt{2}$ ;      D)  $2\sqrt{2}$ .

24.  $x^2 - 7x + 12 = 0$  teńlemesiniń korenleri  $\operatorname{tg} \alpha$  hám  $\operatorname{tg} \beta$  bolsa,  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  ni tabiń:

- A) 1;      B)  $\frac{7}{11}$ ;      C)  $\sqrt{3}$ ;      D)  $-\frac{7}{11}$ .



### Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máseleler

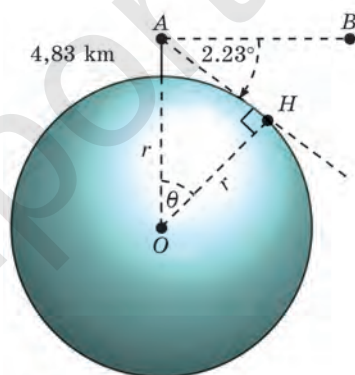
**Másele.** (Beruniy máselesi.) Baqlawshı teńiz qáddinen 4,83 km biyikliktegi tawdıń tóbesinde turıp, okean gorizontına ağıw múyeshi  $2,23^\circ$  ekenin ólshedi. Jerdiń radiusın tabiń.

Orta ásirlerdiń ullı enciklopedistshi ilimpazı Abu Rayxan Muhammed ibn Ahmad Beruniy (970-1048 j). Jer sharınıń radiusın úlken anıqlıqta ólshegen bolıp, máseleńiń tómende keltirilgen sheshiw usılı oǵan tiyisli.

△ Jerdi shar dep oylayıq.  $r$  arqalı Jerdiń radiusın,  $A$  arqalı tawdıń tóbesin hám  $H$  arqalı

$A$  noqattan shıqqan tuwrısında jatıwshı gorizont noqatın 73-súwrette kórsetilgendeı etip belgileyik.  $O$  noqat Jerdiń orayı hám  $B$  noqat  $A$  noqatınan shıǵıwsh  $\overline{AB}$  ǵa perpendikulyar bolǵan gorizonttal sızıqtıń noqatı bolsın. Múyesh  $\angle AOH$  ni  $\theta$  arqalı belgileyik.

$A$  noqat teńiz qáddinen 4,83 km biyiklikte bolǵanı ushın  $OA = r + 4,83$ . Bunnan tisqari,  $OH = r$ .  $\overline{AB}$  sızıq  $\overline{AB}$  ǵa perpendikulyar bolǵanı ushın  $\angle OAB = 90^\circ$  hám sonlıqtan  $\angle OAH = 90^\circ - 2,23^\circ = 87,77^\circ$ . Jer qáddin súwrettegedey sheńber sıpatında qarasaq,  $\overline{AH}$  bul sheńber urınıwshı hám demek,  $\overline{AH}$  hám  $\overline{H}$  óz ara perpendikulyar boladı, nátiyjede  $\angle OHA = 90^\circ$ .  $\angle OAH$  múyeshler qosındısı  $180^\circ$



73-súwret.

bolgʻanliqtan  $\theta = 180^\circ - 90^\circ - 87,77^\circ = 2,23^\circ$ . Demek,  $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r+4,83}$ , bun-

nan  $\frac{r}{r+4,83} = \cos 2,23^\circ$ .

Bul teʼnlemeni  $r$  ga salıstırmalı tırde sheshemiz:

$$r = (r+4,83)\cos 2,23^\circ \Rightarrow r - r\cos 2,23^\circ = 4,83\cos 2,23^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4,83\cos 2,23^\circ}{1 - \cos 2,23^\circ} \Rightarrow r = 6372,91.$$

Sonı aytıp ótiwimiz kerek, payda etilgen nátiyje Jerdiń negizgi ortasha radiusı 6371 km ge júdá jaqın.

**Juwabı:**  $r = 6372,91$  km. ▲

### Máseleler

1. Baqlawshı Jer joldası Jer betinen  $h$ (km) aralıqta sheńber boylap háreket etsin. D joldastan Jer betiniń baqlaw múmkin bolgʻan aralıgınıń uzınlıgı dep oylayıq(74-súwret).

- 1) Oraylıq múyesh  $\theta$  (radianlarda) hám  $h$  biyiklikti baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;
- 2) baqlanıwı múmkin bolgʻan aralıqtıń  $d$  uzınlıgı menen  $\theta$  baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;
- 3)  $d$  hám  $h$  tı baylanıstırıwshı teńlemeni tabıń;
- 4) egerde  $d = 4000$  km bolsa, Jer joldası qanday biyiklikte bolıwı kerek?

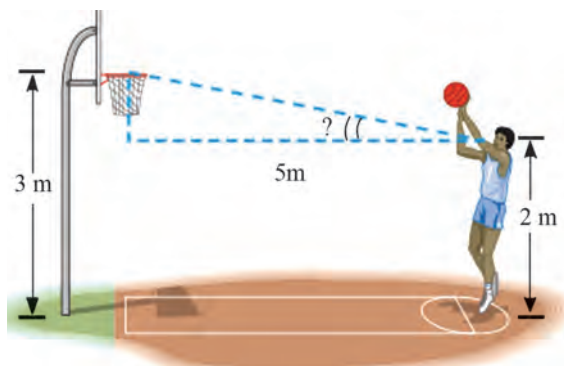
- 5) egerde Jer joldası 100 km biyiklikte bolsa,  $d$  qanday boladı?

2. Basketbol sebetinen 5 metr aralıqta turgʻan basketbolshınıń kózleri poldan 2 metr biyiklik dárejesinde, bunda sebetshe dóńgelegi poldan 3 metr biyiklikte jaylasqan(75-súwret). Onıń kózlerinen sebetshe dóńgeleginiń orayına qaray múyeshi qanday?



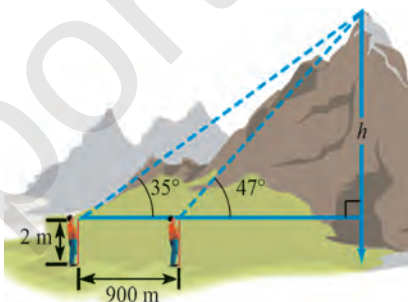
74-súwret





75- súwret

3. Marksheyder (kánlerdi rejelewshi hám olardan durıs paydalanıw boyınsha qánige) tawdıń biyikligin ólshew maqsetinde aralıqları 900 metr bolğan eki noqattan kóteriliw múyeshlerin ólshedi (76-súwret). Nátiyjede birinshi múyesh  $47^\circ$  hám ekinshisi  $35^\circ$  ekenligi anıqlandı. Egerde teodolit (múyeshti ólshewshi ásbap) tiń biyikligi 2 metr bolsa, tawdıń biyikligin tabıń.



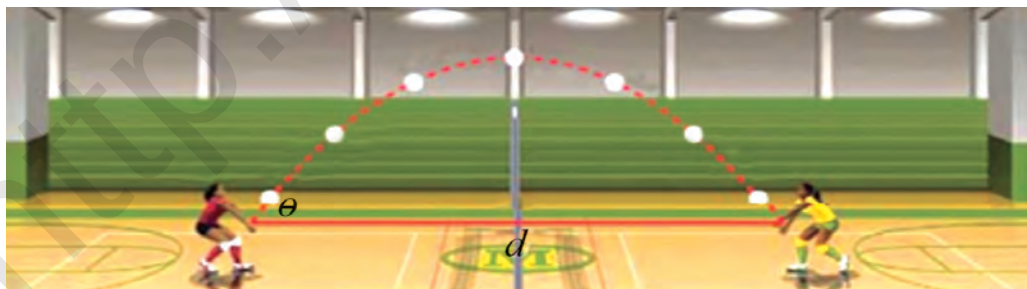
76 súwret.

4. Volleybol oyunında kóteriliw múyeshi  $\theta$  hám baslanğısh tezligi  $v$  m/sek penen atılğan top

$$d = \frac{v^2}{9,75} \sin 2(\theta) \text{ formulağa tiykarlanıp } d$$

gorizontal aralıqqa ushıp baradı. Egerde

$\theta = 60^\circ$  tezlik 12 m/sek bolsa,  $d$  nı tabıń (77-súwret).



77 súwret



## Tariyxiy máseleler

*Abu Rayxan Beruniy máseleleri*

1. Qudıq cilindr formasında bolıp, onıń túbi qudıqtıń ernegindegi  $A$  noqatınan  $\alpha$  múyeshi astında, qudıqtıń diywalı dawamındağı  $B$  noqatınan  $\beta$  múyeshi astında kórinedi (78-súwret). Eger  $AB=a$  bolsa, qudıqtıń tereńligin tabıń.

Berilgeni:

$$\angle CAD = \alpha, \angle ABD = \beta, AB = a.$$

Tabıw kerek:  $AC = ?$

2. Minara jerdegi  $A$  noqatınan  $\alpha$  múyesh astında, al  $B$  noqatınan  $\beta$  múyeshi astında kórinedi (79-súwret). Eger  $AB=a$  bolsa, minaranıń biyikligin tabıń.

Berilgeni:

$$\angle CAD = \alpha, \angle ABD = \beta, AB = a.$$

Tabıw kerek:  $CD = ?$

*Ğiyosiddin Jamshid al-Koshiy máselesi:*

3. Qálegen  $\alpha$  múyeshi ushın

$$\sin\left(45^\circ \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}}$$

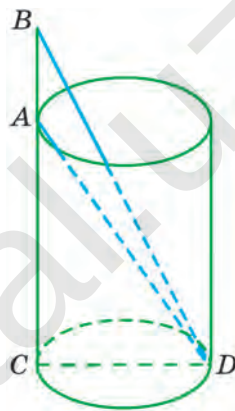
bolatuǵınlıǵın dálilleń.

*Ataqlı matematik Abulvafo Muhammed al-Buzjaniy (940-998) máselesi:*

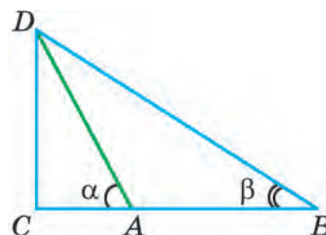
4. Qálegen  $\alpha$  hám  $\beta$  ushın,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \sqrt{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$$

bolatuǵının dálilleń.



78-súwret



79-súwret



## Tariyxiy maǵlıwmatlar

Matematikaniń, atap aytqanda trigonometriyaniń rawajlanıwına ullı ilimpazlar Muhammed al-Xorezmiy, Ahmad Farǵoniy, Abu Rayxan Beruniy, Mırza Ulugbek, Ali Qusshı, Giyosiddin Jamshid al-Koshiyler úlken úles qosqan. Juldızlardıń aspan sferasındaǵı koordinataların anıqlaw, planetalardıń háreketin baqlaw, Ay hám Quyashtıń tutılıwın aldınala aytıp beriw hám basqa ilimiy, ámeliy áhmiyetke iye máseleler anıq esaplawlardı, bul esaplawlarga tiykarlangan kesteler dúziwdi talap etiletuǵın edi. Mine usınday astronomiyalıq (trigonometriyalıq) kesteler Shıǵısta „Zij“ ler dep atalgan.



**Mirzo Ulugbek**  
(1394–1449)

Muhammed al-Xorezmiy, Abu Rayxan Beruniy, Mırza Ulugbek sıyaqlı ilimpazlardıń matematikalıq miynetleri menen birge „Zij“ leri de dúnyaǵa tanılǵan. Olar latin hám basqa tillerge awdarma islegen hám Evropada matematikaniń, astronomiyanıń rawajlanıwına salmaqlı tásirin tiygizgen.

Beruniydiń „Qonuni Másudiy“ miynetinde sinuslar kestesı 15 minut aralıq penen, tangensler kestesı  $1^\circ$  aralıq penen  $10^{-8}$  ge shekemgi dállikte berilgen. Júdá dál „Zij“ lerden biri Mırza Ulugbektiń „Zij“- „Ziji Ko'rganiy“ den ibarat. Bunda sinuslar kestesı 1 minut aralıq penen, tangensler kestesı  $0^\circ$  tan  $45^\circ$  qa shekem 1 minutlıq aralıq penen, al  $46^\circ$  tan  $90^\circ$  qa shekem 5 minutlıq aralıq penen  $10^{-8}$  ge shekemgi dállikte berilgen.

Giyosiddin Jamshid al-Koshiy „Vatar va sinus haqida risola“ sında  $\sin 1^\circ$  tı útirden soń 17 tańba dáliginde esaplaydı:

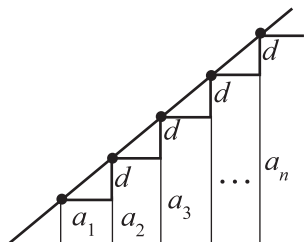
$$\sin 1^\circ = 0,017452406437283512...$$

Sheńberdiń uzınlıǵı, oǵan ishley hám sırtlay sızılǵan durıs ..... – kópmúyeshliklerdiń perimetrleriniń orta arifmetikalıq shamasına teń dep,  $n=28$  bolǵanda Jamshid al-Koshiy „Aylana haqida risola“ miynetinde  $2\pi$  ushın tómendegi nátiyjeni aladı.

$$2\pi = 6,2831853071795865...$$

## IV BAP.

## SANLI IZBE-IZLIKLER. PROGRESSIYALAR



### 28-§. SANLI IZBE-IZLIKLER

Kúndelikli turmısta hár túrli buyımlardıń jaylasıw tártibin kórsetiw ushin olar nomerlep barıladı. Máselen, hár bir kóshede jaylasqan úyler nomerlenedi. Kitapxanada kitap oqıwshılarınıń abonementleri nomerlenedi hám olardı berilgen nomerler tártibinde arnawlı kartotekalargá salıp qoyıladı.

Bankte amanatshılardıń esap beti nomeri boyınsha ondağı qarjınıń muǵdarın kóriwge boladı. Meyli, №1 esap betinde  $a_1$  swm, №2 esap betinde  $a_2$  swm hám taǵı basqa, dep alayıq. Nátiyjede

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$$

*sanlı izbe-izlikti* payda etemiz, bul jerde  $N$ - barlıq esap betleriniń sanı. Bunda 1 den  $N$  ǵa shekem bolǵan hár bir natural  $n$  sanǵa  $a_n$  sanı sáykes etip qoyılǵan.

Matematikada *sheksiz sanlı izbe-izlik* úyreniledi.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$a_1$  – sanlı izbe-izliktiń birinshi aǵzası,  $a_2$  – sanlı izbe-izliktiń ekinshi aǵzası,  $a_3$  – sanlı izbe-izliktiń úshinshi aǵzası delinedi hám taǵı basqa.  $a_n$  – sanlı izbe-izliktiń  $n$ -( jámi ) aǵzası dep, natural  $n$  sanı bolsa, onıń nomeri dep ataladı. Máselen, natural sanlar kvadratlardan ibarat 1, 4, 9, 16, 25, ...,

$n^2, (n+1)^2, \dots$  sanli izbe-izlik ushın  $a_1=1$  izbe-izliktiń birinshi aǵzası;  $a_n=n^2$  izbe-izliktiń  $n$ -aǵzası;  $a_{n+1}=(n+1)^2$  sanli izbe-izliktiń  $(n+1)$ -aǵzası.

Sanli izbe-izlikler kóbinese, jámi  $n$ -aǵzanıń formulası járdeminde beriledi.

Máselen,  $a_n = \frac{1}{n}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) formula járdeminde  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  sanli izbe-izlikler berilgen.

**1-másele.** Sanli izbe-izlik  $a_n=n(n-2)$  formula menen berilgen. Onıń júzinshi aǵzasın esaplań.

$$\triangle a_{100}=100 \cdot (100-2)=9800. \blacktriangle$$

**2-másele.** Sanli izbe-izlik  $a_n=2n+3$  formula menen berilgen. 1) onıń 43 ke teń bolǵan aǵzasınıń nomerın anıqlań; 2) 50 sanı izbe-izliktiń aǵzası bolatuǵını yaqı bolmaytuǵını anıqlań.

$\triangle 1)$  Shárt boyınsha  $2n+3=43$ , bunnan  $n=20$ .

2) Egerde 50 sanı izbe-izliktiń  $n$ - nomerli aǵzası bolsa, onda  $2n+3=50$ , bunnan  $n=23,5$ . Payda bolǵan  $n$  nıń mánisi natural san bolmaǵanı ushın, ol izbe-izliktiń aǵzası bola almaydı. Sonlıqtan 50 sanı izbe-izliktiń aǵzası emes.  $\blacktriangle$

Bazıda izbe-izlik sonday formula menen beriledi, bunda onıń geybir nomerinen baslap qálegen aǵzasın aldınǵı bir yaqı bir neshe aǵzaları járdeminde esaplawǵa múmkın boladı. Izbe-izliktiń bunday etip beriliw usılı *rekurrent* (latinsha *recuro* – qaytıw) usılı dep ataladı.

**3-masala.** Sanli izbe-izlik  $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$  rekurrent formula hám  $b_1=1, b_2=3$  shártler járdeminde berilgen. Bul izbe-izliktiń besinshi aǵzasın esaplań.

$$\triangle b_3=b_2+b_1=3+1=4.$$

$$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$$

$$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$$

**Juwabı:**  $b_5=11. \blacktriangle$

## *Shinigiwlar*

- 349.** Natural sanlar kvadratlardan ibarat 1, 4, 9, 16, 25, ...,  $n^2$ ,  $(n+1)^2$ , ... sanli izbe-izlik berilgen.
- 1) Sanli izbe-izlikni  $\dot{u}$ shinshi, altinshi,  $n$ -a $\dot{g}$ zalarin ayti $\dot{n}$ .
  - 2) Sanli izbe-izlikni 4, 25,  $n^2$ ,  $(n+1)^2$  ge te $\dot{n}$  bol $\dot{g}$ an a $\dot{g}$ zalarini $\dot{n}$  nomerlerin ko $\dot{r}$ seti $\dot{n}$ .
- 350.**  $n$ -a $\dot{g}$ zanin formula si menen berilgen izbe-izlikni birinshi  $\dot{u}$ sh a $\dot{g}$ zasin esapla $\dot{n}$ :
- 1)  $a_n = 2n + 3$ ;
  - 2)  $a_n = 2 + 3n$ ;
  - 3)  $a_n = 100 - 10n^2$ ;
  - 4)  $a_n = \frac{n-2}{3}$ ;
  - 5)  $a_n = \frac{1}{n}$ ;
  - 6)  $a_n = -n^3$ .
- 351.** (Awizeki). Sanli izbe-izlik  $x_n = n^2$  formula menen berilgen. Sanli izbe-izlikni 100; 144; 225 ge te $\dot{n}$  bol $\dot{g}$ an a $\dot{g}$ zalarini $\dot{n}$  nomeri qanday? 48, 49, 169 sanlari usi izbe-izlikni a $\dot{g}$ zalari bola ma?
- 352.** Izbe-izlik  $a_n = n^2 - 2n - 6$  formula menen berilgen.
- 1) -3;
  - 2) 2;
  - 3) 3;
  - 4) 9
- Sanlari izbe-izlikni a $\dot{g}$ zalari bola alama?
- 353.** 1)  $a_{n+1} = 3a_n + 1$ ;

2)  $a_{n+1} = 5 - 2a_n$

rekurrent formula ha $\dot{m}$   $a_1=2$  sha $\dot{r}$ t penen berilgen izbe-izlikni aldi $\dot{n}$ gi to $\dot{r}$ t a $\dot{g}$ zasin tabi $\dot{n}$ .

**354.** Sanli izbe-izlik  $n$ -a $\dot{g}$ zanin formula si  $a_n = (n-1)(n+4)$  menen berilgen. Egerde

  - 1)  $a_n = 150$ ;
  - 2)  $a_n = 104$  bolsa,  $n$  ni tabi $\dot{n}$ .

**355.**  $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$  rekurrent formula ha $\dot{m}$   $a_1=256$  sha $\dot{r}$ t penen berilgen izbe-izlikni birinshi to $\dot{r}$ t a $\dot{g}$ zasin tabi $\dot{n}$ .

**356.**  $a_1 = 1$  sha $\dot{r}$ t ha $\dot{m}$

  - 1)  $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$ ;
  - 2)  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$ ;

rekurrent formula menen berilgen izbe-izlikni da $\dot{s}$ lepki alti a $\dot{g}$ zasin jaz $\dot{i}$ .

**357.** Sanli izbe-izlik  $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$  rekurrent formula hám  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ , shárt penen berilgen. Izbe-izliktiń besinshi aǵzasın esaplań.

**358.**  $n$ - aǵzasınıń formulası menen berilgen sanlı izbe-izliktiń,  $(n + 1)$ -,  $(n + 2)$ - hám  $(n + 5)$ -, aǵzaların jazıń:

$$1) a_n = -5n + 4; \quad | 2) a_n = 2(n - 10); \quad | 3) a_n = 2 \cdot 3^{n+1}; \quad | 4) a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

## 29- §. ARIFMETIKALÍQ PROGRESSIYA

### Tómendegi máseleni qarayıq.

**Másele.** Oqıwshı sınaqtan ótiwi ushın tayarlıq kórip, hár kúni 5 sınaq máselelerin sheshiwdi jobalastırdı. Hár kúni sheshiliwi jobalastırılǵan sınaq máseleleriniń sanı qalay ózgerip baradı?

Jobalastırılǵan máseleler sanı hár kún sayın tómendegishe ózgerip baradı:

| 1-kún | 2-kún | 3-kún | 4-kún... |
|-------|-------|-------|----------|
| 5     | 10    | 15    | 20 ...   |

Nátiyjede tómendegi izbe-izlikti payda etemiz:

$$5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

$a_n$  arqalı  $n$ -kúnde sheshiliwi kerek bolǵan barlıq máseleler sanın belgileyik. Mısalı:

$$a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15, \dots$$

Payda bolǵan

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

sanları *sanlı izbe-izlik* dep ataladı.

Bul izbe-izlikte ekinshisinen baslap, onıń hárbir aǵzası aldınǵı aǵzaǵa birdey 5 sanınıń qosılǵanına teń. Bunday izbe-izlik *arifmetikalıq progressiya* dep ataladı.



**Аниqlама.** Eger  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  sanli izbe-izliginde barliq natural  $n$  ushin

$$a_{n+1} = a_n + d$$

(bunda  $d$  – qanday da bir san) teñligi orinlansa, izbe-izlik arifmetikalıq progressiya dep ataladı.

Bul formuladan  $a_{n+1} - a_n = d$  ekenligi kelip shıǵadı.  $d$  sanı arifmetikalıq progressiyanıń ayırması dep ataladı.

Mısallar.

1) Sanlardıń 1, 2, 3, 4 ...,  $n$ , ... natural qatarı arifmetikalıq progressiyanı dúzedi. Bul progressiyanıń ayırması  $d = 1$ .

2) Pútin teris sanlardıń  $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$  izbe-izligi, ayırması  $d = -1$  bolǵan arifmetikalıq progressiya boladı.

3) 3, 3, 3, ..., 3, ... izbe-izligi ayırması  $d=0$  bolǵan arifmetikalıq progressiyadan ibarat.

**1-másele.**  $a_n = 1,5 + 3n$  formulası menen berilgen izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.

△  $a_{n+1} - a_n$  ayırması barlıq  $n$  ushin birdey (  $n$  ge ǵárezli emes) ekenligin kórsetiw talap etiledi.

Berilgen izbe-izlikteń  $(n+1)$ -aǵzasın jazamız:

$$a_{n+1} = 1,5 + 3(n + 1).$$

Sonlıqtan

$$a_{n+1} - a_n = 1,5 + 3(n + 1) - (1,5 + 3n) = 3.$$

Demek,  $a_{n+1} - a_n$  ayırması  $n$  ge ǵárezli emes. ▲

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq,  $a_{n+1} = a_n + d$ ,  $a_{n-1} = a_n - d$ , bunnan

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, n > 1.$$



**Solay etip, arifmetikalıq progressiyanıń ekinshi aǵzasınan baslap, hárbir aǵzası oǵan qońsılas bolǵan eki aǵzanıń arifmetikalıq ortasına teń. “Arifmetikalıq” progressiya degen atama da usınıń menen túsindiriledi.**

Eger  $a_1$  hám  $d$  berilgen bolsa, onda arifmetikalıq progressiyanıń qalǵan aǵzaların  $a_{n+1} = a_n + d$  formulası boyınsha esaplaw múmkın ekenligin atap



ótemiz. Bunday usul menen progressiyanıń birneshe dáslepki aǵzasın esaplaw qıyınshılıq tuwdırmaydı: biraq, máselen  $a_{100}$  ushın birqansha esaplawlar talap etiledi. Ádette, bunıń ushın  $n$ -aǵza formulasınan paydalanıladı.

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ hám t.b.}$$

Ulıwma,



$$a_n = a_1 + (n - 1)d, \quad (1)$$

sebebi, arifmetikalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzası, onıń birinshi aǵzasına  $d$  sanın  $(n - 1)$  márte qosıw nátiyjesinde payda etiledi.

(1) formula *arifmetikalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzasınıń formulası* dep ataladı.

**2-másele.** Eger  $a_1 = -6$  hám  $d = 4$  bolsa, arifmetikalıq progressiyanıń júzinshi aǵzasın tabıń.

△ (1) formula boyınsha:  $a_{100} = -6 + (100 - 1) \cdot 4 = 390$ . ▲

**3-másele.** 99 sanı 3, 5, 7, 9, .... arifmetikalıq progressiyanıń aǵzası. Usı aǵzanıń nomerın tabıń.

△ Meyli,  $n$  – izlengen nomer bolsın.  $a_1 = 3$  hám  $d = 2$  bolǵanlıqtan  $a_n = a_1 + (n - 1)d$  formulasına muwapıq:  $99 = 3 + (n - 1) \cdot 2$ . Bunnan  $99 = 3 + 2n - 2$ ;  $98 = 2n$ ,  $n = 49$ .

**Juwabı:**  $n = 49$ . ▲

**4-másele.** Arifmetikalıq progressiyada  $a_8 = 130$  hám  $a_{12} = 166$ .  $n$ -aǵzanıń formulasın tabıń.

△ (1) formuladan paydalanıp, tabamız:

$$a_8 = a_1 + 7d, \quad a_{12} = a_1 + 11d.$$

$a_8$  hám  $a_{12}$  lerdiń berilgen mánislerin ornına qoyıp,  $a_1$  hám  $d$  ǵa qarata teńlemeler sistemasın payda etemiz.

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Ekinshi teńlemeden birinshi teńlemenı alıp, mınaǵan iye bolamız:

$$4d = 36, \quad d = 9.$$

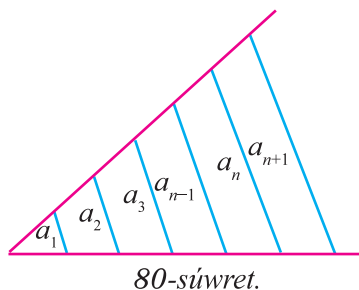
Demek,  $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$ .

Progressiyanıń aǵzasınıń formulasın jazamız:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

**Juwabı:**  $a_n = 9n + 58$ . ▲

**5-másele.** Múyeshtiń bir tárepine, onıń tóbesinen baslap teń kesindiler ajratıldı. Bul kesindilerdiń aqırǵı ushlarınan parallel tuwrılar júzgiziledi (80-súwret). Usı tuwrılardıń múyeshtiń tárepleri arasındaǵı  $a_1, a_2, a_3, \dots$  kesindileriniń uzınlıqları arifmetikalıq progressiya dúzetuǵınlıǵın dálilleń.



▲ Ultanları  $a_{n-1}$  hám  $a_{n+1}$  bolǵan trapeciyada onıń orta sızıǵı  $a_n$  ge teń. Sonlıqtan,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Bunnan  $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$  yamasa

$$a_{n-1} - a_n = a_n - a_{n+1}.$$

Izbe-izliktiń hárbir aǵzası menen onnan aldınǵı aǵzasınıń ayırması birdey bolǵanlıqtan

bul izbe-izlik arifmetikalıq progressiya boladı. ▲

### Shınıǵıwlar

**359.** (Awızeki.) Arifmetikalıq progressiyanıń birinshi aǵzasın hám ayırmasını aytıń:

1) 6, 8, 10, ...;

2) 7, 9, 11, ...;

3) 25, 21, 17, ...;

4) -12, -9, -6, ...

**360.** Eger:

1)  $a_1 = 2$  hám  $d = 5$ ; 2)  $a_1 = -3$  hám  $d = 2$ ; 3)  $a_1 = 4$  hám  $d = -1$  bolsa arifmetikalıq progressiyanıń aldınǵı bes aǵzasın jazıń.

**361.**  $n$ -aǵzasınıń formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.

1)  $a_n = 3 - 4n$ ;

2)  $a_n = -5 + 2n$ ;

3)  $a_n = 3(n + 1)$ ;

4)  $a_n = 2(3 - n)$ ;

5)  $a_n = 3 - 5n$ ;

6)  $a_n = -7 + 3n$ .

**362.** Arifmetikalıq progressiyada:

1) eger  $a_1 = 2$ ,  $d = 3$  bolsa,  $a_{15}$  nı tabıń;

2) eger  $a_1 = 3$ ,  $d = 4$  bolsa,  $a_{20}$  nı tabıń;

- 3) eger  $a_1 = -3$ ,  $d = -2$  bolsa,  $a_{18}$  ni tabiń,  
 4) eger  $a_1 = -2$ ,  $d = -4$  bolsa,  $a_{11}$  ni tabiń.

**363.** Arifmetikaliq progressiyanıń  $n$ -aǵzasınıń formulasın jazıń:

- 1) 1, 6, 11, 16, ...;                      2) 25, 21, 17, 13, ...;  
 3) -4, -6, -8, -10, ...;                      4) 1, -4, -9, -14, ... .

**364.** -22 sanı 44, 38, 32, ... arifmetikaliq progressiyanıń aǵzası. Usı sannıń nomerın tabiń.

**365.** 12 sanı -18, -15, -12, ... arifmetikaliq progressiyanıń aǵzası bola ma?

**366.** -59 sanı 1, -5 ... arifmetikaliq progressiyanıń aǵzası. Usı sannıń nomerın tabiń. -46 sanı arifmetikaliq progressiyanıń aǵzası bola ma?

**367.** Eger arifmetikaliq progressiyada:

- 1)  $a_1 = 7$ ,  $a_{16} = 67$ ;    2)  $a_1 = -4$ ,  $a_9 = 0$ ;    3)  $a_2 = 8$ ,  $a_{10} = 64$  bolsa, onıń ayırmasın tabiń.

**368.** Arifmetikaliq progressiyanıń ayırması 1,5 ke teń. Eger:

- 1)  $a_9 = 12$ ;    2)  $a_7 = -4$ ;    3)  $a_{16} = 32,5$  bolsa,  $a_1$  ni tabiń.

**369.** Eger arifmetikaliq progressiyada:

- 1)  $d = -3$ ,  $a_{11} = 20$ ;    2)  $a_{21} = -10$ ,  $a_{22} = -5,5$ ;  
 3)  $a_3 = -1$ ,  $a_9 = 17$  bolsa, onıń birinshi aǵzasın tabiń.

**370.** Eger arifmetikaliq progressiyada:

- 1)  $a_3 = 13$ ,  $a_6 = 22$ ;    2)  $a_2 = -7$ ,  $a_7 = 18$ ;  
 3)  $a_7 = 11$ ,  $a_{13} = 29$  bolsa, onıń  $n$ -aǵzasınıń formulasın tabiń.

**371.**  $n$  niń qanday mánislerinde 15, 13, 11, ... arifmetikaliq progressiyanıń aǵzaları teris boladı?

**372.** Arifmetikaliq progressiyada  $a_1 = -10$ ,  $d = 0,5$  bolsa,  $n$  niń qanday mánislerinde  $a_n < 2$  teńsizligi orınlanadı?

**373.** Eger arifmetikaliq progressiyada:

- 1)  $a_8 = 126$ ,  $a_{10} = 146$ ;                      2)  $a_8 = -64$ ,  $a_{10} = -50$ ;  
 3)  $a_8 = -7$ ,  $a_{10} = 3$ ;                      4)  $a_8 = 0,5$ ,  $a_{10} = -2,5$

bolsa, onıń tóǵızınshı aǵzasın hám ayırmasın tabiń.

### 30-§. ARIFMETIKALÍQ PROGRESSIYANÍŇ DÁSLEPKI $n$ AĞZASÍNÍŇ QOSÍNDÍSÍ

**1-másele.** 1 den 100 ge shekemgi barlıq natural sanlardıń qosındısı tabıń.

△ Bul qosındısı eki usıl menen jazamız:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100,$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1.$$

Bul teńliklerdi aǵzama-aǵza qosamız:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{100 \text{ ta qo shiluvchi}}$$

Sonlıqtan da  $2S = 101 \cdot 100$ , bunnan  $S = 101 \cdot 50 = 5050$ . ▲

Endi qálegen

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

arifmetikalıq progressiyanı qaraymız  $S_n$  – usı progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı bolsın:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$



**Teorema.** Arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı tómendegige teń:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (1)$$

○  $S_n$  nı eki usıl menen jazıp alamız:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Arifmetikalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq, bul teńliklerdi tómendegishe jazıw múmkin:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d), \quad (2)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d). \quad (3)$$

(2) hám (3) teńliklerdi aǵzama-aǵza qosamız:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ qosılıwshı}}$$

Demek,  $2S_n = (a_1 + a_n)n$ , bunnan  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$ . ●

**2-másele.** Dáslepki  $n$  natural sannıń qosındısın tabıń.

△ Natural sanlardıń

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...,  $n$ , ...

izbe-izligi ayırması  $d = 1$  bolǵan arifmetikalıq progressiyalardan ibarat.  $a_1 = 1$  hám  $a_n = n$  bolǵanlıqtan (1) formula boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n.$$

Solay etip,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \blacktriangle$$

**3-másele.** Eger  $38 + 35 + 32 + \dots + (-7)$  qosındısınıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń.

△ Shárt boyınsha,  $a_1 = 38$ ,  $d = -3$ ,  $a_n = -7$ . Endi  $a_n = a_1 + (n-1)d$  formulasın qollanıp,  $-7 = 38 + (n-1)(-3)$  payda etemiz, bunnan  $n = 16$ .

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$  formulası boyınsha tómendegige iye bolamız:

$$S_{16} = \frac{38 - 7}{2} \cdot 16 = 248. \blacktriangle$$

**4-másele.** Qosındısı 153 ke teń bolıwı ushın 1 den baslap neshe natural sanlardı izbe-iz qosıw kerek?

△ Natural sanlar qatarı – ayırması  $d = 1$  bolǵan arifmetikalıq progressiya boladı. Shártke muwapıq  $a_1 = 1$ ,  $S_n = 153$ . Dáslepki  $n$  aǵzanıń qosındısınıń formulasın tómendegishe ózǵertemiz:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Berilgenlerden paydalanıp,  $n$  belgisizine qarata teńleme payda etemiz:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1}{2} \cdot n,$$

bunnan,

$$306 = 2n + (n - 1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Bul teńlemelerdi sheship, tómendegige iye bolamız:

$$n_{1,2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 1224}}{2} = \frac{-1 - 35}{2},$$

$$n_1 = -18, \quad n_2 = 17.$$

Qosılıwshılardıń sanı teris bolıwı múmkın emes, sonlıqtan  $n = 17$ . ▲

### *Shınıǵıwlar*

**374.** Eger arifmetikalıq progressiyada:

$$1) a_1 = 1, \quad a_n = 20, \quad n = 50; \quad 3) a_1 = -1, \quad a_n = -40, \quad n = 20;$$

$$2) a_1 = 1, \quad a_n = 200, \quad n = 100; \quad 4) a_1 = 2, \quad a_n = 100, \quad n = 50$$

bolsa, onıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısıń tabır.

**375.** 2 den 98 ge shekem bolǵan barlıq natural sanlar qosındısıń tabır (98 de qosındıǵa kiredi).

**376.** 1 den 133 ge shekem bolǵan barlıq natural sanlar qosındısıń tabır (133 te qosındıǵa kiredi).

**377.** Eger arifmetikalıq progressiyada:

$$1) a_1 = -5, \quad d = 0,5; \quad 2) a_1 = \frac{1}{2}, \quad d = -3; \quad 3) a_1 = 36, \quad d = -2,5$$

bolsa, onıń dáslepki on eki aǵzasınıń qosındısıń tabır.

**378.** 1) eger  $n = 11$  bolsa, 9; 13; 17; ...;

2) eger  $n = 12$  bolsa, -16; -10; -4; ...

arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısıń tabır.

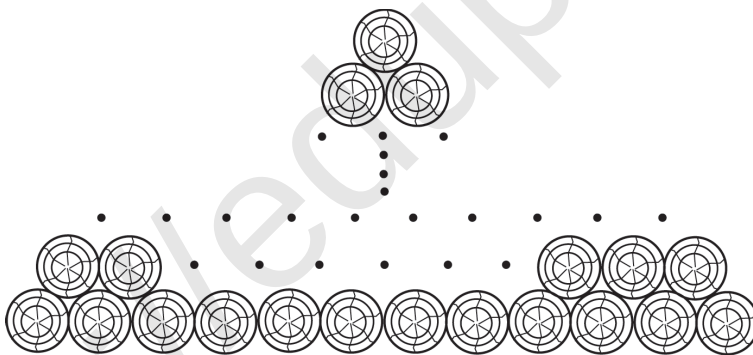
**379.** Eger:

$$1) 3 + 6 + 9 + \dots + 273; \quad 2) 90 + 80 + 70 + \dots + (-60)$$

yqosındısıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabır.

**380.** Barlıq eki hám úsh tańbalı sanlardıń qosındısıń tabır.

- 381.** Arifmetikaliq progressiya  $n$ -aǵzasınıń formulası menen berilgen. Eger:  
1)  $a_n = 3n + 5$ ; 2)  $a_n = 7 + 2n$  bolsa,  $S_{50}$  di tabıń.
- 382.** Qosındı 75 ke teń bolıwı ushın 3 ten baslap neshe natural sandı izbe-iz qosıw kerek?
- 383.** Eger arifmetikaliq progressiyada: 1)  $a_1 = 10, n = 14, S_{14} = 1050$ ; 2 )  
 $a_1 = 2\frac{1}{3}, n = 10, S_{10} = 90\frac{5}{6}$   
bolsa,  $a_n$  hám  $d$  nı tabıń.
- 384.** Eger arifmetikaliq progressiyada:  
1)  $a_7 = 21, S_7 = 205$ ; | 2)  $a_{11} = 92, S_{11} = 22$ ; | 3)  $a_{20} = 65, S_{20} = 350$  bolsa,  
 $a_1$  hám  $d$  nı tabıń.
- 385.** Imaratlar qurıwǵa arnalǵan bórenelerdi saqlawda olardı 81-súwrette kórsetilgendey etip taqlaydı. Eger taqlamlardıń ultanında 12 bórene turǵan bolsa, hár bir taqlamda neshe bórene boladı?

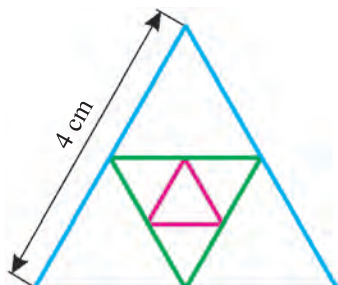


81-súwret.

- 386.** Arifmetikaliq progressiyada  $a_3 + a_9 = 8$ .  $S_{11}$  di tabıń.
- 387.** Eger arifmetikaliq progressiyada  $S_5 = 65$  hám  $S_{10} = 230$  bolsa, onıń birinshi aǵzasın hám ayırmasın tabıń.
- 388.** Arifmetikaliq progressiya ushın  $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$  teńlik orınlanatúǵının dálilleń.

## 31-§. GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYA

Tárepi 4 cm bolǵan teń tárepli durıs úshmúyeshlikti qaraymız. Tóbeleri berilgen úshmúyeshliktiń tárepleriniń ortalarińan ibarat bolǵan úshmúyeshlik jasaymız (82-súwret). Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetine muwapıq ekinshi úshmúyeshliktiń tárepi 2 cm ge teń. Soǵan uqsas jasawlardı dawam



82-súwret.

ettirip, tárepleri  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  cm hám t.b. bolǵan úshmúyeshliklerdi payda etemiz. Usı úshmúyeshlikler tárepleriniń uzunlıqlarınıń izbe-izligin jazamız:

$$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

Bul izbe-izlikte, ekinshisinen baslap, onıń hár bir aǵzası, aldınǵı aǵzanı birdey  $\frac{1}{2}$  sanǵa kóbeytkenge teń. Bunday izbe-izlikler *geometriyalıq progressiyalar* dep ataladı.



### Аныqlama. Eger

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

sanlı izbe-izliginde barlıq natural  $n$  ushın

$$b_{n+1} = b_n q$$

teńligi orınlansa, bunday izbe-izlik *geometriyalıq progressiya* dep ataladı,  $b_n \neq 0$ ,  $q$  – nolge teń bolmaǵan bazı bir san.

Bul formuladan  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$  ekenligi kelip shıǵadı.  $q$  sanı *geometriyalıq progressiyanıń bólimi* dep ataladı.

### Мисollar.

- 1) 2, 8, 32, 128, ... – bólimi  $q = 4$  bolǵan geometriyalıq progressiya;
- 2)  $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$  – bólimi  $q = \frac{2}{3}$  bolǵan geometriyalıq progressiya;



- 3)  $-\frac{1}{12}, 1, -12, 144, \dots$  – bólimi  $q = -12$  bolǵan geometriyalıq progressiya;  
 4)  $7, 7, 7, 7, \dots$  – bólimi  $q = 1$  bolǵan geometriyalıq progressiya.

**1-másele.**  $b_n = 7^{2n}$  formulası menen berilgen izbe-izlik geometriyalıq progressiya bolatúǵının dálilleń.

△ Barlıq  $n$  lerde  $b_n = 7^{2n} \neq 0$  ekenligin atap ótemiz.  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  tiyindisi barlıq  $n$  ler ushın  $n$  ge ǵárezli bolmaǵan birdey sanǵa teńligin dálillew talap etiledi. Haqıyqatında da,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49,$$

yaǵnıy  $\frac{b_{n+1}}{b_n}$  tiyindisi  $n$  ge ǵárezli emes. ▲

Geometriyalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_{n-1} = \frac{b_n}{q},$$

bunnan

$$b_{n+1}^2 = b_{n-1} b_{n+1}, \quad n > 1.$$



**Eger progressiyanıń barlıq aǵzaları oń bolsa, onda**

**$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$  boladı, yaǵnıy geometriyalıq progressiyanıń ekinshi aǵzasınan baslap hárbir aǵzası, oǵan qońsılas bolǵan eki aǵzanıń geometriyalıq ortasına teń. “Geometriyalıq” progressiya degen atama usınıń menen túsindiriledi.**

Eger  $b_1$  hám  $q$  berilgen bolsa, onda geometriyalıq progressiyanıń qalǵan aǵzaların  $b_{n+1} = b_n q$  rekkurent formulası boyınsha esaplaw múmkınligin atap ótemiz. Biraq,  $n$  úlken bolǵanda bunday esaplaw kóp miynet talap etpeydi. Ádette,  $n$ -aǵzanıń formulasınan paydalanıladı.

Geometriyalıq progressiyanıń anıqlamasına muwapıq

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1 q, \\ b_3 &= b_2 q = b_1 q^2, \\ b_4 &= b_3 q = b_1 q^3 \text{ va h.k.} \end{aligned}$$

Ulıwma,



$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

(1)

sebebi, geometriyalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzası, onıń birinshi aǵzasın  $q$  sanına  $(n-1)$  márte kóbeytiw menen payda etiledi.

(1) formula geometriyalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzasınıń formulası dep ataladı.

**2-másele.** Eger  $b_1 = 81$  hám  $q = \frac{1}{3}$  bolsa, geometriyalıq progressiyanıń jetinshi aǵzasın tabıń.

△ (1) formulaǵa muwapıq:

$$b_7 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}. \quad \blacktriangle$$

**3-másele.** 486 sanı 2, 6, 18, ... geometriyalıq progressiyanıń aǵzası. Usı aǵzasınıń nomerın tabıń.

△ Meyli,  $n$  – izlengen nomer bolsın.  $b_1 = 2$ ,  $q = 3$  bolǵanlıqtan  $b_n = b_1 q^{n-1}$  formulasına muwapıq:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad 243 = 3^{n-1}, \quad 3^5 = 3^{n-1},$$

bunnan  $n-1=5$ ,  $n=6$ .  $\blacktriangle$

**4-másele.** Geometriyalıq progressiyada  $b_6=96$  hám  $b_8=384$   $n$ -aǵzasınıń formulasın tabıń.

△  $b_n = b_1 q^{n-1}$  formulasına muwapıq:  $b_6 = b_1 q^5$ ,  $b_8 = b_1 q^7$ .  $b_6$  hám  $b_8$  dıń berilgen mánislerin orınlarına qoyıp, tómendegini payda etemiz:  $96 = b_1 q^5$ ,  $384 = b_1 q^7$ . Bul teńliklerdiń ekinshisin birinshisine bólemiz:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1 q^7}{b_1 q^5},$$

bunnan  $4 = q^2$  yamasa  $q^2 = 4$ . Aqırǵı teńlikten  $q=2$  yamasa  $q=-2$  ekenin tabamız.

Progressiyanıń birinshi aǵzasın tabıw ushın  $96 = b_1 q^5$  teńliginen paydalanamız:

$$1) \quad q = 2 \text{ bolsın. Sonda } 96 = b_1 \cdot 2^5, \quad 96 = b_1 \cdot 32, \quad b_1 = 3.$$

Demek,  $b_1 = 3$  hám  $q = 2$  bolǵanda  $n$ -aǵzanıń formulası

$$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

boladı.

2)  $q = -2$  bolsin. Bul jaǵdayda  $96 = b_1(-2)^5$ ,  $96 = b_1(-32)$ ,  $b_1 = -3$ .

Demek,  $b_1 = -3$  hám  $q = -2$  bolǵanda  $n$ -aǵzanıń formulası

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

boladı.

**Juwabı:**  $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$  yamasa  $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$ . ▲

**5-másele.** Sheńberge kvadrat ishley sızilǵan, al kvadratqa ekinshi sheńber ishley sızilǵan. Ekinshi sheńberge ekinshi kvadrat ishley sızilǵan, al oǵan úshinshi sheńber ishley sızilǵan hám t.b. (83-súwret).

Sheńberlerdiń radiusları geometriyalıq progressiya dúzetuǵınlıǵın dálilleń.

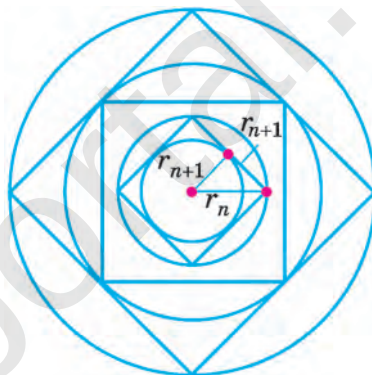
▲  $n$ -sheńberdiń radiusı  $r_n$  bolsın. Sonda Pifagor teoremasına muwapıq

$$r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2,$$

bunnan

$$r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2, \text{ yaǵnıy } r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n.$$

Demek, sheńberlerdiń radiuslarınıń izbe-izligi bólimi  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  bolǵan geometriyalıq progressiyanı dúzedi. ▲



83-súwret.

### Shınıǵıwlar

**389.** (Awızeki.) Tómendegi geometriyalıq progressiyanıń birinshi aǵzası hám bólimi nege teń:

1) 8, 16, 32, ... ;      2) -10, 20, -40, ... ;

3) 4, 2, 1, ... ;      4) -50, 10, -2, ... ?

**390.** Eger geometriyalıq progressiyada:

1)  $b_1 = 12$ ,  $q = 2$ ;    2)  $b_1 = -3$ ,  $q = -4$ ;    3)  $b_1 = 16$ ,  $q = -2$

bolsa, onıń dáslepki bes aǵzasın jazıń.

**391.**  $n$ -aǵzasınıń formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik geometriyalıq progressiya bolatuǵının dálilleń:

1)  $b_n = 3 \cdot 2^n$ ;    2)  $b_n = 5^{n+3}$ ;    3)  $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$ ;    4)  $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ .

**392.** Geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_1 = 3$  hám  $q = 10$  bolsa,  $b_4$  ti;
- 2)  $b_1 = 4$  hám  $q = \frac{1}{2}$  bolsa,  $b_7$  ni;
- 3)  $b_1 = 1$  hám  $q = -2$  bolsa,  $b_5$  ti;
- 4)  $b_1 = -3$  hám  $q = -\frac{1}{3}$  bolsa,  $b_6$  ni esaplań.

**393.** Geometriyalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzasınıń formulasın jazıń:

- |                                 |                               |                                    |
|---------------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| 1) 4, 12, 36, ...;              | 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$ , ...; | 3) 4, -1, $\frac{1}{4}$ , ...;     |
| 4) 3, -4, $\frac{16}{3}$ , ...; | 5) 16, 8, 4, 2, ...;          | 6) -9, 3, -1, $\frac{1}{3}$ , ...; |

**394.** Geometriyalıq progressiyada astınan sızılǵan aǵzanıń nomerın tabıń:

- 1) 6, 12, 24, ... , 192, ...;
- 2) 4, 12, 36, ... , 324, ...;
- 3) 625, 125, 25, ... ,  $\frac{1}{25}$ ;
- 4) -1, 2, -4, ... , 128, ... .

**395.** Eger geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_1 = 2$ ,  $b_5 = 162$ ;
  - 2)  $b_1 = 3$ ,  $b_4 = 81$ ;
  - 3)  $b_1 = -128$ ,  $b_7 = -2$ ;
  - 4)  $b_1 = 250$ ,  $b_4 = -2$
- bolsa, onıń bólimin tabıń.

---

**396.** 2, 6, 18, ... geometriyalıq progressiyası berilgen.

- 1) usı progressiyanıń segizinshi aǵzasın esaplań;
- 2) izbe-izliktiń 162 ge teń aǵzasınıń nomerın tabıń.

**397.** Eger oń aǵzalı geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_8 = \frac{1}{9}$ ,  $b_6 = 81$ ;
  - 2)  $b_6 = 9$ ,  $b_8 = 3$ ;
  - 3)  $b_6 = 3$ ,  $b_8 = \frac{1}{3}$
- bolsa, onıń jetinshi aǵzasın hám bólimin tabıń.

**398.** Eger geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_4 = 9$ ,  $b_6 = 20$ ;
  - 2)  $b_4 = 9$ ,  $b_6 = 4$ ;
  - 3)  $b_4 = 320$ ,  $b_6 = 204,8$  bo'lsa,
- bolsa, onıń besinshi hám birinshi aǵzaların tabıń.

**399.** Amanatshı amanat bankine 2009-jıldıń 4-yanvarı kúni 300000 swm pul qoydı. Eger, amanat banki jılına toplaǵan qarjınıń 30% i muǵdarında

payda berse, amanatshinın pulı 2012-jıldın 4-yanvarına barıp qansha boladı?

400. Tárepi 4 cm bolğan kvadrat berilgen. Onın tárepleriniń ortaları, ekinshi kvadratlardıń tóbeleri boladı. Ekinshi kvadrattın tárepleriniń ortaları, úshinshi kvadrattın tóbeleri boladı hám t.b. Usı kvadrattın maydanlarınıń izbe-izligi geometriyalıq progressiyanı dúzetuǵının dálilleń. Jetinshi kvadrattın maydanın tabıń.

### 32-§. GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYANÍŇ DÁSLEPKI $n$ AǴZASÍNÍŇ QOSÍNDÍSÍ

**1-másele.** Mına qosındını tabıń:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5. \quad (1)$$

△ Teńliktiń eki tárepini de 3 ke kóbeytemiz:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \quad (2)$$

(1) hám (2) teńliklerdi tómendegishe jazıp shıǵamız:

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$

$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Qawsırmalar ishinde turǵan ańlatpalar birdey. Sonlıqtan bul teńliklerdiń ekinshisinen birinshisin alıp, tómendegige iye bolamız:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364. \quad \blacktriangle$$

Endi, bólimi  $q \neq 1$  bolğan qálegen  $b_1, b_1q, \dots, b_1q^n, \dots$  geometriyalıq progressiyanı qaraymız:  $S_n$  – usı geometriyalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı bolsın:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}. \quad (3)$$



**Teorema.** Bólimi  $q \neq 1$  bolğan geometriyalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı tómendegige teń:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (4)$$

○ (3) teńliktiń eki tárepini de  $q$  ǵa kóbeytemiz:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^n. \quad (5)$$

(3) hám (5) teńliklerdi, olardaǵı birdey qosılıwshılardı ajıratıp, jazıp shıǵamız:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1}),$$

$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Qawsırmalar ishinde turǵan ańlatpalar teń. Sonlıqtan bul teńliklerdiń birinshisinen ekinshisin alıp, tómendegige iye bolamız:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Bunnan

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Eger  $q = 1$  bolsa, onda

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \dots + b_1}_{n\text{-qosılıwshı}} = b_1n, \text{ ya'ni } S_n = b_1n.$$

**2-másele.** 6, 2,  $\frac{2}{3}$ , ... geometriyalıq progressiyanıń dáslepki bes aǵzasınıń qosındısın tabıń.

△ Bul progressiyada  $b_1 = 6$ ,  $q = \frac{1}{3}$ . (4) formula boyınsha tabamız:

$$S_5 = \frac{6 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6 \cdot 242 \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{242}{27}. \quad \blacktriangle$$

**3-másele.** Bólimi  $q = \frac{1}{2}$  bolǵan geometriyalıq progressiyada dáslepki altı aǵzasınıń qosındısı 252 ge teń. Usı progressiyanıń birinshi aǵzasın tabıń.

△ (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$252 = \frac{b_1 \left(1 - \frac{1}{2^6}\right)}{1 - \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Bunnan } 252 = 2b_1 \left(1 - \frac{1}{64}\right), 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, b_1 = 128. \blacktriangle$$

**4-másele.** Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı  $-93$  ke teń. Usı progressiyanıń birinshi aǵzası  $-3$  ke, al bólimi  $2$  ge teń.  $n$  di tabıń.

$\triangle$  (4) formuladan paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$-93 = \frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Bunnan  $-31 = 1 - 2^n$ ,  $2^n = 32$ ,  $2^5 = 2^n$ ,  $n = 5$ .  $\blacktriangle$

**5-másele.**  $5, 15, 45, \dots, 1215, \dots$  – geometriyalıq progressiya.  $5 + 15 + 45 + \dots + 1215$  qosındısı tabıń.

$\triangle$  Bul progressiyada  $b_1 = 5$ ,  $q = 3$ ,  $b_n = 1215$ . Dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı formula tówendegishe túrlendiremiz:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} = \frac{b_n q - b_1}{q-1}.$$

Máseleniń shártinen paydalanıp, tómendegige iye bolamız:

$$S_n = \frac{1215 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820. \blacktriangle$$

### Shınıǵıwlar

**401.** Eger geometriyalıq progressiyada:

$$1) b_1 = \frac{1}{2}, q = 2, n = 6; \quad 2) b_1 = -2, q = \frac{1}{2}, n = 5;$$

$$3) b_1 = 1, q = -\frac{1}{3}, n = 4; \quad 4) b_1 = -5, q = -\frac{2}{3}, n = 5$$

bolsa, onıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı tabıń.

**402.** Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki jeti aǵzasınıń qosındısı tabıń:

$$1) 5, 10, 20, \dots; \quad 2) 2, 6, 18, \dots; \quad 3) \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots.$$

**403.** Eger geometriyalıq progressiyada:

$$1) q = 2, S_7 = 635 \text{ bolsa, } b_1 \text{ hám } b_7 \text{ ni tabıń;}$$

$$2) q = -2, S_8 = 85 \text{ bolsa, } b_1 \text{ hám } b_8 \text{ ni tabıń.}$$

**404.** Eger geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2$ ;
- 2)  $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2$ ;
- 3)  $S_n = 170, b_1 = 256, q = -\frac{1}{2}$ ;
- 4)  $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

bolsa, onıń aǵzalarınıń sanı  $n$  nı tabıń.

**405.** Eger geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_1 = 7, q = 3, S_n = 847$  bolsa,  $n$  hám  $b_n$  nı tabıń;
- 2)  $b_1 = 8, q = 2, S_n = 4088$  bolsa,  $n$  hám  $b_n$  nı tabıń;
- 3)  $b_1 = 2, b_n = 1458, S_n = 2186$  bolsa,  $n$  hám  $q$  nı tabıń;
- 4)  $b_1 = 1, b_n = 2401, S_n = 2801$  bolsa,  $n$  hám  $q$  nı tabıń.

**406.** Sanlardıń qosındısıń qosılıwshıları geometriyalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń:

- 1)  $1 + 2 + 4 + \dots + 128$ ;
- 2)  $1 + 3 + 9 + \dots + 243$ ;
- 3)  $-1 + 2 - 4 + \dots + 128$ ;
- 4)  $5 - 15 + 45 - \dots + 405$ .

**407.** Eger geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_2 = 15, b_3 = 25$ ; | 2)  $b_2 = 14, b_4 = 686$ , | 3)  $b_2 = 15, b_4 = 375, q > 0$
- bolsa,  $b_5$  hám  $S_4$  ti tabıń.

**408.** Geometriyalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzasınıń formulası menen berilgen:

- 1)  $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$  bolsa,  $S_5$  tabıń;
- 2)  $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$  bolsa,  $S_6$  tabıń.

**409.** Birdeylıkti dálilleń:

$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = x^n - 1$ ,  
bunda  $n$  dáreje kórsetkishı hám ol 1 den úlken natural san.

**410.** Geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_3 = 135, S_3 = 195$  bolsa,  $b_1$  hám  $q$  dı tabıń;
- 2)  $b_1 = 12, S_3 = 372$  bolsa,  $q$  hám  $b_3$  tı tabıń.



**411.** Geometriyalıq progressiyada:

- 1)  $b_1 = 1$  hám  $b_3 + b_5 = 90$  bolsa,  $q$  nı;
- 2)  $b_2 = 3$  hám  $b_4 + b_6 = 60$  bolsa,  $q$  nı;
- 3)  $b_1 - b_3 = 15$  hám  $b_2 - b_4 = 30$  bolsa,  $S_{10}$  dı;
- 4)  $b_3 - b_1 = 24$  hám  $b_5 - b_1 = 624$  bolsa,  $S_5$  ti tabıń.

**33-§. SHEKSIZ KEMEYIWSHI GEOMETRIYALÍQ PROGRESSIYA**

84-súwrette berilgen kvadratlardı qaraymız. Birinshi kvadrattıń tárepı 1 ge teń, ekinshisiniki  $\frac{1}{2}$  ge, al úshinshisiniki  $\frac{1}{2^2}$  ge teń hám t.b. Solay etip, kvadrattıń tárepiniń bólimi  $\frac{1}{2}$  bolǵan tómendegi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \quad (1)$$

Bul kvadratlardıń maydanları bolsa, bólimi  $\frac{1}{4}$  bolǵan tómendegi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots, \frac{1}{4^{n-1}}, \dots \quad (2)$$

84-súwretten kórinip turǵanıday, kvadratlardıń tárepleri hám olardıń maydanları  $n$  nomeriniń artıwı menen barǵan sayın kemeyip, nolge jaqınlasıp baradı. Sonlıqtan (1) hám (2) progressiyalar sheksiz kemeyiwshi progressiyalar dep ataladı. Bul progressiyalardıń bólimleri birden kishi ekenligin atap ótemiz.

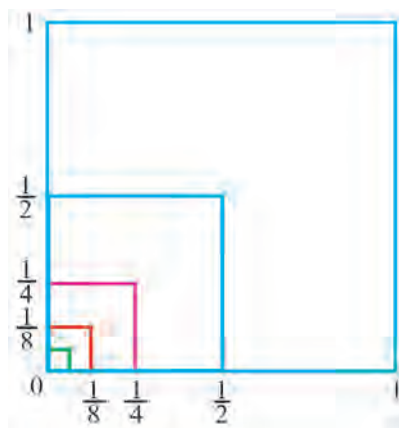
Endi tómendegi geometriyalıq progressiyanı qaraymız:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \dots \quad (3)$$

Bul progressiyanıń bólimi  $q = -\frac{1}{3}$ ,

al, aǵzaları bolsa  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $b_3 = \frac{1}{9}$ ,

$b_4 = -\frac{1}{27}$  hám t.b.



84-súwret.

$n$  nomeriniń artıwı menen bul progressiyanıń aǵzaları nolge jaqınlasadı. (3) progressiya da *sheksiz kemeyiwshi progressiya* dep ataladı. Onıń bóliminiń moduli birden kishi ekenligin atap ótemiz:  $|q| < 1$ .



**Bóliminiń moduli birden kishi bolǵan geometriyalıq progressiya *sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya* dep ataladı.**

**1-másele.**  $n$ -aǵzasınıń  $b_n = \frac{3}{5^n}$  formulası menen berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi progressiya bolatuǵının dálilleń.

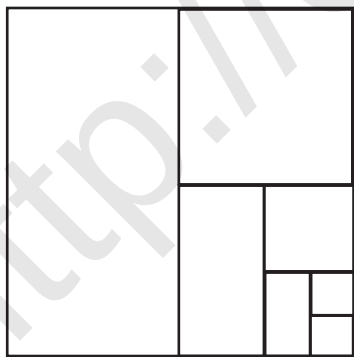
△ Shárt boyınsha  $b_1 = \frac{3}{5}$ ,  $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$ , bunnan  $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$ .  $|q| < 1$  bolǵanlıqtan berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi boladı. ▲

85-súwrette tárepi 1 bolǵan kvadrat kórsetilgen. Onıń yarımın shtrixlaymız. Sońınan qalǵan bóleginiń yarımın shtrixlaymız hám t.b. Shtrixlangan tórtmúyeshliklerdiń maydanları tómendegi sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanı dúzedi:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Eger usınday jol menen payda etilgen barlıq tórtmúyeshliklerdi shtrixlap shıqsaq, onda kvadrat pútkilley shtrix penen qaplanadı. Barlıq shtrixlangan tórtmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qosındısı 1 ge teń dep esaplaw tábiyiy, yaǵnıy:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1.$$



85-súwret.

Bul teńliktiń shep jaǵında sheksiz sandaǵı qosılıwshınıń qosındısı bar. Dáslepki  $n$  qosılıwshınıń qosındısını qaraymız:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısınıń formulasına muwapıq:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Eger  $n$  sheksiz ósip barsa, onda  $\frac{1}{2^n}$  nolge bargan sayın jaqınlasıp baradı (nolge umtıladı). Bul tómendegishe jazıladı:

$$n \rightarrow \infty \text{ da } \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

(oqılıwı:  $n$  sheksizlikke umtılganda  $\frac{1}{2^n}$  nolge umtıladı) yaki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(oqılıwı:  $n$  sheksizlikke umtılganda  $\frac{1}{2^n}$  izbe-izliginiń limiti nolge teń).

Ulıwma, qálegen bir  $a_n$  izbe-izligi ushın  $n \rightarrow \infty$  da  $a_n - a \rightarrow 0$  bolsa, onda  $a_n$  izbe-izligi  $a$  sanına umtıladı ( $a_n$  izbe-izliginiń  $n \rightarrow \infty$  daǵı limiti  $a$  ǵa teń) dep aytıladı hám  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  túrinde jazıladı.

$n \rightarrow \infty$  da  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$  bolǵanlıqtan  $n \rightarrow \infty$  da  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 1$ , yaǵnıy  $n \rightarrow \infty$  da  $S_n \rightarrow 1$ . Sonlıqtan da  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$  sheksiz qosındısı 1 ge teń dep esaplanadı.

Endi qálegen sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanı qaraymız:

$$b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots,$$

bunda  $|q| < 1$ .

**Ше́ксиз кемейи́wshi геометри́yalıq progressiyań qosındısı dep  $n \rightarrow \infty$  da onıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısı umtılatuǵın sanǵa aytıladı.**

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$  formulasınan paydalanamız. Onı tómendegishe jazamız:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n. \quad (4)$$

Eger  $n$  sheksiz ósse,  $|q| < 1$  bolǵanlıqtan  $q^n \rightarrow 0$ . Sonlıqtan  $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$  de  $n \rightarrow \infty$  da nolge umtıladı. (4) formulada birinshi qosılıwshı  $n$  ge baylanışlı emes. Demek,  $n \rightarrow \infty$  da  $S_n$  qosındısı  $\frac{b_1}{1-q}$  sanına umtıladı.



**Solay etip, sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń S qosındısı tómendegige teń:**

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

(5)

**Ayırım jaǵdayda,  $b_1 = 1$  bolǵanda,  $S = \frac{1}{1-q}$  boladı. Bul teńlik,**

**ádette mına kóriniste jazıladı:**

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Bul teńlik hám (5) teńlik tek  $|q| < 1$  bolǵanda ǵana orınlı bolatuǵınlıǵın atap ótemiz.

**2-másele.**  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \dots$  sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

△  $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$  bolǵanlıqtan  $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}, S = \frac{b_1}{1-q}$  formulası boyınsha:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{8}. \blacktriangle$$

**3-másele.** Eger  $b_3 = -1, q = \frac{1}{7}$  bolsa, sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısın tabıń.

△  $n = 3$  bolǵanda  $b_n = b_1 q^{n-1}$  formulasın qollansaq,  $-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$ ,  
 $-1 = b_1 \cdot \frac{1}{49}$  payda boladı, bunnan  $b_1 = -49$ .

(5) formula boyınsha S qosındısın tabamız:

$$S = \frac{-49}{1 - \frac{1}{7}} = -57 \frac{1}{6}. \blacktriangle$$

**4-másele.** (5) formuladan paydalanıp,  $a = 0,(15) = 0,151515\dots$  heksiz periodlı onlıq bólshekti, ápiwayı bólshek túrinde jazıń.

△ Berilgen sheksiz bólshektiń juwıq mánisleriniń tómendegi izbe-izligin jazamız:

$$a_1 = 0,15 = \frac{15}{100},$$

$$a_2 = 0,1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0,151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Juwiq mánislerdi usılayınsha jazıw berilgen periodlı bólshekti sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı túrinde súwretlew múmkınlıgıń kórsetedi:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \dots$$

(5) formulaǵa muwapıq:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \quad \blacktriangle$$

### Shınıǵıwlar

**412.** Geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi bolatuǵının dálilleń:

- |                                           |                                                      |                                               |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ; | 2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ ; | 3) $-81, -27, -9, \dots$ ;                    |
| 4) $-16, -8, -4, \dots$ ;                 | 5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \dots$ ;         | 6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$ . |

**413.** Eger geometriyalıq progressiyada:

1)  $b_1 = 40, b_2 = -20$ ;      2)  $b_7 = 12, b_{11} = \frac{3}{4}$ ;

3)  $b_7 = -30, b_6 = 15$ ;      4)  $b_5 = -9, b_9 = -\frac{1}{27}$

bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi bola ma? Usını anıqlań.

**414.** Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısıń tabıń:

- |                                           |                                 |                            |
|-------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ ; | 2) $6, 1, \frac{1}{6}, \dots$ ; | 3) $-25, -5, -1, \dots$ ;  |
| 4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \dots$ ;        | 5) $128, 64, 2, \dots$ ;        | 6) $-81, -27, -9, \dots$ . |

**415.** Eger sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada:

1)  $q = \frac{1}{2}, b_1 = \frac{1}{8}$ ;      2)  $q = -\frac{1}{3}, b_1 = 9$ ;

3)  $q = \frac{1}{3}, b_5 = \frac{1}{81}$ ;      4)  $q = -\frac{1}{2}, b_4 = -\frac{1}{8}$

bolsa, onıń qosındısıń tabıń.

**416.**  $n$ -a'gasini'n formulası menen berilgen tómendegi izbe-izlik sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya bola ma?

1)  $b_n = 3 \cdot (-2)^n$ ;      2)  $b_n = -3 \cdot 4^n$ ;      3)  $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ;

4)  $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ;      5)  $b_n = -2 \cdot (-3)^n$ ;      6)  $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ .

**417.** Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı tabıń:

1)  $12, 4, \frac{4}{3}, \dots$ ;      2)  $100, -10, 1 \dots$ ;      3)  $98, 28, 8, \dots$ .

**418.** Eger sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada:

1)  $q = \frac{1}{2}$ ,  $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$ ;      2)  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b_4 = \frac{9}{8}$ ;      3)  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $b_9 = 4$

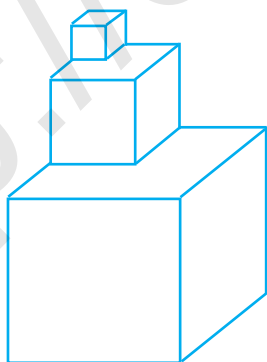
bolsa, onıń qosındısı tabıń.

**419.** Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıń qosındısı 150 ge teń. Eger:

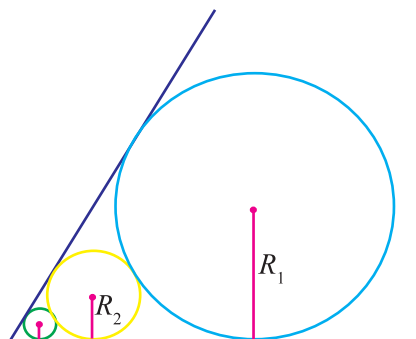
1)  $q = \frac{1}{3}$  bo'lsa,  $b_1$  ni;      2)  $b_1 = 75$ ;      3)  $b_1 = 15$

bolsa,  $q$  dı tabıń.

**420.** Qırı  $a$  bolğan kubtıń ústine qırı  $\frac{a}{2}$  bolğan kub qoyıldı. Onıń ústine qırı  $\frac{a}{4}$  bolğan kub qoyıldı, sońınan onıń ústine qırı  $\frac{a}{8}$  bolğan kub qoyıldı hám t.b. (86-súwret). Payda bolğan figuranıń biyikligin tabıń.



86-súwret.



87-súwret.

- 421.**  $60^\circ$  lı múyeshke bir-birine urınıwshı sheńberler ishley sızılğan (87-súwret). Birinshi sheńberdiń radiusı  $R_1$  ge teń. Qalğan sheńberlerdiń  $R_2, R_3, \dots, R_n, \dots$  radiusların tabıń hám olardıń sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya dúzetuǵının kórsetiń.  $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \dots + R_n + \dots)$  qosındısı birinshi sheńberdiń orayınan múyeshtiń tóbesine shekemgi aralıqqa teń ekenligin dálilleń.
- 422.** Sheksiz periodlı onlıq bólshekti, ápiwayı bólshek túrinde jazıń:  
1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

#### *IV babqa tiyisli shınıǵıwlar*

- 423.** Arifmetikalıq progressiyanıń ayırmasın tabıń, onıń tórtinshi hám besinshi aǵzaların jazıń:
- 1)  $4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, \dots$ ; 2)  $3\frac{1}{2}, 3, 2\frac{1}{2}, \dots$ ;  
3)  $1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, \dots$ ; 4)  $\sqrt{2}, \sqrt{2}-3, \sqrt{2}-6, \dots$ .
- 424.**  $n$ -aǵzasınıń  $a_n = -2(1-n)$  formulası menen berilgen izbe-izlik arifmetikalıq progressiya bolatuǵının dálilleń.
- 425.** Eger arifmetikalıq progressiyada:
- 1)  $a_1 = 6, d = \frac{1}{2}$  bolsa,  $a_5$  ni; 2)  $a_1 = -3\frac{1}{3}, d = -\frac{1}{3}$  bolsa,  $a_7$  ni; 3)  $a_1 = 4,8, d = 1,2$  bolsa,  $a_{11}$  di esaplań.
- 426.** Eger arifmetikalıq progressiyada:
- 1)  $a_1 = -1, a_2 = 1$ ; 2)  $a_1 = 3, a_2 = -3$ ; 3)  $a_3 = -2, a_5 = 6$  bolsa, onıń dáslepki jigirma aǵzasınıń qosındısını tabıń.
- 427.** Eger arifmetikalıq progressiyada:
- 1)  $a_1 = -2, a_n = -60, n = 10$ ; 2)  $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 25\frac{1}{2}, n = 11$  bolsa, onıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısını tabıń.
- 428.** Eger:
- 1)  $-38 + (-33) + (-28) + \dots + 12$ ;  
2)  $-17 + (-14) + (-11) + \dots + 13$   
qosındısınıń qosılıwshıları arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları bolsa, usı qosındını tabıń.

- 429.** Geometriyalıq progressiyanıń bólimin tabıń hám onıń tórtinshi, besinshi aǵzaların jazıń:
- 1)  $3, 1, \frac{1}{3}, \dots$ ;      2)  $\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ;      3)  $3, \sqrt{3}, 1, \dots$ ;  
 4)  $5, -5\sqrt{2}, 10, \dots$ ;      5)  $16, 4, 1, \dots$ ;      6)  $8, -4, 2, \dots$ .
- 430.** Geometriyalıq progressiyanıń  $n$ -aǵzası formulasın jazıń:
- 1)  $-2, 4, -8, \dots$ ;      2)  $-\frac{1}{2}, 1, -2, \dots$ ;      3)  $-27, -9, -3, \dots$ .
- 431.** Eger geometriyalıq progressiyada:
- 1)  $b_1 = 2, q = 2, n = 6$ ;      2)  $b_1 = \frac{1}{8}, q = 5, n = 4$ ;  
 3)  $b_1 = -8, q = \frac{1}{2}, n = 5$  bolsa,  $b_n$  dı tabıń.
- 432.** Eger geometriyalıq progressiyada:
- 1)  $b_1 = \frac{1}{2}, q = -4, n = 5$ ;      2)  $b_1 = 2, q = -\frac{1}{2}, n = 10$ ;  
 3)  $b_1 = 10, q = 1, n = 6$ ;      4)  $b_1 = 5, q = -1, n = 9$   
 bolsa, onıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısıń tabıń.
- 433.** Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki  $n$  aǵzasınıń qosındısıń tabıń:
- 1)  $128, 64, 31, \dots, n = 6$ ;      2)  $162, 54, 18, \dots, n = 5$ ;  
 3)  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots, n = 5$ ;      4)  $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, n = 4$ .
- 434.** Berilgen geometriyalıq progressiya sheksiz kemeyiwshi ekenligin dálilleń hám onıń qosındısıń tabıń:
- 1)  $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$ ;      2)  $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \dots$ ;      3)  $7, 1, \frac{1}{7}, \dots$ .
- 
- 435.** Eger arifmetikalıq progressiyada  $a_1 = 2\frac{1}{2}$  hám  $a_8 = 23\frac{1}{2}$  bolsa, onıń ayırmasın tabıń.
- 436.** Eger arifmetikalıq progressiyada:
- 1)  $a_1 = 5, a_3 = 15$ ;      2)  $a_3 = 8, a_5 = 2$ ;      3)  $a_2 = 18, a_4 = 14$   
 bolsa, onıń dáslepki bes aǵzasın jazıń.
- 437.**  $-10$  hám  $5$  sanları arasına bir san jazıń, nátiyjede arifmetikalıq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası payda bolsın.
- 438.** Eger arifmetikalıq progressiyada:
- 1)  $a_{13} = 28, a_{20} = 38$ ;      2)  $a_{18} = -6, a_{20} = 6$ ;      3)  $a_6 = 10, a_{11} = 0$   
 bolsa, onıń on toǵızınshı hám birinshi aǵzaların tabıń.



### ÓZINI ZDI TEKSERIP KÓRIŇ!

1. Arifmetikaliq progressiyada: 1)  $a_1 = 2$ ,  $d = -3$ ; 2)  $a_1 = -7$ ,  $d = 2$  bolsa,  $a_{10}$  hám dáslepki on aǵzasınıń qosındısıń tabıń.
2. Geometriyalıq progressiyada: 1)  $b_1 = 4$ ,  $q = \frac{1}{2}$ ; 2)  $b_1 = \frac{1}{9}$ ,  $q = 3$  bolsa,  $b_6$  hám dáslepki altı aǵzasınıń qosındısıń tabıń.
3. 1)  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ ; 2)  $128, 32, 8 \dots$ , izbe-izligi sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya ekenligin dálilleń hám onıń aǵzaların qosındısıń tabıń.

439.  $x$  tiń qanday mınıslerinde:

1)  $3x$ ,  $\frac{x+2}{2}$ ,  $2x - 1$ ; 2)  $3x^2$ ,  $2$ ,  $11x$ ; 3)  $x^2$ ,  $10x$ ,  $25$

sanları arifmetikaliq progressiyanıń izbe-iz aǵzaları boladı?

440. Tómendegi sanlar arifmetikaliq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası bolıwın kórsetiń:

1)  $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\sin\alpha\cos\beta$ ,  $\sin(\alpha - \beta)$ ;

2)  $\cos(\alpha + \beta)$ ,  $\cos\alpha\cos\beta$ ,  $\cos(\alpha - \beta)$ ;

3)  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos^2\alpha$ ,  $1$ ; 4)  $\sin 5\alpha$ ,  $\sin 3\alpha\cos 2\alpha$ ,  $\sin\alpha$ .

441. Qosındı 252 ge teń bolıwı ushın 5 ten baslap neshe izbe-iz taq sandı qosıw kerek?

442. Eger arifmetikaliq progressiyada:

1)  $a_1 = 40$ ,  $n = 20$ ,  $S_{20} = -40$ ; 2)  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $n = 16$ ,  $S_{16} = -10\frac{2}{3}$ ;

3)  $a_1 = -4$ ,  $n = 11$ ,  $S_{11} = 231$  bolsa,  $a_n$  hám  $d$  nı tabıń.

443. Geometriyalıq progressiyada:

1) eger  $b_1 = 4$  hám  $q = -1$  bolsa,  $b_9$  dı esaplań;

2) eger  $b_1 = 1$  hám  $q = \sqrt{3}$  bolsa,  $b_7$  ni esaplań.

444. Eger geometriyalıq progressiyada:

1)  $b_2 = \frac{1}{2}$ ,  $b_7 = 16$ ; 2)  $b_3 = -3$ ,  $b_6 = -81$ ;

3)  $b_2 = 4$ ,  $b_4 = 1$ ; 4)  $b_4 = -\frac{1}{5}$ ,  $b_6 = -\frac{1}{125}$

bolsa, onıń birinshi aǵzasıń tabıń.

- 445.** 4 hám 9 sanları arasına sonday bir óń sandı qoyıń, nátiyjede geometriyalıq progressiyanıń izbe-iz úsh aǵzası payda bolsın.
- 446.** Eger izbe-izliktiń  $n$ -aǵzasınıń:
- $$1) b_n = 5^{n+1}; \quad 2) b_n = (-4)^{n+2}; \quad 3) b_n = \frac{10}{7^n}; \quad 4) b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$$
- formulası menen berilgen bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya bola ma?
- 447.** Geometriyalıq progressiyada:
- $$1) b_2 = -81, S_2 = 162; \quad 2) b_2 = 33, S_2 = 67;$$
- $$3) b_1 + b_3 = 130, b_1 - b_3 = 120; \quad 4) b_2 + b_4 = 68, b_2 - b_4 = 60$$
- bolsa, ol sheksiz kemeyiwshi ekenligin kórsetiń.
- 448.** Dem alıwshı shıpakerdiń usınısı boyınsha birinshi kúni Quyash nurına 5 minut taplandı, al keyingi hár kún sayın taplanıwdı 5 minutqa arttırıp bardı. Eger ol taplanıwdı sárshembi kúninen baslaǵan bolsa, hápteniń qaysı kúni onıń Quyashqa taplanıwı 40 minutqa teń boladı?
- 449.** Eger arifmetikalıq progressiyada  $a_1 + a_2 + a_3 = 15$  hám  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$  bolsa, onıń birinshi aǵzasın hám ayırmasın tabıń.
- 450.** Eger arifmetikalıq progressiyada  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$  hám  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$  onıń aǵzasın hám ayırmasın tabıń.
- 451.** Saat 1 de 1 márte, 2 de 2 márte, ... 12 de 12 márte ses shıǵarıldı. Al saat tili náwbettegi hárbir saattıń yarımın kórsetkende, bir márte ses shıǵaradı. Bul saat bir sutka dawamında neshe márte ses shıǵaradı?

#### IV bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları

- 1.** Arifmetikalıq progressiyada  $a_1 = 3$ ,  $d = -2$ .  $S_{101}$  di tabıń.
- A) -9797;      B) -9798;      C) -7979;      D) -2009.
- 2.** Arifmetikalıq progressiyada  $d = 4$ ,  $S_{50} = 5000$  bolsa,  $a_1$  di tabıń.
- A) -2;      B) 2;      C) 100;      D) 1250.
- 3.** Arifmetikalıq progressiyada  $a_1 = 1$ ,  $a_{101} = 301$  bolsa,  $d$  di tabıń.
- A) 4;      B) 2;      C) 3;      D) 3,5.

4. Arifmetikaliq progressiyada  $a_2 + a_9 = 20$  bolsa,  $S_{10}$  di tabiń.  
A) 90; B) 110; C) 200; D) 100.
5. 8 ge bólgende 7 qaldıq shıǵaratuǵın izbe-izliktiń 5-aǵzasın belgileń.  
A) 47; B) 55; C) 39; D) 63.
6. 701 sanı 1, 8, 15, 22, ... progressiyanıń neshinshi nomerli aǵzası?  
A) 101; B) 100; C) 102; D) 99.
7. 1002, 999, 996, ... progressiyanıń neshinshi nomerli aǵzasınan baslap, onıń aǵzaları teris sanlar boladı?  
A) 335; B) 336; C) 337; D) 334.
8. Arifmetikaliq progressiyada  $a_2 + a_6 = 44$ ,  $a_5 - a_1 = 20$  bolsa,  $a_{100}$  di tabiń.  
A) 507; B) 495; C) 502; D) 595.
9. Arifmetikaliq progressiyada  $a_1 = 7$ ,  $d = 5$ ,  $S_n = 25450$  bolsa,  $n$  di tabiń.  
A) 99; B) 101; C) 10; D) 100.
10. Arifmetik progressiya  $a_{12} + a_{15} = 20$  bolsa,  $S_{26}$  di tabiń.  
A) 260; B) 270; C) 520; D) 130.
11. 1 hám 11 sanları arasında sonday 99 sandı jaylastırın, nátiyjede olar bul sanlar menen birgelikte arifmetikaliq progressiya payda etsin. Bul progressiya ushın  $S_{50}$  di tabiń.  
A)  $172\frac{1}{2}$ ; B) 495; C) 300; D) 178.
12. Arifmetikaliq progressiyada  $a_1 = -20,7$ ,  $d = 1,8$  qaysı nomerli aǵzadan baslap progressiyanıń barlıq aǵzaları oń boladı?  
A) 18; B) 13; C) 12; D) 15.
13. 7 ge eseli dáslepki neshe natural sandı qosqanda 385 kelip shıǵadı?  
A) 12; B) 11; C) 10; D) 55.
14. Geometriyalıq progressiyada  $b_1 = 2$ ,  $q = 3$  bolsa,  $S_6$  di tabiń.  
A) 1458; B) 729; C) 364; D) 728.
15. Geometriyalıq progressiyada  $q = \frac{1}{3}$ ,  $S = 364$  bolsa,  $b_1$  di tabiń.  
A)  $242\frac{2}{3}$ ; B) 81; C)  $121\frac{1}{3}$ ; D) 240.

16. Geometriyalıq progressiyada  $S_4 = 10\frac{5}{8}$ ,  $S_5 = 42\frac{5}{8}$ ,  $b_1 = \frac{1}{8}$  bolsa,  $q$  dı tabıń
- A) 4;                      B) 2;                      C) 8;                      D)  $\frac{1}{2}$ .
17. Geometriyalıq progressiyada 6 aǵza bar. Dáslepki 3 aǵzasınıń qosındısı 26 ǵa, keyingi 3 aǵzasınıń qosındısı bolsa 702 ge teń. Progressiya bólimin tabıń.
- A) 4;                      B) 3;                      C)  $\frac{1}{3}$ ;                      D)  $2\sqrt{3}$ .
18. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyada  $b_1 = \frac{1}{4}$ ,  $S = 16$  bolsa,  $q$  dı tabıń.
- A)  $\frac{1}{2}$ ;                      B)  $\frac{64}{65}$ ;                      C)  $\frac{63}{64}$ ;                      D)  $\frac{1}{4}$ .
19. Geometriyalıq progressiyada  $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b_1 = 2 - \sqrt{3}$  bolsa,  $S$  ti tabıń.
- A)  $2 + \sqrt{3}$ ;                      B) 3;                      C)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;                      D) 2.



### Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler

**1-másele.** Erkin túsip atırǵan dene birinshi sekunda 4,9 m, al keyingi hár bir sekunda aldınıǵısına qaraǵanda 9,8 m ge kóplew túsip baradı. Dene 4410 metr biyiklikten qansha waqıtta jerge túsedi?

△ Máseleniń shárti boyınsha, dene birinshi sekunda  $a_1=4,9$ , ekinshi sekunda  $a_2=4,9+9,8$ , úshinshi sekunda  $a_3=a_2+9,8=a_1+2 \cdot 9,8$  hám taǵı basqa  $n$ -sekunda  $a_n=a_{n-1}+9,8=a_1+(n-1)9,8$  metr tómengge túsedi. Yaǵnıy hár bir sekunda túsip atırǵan aralıqlar arifmetikalıq progressiyanı dúzedi. Demek, dene  $n$  sekunda jerge túsedi dep alsaq, arifmetikalıq progressiyanıń  $n$  aǵzasınıń qosındısı formulasına muwapıq

$$\begin{aligned} 4410 &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \\ &= \frac{2 \cdot 4,9 + (n-1) \cdot 9,8}{2} \cdot n. \end{aligned}$$

Bunnan  $4,9n^2=4410$ ,  $n^2=900$ ,  $n=30$  dı payda etemiz.

**Juwapı:** Dene 30 sekunda jerge túsedi. ▲

**2-másele.** Amanatshı  $b$  swm qarjısın bankke jılına  $p\%$  ten qoydı hám  $n$  jıl ótkennen keyin barlıq puldı qaytarıp aldı. Egerde  $b=4\ 000\ 000$ ,  $p=8$  bolsa, amanatshı eki jıldan keyin qansha pul alǵan?

△ Baslangısh qoyılǵan qarjı  $b$  swm bolsa, bir jıldan keyin amanatshınıń qarjısı  $b_1 = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$  swm boladı. Keyingi jıllar ushın tómendegi variantlardıń biri bolıwı múmkin:

1) Keyingi hár jıl ushın procent baslangısh qarjı  $b$  swmnan esaplanadı.

Bunda ekinshi jıldan keyin  $b_2 = b + 1 + \frac{bp}{100} + \frac{bp}{100} = b \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right)$  swm hám taǵı

basqa,  $n$ -jıldan keyin  $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$  swm boladı. Procentti esaplawdıń bunday usılı *ápiwayı procent* dep ataladı. Bunda, eger  $b=4\ 000\ 000$ ,  $p=8$ ,  $n=2$  bolsa, onda  $b=4\ 000\ 000$ ,  $p=8$ ,  $n=2$  bo'lsa, u holda  $b_2=4\ 000\ 000 \cdot 1,16 = 4\ 640\ 000$ .

2) Keyingi hár jılı procent jıynalǵan puldan esaplanadı. Eki jıldan keyin

$b_2 = b_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$  swm hám taǵı basqa  $n$  jıldan keyin

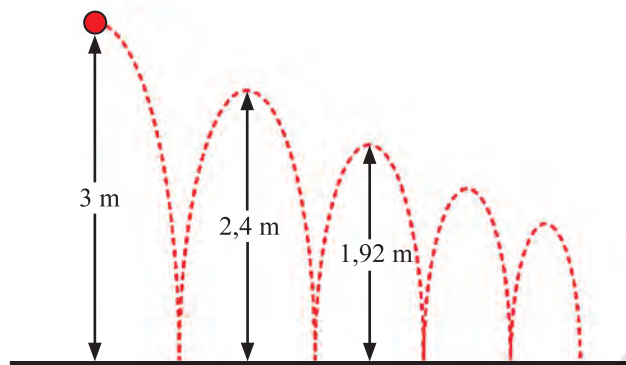
$b_n = b_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$  boladı. Procentti esaplawdıń bunday usılı *quramalı procent* delinedi. Bunda, eger  $b=4\ 000\ 000$ ,  $p=8$ ,  $n=2$  bolsa, onda  $b_2=4\ 000\ 000 \cdot 1,08^2 = 4\ 665\ 600$  swm.

**Juwabı:** ápiwayı procent túrinde  $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{np}{100}\right)$  swm;  $4\ 640\ 000$ ,

quramalı procent túrinde  $b_n = b \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$  swm;  $4\ 665\ 600$  swm. ▲

## *Máseleler*

1. Erkin túsiwshi dene birinshi sekundta 4,9 m jol basıp ótedi, keyingi hárbir sekundta bolsa, aldınıńsınan 9,8 m ge kóp jol basadı. Túsip atırǵan dene besinshi sekundta qansha jol basıp ótedi?
2. Cirktiń sektorlarınıń birinde hárbir keyingi qatarda aldınıńsına qaraǵanda orınlıqlar sanı birewge kóp. Egerde
  - 1) birinshi qatarda 8 orınlıq, qatarlar 22;
  - 2) birinshi qatarda 10 orınlıq, qatarlar 21 bolsa, usı sektorde neshe orın bar?
3. Turistler dáryanı jaǵalap 140 km júriwdi rejelestirdi. Birinshi kúni 5 km, hárbir keyingi kúni bolsa, onnan aldınıǵı kúnge qaraǵanda 2 km kóbirek júrgen bolsa, olar sayaxatta neshe kún boladı?
4. Ashıtqınıń kletkaları hárbir kletka ekige bóliniwi arqalı kóbeyedi. Eger baslanǵısh jaǵdayda 6 kletka bolsa, 10 ret bóliniwinen keyin kletkalar sanı neshew boladı?
5. Jıl dawamında zavod xızmetkeriniń aylıq is haqısı hár ay birdey muǵdarǵa kóbeytilip barıldı. Iyun, iyul, avgustta alǵan aylıq is haqılarınıń ulıwma muǵdarı 9 900 000 swm, sentyabr, oktyabr, noyabr ushın alınǵan is haqılardıń qosındısı bolsa 10 350 000 swm boldı. Xızmetkerdiń jıl dawamında alǵan ulıwma is haqısın tabıń.
6. Hawa vannasın alıw jolı menen emlewde, birinshi kúni emleniw 15 min dawam etti, keyingi hárbir kúnde onı 10 min tan kóbeytip barıladı. Vanna alıw kóbi menen 1 saat 45 min dawam etiwı ushın kórsetilgen tártipte hawa vannasın alıw neshe kún dawam etedi?
7. Elestik top taslanǵanda jerge urılıp, jáne joqarıǵa shıqqanında hár saparı biyikligi 80% ke kóterilse, onda 3 metrden taslanǵan toptıń tómengge hám joqarıǵa basıp ótken ulıwma vertikal aralıqları qosındısın tabıń (88-súwret).



### *Tariyxiy máseleler*

1. *Beruniy máselesi*. Eger aǵzaları ón bolǵan geometriyalıq progressiyanıń: aǵzalarınıń sanı taq bolsa, onda  $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$ ; aǵzalar jup bolsa,  $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$  bolatuǵının dálilleń.
2. *Axmes papirusınan alınǵan másele* (biziń eramızǵa shekemgi 2000-jıllar). 10 ólshem ǵálleni 10 adamǵa sonday etip úlestiriń, nátiyjede bul adamlardıń biri menen onnan keyingisi (yaki aldınıǵısı) alǵan ǵálleniń parqı  $\frac{1}{8}$  ólshemge teń bolsın.



### *Tariyxiy maǵlıwmatlar*

“Áyyemgi xalıqlardan qalǵan estelikler” miynetinde Abu Rayxan Beruniy shaxmat oyınıń dáslepki oylap tabılıwı haqqındaǵı ráwiyat penen baylanıslı birinshi aǵzası  $b_1=1$  hám bólimi  $q=2$  bolǵan geometriyalıq progressiyanıń dáslepki 64 aǵzasınıń qosındısı esaplaydı; shaxmat taxtasındaǵı  $r$ -kózgenekke sáykes sannan 1 sanı alınsa, ayırma  $r$ -kózgenekten aldınıǵı barlıq kózgeneklerge sáykes sanlardıń qosındısına teń bolatuǵının kórsetedi, yaǵnıy

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}$$

ekenin dálilleydi.

## V BAP. ITIMALLÍQ TEORIYASÍ HÁM MATEMATIKALÍQ STATISTIKA ELEMENTLERI



### 34-§

### HÁDIYSELER

Itimalliq teoriyasí hám matematikalíq statistika kútilmegen hádiyseler arasındagı baylanislardı, nızamlılıqlardı úyreniw hám olardan kelip shıgatuğın juwmaqlardı ámeliy máseleler sheshiwde qollanıwǵa arnalǵan pán bolıp esaplanadı.

#### 1. Júz beriwi múmkin bolmaǵan, anıq hádiyse hám kútilmegen hádiyseler.

Ómirde hádiyse dep, júz beretuğın yaqı júz bermeytuğın erkin proceslerge aytıladı. Bunnan tısqarı, insanlar tárepinen ámelge asırılatsuğın tájriyebeler yaqı sinaqlar, baqlawlar hám ólshew jumıslarınıń nátiyjeleri de hádiyseler bolıp esaplanadı. Barlıq hádiyselerdi júz beriwi múmkin bolmaǵan, anıq bolatuğın hám kútilmegen hádiyselerge bóliwge boladı.

**Júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiyse** dep, berilgen sharayatlarda júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiysege aytıladı. Bularǵa mısallar keltireyik:

1) kóldiń suwı  $+30^{\circ}\text{C}$  da muzlaydı;

2) Qaptalları 1 den 6 ǵa shekem nomerlengen kubikti taslanǵanda 8 sanınıń payda bolıwı.

**Anıq hádiyse** dep, berilgen sharayatlarda, álbette júz beriwi anıq bolǵan hádiysege aytıladı. Máselen: 1) qıstan keyin báhár keldi; 2) kubikti taslanǵanda altıdan úlken bolmaǵan ( 0 den basqa) san tústi.

**Kútilmegen hádiyse** dep, berilgen sharayatlarda júz beriwi de júz bermewi de múmkin bolǵan hádiysege aytıladı. Tómendegi hádiyseler kútilmegen hádiyselerge mısál bola aladı: 1) 1 den 50 ge shekem natural sanlar



arasidan táwekel saylangan san 7 ge bólinedi; 2) taslangan tiyin gerb tárepi menen túsedí.

## 2. Birgelikte júz beriwi múmkin hám birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler.

Berilgen shártlerde bir waqıtta júz beriwi múmkin bolǵan eki hádiyse birgelikte júz beriwi múmkin delinedi, bir waqıttań ózinde júz bermeytuǵın hádiyseler birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler delinedi. Máselen, „quyash shıqtı“ hám „kún suwıq“ birgelikte bolıwı múmkin hádiyseler, „kún battı“ hám „kún shıqtı“ hádiyseleri bolsa birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler bolıp esaplanadı. Kubik penen baylanıslı tómendegi hádiyselerdi qarayıq: 1) 3 ochko tústi; 2) 4 ochko tústi; 3) 3 ochkodan kóbirek tústi; 4) úsh ke eseli ochko tústi. Bul hádiyseler ishinde tómendegi úsh juplıq birgelikte júz beriwi múmkin hádiyseler: 1- hám 4-(3 sanı, 3 ke eseli bolǵanı ushın); 2- hám 3-( 4 ochko 3 ochkodan úlken bolǵanı suhın); 3-hám 4-(máselen, 6 ochko). Tómendegiler bolsa, birgelikte júz bermeytuǵın hádiyseler: 1-hám 2-( bir waqıttań ózinde eki túrli san túsiwi múmkin emes); 1- hám 3-( 3 ochkodan joqarı, yaǵnıy 4,5,6 ochkoları 3 ochko menen bir waqıtta túse almaydı); 2- hám 4-(4 sanı 3 ke eseli emes).

## 3. Teńdey imkaniyatqa iye hádiyseler.

Tómendegishe hádiyseler toparlarına misallardı qarap shıǵayıq:



*Gerb tárepi*



*Cifrlı tárepi*

*89-súwret.*

1) tiyindi bir márte taslaǵanda „cifrlı tárepiniń túsiwi“ hám „gerbli tárepiniń túsiwi“ (89-súwret).

2) kubikti bir márte taslaǵanda „1 ochko túsiwi“ „2 ochkonıń túsiwi“, ....., „6 ochkonıń túsiwi“;

3) bir tárepi kók, qalǵan tárepleri qızılǵa boyalǵan kubik taslanganda „kók tárepi joqarıǵa qaray túsiwi“ hám „qızıl tárepi joqarıǵa qaray túsiwi“;

4) ishinde 10 aq hám bir qara shar bolǵan qutıdan bir shar alıńanda onıń “aq shar shıǵıwı” hám “qara shar shıǵıwı”.

1- hám 2-mısallarda hádiyselerdiń geybirewiniń júz beriwi ushın hádiyselerdiń basqasına qaraǵanda bir ústinlik bar dep aytıwǵa bolmaydı (tiyin hám kubikler tuwrı bolsa álbette). Bunday hádiyseler teń imkaniyatlı hádiyseler dep ataladı.

3- hám 4- mısallarda teń imkaniyatlı bolmaǵan hádiyselerge mısallar berilgen. Rasında da, boyalǵan kubiktiń 5 tárepi qızıl, bir tárepi qara. Bunda qızıl tárepi túsiwi ushın qara tárepi túsiwine qaraǵanda imkaniyatları kóplew. Sol sıyaqlı, aq sharlar shıǵıw imkaniyatları qara shar shıǵıw imkaniyatlarınan kóplew.

### *Shınıǵıwlar*

Shınıǵıwlarda shártler hám bul shártlerde júz berip atırǵan hádiyseler berilgen. Hárbir hádiyse ushın (awızeki) onıń júz beriwi múmkin bolmaǵan yaki anıq bolatuǵın, yaki kútilmegen ekenligin anıqlań (**452–456**):

- 452.** Mekteptegi oqıwshılardan: 1) ekewiniń atı birdey; 2) hámmesiniń boyı birdey.
- 453.** Algebra sabaqlıǵı tosınnan ashılıp, oń betindegi úshinshi sóz tabıldı. Bul sóz: 1) “itimallıq” sózi; 2) “!” belgisinen baslanadı.
- 454.** IX klass (onda qızlar hám ul balalar da bar) jurnalındaǵı dizimnen dusmalıy bir oqıwshı saylap alındı: 1) ol qız bala; 2) saylanǵan oqıwshınıń jası 16 da; 3) saylanǵan oqıwshı 15 aylıq; 4) bul oqıwshınıń jası 3 ten úlken
- 455.** Búgin Samarqandta barometr normal atmosfera basımın kórsetpekte. Bunda: 1) Samarqandta jasawshı hayaldıń qazanındaǵı suw  $t = 70^{\circ}\text{C}$  da qaynaydı; 2) hawa rayı  $-5^{\circ}\text{C}$  ǵa túskende, kólmektegi suw muzladı.
- 456.** Eeki oyın kubigi taslanıp atır: 1) birinshi kubikte 4 ochko, ekinshisinde 6 ochko túsedi; 2) eki kubikte de túsken ochkolar qosındısı 1 ge teń; 3) eki kubikte de túsken ochkolar qosındısı 14 ke teń; 4) eki kúbiktiń hár birinde 5 ochkodan túsedi; 5) eki kubikte túsken ochko-lar qosındısı 12 den úlken emes.

Berilgen hádiyseler jupliqlarini qaysilari birgelikte júz beriwin, qaysilari birgelikte júz bermewin kórsetin (**457–459**):

- 457.** Saodat hám Shuxrat oynagan shashka oyini: 1) Saodat utti; Shuxrat utildi; 2) Saodat utildi; Shuxrat utildi.
- 458.** Kubik taslandi. Oni joqargi tarepi: 1) 5 ochkoni; 3 ochkoni; 2) 1 ochkoni; taq ochkoni kórsetti.
- 459.** Domino toplamnan bir domino danasi alindi, onda: 1) sanlarinan biri 4 ten ulken, ekinshisi 6 ga teñ; 2) bir san 5 ten kishi emes, ekinshisi 5 ten ulken emes; 3) sanlardin biri 5, eki san qosindisi 12 ge teñ; 4) eki san 4 ten ulken, sanlardin qosindisi 9 dan ulken emes.
- 460.** Tómendegi: 1) “qar jawip atir”; 2) “aspanda birde bir bult joq”; 3) “Hawa temperaturasi  $+37^{\circ}\text{C}$ ” hádiyselerinen múmkin bolgan barliq jupliqlardi dizip, olar arasında birgelikte júz beriwi múmkin bolgan hám birgelikte júz bermeytuǵin hádiyseler jupliqlarin aniqлаñ.
- 461.** Tómendegi hádiyseler: 1) “báhár keldi”; 2) “sabaq kestesi boyinsha búgin 6 sabaq boladi”; 3) “búgin 1-yanvar”; 4) “Tashkenttegi hawa temperaturasi  $+40^{\circ}\text{C}$ ” dan júz beriwi múmkin bolgan barliq jupliqlardi dizip, olar arasında birgelikte júz beriwi múmkin bolgan hám birgelikte júz bermeytuǵin hádiyseler jupliqlarin aniqлаñ.
- 462.** Tórt shirpi qutisiniñ birewiniñ ishi bos, qalǵanlarında shirpi shópleri bar. Dusmalıy túrde qutılardan biri ashıldı. “Shirpi qutisiniñ ishi bos shıqtı” hám “shirpi qutisiniñ ishi bos emes” hádiyseleri teñdey imkaniyatqa iye me?
- 463.** Kubiktiñ: 1) 1 tarepi; 2) 2 tarepi jasılǵa, qalǵan tarepleri bolsa, qızılǵa boyaldı. “Jasıl tarepi tústi” hám “qızıl tarepi tústi” hádiyseleri teñdey imkaniyatlı bola ma?
- 464.** Birden altıǵa shekem nomerlengen 6 aq, 6 qızıl, 6 kók, 6 sarı sharlar bir qaltaǵa salındı hám aralastırıldı. Qaltadan dusmalıy túrde bir shar alındı. Tómendegi hádiyseler teñ imkaniyatlı bola ma: 1) “tañlangan shar aq” hám “tañlangan shar kók”; 2) “tañlangan shar nomeri 5” hám “tañlangan shar nomeri 4”; 3) “tañlangan shar qızıl hám nomeri 2” hám “tañlangan

shar sari hám nomeri 6”; 4) “tańlangan shar qızıl” hám “tańlangan shar qızıl emes”; 5) “tańlangan shar nomeri 2 den úlken emes” hám “tańlangan shar nomeri 2 den úlken”?

## 35-§

## HÁDIYSENIŇ ITIMALLÍĞÍ

Turmısta hár túrli hádiyselerge duslasqanda, kópshilik jaǵdaylarda júz beriwiniń isenimlilik dárejesine baha beremiz. Bunda bazı bir hádiyseler haqqında “bunday bolıwı múmkin emes”, dep aytsaq, basqa bir hádiyseler haqqında “bul álbette júz beredi” yaki “bul hádiyse júz beriwine isenimim kúshli” yaki “bul hádiyse júz beriwine isenimim az”dep aytamız. Hádiyseler júz beriwiniń isenimlilik dárejesin bahalaw itimallıq túsiniǵı menen baylanıslı.

XVII ásirde francuz alımları Blez Paskal (1623–1662) hám Pyer Ferma (1601–1665) arasında bir qatar matematikalıq máseleler boyınsha jazısqa xatlarında, birinshi ret itimallıq penen baylanıslı máselelerdi sheshiwdiń dáslepki ulıwma jandasıwları qalıplestı. Blez Paskal 1654-jılı 28-oktyabrda Pyer Fermaǵa jazǵan xatında tómendegishe oy juwırtadı:

“Oyinshı kubikti taslaǵanda qanday san túsetuǵının bilmeydi. Biraq, ol 1,2,3,4,5 hám 6 sanları teńdey imkaniyatta túsiwin bileđi. Bunnan tısqarı, oyunshı tájriybe(kubik taslaw) nátiyjesinde kórsetilgen sanlardan birewiniń túsiwi, bul anıq hádiyse ekenligin de bileđi. Egerde biz anıq bolatuǵın hádiyseniń júz beriw imkaniyatların 1 dep qabıl etsek, onda usı sanlardan biriniń, máselen 6(tap usılay basqa sanlardıń da)nıń shıǵıwı 6 ese kishi, yaǵnıy  $\frac{1}{6}$  ge teń boladı”.

Ol yaki bul hádiyseniń nátiyjeli júz beriw imkaniyatın matematikler ***hádiyseniń itimallıǵı*** dep ataydı hám latinsha *probabilitas* – itimallıq sóziniń birinshi hárbine sáykes túrde P arqalı belgiledi.

Egerde  $A$  arqalı oyun kubigi bir ret taslanǵanda “5 ochko tústi” hádiysesi belgilense, onda  $A$  hádiyseniń itimallıǵı  $P(A)$  arqalı belgilenedi,  $P(A) = \frac{1}{6}$  túrinde jazıladı hám hádiyseniń itimallıǵı  $\frac{1}{6}$  dep oqıladı.

**1-másele.** Birdey kartochkalarğa 1 den 20 ğa shekem sanlar jazıldı (hár bir kartochkağa birewden san jazıldı). Kartochkalar stolğa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Dusmalıy alınğan kartochkadağı sannıń 7 bolıwı itimallıǵın tabıń.

△ Kartochkalar sanı 20 dana hám hár bir kartochkağa 1 den 20 ğa shekem sanlar birewden jazılğanı ushın tańlaw nátiyjesinde 20 teń imkaniyatlı hádiyseler júz beriwi múmkin (tájriybe nátiyjeleri): 1) 1 sanı shıqtı; 2) 2 sanı shıqtı; ...; 20) sanı shıqtı.

Bunda “geybir san shıqtı” hádiysesi anıq bolatuǵın hádiyse. Bul anıq bolatuǵın hádiyseniń itimallıǵı 1 ge teń hám  $A$  – “7 sanı shıqtı” hádiysesiniń itimallıǵı bolsa 20 ese kishi, yaǵnıy  $P(A) = \frac{1}{20}$ .

**Juwabı:**  $\frac{1}{20}$  ▲.

Joqarıda kórip shıǵılğan *elementar hádiyselerden* basqa quramalıraq hádiyselerdi de úyreniwge boladı. Máselen, 1-máseledegi taslanğan kartochkadağı sannıń ápiwayı san bolıwınıń itimallıǵın tabıw kerek dep alayıq.  $A$  – “20 dan kishi bolmağan ápiwayı sannıń shıǵıwı” hádiyessin qarayıq. Bul hádiyse 8 túrli jaǵdayda (nátiyjede) júz beredi – yaǵnıy 2,3,5,7,11,13,17,19 ápiwayı sanlardıń birewi shıqqanda. Bul nátiyjeler  $A$  hádiyse ushın *qolaylıq tuwdırıwshı imkaniyatlar* dep ataladı. Múmkin bolğan barlıq nátiyjeler (olar 20) ishinde 8 i qolaylıq tuwdırıwshı imkaniyatlar boladı, sol sebepli  $A$  hádiyseniń itimallıǵı

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$



**Egerde geybir tájriybede  $n$  teń imkaniyatlı, óz ara jup birgelikte júz beriwi múmkin emes nátiyje bar bolıp, olardan  $m$  sı  $A$  hádiyse ushın qolaylıq tuwdırıwshı imkaniyatlar bolsa, onda  $\frac{m}{n}$  qatnas  $A$  hádiyseniń júz beriwi itimallıǵı delinedi hám ol tómendegishe jazıladı:**

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1)$$

**2-másele.** Kubikti bir ret taslaganda, taq sanlı ochko shıǵıwınıń itimallıǵın tabıń.

△  $A$  – “taq sanlı ochko shıǵıwı” hádiyesine qolaylıq tuwdırıwshı 3 nátiyje (1 dıń shıǵıwı, 3 tiń shıǵıwı hám 5 ochkonıń shıǵıwı)si bar bolıp, yaǵnıy  $m=3$ . Teń imkaniyatlı barlıq nátiyjeler sanı bolsa  $n=6$ , sonıń ushın.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

**Juwapı:**  $\frac{1}{2}$ . ▲

**3-másele.** Qutıda 6 qızıl, 4 kók shar bar. Olardan biri dusmalıy saylanıp, qutıdan alındı. Alınǵan shardıń qızıl bolıw itimallıǵın tabıń.

Tájriybeniń 10 imkaniyatlı nátiyjeleri bar: 1-shar alındı, 2-shar alındı,..., 10-shar alındı, yaǵnıy  $n=10$ . Qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler sanı bolsa  $m=6$ . Sol sebepli

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

**Juwapı:**  $\frac{3}{5}$ . ▲

Anıq hádiyse, júz beriwi múmkin emes hám kúilmegen hádiyselerdiń itimallıqların (1) formulaǵa tiykarlanıp, tómendegilerdi ayıtıwǵa boladı:

Egerde  $A$  hádiyse anıq júz beretuǵın hádiyse bolsa, onda barlıq nátiyjeler, oǵan qolaylıq tuwdırıwshı boladı, yaǵnıy  $m = n$ . Onda  $P(A) = \frac{m}{n} = 1$ .

Egerde  $A$  hádiyse júz beriwi múmkin bolmaǵan hádiyse bolsa, onda oǵan qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler bolmaydı, yaǵnıy  $m = 0$ . Demek, bunda  $P(A) = \frac{0}{n} = 0$ .

Egerde  $A$  hádiyse kúilmegen hádiyse bolsa, onda oǵan qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeler ushın  $0 < m < n$  shárt orınlanadı. Sol sebepli, bunday jaǵdayda  $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$ .

## *Shinigiwlar*

- 465.** Tómente keltirilgen júz beriwi múmkin bolǵan barlıq elementlerden teń imkaniyatlı hádiyselerdi sanap ótiń: 1) tiyin taslaw; 2) kubikti taslaw; 3) tárepleriniń reńi aq, qızıl, sarı hám kók bolǵan tetraedrı taslaw; 4) qáddi  $A, B, C, D, E$  hám  $F$  arqalı belgilerin 6 sektorǵa bólingen ruletkanıń strelkasın aylandırıw.
- 466.** Domino oyınıniń tolıq komplektinen bir danası táwekel saylap alındı. Bul dananıń:  
1) 6 hám 5 sanları; 2) 0 hám 1 sanları; 3) birdey sanlar; 4) hár túrli sanlar shıǵıwı itimallıǵın tabıń.
- 467.** Qutıda 4 qızıl hám 5 kók shar bar. Táwekel bir shar alındı. Alınǵan shardıń:  
1) qızıl; 2) kók; 3) jasıl; 4) qızıl yaki kók bolıwınıń itimallıǵı qanday?
- 468.** Qutıda 3 kók, 4 sarı hám 5 qızıl shar bar. Táwekel bir shar alındı. Alınǵan shardıń:  
1) kók; 2) sarı; 3) qızıl; 4) kók emes; 5) sarı emes; 6) qızıl emes bolıwınıń itimallıǵı qanday?
- 469.** Birdey kartochkalarǵa 1 den 12 ge shekem sanlar jazıldı (hár bir kortochkaǵa birewden san jazıldı). Kartochkalar stolǵa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Táwekel alınǵan kartochkanıń:  
1) 5; 2) júp; 3) 3 ke eseli; 4) 4 ke eseli; 5) 5 ke bóliniwshi; 6) ápiwayı san bolıwı itimallıǵı qanday?
- 470.** Nigora dostısınıń telefon nomeriniń aqırǵı eki sanın esten shıǵardı hám onı táwekel terdi. Nigora óz dostısınıń telefonına túsiw itimallıǵı qanday?
- 471.** Loteriyada 1000 bilet bolıp, onnan 30 ı utıslı. Bir bilet satıp alındı. Satıp alınǵan bilet:  
1) utıslı; 2) utıs túspew itimallıǵı qanday?
- 472.** Talaba imtixanǵa tayarlanıw barısında oǵan beriletuǵın 30 bilettiń birewine tayarlanıwǵa úlgermedi. Imtixanda talabaǵa bilgen bileti túsiwiniń itimallıǵı qanday?



473. Tiyin 6 ret izbe-iz taslanganda, hár saparı gerb tárepi menen tústi. Tiyin jáne bir ret taslansa, gerb tárepi túsiwi itimallığı qanday?
474. 52 lik kartalardan bir karta táwekel saylap alındı. Bul kartanıń
- 1) qıyıq altı; 2) segiz;
  - 3) qızıl túrdegi valet; 4) sanlı atanaq;
  - 5) taq sanlı qıyıq bolıwınıń itimallığı qanday?

### 36-§ KÚTILMEGEN HÁDIYSENIŇ SALÍSTÍRMALÍ JIYILIGI

Itimallıqtıń aldınıǵı paragraflarda berilgen anıqlaması *itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması* delinedi. Klassikalıq anıqlama sınaq yaki tájriybeniń, anıq ótkiziliwin talap etpeydi: al, hádiyseniń barlıq teń imkaniyatlı hám qolaylıq tuwdırıwshı nátiyjeleri teoriyalıq jaqtan anıqlanadı.

Bunday anıqlama boyınsha tájriybeniń elementar teń imkaniyatlı nátiyjeleri sanı shekli hám belgili san menen kórsetiledi. Biraq, tájriybede, yaǵnıy tabiyattanıwda, ekonomikada, medicinada, islep shıǵarıwda hám basqa tarawlardaǵı kútilmegen hádiyseler úyrenilgende, tez-tez sonday sınaqlar yaki tájriybeler ushıraydı, bunda olardaǵı júz beriwı múmkin bolǵan nátiyjeler sanın qamtıp alıwınıń múmkinshiligi bolmaǵan dárejede kóp. Ayırım waqıtları tájriybelerdi ámelde ótkizbegenshe, nátiyjelerdiń teń imkaniyatlı bolıwın anıqlaw qıyın yaki ulıwma ilajı joq. Máselen, firma islep shıǵarǵan kóplegen lampochkalardı tekserip kórmegenshe “jaramlı” yaki “jaramsız” lıǵı teń imkaniyatlı bolıwı yaki bolmawı haqqında túsiniwke iye bolıw qıyın. Sonıń ushın, klassikalıq anıqlama menen bir qatarda, tájriybede itimallıqtıń statistikalıq anıqlamasınan da paydalanıladı. Bul anıqlama menen tanısıw ushın salıstırmalı jiyilik túsiniǵın kirgiziw kerek boladı.



**Berilgen tájriybeler ishinde  $A$  hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi dep, usı hádiyse júz bergen tájriybeler sanı  $M$  nıń ótkizilgen barlıq tájriybeler sanı  $N$  ǵa qatnasına aytıladı. Bunda  $M$  sanı  $A$  hádiysesiniń jiyiligi dep ataladı.**



$A$  hádiyseniń salıstırmalı jıyılıǵı  $W(A)$  arqalı belgilenedi. Bul jaǵdayda anıqlama boyınsha

$$W(A) = \frac{M}{N}. \quad (1)$$

**1-másele.** Klasta 30 oqıwshı bar. Ótkerilgen baqlaw jumısınan 6 oqıwshı 5 bahasın aldı. Klasta ótkizilgen baqlaw jumısınan alǵan ayrıqsha bahalardıń salıstırmalı jıyılıǵın tabıń.

▲ “5 baha aldı” hádiysesi bolsa, bul hádiyse 6 ret júz berdi, yaǵnıy  $M=6$ . Ulıwma tájriybeler sanı  $N=30$ , sonıń ushın

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

**Juwapı:**  $\frac{1}{5}$ . ▲

Francuz izertlewshisi Byuffon (1707-1788) tiyindi 4 040 márte taslap kórgen. Sonnan 2 048 márte taslaǵanında tiyinniń gerb tárepi túsken. Demek, bul jaǵdayda mına nátiyjeler qatarında gerb túsiwiniń salıstırmalı chas-totas  $W(A) = \frac{2\,048}{4\,040} \approx 0,5069$  ǵa teń. Ingliz matematigi Karl Pirson bolsa, tiy-indi 24 000 márte taslaǵanında, gerb tárepi 12 012 márte túsken. Demek, tiyin taslawdıń bul tájriybelerinde gerb tárepi túsiwiniń salıstırmalı jıyılıǵı  $W(A) = \frac{12\,012}{24\,000} = 0,5005$  ke teń.

Bul eki jaǵdaydaǵı nátiyjeni salıstırsaq, salıstırmalı jıyılıqlarınıń má-nisleri, ulıwma alǵanda, anıq tájriybelerge hám olardıń sanına qaray ózgeriwi múmkınlıǵın kóriwimizge boladı.

Biraq, kútilmegen hádiyseniń salıstırmalı chastotasınıń tiykargı qásiyeti sonnan ibarat, yaǵnıy tájriybeler sanı artıp barǵan sayın salıstırmalı jıyilik ta turaqlılasıp, geybir san átirapında terbelip turadı eken. Usı san kútilme-gen hádiyseniń statistikalıq itimallıǵı súpatında qabıl etiledi. Máselen, tiyin taslanǵanda, bul san 0,5, yaǵnıy Byuffon tájriybesindegi de, Pirson tájriybe-sindegi payda bolǵan salıstırmalı jıyılıqlar 0,5 ke júdá jaqın sanlar bolıp shıqtı. Demek, tiyin taslanǵanda onıń statistikalıq itimallıǵı 0,5 ke teń.

Tiyn taslaw tájriybesine uqsas hár túrli proceslerdi úyreniw boyınsha kóp sanlı tájriybeler izertlewshiler tárepinen ótkizilgen hám olardıń nátiy-jeleri tiykarında shveycariyalıq matematik ilimpaz Yakob Bernulli (1654–1705) úlken sanlar nızamın túsindirip berdi:

*Tájriybeler sanı úlken bolǵanda hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi  $W(A)$  bul hádiyseniń itimallıǵı  $P(A)$ nan ámeliy jaqtan ózgeshelikke iye bolmawı, yaǵnıy úlken sanlı tájriybelerde  $P(A)=W(A)$  ekenligi haqqındaǵı dálildi anıqlanǵan dep esaplaw múmkin.*

**2- másele.** Bir mámlekette shet elden kelgen turistler menen usı mámlekettiń ishinde sayaxatqa shıqqan mámleket puqaraları (ishki sayaxatshıları) haqqında tómendegi maǵlıwmatlar berilgen bolsın:

| Jıllar | Turistlerdiń ulıwma sanı |                 |
|--------|--------------------------|-----------------|
|        | Shet elli turistler sanı | Ishki turistler |
| 2014   | 610 623                  | 403 989         |
| 2015   | 746 224                  | 348 953         |
| 2016   | 822 558                  | 316 897         |
| 2017   | 774 262                  | 346 103         |
| 2018   | 811 314                  | 351 028         |

Keltirilgen jıllarda mámleket ishinde sayaxatqa shıqqan mámleket puqaraları sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

Mámleket ishinde sayaxatqa shıqqan puqaralar sanı:

$M = 403\,989 + 348\,953 + 316\,897 + 346\,103 + 351\,028 = 1\,766\,970$ ,  
shet elli turistler sanı bolsa:  $610\,623 + 746\,224 + 822\,558 + 774\,262 + 811\,314 = 3\,764\,981$ .

Ulıwma sayaxatshılar sanı:  $N = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 = 5\,531\,951$ .

Onda,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx 0,3194.$$

**Juwabı:**  $W \approx 0,3194$ .

## Shinigiwlar

**475.** Kesteniń aqırǵı bólegin toltırıń:

| Qatar sanı | Tájriybe                               | Tájriybeler sanı(N) | A hádiyse             | A hádiyseniń jiyiligi | A hádiyseniń salıstırmalı jiyiligi<br>( $W(A) = \frac{M}{N}$ ) |
|------------|----------------------------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1          | Tiyin taslaw                           | 150                 | Cıfırlı tárepi túsiwi | 78                    |                                                                |
| 2          | Sportshı oq jaydan nıshanaǵa atıp atır | 200                 | Nıshanaǵa tiyiw       | 182                   |                                                                |
| 3          | Kubik taslanıp atı                     | 400                 | 4 túsiwi              | 67                    |                                                                |

**476.** Bir qalada 920 adamnan jumısqa qalay jetip barıwı haqqında soralganda, olardıń: 350 i mashinada, 420 sı jámeyitlik transportta, 80 i velosipedte, 70 i piyada baratuǵınlıǵı belgili bolsa, 1) mashinada; 2) jámeyitlik transportta; 3) velosipedte; 4) piyada barıwshılar sanınıń salıstırmalı jiyiligin tabıń.

**477.** Tayarlangan 5 000 qattı diskten 70 i jaramsız bolıp shıqtı. Jaramsız qattı disk shıǵıwınıń salıstırmalı jiyiligin tawıp, onı procentlerde kórsetiń

**478.** Jas basketbolshılar komandası toptı sebetke túsiw shınıǵıwların ótkizdi. Nátiyjeler tómendegi kestege berilgen:

|                                                    |    |    |     |     |     |
|----------------------------------------------------|----|----|-----|-----|-----|
| Sebetke taslangan toplar sanı (N)                  | 10 | 50 | 100 | 250 | 500 |
| Sebetke túsken toplardıń jiyiligi (M)              | 6  | 32 | 68  | 155 | 320 |
| Sebetke túsken toplardıń salıstırmalı jiyiligi (W) |    |    |     |     |     |

Kesteniń aqırǵı qatarın toltırıń. Toplardıń sebetke túsiw itimallıǵı  $P$  nıń mánisi haqqında ne aytıwǵa boladı (onnan birge shekem anıqlıqta)?

## 37-§ TOSÍNNANLÍ SHAMA

Statistika hár túrli tosinnanlı shamalar haqqındağı maǵlıwmatlardı jıynaw, gruppaw, maǵlıwmatlardı kesteler, diagrammalar, grafikler hám basqa kórinislerde kórgizbeli kórsetiw hám bul maǵlıwmatlardıń analızı menen shuǵıwlanatuǵın pán bolıp esaplanadı.



***Tosinnanlı shama dep, baqlawlar yaki tájriybelerdi ótkiziwdawamında hár túrli mánislerdi tosinnan qabil etiwı múmkin bolǵan ólshege ayıladı. Bunday shamalar olardıń mánisleri tosinnan bolıwına baylanıslı dep aytıwımızǵa boladı.***

Máselen, kosmostan mektep sharbaǵına túsip atırǵan kosmik bóleksheler sanı, telefon stanciyasına kelip túsip atırǵan qońırawlar sanı, kesedegi shay molekularınıń tezligi, kubikti taslaǵanda qanday san shıǵıwı hám basqalar tosinnanlı shamalarǵa mısál bola aladı.

**1-másele.** Eki kubik taslandı. Eki kubikten túsetuǵın qanday ochkolar qosındısı, eń úlken itimallıq penen júz beriwın anıqlawǵa bola ma?

Hárbir qosındınıń payda bolıw itimallıǵın tabamız. Ulıwma nátiyjeler sanı, bul eki kubik taslanǵandağı túsiwinen payda bolatuǵın barlıq qosındılar sanı  $6 \cdot 6 = 36$  ǵa teń. Qosındınıń ochkolar kestegin dúzemiz:

| 1-kubik | 2- kubik |   |   |    |    |    |
|---------|----------|---|---|----|----|----|
|         | 1        | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| 1       | 2        | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2       | 3        | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3       | 4        | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4       | 5        | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5       | 6        | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6       | 7        | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Keste járdeminde hárbir anıq qosındı ushın qolaylıq tuwdırıwshı nátiy-jeler sanı  $m$  anıqlaymız:

$$m_2 = m_{12} = 1, \quad m_3 = m_{11} = 2, \quad m_4 = m_{10} = 3, \\ m_5 = m_9 = 4, \quad m_6 = m_8 = 5, \quad m_7 = 6.$$

Eki kubikti taslağanda ol yaki bul qosındınıń payda bolıw itimallıgın tómendegi keste túrinde kórsetiwge boladı:

|                                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Ochkolar qosındısı             | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| Itimallıq<br>$p = \frac{m}{n}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Kesteden ochkolar qosındısı 7 bolıwı eń úlken itimallıq  $-\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  ge iye bolıwı kórinip tur.

**Juwabı:** eń úlken itimallıqqa iye bolğan ochkolar qosındısı 7. ▲

1-máselede eki kubikti taslağandağı ochkolar qosındısı – tosınnanlı shama. Onı  $X$  arqalı belgileyik. Onda  $X_1 = 2, X_2 = 3, \dots, X_{10} = 11, X_{11} = 12$  sanları  $X$  tosınnanlı shamanıń mánisleri boladı.  $X$  tiń hárbir mánisine sáykes keliwshi  $P_1, P_2, \dots, P_{10}, P_{11}$  itimallıqlar mánisi tómendegi kestede kórsetilgen

|     |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | 12             |
| $P$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

Bul keste járdeminde, máselen,  $X$  shama birdey itimallıq penen qanday mánislerdi qabıl etiwın;  $X$  shamanıń qanday mánisi kóbirek itimallıq penen payda bolıwın hám tağı basqa sorawlarğa juwaptı ańsat ǵana anıqlawǵa boladı. Bul keste eki kubikti taslağandağı ochkolar qosındısınan ibarat bolğan tosınnanlı shama  $X$  tiń itimallıǵı boyınsha *bólistiriliw kestesı* delinedi.



Tosinnanlı shama  $X$  tiń mánislerin hám hárbir mánisti qabıl etiw itimallıǵın ańlatıwshı keste *tosinnanlı shamalardıń itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesi* delinedi.

Itimallıqlar boyınsha bólistiriliw kesteleri, itimallıqlardı teoriyalıq jaqtan esaplaw nátiyjeleri tiykarında dúziledi.

Ámeliyatta, real tájriybeler ótkizilgennen keyin, tosinnanlı shamarlar mánisleriniń jiyilikler yaki salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliwı dúziledi. Onnan keyin anıǵıraq bolıwı ushın bólistiriliw kesteleri *diagramma* yaki *jiyilikler poligonı* kórinisinde kórsetiledi. Maǵlıwmatlardı diagramma hám jiyilikler poligonı arqalı kórsetiw menen Siz 8-klass Algebra kursında tanıstıńız.

**2- másele.** Kompaniyalarda islewshi xızmetkerler sanın úyreniw maqsetinde 36 kompaniyadan, olarda isleytuǵın xızmetkerler sanı boyınsha maǵlıwmatlar alındı hám olar tómendegi kestege kirgizildi:

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| 23 | 30 | 24 | 25 | 30 | 24 |
| 32 | 33 | 31 | 31 | 25 | 33 |
| 23 | 30 | 29 | 24 | 33 | 30 |
| 26 | 29 | 27 | 29 | 26 | 28 |
| 29 | 30 | 27 | 30 | 28 | 32 |
| 31 | 27 | 30 | 27 | 33 | 28 |

Bul maǵlıwmatlardı 1) jiyilikler ( $M$ ) hám salıstırmalı jiyilikler ( $W$ ) boyınsha bólistiriliw kestesi; 2) jiyilikler poligonı járdeminde kórsetiń.

△ 1) Kesteden kórinip turǵanıday, xızmetkerler sanın  $X$  arqalı belgilesek, ol tosinnanlı shama boladı. Kesteni úyrenip, bul tosinnanlı shamanıń mánisleri 23 ten 33 ge shekem mánislerdi qabıl etiwın kóremiz hám usı sanlardı kestede neshe márte keltirilgenin sanap, jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestesin dúzemiz:

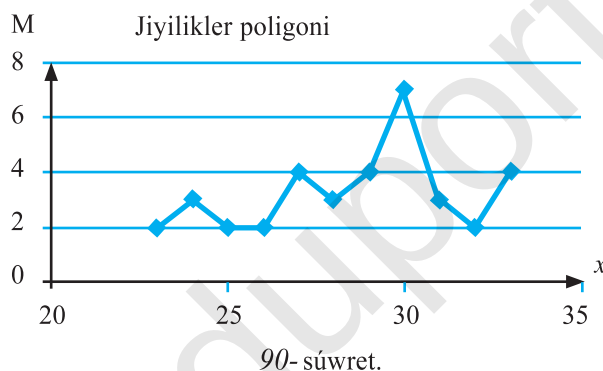
|     |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $X$ | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 |
| $M$ | 2  | 3  | 2  | 2  | 4  | 3  | 4  | 7  | 3  | 2  | 4  |

Jiyiliklerdın hárbirin kompaniyalar sanı  $N=36$  ға bólip, salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliw kesetine iye bolamız:

|                   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   | 30   | 31   | 32   | 33   |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $W = \frac{M}{N}$ | 0,06 | 0,08 | 0,06 | 0,06 | 0,11 | 0,08 | 0,11 | 0,19 | 0,08 | 0,06 | 0,11 |

Bunda barlıq jiyilikler qosındısı  $N=36$  hám barlıq salıstırmalı jiyilikler qosındısı bolsa 1 ge teń ekenin esletip ótemiz.

2) Kompaniyalar xızmetkerleri sanınıń jiyilikler poligonın 90-súwretten kóriwimizge boladı:



Geybir shamanıń barlıq mánisleri qosındısı tabajaq bolsa, L. Eyler tárepinen kirgizilgen  $\sum$  belgisinen paydalanamız. Máselen, egerde  $M$  jiyilik  $M_1, M_2, \dots, M_k$  mánislerdi qabıl etse, onda tómendegishe belgilewden paydalanamız:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k = \sum M.$$

tosınnanlı shamanıń barlıq jiyilikleriniń qosındısı, tájriybeler sanı  $N$  ға teń:

$$\sum M = N.$$

Hár qanday tosınnanlı shama ushın onıń salıstırmalı jiyilikleriniń qosındısı 1 ge teń.

$$\begin{aligned} \sum W &= \sum \left( \frac{M}{N} \right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \dots + \frac{M_k}{N} = \\ &= \frac{M_1 + M_2 + \dots + M_k}{N} = \frac{\sum M}{N} = \frac{N}{N} = 1. \end{aligned}$$

Bul paragrafta kórilgen tosinnanlı shamalar bir-birinen ajratılğan mánislerdi qabıl etedi. Bunday ólshemler diskret (latin tilindegi *diskretus* – ajratılğan, bólingen sózinen) *ólshemler* dep ataladı.

Egerde tosinnanlı shama geybir aralıқтаǵı barlıq mánislerdi qabıl etiwı múmkin bolsa, onda bunday shama úzliksiz tosinnanlı shama dep ataladı. Úzliksiz tosinnanlı shamalarǵa mısál etip hawa temperaturasınıń ózgeriwı, úyden mektepke shekem barıwǵa ketetuǵın waqıt, ósip atırǵan terektiń boyı, bándirgide kútip turılğan avtobustıń keliw waqtı hám taǵı basqalardı keltiriwge boladı.

Úzliksiz tosinnanlı shamalar sheksiz kóp mánislerdi qabıl etse de, olardıń bólistiriliwın beriwge boladı. Bunıń ushın úzliksiz shama mánisleriniń ózgeriw aralıǵı bólimlerge bólinedi hám tosinnanlı shamanıń hárbir bólimge túsiwiniń jiyilikleri (yaki itimallıqları) esaplanadı.

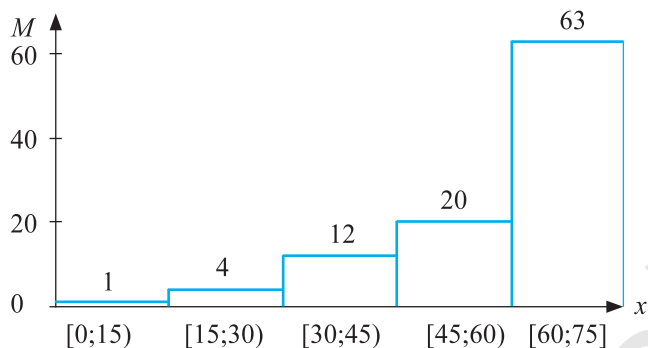
Máselen, oqıwshı 100 kún sport zalına barǵanı hám hár saparı shınıǵıwlarǵa 1 saat 15 minuttan kóp bolmaǵan waqıt ketkenin jazıp barǵan bolsın. Onda ketken waqıtlardıń minutlar (0; 75) aralıǵında bóliniwın itibarǵa alıp, bul aralıqtı, máselen, 5 ke teń waqıt aralıqlarına bólip, shınıǵıwlarǵa ketken waqıtlardıń jiyilikler kestesine kirgiziwge boladı:

| $T$ (minut) | [0; 15) | [15; 30) | [30; 45) | [45; 60) | [60; 75] |
|-------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| $M$         | 1       | 4        | 12       | 20       | 63       |

Bunda jiyilikler qosındısı esaplap,  $\sum M = N = 100$  ekenligin kórimizge boladı.

Bul kestedegi maǵlıwmatlardı jiyilikler gistogramması – tekshe tárizli forma túrinde kórsetiwge boladı (91-súwret). Bunda hárbir tekshe tiykarı  $h$  uzınlıqqa iye bolsa, onda teksheniń biyikligin,  $\frac{M}{h}$ , bul jerde  $M$  hám  $X$  tosinnanlı shamanıń sáykes aralıқтаǵı jiyiligi. Onda bunday teksheniń beti  $\frac{M}{h} \cdot h = M$  ge, gistogramma astındaǵı formanıń beti bolsa  $\sum M = N$  ǵa teń boladı.



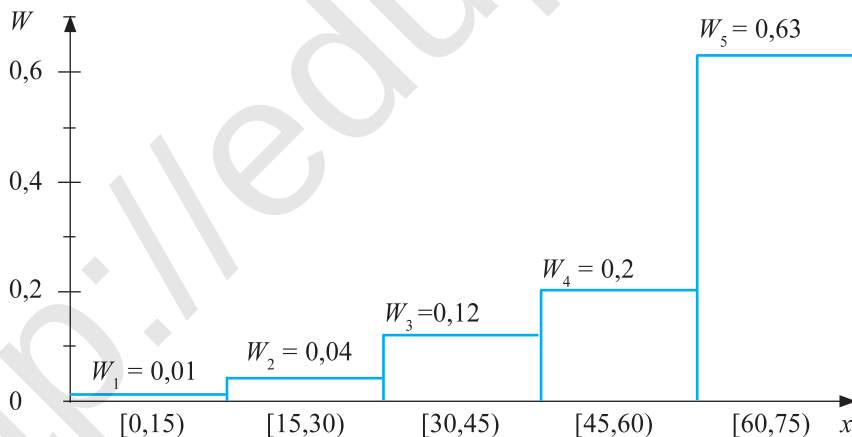


91-súwret.

Egerde jiyilikler járdemide salıstırmalı jiyilikler anıqlansa:

| $T(\text{minut})$ | $[0;15)$ | $[15;30)$ | $[30;45)$ | $[45;60)$ | $[60;75]$ |
|-------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $W = \frac{M}{N}$ | 0,01     | 0,04      | 0,12      | 0,2       | 0,63      |

onda olar járdemide sızılğan tekshe tárizli forma (92-súwret) tosinanlı shamanıń *salıstırmalı jiyilikler boyınsha gistogramması* delinedi.



92-súwret.

Salıstırmalı jiyilikler gistogrammasınıń hárbir tekshesiniń beti  $W$  dın sáykes mánisine teń boladı. Onda gistogamma astındağı formanıń beti birge teń boladı ( $\sum W = 1$ ).

## Shinigiwlar

- 479.** 1) Ápiwayı kubik; 2) eki tárepinde 1 ochko, eki tárepinde 2 ochko, eki tárepinde 3 ochko belgilengen kubik; 3) úsh tárepinde 1 ochko, eki tárepinde 2 ochko, bir tárepinde 3 ochko belgilengen kubik; 4) eki tárepinde 1 ochko, úsh tárepinde 2 ochko, bir tárepinde 3 ochko belgilengen kubik taslanganda túsetuǵın “ochkolar sanı”– $X$  tosınnanlı shama mánisleriniń  $P$  itimallıqları boyınsha bólistiriliw kestesiń dúziń.
- 480.** Stolǵa eki tiyin taslanıp atır. Nátiyje “gerb tárepi” tússe shártli túrde 0 sanlı mánis, nátiyje “cifrlı tárepi” tússe 1 sanlı mánisin beremiz. Tiyinler túskende berilgen sanlı mánisler qosındısı –  $X$  tosınnanlı shamanıń  $P$  itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesiń dúziń.
- 481.** Tárepleri 1,2,3,4 sanları menen belgilengen eki tetraedr bir waqıtta stolǵa taslanbaqta, bunda tetraedrın stolǵa tiyip turǵan tárepindegi ochko esapqa alınadı. Eki tetraedrdań túsetuǵın qanday ochkosı: 1) qosındısıń; 2) kóbeymesiniń eń úlken itimallıǵı menen bolıwın anıqlawǵa bola ma?
- 482.** Eki kubik taslandı. Eki kubikten túsetuǵın ochkolar kóbeymesiniń itimallıǵı boyınsha bólistiriliw kestesiń dúziń.
- 483.** Kafeniń iyesi túste awqatlanıwshılardıǵa óz waqtında xızmet etiw, usı waqıtta xızmet etiwshilerdiń sanın durıs belgilew hám tayarlanatuǵın awqatlarǵa jumsalatuǵın ğárezetlerdi durıs rejelestiriw maqsetinde, onıń kafesinde túslik awqat jewshilerdiń sanın 50 kún dawamında kestege jazıp bardı:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 20 | 27 | 23 | 27 | 26 | 18 | 22 | 25 | 26 | 23 |
| 23 | 25 | 28 | 26 | 23 | 22 | 21 | 19 | 21 | 29 |
| 30 | 27 | 26 | 30 | 29 | 22 | 18 | 29 | 22 | 26 |
| 28 | 27 | 29 | 27 | 22 | 29 | 26 | 27 | 21 | 19 |
| 25 | 29 | 29 | 21 | 18 | 26 | 20 | 24 | 19 | 27 |

Bul keste járdeminde kafede túslik awqatlanıwshılardıń sanı –  $X$  tosınnanlı shamanıń; 1) jiyilikler ( $M$ ) hám salıstırmalı jiyilikler ( $W$ ) boyınsha bólistiriliw kestesin; 2) jiyilikler poligonın dúziń.

- 484.** Jabıq suw basseyinine júziwge kelgen ul hám qız balalardıń sanı bes ay dawamında dizimge alınıp, tómendegi keste dúzildi:

| Aylar  | Basseynge kelgen balalar |            |
|--------|--------------------------|------------|
|        | Qız balalar              | Ul balalar |
| Aprel  | 311                      | 357        |
| May    | 284                      | 404        |
| Iyun   | 278                      | 417        |
| Iyul   | 340                      | 412        |
| Avgust | 322                      | 406        |

Basseynge kelgen ul balalar sanı –  $X$  tosınnanlı shamanıń jiyiligi, salıstırmalı jiyiligin tabıń hám jiyilikler gistogrammasın dúziń.

- 485.** Mánisleri tómendegi telefon nomerlerinde qatnasqan sanlardıń  $X$  tosınnanlı shamanıń jiyilikler boyınsha bólistiriliw kestesin dúziń:

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 149 494.

- 486.** Tómendegi bólistiriliw kestesinde berilgen  $X$  tosınnanlı shamanıń jiyilikler poligonı hám salıstırmalı jiyilikler poligonın dúziń:

1) 

|     |   |   |   |   |    |
|-----|---|---|---|---|----|
| $X$ | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| $M$ | 2 | 4 | 6 | 3 | 1  |

2) 

|     |   |   |   |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|
| $X$ | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 |
| $M$ | 5 | 4 | 7 | 3  | 6  |

- 487.** Kestede 9-klasstıń 16 ul balalarınıń ayaq kiyimleriniń ólshemleri jazılğan:

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 38 | 38 | 39 | 39 | 39 | 40 | 40 | 41 |
| 41 | 41 | 41 | 41 | 42 | 42 | 42 | 43 |

9-klass ul balalarınıń ayaq kiyiminiń ólshemi –  $X$  tosınnanlı shamanıń jiyilikler boyınsha hám salıstırmalı jiyilikler boyınsha bólistiriliw kes-telerin dúziń.

### 38- §. KÚILMEGEN MUĖDARLARDÍŇ SANLÍ XARAKTERISTIKALARI

Sizler 8-klass “Algebra” kursınıń maġlıwmatlar analizine arnalġan IV babında baslı toplam, tańlanba, orta mánisi, moda, mediana sıyaqlı túsiniqler menen tanıstırıńız. Tap usınday túsiniqlerdi tosınnanlı shamalar ushın da qollanıwǵa boladı.

Statistikada maġlıwmatlar toplamı sıpatında tosınnanlı shamalardıń sanlı mánisleri, olardıń chastotaların esapqa alıp, qaraladı. Bunda tosınnanlı shamalardıń barlıq mánisleri baslı toplam dep ataladı. Olardıń tańlap alınǵan bir bólimi bolsa tańlanba dep ataladı. Tańlanba *representativ tańlanba* delinedi, egerde tańlanbada tosınnanlı shamanıń bas toplamdaǵı hám tek onıń mánisleri qatnassa, ondaǵı mánisleri jiyilikleriniń qatnası bas toplamındaǵı sıyaqlı bolsa.

Mısalı.  $X$  tosınnanlı shamanıń  $M$  jiyilikleri boyınsha bóliniwi tómendegidey etip berilgen bolsın:

|     |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|
| $X$ | -3   | 5    | 9    | 11   |
| $M$ | 5000 | 2000 | 7000 | 3000 |

hám bul tosınnanlı shamanıń barlıq mánisleri (itibar berin, olardıń sanı 17000) bas toplam dep qabıl etilgen bolsın. Támendegishe úsh tańlanbanı qarayıq:

1-keste

|     |    |   |   |    |
|-----|----|---|---|----|
| $X$ | -3 | 5 | 9 | 11 |
| $M$ | 5  | 2 | 7 | 3  |

2-keste

|     |    |   |    |
|-----|----|---|----|
| $X$ | -3 | 9 | 11 |
| $M$ | 5  | 7 | 3  |

3-keste

|     |    |   |   |    |
|-----|----|---|---|----|
| $X$ | -3 | 5 | 9 | 11 |
| $M$ | 5  | 6 | 7 | 3  |

1-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba representativ tańlanba, sebebi, onda da -3, 5, 9, 11 mánisler hám tek usı mánisleri qatnasıp atır hám bas toplamda da bul tańlanbada da jiyilikler qatnası birdey:  $5\ 000 : 2\ 000 : 7\ 000 : 3\ 000 = 5 : 2 : 7 : 3$ .

2-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba representativ tańlanba emes, sebebi, onda  $X$  tosınnanlı shamanıń 5 ke teń mánisi qatnaspaqta.

3-kestede bólistiriliwi berilgen tańlanba reprezentativ tańlanba emes, sebebi onda jiyilikler qatnası saqlanbaǵan:  $5\ 000:2\ 000:7\ 000:3\ 000 \neq 5:6:7:3$ .

Berilgen maǵlıwmatlardı, yaǵnıy, tosınnanlı shamalardıń mánislerin bazıda bir san menen ańlatıw yaqi bahalawǵa bolatuǵınlıǵı belgili boldı. Bul san berilgen maǵlıwmatlar quramındaǵı sanlar yaqi tosınnanlı shamalardıń mánisleri *oraylıq tendenciyasınıń ólshemi* dep te ataladı. Oraylıq tendenciya ólshemlerine misal etip, moda, mediana hám ortasha mánis sıyaqlılardı keltiriwge boladı.

Tosınnanlı shamanıń qaralıp atırǵan tańlanbadaǵı jiyiliginiń eń úlken mánisi moda dep ataladı hám  $M_0$  dep belgilenedi.

Máselen, tańlanba 8,9,2,4,8,6,3 den ibarat bolsa, onda onıń modası 8 ge teń. 5,6,11,3,3,5 tańlanbanıń modası bolsa eki –  $M_2=3$ ,  $M_2=5$ . Egerde 1,3,7,20,6,11 tańlanbanı qarasaq, onıń modası joq.

Egerde tańlanba mánislerin ósip barıw tártibinde jazıp alsaq, onda tańlanbanı belgilengenniń san jaǵınan teńdey ekige bóliwshi san *mediana* dep ataladı hám  $M_e$  etip belgilenedi. Eger tártiplestirilgen tańlanbada berilgen sanlar sanı taq bolsa, onda mediana olardıń ortasında turǵan sanǵa teń. Eger tártiplespen tańlanbada berilgen sanlar sanı jup bolsa, onda mediana ortada turǵan eki sannıń arifmetikalıq ortasına teń.

**1-másele.** Tosınnanlı shama mánisleri tańlanbasınıń medianasın tabıń:

1) 8, 2, 0, 5, -5, 4, 8;

2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazıp shıǵamız: -5,0,2,5,4,8,8. tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazamız: 2,3,4,5,7,8. Berilgenler sanı taq. 5 sanınan shepte hám ońda úshewden san bar, yaǵnıy 5 tańlanbanıń orta sanı, sonıń ushın  $M_e=5$ .

2) Berilgen 8, 5, 3, 4, 7, 2 tańlanba elementlerin ósip barıw tártibinde jazamız: 2,3,4,5,7,8. Berilgenler sanı jup. Tańlanbanıń ortasında turǵan sanlar:

4 hám 5, sonıń ushın  $M_e = \frac{4+5}{2} = 4,5$ .

**Juwapı:** 1) 5; 2) 4,5. ▲

Tańlanbalardı úyreniwde áhmiyetli bolǵan jáne bir túsiniq – tańlanbanıń keńligi túsiniǵı menen de Sizler 8-klasta tanıstıńız. *Tańlanbanıń keńligi* dep, tosınnanlı shamanıń eń úlken mánisi menen eń kishi mánisiniń ayırmasına aytıladı hám ol R arqalı belgilenedi.

Tańlanbanıń keńligi tosınnanlı shamanıń mánisleriniń qanshelli jayılmalı ekenligin bildiredi.

**Mısalı.** 21, 27, 22, 8,9, 15, 19, 21 hám 190, 187, 198, 189, 195, 190 tańlanbalardıń keńligin salıstırıń.

1- tańlanbanıń eń úlken mánisi 27, eń kishi mánisi bolsa 8 ge teń. Demek, 1- tańlanbanıń keńligi  $R_1 = 27 - 8 = 19$ .

2- tańlanbanıń eń úlken mánisi 198, eń kishi mánisi 186. Nátiyjede, 2- tańlanbanıń keńligi  $R_2 = 198 - 186 = 12$ .

Demek, birinshi tańlanbanıń mánisleri, ekinshi tańlanbadaǵılarga qarǵanda jayılmalı túrde jaylasqan.

Tosınnanlı shama mánisleriniń *ortasha mánisi* (yaki *arifmetikalıq ortası*) dep, tańlanbadaǵı barlıq sanlar qosındısıń olardıń sanına qarata aytıluwın esletip ótemiz.  $\bar{X}$  tosınnanlı shamanıń barlıq mánisleriniń ortashası arqalı belgilenedi.

**2-másele.** Tómenдеgi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen tosınnanlı shama tańlanbasıń ortashasın tabıń.

4-keste

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 10}{3 + 1 + 2 + 1 + 3} = \frac{9 + 4 + 10 + 7 + 30}{10} = 6.$$

**Juwabı:** 6.

İtimallıǵı boyınsha bólistiriliwi belgili bolǵan tosınnanlı shamanıń tańlanbasın túsindiriwshi túsiniqlerdiń jáne biri – bul *matematikalıq kútilme* túsiniǵı bolıp esaplanadı.

Eger  $X$  tosınnanlı shamanıń  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mánislerin qabıl etiw itimallıqları, sáykes túrde,  $P_1, P_1, \dots, P_n$  bolsa, onda

$$E = X_1 P_1 + X_2 P_2 + \dots + X_n P_n \quad (1)$$

sanı  $X$  tosınnanlı shamanıń *matematikalıq kútilmesi* dep ataladı.

Máselen,  $X$  tosınnanlı shamanıń itimallıqları boyınsha bólistiriliwi tómendegishe berilgen bolsın:

|     |                |               |               |               |                |
|-----|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| $X$ | 6              | 4             | 3             | 7             | 5              |
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

Onda bul tosınnanlı shamanıń matematikalıq kútilmesi:

$$E = 6 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} + 7 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Tosınnanlı shamanıń mánisi menen tańlanbanıń ortashası arasındagı ayırma *ortashasınan shetleniw* dep ataladı.

Máselen, tosınnanlı shamanıń mánisi  $X_1=35$ , ortashasınıń mánisi bolsa  $\bar{X} = 32$  bolsa, onda  $X_2$  niń barlıq ortashadan shetleniwi  $X_1 - \bar{X} = 35 - 32 = 3$ .

Tańlanbanıń barlıq mánisleriniń ortashadan shetleniwleriniń qosındısı nolge teń bolatuǵının kórsetiw ańsat:

$$\begin{aligned} (X_1 - \bar{X}) + (X_2 - \bar{X}) + \dots + (X_n - \bar{X}) &= (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n \cdot \bar{X} = \\ &= (X_1 + X_2 + \dots + X_n) - n \cdot \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = 0. \end{aligned}$$

Sonıń ushın, tosınnanlı shamanıń mánislerin ańlatıw ushın ortashadan shetleniwler qosındısı ornına ortasha shetleniwler kvadratlarınıń arifmetikalıq ortasınan paydalanıladı. Bunday ólshem *dispersiya* (latinsha *dispersion* – shashılıw, jayılw) dep ataladı.

Eger  $X$  tosınnanlı shama  $N$  hár túrli mánislerdi qabıl etse hám onıń ortashası  $\bar{X}$  bolsa, onda onıń dispersiyası tómendegi formula járdeminde tabıladı:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{N}. \quad (2)$$

Demek, dispersiya – tosınnanlı shama mánisleriniń ortashasınan shetleniwler kvadratlarınıń arifmetikalıq ortasına teń.

Egerde  $X$  tosınnanlı shamanıń  $X_1, X_2, \dots, X_k$  mánisleri sáykes túrde,  $M_1, M_2, \dots, M_k$  jiyilikleri menen tákirarlansa, onda onıń dispersiyasın

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k}. \quad (3)$$

formula járdeminde esaplawğa boladı, bunda

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \dots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k}.$$

Máselen, 4-kestedegi tosınnanlı shamanıń ortashası  $\bar{X} = 6$  ekenligin anıqlağan edik. Endi usı shamanıń dispersiyasın esaplayıq:

$$\begin{aligned} D &= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \dots + M_k} = \\ &= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3 + 1 + 2 + 1 + 3} = \\ &= \frac{27 + 4 + 2 + 1 + 48}{10} = \frac{82}{10} = 8,2. \end{aligned}$$

Egerde tosınnanlı shamanıń geybir ólshem (máselen, santimetr)ge iye bolsa, onda onıń ortashası  $\bar{X}$  hám ortashasınan shetleniw  $X - \bar{X}$  hám  $X$  muǵdar menen birdey ólshem (santimetr)ge iye. Shetleniwlerdiń kvadratı hám dispersiyası bolsa,  $X$  muǵdar ólsheminiń kvadratı (kvadrat santimetr) ólshemine iye. Ortashadan shetleniwdi bahalaw ushın  $X$  tosınnanlı shama menen birdey ólshemge iye bolǵan ólshemnen paydalanıw qolaylı. Sonıń ushın, dispersiyadan alınǵan kvadrat koren, yaǵnıy  $\sqrt{D}$  nıń mánislerinen paydalanıladı.

Dispersiyadan alınǵan kvadrat koren *ortasha kvadrat shetleniw* delinedi hám  $\sigma$  menen belgilenedi, yaǵnıy  $\sigma = \sqrt{D}$ .

Máselen, 4-kestedegi tosınnanlı shamanıń dispersiyası  $D=8,2$  ekenligin esaplağan edik. Endi dispersiyanıń usı mánisinen kalkulator járdeminde kvadrat korendi alsaq, ortasha kvadrat shetleniwın payda etemiz:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{8,2} \approx 2,86.$$

Dispersiya hám ortasha kvadrat shetleniwdi statistikada tosınnanlı shama mánisleriniń ortasha mánisi átirapında jayıluwınıń ólshemleri dep te aytadı.



### Shuníqlar

- 488.** Tosinnanlı shamalar  $X$  mánisleriniń bas toplamdaǵı tómendegi bólistirilwi kestege keltirilgen:

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $X$ | 8  | 9  | 11 | 15 | 16 |
| $M$ | 21 | 49 | 70 | 35 | 14 |

Berilgen bas toplam ushın tómendegilerdiń qaysıları reprezentativ tańlanba boladı:

- 1) 

|     |   |   |    |    |    |
|-----|---|---|----|----|----|
| $X$ | 8 | 9 | 11 | 15 | 16 |
| $M$ | 3 | 7 | 10 | 5  | 4  |
- 2) 

|     |   |   |    |    |
|-----|---|---|----|----|
| $X$ | 8 | 9 | 15 | 16 |
| $M$ | 3 | 7 | 5  | 2  |
- 3) 

|     |   |   |    |    |    |
|-----|---|---|----|----|----|
| $X$ | 8 | 9 | 11 | 15 | 16 |
| $M$ | 3 | 7 | 10 | 5  | 2  |
- 4) 

|     |   |   |    |    |    |
|-----|---|---|----|----|----|
| $X$ | 8 | 9 | 11 | 15 | 16 |
| $M$ | 3 | 7 | 9  | 5  | 2  |

- 489.** Tańlanbanıń modasını tabıń:

- 1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
- 2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
- 3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
- 4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

- 490.** Tańlanbanıń medianasını tabıń:

- 1) 18, 13, 35, 19, 7;
- 2) 25, 16, 14, 21, 22;
- 3) 5, 2, 9, 14, 11;
- 4) 16, 7, 13, 9, 15.

- 491.** Tańlanbanıń keńligin tabıń:

- 1) 18, -4, 16, -3, 11, 5, 4, -5, 1, 3;
- 2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

- 492.** Tańlanbanıń ortashasını tabıń:

- 1) 34, -10, 23, -18;
- 2) -3, 6, -19, -12, 1;
- 3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0, 7, 0, 6, 0, 4;
- 4) 2, 2, 2, 3, 2, 2, 1, 8, 1, 8, 2, 3.

**493.** Tañlanbanıń modası, medianası hám ortashasın tabıń:

- 1) 4, -3, 2, 0, 3, -2;    2) 6, 5, -2, 4, -5, 0.

**494.** Tóمندegi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen.  $X$  tosınnanlı shama mánisleri tañlanbasınıń arifmetikalıq ortasın tabıń:

1) 

|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $X$ | -3 | 0 | 1 | 4 |
| $M$ | 4  | 6 | 5 | 1 |

2) 

|     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $X$ | -3 | 1 | 5 |
| $M$ | 5  | 6 | 3 |

3) 

|     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $X$ | -5 | 2 | 3 |
| $M$ | 3  | 6 | 2 |

4) 

|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $X$ | -2 | 1 | 2 | 3 |
| $M$ | 5  | 4 | 3 | 2 |

**495.** Tóمندegi kestede itimallıqları boyınsha bólistiriliwi berilgen.  $X$  tosınnanlı shama mánisleriniń matematikalıq kútilmesin tabıń:

1) 

|     |                |                |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | -4             | -2             | 0              | 1              | 3              |
| $P$ | $\frac{3}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{11}$ |

2) 

|     |                |                |                |                |                |                |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $X$ | -3             | -2             | 0              | 1              | 2              | 4              |
| $P$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

**496.** Tañlanbanıń dispersiyasın tabıń.

- 1) 9 cm, 11 cm, 8 cm, 10 cm;    2) 18 kg, 16 kg, 15 kg, 19 kg;  
3) 8 s, 11 s, 8 s, 9 s, 9s;    4) 1 m, 9 m, 4 m, 8 m, 8 m.

**497.** Tóمندegi kestede jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen.  $X$  tosınnanlı shama mánisleri toplamınıń dispersiyasın tabıń.

1) 

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $M$ | 2 | 3 | 3 | 2 |

2) 

|     |    |    |   |   |   |   |
|-----|----|----|---|---|---|---|
| $X$ | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $M$ | 1  | 3  | 2 | 1 | 2 | 1 |

**498.** Tañlanba elementleriniń ortasha mánisinen ortashadan kvadrat shetleniwin esaplań:

- 1) 4 g, 5 g, 8 g, 3 g, 5 g;  
2) 9 cm, 12 cm, 7 cm, 10 cm, 12 cm.

**499.** Jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen  $X$  tosınnanlı shamanıń ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

1) 

|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $X$ | -1 | 2 | 3 | 5 |
| $M$ | 3  | 2 | 2 | 1 |

2) 

|     |    |    |   |   |
|-----|----|----|---|---|
| $X$ | -4 | -2 | 1 | 4 |
| $M$ | 1  | 4  | 3 | 2 |

### *V bapqa tiyisli shunig'lar*

**500.** (Awizeki). Tóمندegi tájriybede júz beriwi múmkin bolğan barlıq elementar hádiyselerdi aytn: 1) dusmalıy túrde jıldıǵı aylar atı aytiladı; 2) eki tiyin taslanıp, túsip atırğan tárepleri baqlanadı; 3) geybir 50 den kishi ápiwayı san aytiladı; 4) tawekel túrde eki tańbalı 3 ke eseli san aytiladı.

**501.** Qutıda 4 qara, 5 qızıl, 6 kók shar bar. Tawekel qutıdan bir shar alındı. Alınğan shar: 1)qara; 2) qızıl; 3) kók; 4) qara emes; 5) qızıl emes; 6) kók emes; 7) jasıl; 8) yaki qara, yaki qızıl, yaki kók bolıwınıń itimallıǵın tabıń.

**502.** Táwekel 1 den 50 ge shekem bolğan natural san aytildı. Bul sannıń: 1) 7; 2) 7 emes; 3) 7 ge eseli; 4) 10 ǵa eseli; 5) ápiwayı san emes; 6) 30 dan úlken emes ekenliginiń itimallıǵın anıqlań.

**503.** Stolǵa kubik penen tiyin taslanbaqta. Bunda 1) kubikte 5, tiyin cıfrlı tárepi menen; 2) kubikte shıqqan san ápiwayı, tiyin gerb tárepi menen túsiw itimallıǵın tabıń.

Tańlanbanıń keńligi, modası, medianası hám ortashasın tabıń (**504–507**):

**504.** 1) 2, 6, 6, 9, 11;  
2) 4, 10, 13, 13, 19.

**505.** 1) -7, -7, -4, -4, 1, 3;  
2) -3, -3, 1, 3, 10, 10.

**506.** 1) 0, 13, -5, -6, 14, -1, 11, -1, -8;  
2) 5, -9, 14, 9, -5, -2, 0, 14, -5.

**507.** 1) -4, -14, 13, -6, 9, 14, 0, -6;  
2) 15, -3, -9, 9, 13, -7, -3, 10.

**508.** Tańlanbanıń disperciyası hám ortasha kvadrat shetleniw anıqlań:

|                     |                      |
|---------------------|----------------------|
| 1) 6, 11, 8, 9;     | 2) 9, 12, 8, 14;     |
| 3) 6, 3, 5, 4, 4;   | 4) 4, 3, 2, 2, 6;    |
| 5) 1, -2, 2, -3, 4; | 6) -3, 3, -4, -2, 5. |

**509.** Jiyilikleri boyınsha bólistiriliwi berilgen  $Z$  tosınnanlı shamanıń dispersciyası hám ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

1) 

|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $Z$ | -1 | 0 | 2 | 4 |
| $M$ | 2  | 1 | 3 | 1 |

2) 

|     |    |   |   |   |
|-----|----|---|---|---|
| $Z$ | -2 | 1 | 4 | 5 |
| $M$ | 1  | 2 | 3 | 1 |

**510.** Tańlanbalar dispersciyaların salıstırın:

1) 4, 5, 7, 5, 9 hám 6, 9, 7, 8; 2) -2, 2, 3 hám -3, -1, 1, 3, 4.

**511.** Itimallıq boyınsha bólingen kestesi:

1) 

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -2  | -1  | 2   | 3   |
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

2) 

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -3  | -2  | 0   | 1   | 3   |
| $P$ | 0,2 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

menen berilgen  $X$  tosınnanlı shamanıń matematikalıq kútilmesin tabıń.

### *V bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları*

**1.** Birdey kartochkalarǵa 1 den 15 ke shekem sanlar jazıldı (hárbir kartochkaǵa birewden san jazıldı). Kartoshkalar stolǵa terisi menen qoyıldı hám aralastırıldı. Tosınnan alınǵan kartochkadaǵı sannıń ápiwayı san bolıwı itimallıǵın tabıń.

A)  $\frac{2}{5}$ ; B)  $\frac{1}{5}$ ; C)  $\frac{7}{15}$ ; D)  $\frac{3}{5}$ .

**2.** Qutıda 3 aq hám 7 qara shar bar. Olardan biri tawekel saylanıp qutıdan alındı. Alınǵan shardıń aq bolıw itimallıǵın tabıń.

A) 0,5; B) 0,7; C) 0,3 D) 0,1.

**3.** Klastaǵı 27 oqıwshıdan 15 i ul bala. Klasqa bir ul bala hám eki qız bala kelip qosıldı. Bunda ul balalar sanı –  $X$  tosınnanlı shamanıń salıstırmalı jiyiligi qanshaǵa ózgeredi?

A)  $\frac{1}{45}$  ge kóbeydi; B)  $\frac{1}{45}$  ge kemeydi;  
C)  $\frac{2}{45}$  ge kóbeydi; D)  $\frac{2}{45}$  ge kemeydi.

4. Tosinnanli shama mánisleri tańlanbasınıń modası menen medianasınıń qosındısıń tabıń: 10, 4, 2, 7, -3, 6, 10;  
A) 14; B) 17; C) 16; D) 13 .
5. Tosinnanli shama mánisleri tańlanbasınıń modası menen medianasınıń kóbeymesin tabıń: 2, 0, 1, 4, -1, 2.  
A) 2; B) 3; C) 0; D) 4.
6. Tóমende jiyilikleri boyınsha bólistiliwi berilgen kesteden X tosinnanli shama tańlanbasınıń oortashasın tabıń:

|   |    |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|
| X | -1 | 0 | 1 | 3 | 5 |
| M | 2  | 1 | 3 | 1 | 2 |

- A)  $1\frac{5}{9}$ ; B)  $1\frac{4}{9}$ ; C)  $1\frac{1}{9}$ ; D) 1.
7. X tosinnanli shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiliwiniń matematikalıq kútilmesin tabıń:

|  |               |               |               |               |               |
|--|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
|  | -1            | 2             | 3             | 5             | 7             |
|  | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

- A)  $\frac{25}{9}$ ; B)  $\frac{26}{9}$ ; C)  $\frac{29}{9}$ ; D)  $\frac{30}{9}$ .
8. X tosinnanli shamanıń jiyilikleri boyınsha bólistiliwiniń ortasha kvadrat shetleniwin tabıń:

|   |    |   |   |   |   |
|---|----|---|---|---|---|
| X | -1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| M | 1  | 3 | 2 | 2 | 1 |

- A) 1; B) 1,5; C) 2; D) 2,5.
9. X tosinnanli shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiliwine qaray dispersiyasın tabıń:

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 2   | 3   | 5   | 7   |
| P | 0,1 | 0,5 | 0,3 | 0,1 |

- A) 2,9; B) 2,09; C) 2,99; D) 0,29.

## **Ámeliy-usınılgan hám pánlerara baylanışlı máseleler**

**1-másele.** Utıslı loteriyada 5000 p.b. (pul birligi)de avtomobil, hár biri 250 p.b. nen 4 televizor, hár biri 200 p.b. nen 5 uyalı telefonı oynalmaqta. Barlıgı bolıp, 7 p.b. nen 1000 bilet satıwǵa shıǵarılǵan. Bir bilet satıp alǵan loteriya qatnasıwshısınıń utısınıń bólistiriliw keskesin dúziń hám matematikalıq kútilmesin esaplań.

△  $X$  – bir biletke taza túsken utıs bolsa, onda onıń mánisi:

bir de utıs shıqpasa,  $0 - 7 = -7$ ;

uyalı telefonı shıqsa,  $200 - 7 = 193$ ;

televizor utqan bolsa,  $250 - 7 = 243$ ;

avtomobil utqan bolsa,  $5000 - 7 = 4993$

pul birliginde boladı. 1000 biletten 990 na utıs shıqpawı hám utıslar sanı  $5 + 4 + 1 = 10$  ekenligin esapqa alıp, itimallıqtıń klassikalıq anıqlaması boyınsha tómendegige iye bolamız:

$X$  – tosınnanlı shama

$$-7 \text{ mánisti qabıl etiw itimallıgı } \frac{990}{1000} = 0,990;$$

$$193 \text{ mánisti qabıl etiw itimallıgı } \frac{4}{1000} = 0,004;$$

$$243 \text{ mánisti qabıl etiw itimallıgı } \frac{1}{1000} = 0,001.$$

$$4993 \text{ mánisti qabıl etiw itimallıgı } \frac{5}{1000} = 0,005;$$

Demek,  $X$  – tosınnanlı shamanıń itimallıqlar boyınsha bólistiriliw keskesi tómendegishe boladı:

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $X$ | -7    | 193   | 243   | 4993  |
| $P$ | 0,990 | 0,005 | 0,004 | 0,001 |

Bólistiriliw keskesi tiykarında matematikalıq kútilmeni esaplawǵa boladı:

$$E = (-7) \cdot 0,990 + 193 \cdot 0,005 + 243 \cdot 0,004 + 4993 \cdot 0,001 = 0,$$

yaǵnıy, ortasha utis nolge teń. Payda bolǵan nátiyje, loteriya biletlerin satıwdan túsken barlıq pul utıslarǵa ketiwin bildiredi.

**Juwabı:** bólistiriliw kestesi:

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $X$ | -7    | 193   | 243   | 4993  |
| $P$ | 0,990 | 0,005 | 0,004 | 0,001 |

hám matematikalıq kútilmesi  $E = 0$ . ▲

**2-másele.** Bir firmaǵa dilmashlıq ornına eki kandidat háreket etpekte. Olarǵa birdey sınav múddeti belgilendi hám 125 betlik birdey tekstti awdarmalawǵa berildi. Olardıń hár kúni teksttiń neshe betin awdarmalaǵanı tómendegi kestede berilgen:

| Hápte kúnleri | Kúnlik awdarmalanǵan betler sanı |                    |
|---------------|----------------------------------|--------------------|
|               | 1-kandidat ( $X$ )               | 2-kandidat ( $Y$ ) |
| Dúyshembi     | 24                               | 25                 |
| Seyshembi     | 26                               | 31                 |
| Shárshembi    | 25                               | 27                 |
| Piyshembi     | 23                               | 22                 |
| Juma          | 27                               | 20                 |

Jumıs beriwshi kestedegi maǵlıwmatlardı talqılaǵanda, kandidatlardıń qaysı birin jumısqa alıwdı maqul kóredi?

▲ Kandidattıń hár biri 5 kúnde 125 betten awdarma isledi, demek, eki kandidatıń da ortasha miynet ónimdarlıǵı birdey:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (bet/kún)}.$$

Eki tosınnanlı shama  $X$  hám  $Y$  tiń de modası joq, medianaları bolsa birdey (25 hám 25). Kandidatlardan qaysı birin jumısqa alıw maqsetke muwapıq eken? Bul jaǵdayda miynet ónimdarlıǵınıń *turaqlılıǵın* salıstırıw arqalı ámelge asırıwǵa boladı. Bunı bolsa shetleniwlerdegi kvadratlar qosındıların yaki dispersiyalardı salıstırıw arqalı ámelge asırıw múmkin:

| Hápte kúnleri | Tosinnanlı shamanıń mánisi |     | ortashadan shetleniwi<br>$\bar{X} = \bar{Y} = 25$ |               | Shetleniw kvadratlari |                   |
|---------------|----------------------------|-----|---------------------------------------------------|---------------|-----------------------|-------------------|
|               | $X$                        | $Y$ | $X - \bar{X}$                                     | $Y - \bar{Y}$ | $(X - \bar{X})^2$     | $(Y - \bar{Y})^2$ |
| Dúyshembi     | 24                         | 25  | -1                                                | 0             | 1                     | 0                 |
| Seyshembi     | 26                         | 31  | 1                                                 | 6             | 1                     | 36                |
| Shárshembi    | 25                         | 27  | 0                                                 | 2             | 0                     | 4                 |
| Piyshembi     | 23                         | 22  | -2                                                | -3            | 4                     | 9                 |
| Juma          | 27                         | 20  | 2                                                 | -5            | 4                     | 25                |
| Jámi          | 125                        | 125 | 0                                                 | 0             | 10                    | 74                |

Kórinip turǵanıday, shetleniw kvadratlarınıń qosındısı  $X$  ushın 10,  $Y$  ushın 74, yaki dispersciyanı esaplasaq:

$$D(X) = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_5 - \bar{X})^2}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

$$D(Y) = \frac{(Y_1 - \bar{Y})^2 + (Y_2 - \bar{Y})^2 + \dots + (Y_5 - \bar{Y})^2}{5} = \frac{74}{5} = 14,8.$$

Demek,  $X$  tosinnanlı shamanıń dispersciyası  $Y$  tosinnanlı shamanıń dispersciyasınan kishi. Ámeliy jaqtan bul nátiyje, ekinshi kandidatıń miynet ónimdarlıǵı turaqlı emesligin kórsetedi: bazı bir kúnleri ol imkaniyatlarınan tolıq paydalanbastan isledi, basqa kúnleri bolsa imkaniyatlar dárejesinen kóbirek paydalanıp islewge háreket etti. Bul bolsa, álbette, ornlanıp atırǵan jumıstıń sapasına da keri tásirin tiygiziwi múmkin. Kórinip turǵanıday, nátiyje jumıs beriwshi birinshi kandidatı jumısqa alıwdı maqul kóredi.

**Juwabı:** jumıs beriwshi birinshi kandidatı jumısqa alıwdı maqul kóredi. ▲

**3-másele.** Eki mergen nıshanaǵa oq jaydan oq atqanda alatuǵın ochkoları –  $X$  hám  $Y$  tosinnanlı shamalardıń itimallıqları boyınsha bólistiriliw kestesinen belgili:

1-mergen ushın

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $X$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| $P$ | 0,15 | 0,11 | 0,04 | 0,05 | 0,04 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,05 | 0,12 | 0,20 |

2-mergen ushın

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Y$ | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| $P$ | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,09 | 0,11 | 0,24 | 0,21 | 0,10 | 0,10 | 0,04 | 0,02 |

Mergenlerdiń qaysı biri oq jaydan nıshanaǵa jaqsıraq atadı?



△ Мergenlerdiń qaysı biriniń nıshanaǵa tiyetuǵın ortasha ochkosı kóplew bolsa, sonı jaqsı gózlewshi deymiz. Sonıń ushın,  $X$  hám  $Y$  kútilmegen matematikalıq kútilmesin esaplaymız:

$$E(X) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,10 + 2 \cdot 0,04 + \dots + 9 \cdot 0,12 + 10 \cdot 0,20 = 5,36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,05 + \dots + 9 \cdot 0,04 + 10 \cdot 0,02 = 5,36,$$

yaǵnıy, eki mergenniń de nıshanaǵa tiygizgen ochkoları ortashası birdey.

Endi  $X$  hám  $Y$  lardıń dispersiya hám ortasha kvadrat shetleniwlerin esaplap kóreyik:

$$D(X) = (0 - 5,36)^2 \cdot 0,15 + (1 - 5,36)^2 \cdot 0,11 + \dots + (10 - 5,36)^2 \cdot 0,20 = 13,6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3,69;$$

$$D(Y) = (0 - 5,36)^2 \cdot 0,01 + (1 - 5,36)^2 \cdot 0,03 + \dots + (10 - 5,36)^2 \cdot 0,02 = 4,17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2,04.$$

Solay etip, nıshanaǵa tiyetuǵın ochkolardıń ortasha mánisleri teń  $E(X) = E(Y)$  bolsa da, ekinshi mergen ushın dispersiya birinshi mergenge qaraǵanda kishilew:  $D(Y) < D(X)$ , yaǵnıy ekinshi mergenniń nıshanaǵa tiyetuǵın ochkolarınıń “oray” ( $E(Y) = 5,36$ ) átirapındaǵı jayılması, birinshi mergendikine qaraǵanda kishilew. Basqasha aytqanda, onıń nátiyjeleri birinshi mergenniń nátiyjelerine qaraǵanda 5,36 dan uzaqlawǵa ketip qalmaǵan. Demek, ol birinshi mergenge qaraǵanda joqarılaw nátiyjelerge erisiwi ushın nıshananı jaqsılap gózlep,  $E(Y)$  di oń tárepke (joqarılawǵa) kóshiriwge háreket etiwı kerek.

**Juwabı:** mergenlerdiń birinshisi nıshanaǵa jaqsılaw atadı. ▲

**4- másele.** Jarısta futbol komandası oynshılarınıń qarsılas komanda dárwazasına kirgizgen toplarınıń sanı  $X$  tiń jiyilikler boyınsha bólistiriliwi berilgen:

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $Y$ | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Barlıq kirgizilgen toplar sanınıń ortasha mánisinen ortasha kvadrat shetleniwin esaplań.

△ Aldın ortashanı esaplaymız:

$$\bar{X} = \frac{X_1M_1 + X_2M_2 + \dots + X_5M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 1 + 1} = \frac{0 + 3 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Keyingi esaplaw nátiyjeleri tómendegi kestege keltirilgen:

|                           |      |      |      |      |      |
|---------------------------|------|------|------|------|------|
| $X$                       | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    |
| $M$                       | 3    | 3    | 2    | 1    | 1    |
| $X - \bar{X}$             | -1,4 | -0,4 | 0,6  | 1,6  | 2,6  |
| $(X - \bar{X})^2$         | 1,96 | 0,16 | 0,36 | 2,56 | 6,76 |
| $(X - \bar{X})^2 \cdot M$ | 5,88 | 0,48 | 0,72 | 2,56 | 6,76 |

Onda, dispersiya hám ortasha kvadrat shetleniw tómendegishe esaplanadı:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \dots + (X_5 - \bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \dots + M_5} = \frac{5,88 + 0,48 + 0,72 + 2,56 + 6,76}{10} = \frac{16,4}{10} = 1,64,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$$

**Juwabı:**  $\sigma \approx 1,28$ . ▲

### Shıngıwlar

1. Kóp jıllıq statistikalıq maǵlıwmatlar tiykarında 4 perzentli shańaraqlardaǵı ul balalar sanı  $-X$  tosınnanlıq shamanıń bólistiriliw nızamı tómendegi kestege berilgen bolsa, onıń matermatikalıq kútilmesi hám dispersiyasın esaplań.

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|---|---|---|---|---|

|     |       |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P$ | 0,055 | 0,235 | 0,375 | 0,265 | 0,070 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|

2. Eki gimnastikashının sport jarışındaǵı shıǵıwı 9 jyuriydiń 10 ballıq sistemada qoyǵan balları tómendegi kestede berilgen:

| Gimnastikashının nomeri | Jyuriydiń nomeri hám qoyǵan balları |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------------------------|-------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|                         | 1                                   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| 1                       | 8,7                                 | 8,8 | 8,9 | 8,9 | 8,7 | 9,2 | 8,9 | 9,6 | 8,8 |
| 2                       | 9,0                                 | 9,1 | 9,0 | 8,8 | 8,5 | 8,9 | 9,0 | 9,0 | 9,1 |

Hárbir gimnastikashi alǵan balların, sáykes túrde,  $X$  hám  $Y$  tosınnanlı shamalar dep qaralsa, olardıń matematikalıq kútilmesi, dispersiyası hám ortasha kvadrat shetleniwlerin esaplań hám salıstırıń.

3. Qarıydarlardıń ayaq kiyimlerge bolǵan talabın úyrenip atırǵan talaba, eki dúkanda hár kúni satılǵan ayaq kiyimler sanın 25 kún dawamında jazıp bardı. Egerde  $X_1$  birinshi dúkanda,  $X_2$  ekinshi dúkanda satılǵan ayaq kiyimler sanı bolsa, onda tómendegi kestelerde keltirilgen maǵlıwmatlar boyınsha  $X_1$  hám  $X_2$  tosınnanlı shamalardıń matematikalıq kútilmesi hám ortasha kvadrat shetleniwini esaplań. Alınǵan nátiyjelerdi salıstırıp, dúkanlardadı ayaq kiyim satılıwın salıstırıń.

|       |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $Y$   | 2 | 7 | 4 | 7 | 2 | 3 |

|       |   |   |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| $X_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $Y$   | 3 | 5 | 4 | 7 | 5 | 1 |

4. Cilindr kórinisindegi polattan islengen ǵolashalar partiyasınan alınǵan jigirma ǵolasha ultanları  $d$  diametrleri eki túrli ólshew ásbabları menen ólshendi. Birinshi ólshew ásbabında (1 mm ge shekem anıqlıqta) alınǵan nátiyjeler sheptegi, ekinshisinde alınǵan nátiyjeler bolsa onıdaǵı kestede keltirilgen:

|       |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|
| $d_1$ | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 |
| $M_1$ | 2  | 4  | 8  | 4  | 2  |

|       |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| $d_2$ | 59 | 60 | 61 | 62 |
| $M_2$ | 4  | 10 | 4  | 2  |

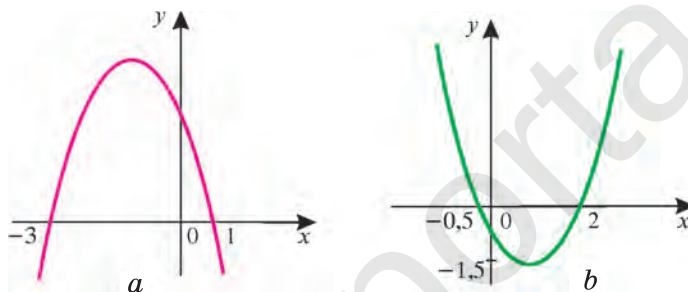
$d_1$  hám  $d_2$  tosınnanlı shamanıń dispersiyaların salıstırıń.

## 9 KLASS “ALGEBRA” KURSÍN TÁKIRARLAW USHÍN SHÍNÍGÍWLAR

**512.** Funkciyanıń grafigin jasań:

1)  $y = x^2 + 6x - 9$ ;      2)  $y = x^2 - \frac{7}{2}$ ;      3)  $y = x^2 - 12x + 4$ ;  
 4)  $y = x^2 + 3x - 1$ ;      5)  $y = x^2 + x$ ;      6)  $y = x^2 - x$ .

**513.** (Awızeki.)  $y = ax^2 + bx + c$  funkciya grafiginen paydalanıp (93-súwret), onıń qásiyetlerin anıqlań.



93- súwret.

**514.** Funkciyanıń grafigin jasań hám qásiyetlerin anıqlań:

1)  $y = -2x^2 - 8x - 8$ ;      2)  $y = 3x^2 + 12x + 16$ ;  
 3)  $y = 2x^2 - 12x + 19$ ;      4)  $y = 3 + 2x - x^2$ .

**515.** Funkciyanıń grafigin bir koordinata tegisliginde jasań:

1)  $y = \frac{1}{3}x^2$  hám  $y = -\frac{1}{3}x^2$ ;      2)  $y = 3x^2$  hám  $y = 3x^2 - 2$ .

Teńsizlikti sheshiń (**516–519**):

**516.** 1)  $(x-5)(x+3) > 0$ ;      2)  $(x+15)(x+4) < 0$ .

**517.** 1)  $x^2 + 3x > 0$ ;      2)  $x^2 - x\sqrt{5} < 0$ ;      3)  $x^2 - 16 \leq 0$ ;  
 4)  $x^2 - 3 > 0$ ;      5)  $x^2 - 4x \leq 0$ ;      6)  $x^2 - 7 \geq 0$ .

**518.** 1)  $x^2 - 8x + 7 > 0$ ;      2)  $x^2 + 3x - 54 < 0$ ;  
 3)  $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$ ;      4)  $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$ .

- 519.** 1)  $x^2 - 6x + 9 > 0$ ; 2)  $x^2 - 24x + 144 \leq 0$ ;  
 3)  $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 < 0$ ; 4)  $\frac{1}{3}x^2 + 4x + 12 \geq 0$ .

Teńsizlikti intervallar usılı menen sheshiń (**520–522**):

- 520.** 1)  $(x+3)(x-4) > 0$ ; 2)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+0,7) < 0$ ;

3)  $(x-2,3)(x+3,7) < 0$ ; 4)  $(x+2)(x-1) \leq 0$ .

- 521.** 1)  $(x+2)(x-1) \geq 0$ ; 2)  $(x+2)(x-1)^2 \leq 0$ ;

3)  $(x+2)(x-1)^2 > 0$ ; 4)  $(2-x)(x+3x)^2 \geq 0$ .

- 522.** 1)  $\frac{3-x}{2+x} \geq 0$ ; 2)  $\frac{0,5+x}{x-2} \leq 0$ ; 3)  $\frac{(x-1)(x+2)}{x} < 0$ ;

- 523.** Trapeciyanıń maydanı  $19,22 \text{ cm}^2$  den artıq. Onıń ortańǵı sızıǵı biyikliginen eki ese úlken. Trapeciyanıń orta sızıǵın hám biyikligin tabıń.

- 524.** Parallelogrammnıń tárepi, usı túrepke túsirilgen biyiklikten  $2 \text{ cm}$  ge artıq. Eger parallelogrammnıń maydanı  $15 \text{ cm}^2$  tan artıq bolsa, usı tárepiniń uzınlıǵın tabıń.

- 525.** Teńsizlikti intervallar usılı menen sheshiń:

1)  $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4) > 0$ ; 2)  $\frac{3x-1}{3x+1} + \frac{x-3}{x+3} \geq 2$ .

- 526.** Eger  $x^2 + px + q$  kvadrat úsh aǵzalı  $x=0$  bolǵanda  $-14$  ke teń mánisti,  $x=-2$  bolǵanda  $-20$  ǵa teń mánisti qabıl etse, usı kvadrat úsh aǵzalınıń  $p$  hám  $q$  koefficientlerin tabıń.

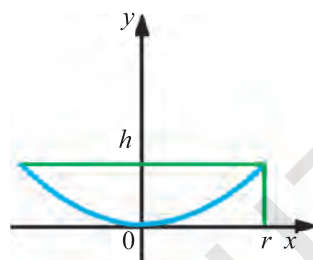
- 527.** Eger  $y = x^2 + px + q$  parabola:

- 1) abscissalar kósherin  $x = -\frac{1}{2}$  hám  $x = -\frac{1}{2}$  noqatlarında kesip ótse;  
 2) abscissalar kósheri menen  $x = -7$  noqatta urınsa;  
 3) abscissalar kósherin  $x=2$  ordinatalar kósherin  $y=-1$  noqatında kesip ótse,  $p-q$  di tabıń.

- 528.** Eger parabola abscissalar kósherin 5 noqatta kesip ótse hám onıń tóbesi  $\left(2\frac{3}{4}; 10\frac{1}{8}\right)$  noqatında bolsa, usı parabolanıń teńlemesin jazıń.

**529.** Teleskoptin (reflektordin) shag'ilastirish aynasi kósher kesimi boyinsha parabola formasina iye (94-súwret). Usi parabolaniń teńlemesin jazıń.

**530.** Eger  $y = ax^2 + bx + c$  kvadrat funkciyanıń grafigi:  
1)  $A(-1; 0)$ ,  $B(3; 0)$  hám  $C(0; -6)$  noqatlarınan ótse;  
2)  $K(-2; 0)$ ,  $L(1; 0)$ ,  $M(0; 2)$  noqatlarınan ótse, onıń koefficientlerin tabıń.



94- súwret.

**531.** Qálegen teris emes  $a$  hám  $b$  sanlar ushın

1)  $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ ;                      2)  $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$   
teńsizlikniń duris bolıwın dálilleń.

**532.** Funkciyanıń grafigin jasań:

1)  $y = \sqrt{x^2}$ ;                                      2)  $y = |x-1|$ ;  
3)  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ ;                      4)  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ .

**533.** Teńlemenin haqıyqiy korenlerin tabıń:

1)  $x^2 - |x| - 2 = 0$ ;                      2)  $x^2 - 4|x| + 3 = 0$ ;                      3)  $|x^2 - x| = 2$ ;  
4)  $|x^2 + x| = 1$ ;                      5)  $|x^2 - 2| = 2$ ;                      6)  $|x^2 - 26| = 10$ .

**534.** Sanlardı koren belgisi astınan shıǵarın:

1)  $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$ ;                      2)  $\sqrt[5]{5\frac{4}{9}}$ ;                      3)  $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$ ,  $a \neq 0$ ;                      4)  $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$ ,  $y > 0$ .

**535.** Ápiwayılastırın:

1)  $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$ ;                      2)  $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$ ;  
3)  $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ ;                      4)  $7\sqrt[4]{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0,5\sqrt{343}$ .

**536.** Anıqlamalardıń mánislerin salıstırın:

1)  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$  hám  $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$ ;                      2)  $(2\sqrt{0,5})^{0,3}$  hám  $(2\sqrt{0,5})^{0,37}$ .

**537.** Anlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\frac{\sqrt[6]{a^3\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$ ;                      2)  $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$ ;                      3)  $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$ ;                      4)  $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$ .

**538.** Koren belgisi astınan kóbeytiwshini shıǵarın:

1)  $\sqrt{9a^2b}$ , bunda  $a < 0, b > 0$ ; 2)  $\sqrt{25a^2b^3}$ , bunda  $a > 0, b > 0$ ;

**539.** Kóbeytiwshini koren belgisi astına alın:

1)  $x\sqrt{5}$ , bunda  $x \geq 0$ ; 2)  $x\sqrt{3}$ , bunda  $x < 0$ ;  
3)  $-a\sqrt{3}$ , bunda  $a \geq 0$ ; 4)  $-a\sqrt{5}$ , bunda  $a < 0$ .

**540.**  $y = -\frac{25}{x}$  funksiyanıń grafigine:

1)  $A(\sqrt{5}; -5\sqrt{5})$ ; 2)  $B(-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$ ; 3)  $C(0,1; 250)$

noqatı tiyisli bolıwı yaqı bolmaytuǵının anıqlań.

**541.**  $y = \sqrt{1-2x}$  funksiya grafigine: 1)  $C\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; 2)  $D\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ ;  $E(-4$ ;

3) noqatı tiyisli bolıwı yaqı bolmaytuǵının anıqlań.

**542.** Funkciyanıń grafigin jasań:

1)  $y = x^2 + 6x + 10$ ; 2)  $y = -x^2 - 7x - 6$ .

**543.**  $P(1; 0)$  noqatın: 1)  $A(0; 1)$ ; 2)  $B(0; -1)$ ; 3)  $C(-1; 0)$ ; 4)  $D(1; 0)$  noqatına ótkeretuǵın bir neshe burıw múyeshlerin kórsetiń.

**544.** Esaplań: 1)  $\frac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}}$ ; 2)  $\frac{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}}$ .

**545.** Sannıń oń yaqı teris ekenligin anıqlań:

1)  $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\sin\alpha\cos(\pi + \alpha)\operatorname{tg}\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

**546.** Berilgen:  $\sin\alpha = 0,6, \sin\beta = -0,28, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ .

Esaplań: 1)  $\cos(\alpha - \beta)$ ; 2)  $\sin(\alpha + \beta)$ ; 3)  $\cos(\alpha + \beta)$ .

**547.** Kóbeytiwshilerge jikleń:

1)  $\sin 2\alpha - 2\sin\alpha$ ; 2)  $\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}$ ;  
3)  $\cos\alpha - \sin 2\alpha$ ; 4)  $1 - \sin 2\alpha - \cos^2\alpha$ .

**548.** Agar 1)  $\cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$  hám  $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$ ; 2)  $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{5}{13}$  hám  $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$  bolsa  $\sin\alpha, \cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha$  ı esaplań.

**549.** Eger

1)  $a_1 = 10, d = 6, n = 23$ ;      2)  $a_1 = 42, d = \frac{1}{2}, n = 12$ ;

3)  $a_1 = 0, d = -2, n = 7$ ;      4)  $a_1 = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}, n = 18$

bolsa, arifmetikaliq progressiyanin  $n$ - aǵzasin hám dáslepki  $n$  aǵzasinin qosindisin esaplań.

**550.** Eger  $a_1 = 2, a_n = 120, n = 20$  bolsa, arifmetikaliq progressiyanin dáslepki  $n$  aǵzasinin qosindisin tabıń.

**551.**  $n$ -aǵzası  $a_n = \frac{1-2n}{3}$  formula menen berilgen izbe-izlik arifmetikaliq progressiya bolatuǵının esaplań.

**552.** Eger geometriyalıq progressiya ushın:

1)  $b_1 = 5$  hám  $q = -10$  bolsa,  $b_4$  ti tabıń;

2)  $b_4 = -5000$  hám  $q = -10$  bolsa,  $b_1$  di tabıń.

**553.** Eger:

1)  $b_1 = 3, q = 2, n = 5$ ;

2)  $b_1 = 1, q = 5, n = 4$  bolsa, geometriyalıq progressiyanin  $n$ -aǵzasin hám dáslepki  $n$  aǵzasinin qosindisin esaplań.

**554.** Eger: 1)  $b_1 = \frac{1}{4}, q = 2, n = 6$ ;    2)  $b_1 = \frac{1}{5}, q = -5, n = 5$  bolsa, geometriyalıq progressiyanin dáslepki  $n$  aǵzasinin qosindisin tabıń.

**555.** Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanin qosindisin tabıń.

1)  $6, 4, \frac{8}{3}, \dots$ ;    2)  $5, -1, \frac{1}{5}, \dots$ ;    3)  $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots$ .

**556.** Koren belgisi astınan kóbeyiwshini shıǵarıń:

1)  $\sqrt{20a^4b}$ , bunda  $a < 0, b > 0$ ;

2)  $\sqrt{(a-1)^2}$ , bunda  $a < 1$ ;

**557.** Ańlatpanı ápiwayılastırın:

1)  $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$ , bunda  $a > b$ ;

2)  $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$ , bunda  $b > a$ .

**558.** Bólimindegi irracionallıqtı joq etiń:

1)  $\frac{1}{2 + \sqrt[3]{3}}$ ;    2)  $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{b}}$ ;    3)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ ;    4)  $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{5}}$ .



**559.** Аñлатпанı áпиwayılastırın:

$$1) \frac{\sqrt{ab} \sqrt[4]{a}}{(a+2) \sqrt[4]{a^{-1}b^2}} - \frac{a^2+4}{a^2-4}; \quad 2) \left( \frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}} \right) \cdot \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}.$$

**560.** Теñлемени sheshiñ:

$$1) \sqrt{x-2} = 4; \quad 2) \sqrt{x+3} = 8; \quad 3) \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-1}.$$

**561.** Аñлатпанı áпиwayılastırın:

$$1) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 2) \frac{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad 3) \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$$

$$4) (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2; \quad 5) (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

**562.** Теñлемени sheshiñ:

$$1) 1 - \cos x - 2 \sin \frac{x}{2} = 0; \quad 2) 1 + \cos 2x + 2 \cos x = 0.$$

**563.** Birdeylikti dálilleñ:

$$1) \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}; \quad 2) \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

**564.** Birdeylikti dálilleñ:

$$1) 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 2) 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

**565.** Arifmetikalıq progressiyada  $a_1 + a_5 = \frac{5}{3}$ ;  $a_3 a_4 = \frac{65}{72}$ . Progressiyanıñ dáslepki on jeti aǵzasınıñ qosındısı tabıñ.

**566.** Geometriyalıq progressiyada  $q = 3$ ,  $S_6 = 1820$  bolsa,  $b_1$  hám  $b_5$  ti tabıñ.

**567.** Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiyanıñ qosındısı  $\frac{8}{5}$  ge teñ, ekinshi aǵzası  $-\frac{1}{2}$  ge teñ. Úshinshi aǵzasın tabıñ.

Аñлатпанı áпиwayılastırın:

**568.** 1)  $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ ; 2)  $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ ; 3)  $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ ; 4)  $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ .

**569.** Eger: 1)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2,4$ ; 2)  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$  bolsa,  $\sin \alpha$  hám  $\cos \alpha$  nı esaplañ..

## JUWAPLAR

2. 2)  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ; 4)  $x$  tiñ berilgen funksiyanıń mánisi  $-5$  ke teń bolatúǵın haqıyqıy mánisleri joq.
3. 2)  $x_1 = 1\frac{3}{4}, x_2 = -1$ ; 4)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$ . 4. 2) 0; 4) 1. 5. 2) nolleri joq; 4)  $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$ ; 6) nolleri joq; 6. 2)  $p = 3, q = -4$ ; 4)  $p = -2, q = -15$ . 7.  $x_{1,2} = \pm 2$ . 9. B hám C. 12. 2)  $(\sqrt{5}; 5), (-\sqrt{5}; 5)$ ; 4)  $(0; 0), (2; 4)$ ; 6)  $(1; 1)$ . 13. 2) Awa; 14. 2) Awa; 4) yaq; 16. 1)  $x < -3, x > 3$ ; 2)  $-5 \leq x \leq 5$ ; 3)  $x \leq -4, x \geq 4$ ; 4)  $-6 < x < 6$ . 20. 2)  $(-3; -4,5), (2; -2)$ . 21. 2) awa; 4) yaq. 22. 1) ósiwshi; 2) kemeyiwshi; 3) ósiwshi; 4) ósiwshi; de, kemeyiwshi de bolmaydı. 23. 3 m/s<sup>2</sup>. 26. 2)  $(0; -5)$ ; 4)  $(\frac{1}{8}; \frac{1}{16})$ . 27. 2)  $x = -2$ ; 4)  $x = 2$ ; 6)  $x = \frac{3}{4}$ . 28. 2) Yoq; 4) yoq. 29. 2)  $(1; 0), (0,5; 0), (0; -1)$ ; 4)  $(0; 0), (\frac{4}{3}; 0)$ . 30.  $y = x^2 - 2x + 3$ . 32. 2)  $k = -10$ . 34. 1)  $y = 2(x - 3)^2$ ; 2)  $y = 2x^2 + 4$ ; 3)  $y = 2(x + 2)^2 - 1$ ; 4)  $y = 2(x - 1,5)^2 + 3,5$ . 35. 2)  $(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4})$ ; 4)  $(\frac{5}{2}; \frac{21}{4})$ . 36. 2)  $(1; 0), (-5; 0), (0; 10)$ ; 4)  $(0; 14)$ . 40. 7,5+7,5. 41. 5 hám 5. 42. Diywalǵa parallel tárepı 6 m; qalǵan tárepleri 3 m den. 43. Yaq. 44. 2)  $x = 1$  de  $y = -5$  eń kishi mánis; 4)  $x = 1$  de  $y = -2$  eń kishi mánis. 45. 1)  $a > 0, b > 0, c > 0$ ; 2)  $a < 0, b > 0, c < 0$ . 46. 1) 5 s den keyin eń úlken biyiklik 130 m ge teń; 2)  $(5 + \sqrt{26})s$ . 48. 2)  $3x^2 - x - 1 > 0$ ; 4)  $2x^2 + x - 5 < 0$ . 50. 2)  $3 < x < 11$ ; 4)  $x < -7, x > -1$ . 51. 2)  $x < -3, x > 3$ ; 4)  $x < 0, x > 2$ . 52. 2)  $-2 < x < 1$ ; 4)  $x < -3, x > 1$ ; 6)  $x < -1, x > \frac{1}{3}$ . 53. 2)  $x = \frac{1}{6}$ ; 4)  $x < -4, x > 2$ . 56. oń mánisleri  $x < -3, x > 2$  aralıqlarda, teris mánisler  $-3 < x < 2$  intervalda. 58. 2)  $x \leq -1, x \geq 4$ ; 4)  $-1 < x < 4$ . 59. 2)  $x < -\frac{1}{3}, x > 2$ ; 4)  $x \leq -0,25, x \geq 1$ . 60. 2)  $x = 7$ ; 4) sheshimleri joq. 61. 2) sheshimleri joq; 4) sheshimleri joq; 6)  $x$  – qálegen haqıyqıy san. 62. 2)  $x < -\sqrt{7}, x > \sqrt{7}$ ; 4)  $x < -2, x > 0$ . 64. 2)  $x < -\frac{5}{3}, x > \frac{5}{3}$ ; 4)  $-1 < x < 4$ ; 6)  $x$  – qálegen haqıyqıy san; 65. 2)  $x$  – qálegen haqıyqıy san, 4)  $x \neq \frac{1}{4}$ ; 6)  $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$ . 66. 2) sheshimleri joq; 4)  $-0,5 < x < 3$ . 67. 2)  $x = 1$ ; 4)  $x$  – qálegen haqıyqıy san. 69.  $-6 < r < 2$ . 71. 2)  $-5 < x < 8$ ; 4)  $x < -5, x > 2\frac{1}{2}$ . 72. 2)  $x < 0, x > 9$ ; 4)  $-3$

$x < 0$ ; 6)  $x < -1, x > 3$ . **73.** 2)  $-\frac{1}{2} < x < 0, x > \frac{1}{2}$ ; 4)  $-2 < x < 2, x > 5$ . **74.** 2)  $-7 < x < 7$ ;  
 4)  $-4 < x < 4, x > 4$ . **75.**  $-3 < x < 4$ ; 4)  $-3,5 \leq x < 7$ ; 6)  $-2 \leq x < -1, x \geq 3$ . **76.** 2)  $x < 0,5, x > 1$ ;  
 4)  $x < -\frac{2}{3}, 0 < x < \frac{1}{2}, x > \frac{2}{3}$ . **77.** 2)  $-4 < x < -2, x > 3$ ; 4)  $-3 \leq x \leq -1, 4 \leq x \leq 5$ . **78.** 2)  $x < -2$ ,  
 $2 < x < 6$ ; 4)  $x < -3, -1 \leq x < 2, x \geq 4$ . **79.** 2)  $-\sqrt{15} < x < -3, 0 < x < \sqrt{15}$ . **80.** 1)  $-8 < x < -1$ ; 2)  
 $x < -5, x > 2$ ; 3)  $-1 < x \leq -\frac{2}{5}$ . **81.** 2)  $x = 2$  da  $y = 1$ ;  $x = 0$  hám  $x = 4$  da  $y = 5$ ;  $x = -1$  va  $x = 5$  da  
 $y = 10$ ;  $x = -2$  va  $x = 6$  da  $y = 17$ . **82.** 1)  $y(-2) = -1, y(0) = -5, y\left(\frac{1}{2}\right) = -11, y(3) = 4$ ; 2)  $x = -\frac{1}{2}$  da  
 $y = -3$ ;  $x = -1$  da  $y = -2$ ;  $x = \frac{3}{2}$  da  $y = 13$ ;  $x = \frac{4}{3}$  da  $y = 19$ . **84.** 2)  $x \leq 2, x \geq 5$ ; 4)  $-2 \leq x < 3$ .  
**85.** 1)  $y(-3) = 3, y(-1) = 1, y(1) = -1, y(3) = 1$ ; 2)  $x = 2$  da  $y = -2$ ;  $x = 0$  hám  $x = 4$  da  $y = 0$ ;  $x = -2$   
 va  $x = 6$  da  $y = 2$ ;  $x = -4$  va  $x = 8$  da  $y = 4$ . **86.** 2)  $x \neq -1$ ; 5)  $-1 \leq x \leq 1, x \geq 4$ ; 6)  $-5 \leq x \leq 1, x > 2$ .  
**87.** 2) Awa; 4) awa. **93.** 2)  $x = 16$ ; 4)  $x = \frac{1}{16}$ ; 6)  $x = \frac{1}{243}$ . **95.** 2)  $x = 32$ ; 4)  $x = 8$ . **98.** 2) taq; 4)  
 jup ta, taq ta bolmaydi. **99.** 2) taq; 4) taq; **108.** 2)  $x = 0$ . **109.** 2)  $(-1; 0)$ . **110.** 2)  $x \leq 3$ ; 4)  $y < 5$ ;  
 6)  $x < -5, x > 5$ . **111.** 2) Kubtin qırı 7 dm den artıq. **114.** 2)  $x = 10$ ; 4)  $x = 5$ . **115.** 2)  $x = 2$ ; 4)  $x = 2$ ;  
 $x = -7$ . **116.** 2)  $x = 4$ ; 4)  $x = 0,2$ . **117.**  $x = \frac{7}{3}$ . **118.** 2)  $x > -3$ ; 4)  $x < 2$ ; 6)  $x < 1, x > 7$ . **120.** 2)  $x = -2$ ;  
 4)  $x_1 = 1; x_2 = 3$ . **121.** 2)  $x = 2,25$ . **122.** 2)  $x = 1$ ; 4)  $x = 5$ . **123.** 2)  $x = 4$ . **124.** 2)  $2 \leq x \leq 3$ ; 4)  $1 < x \leq$   
 $\leq 2$ ; 6)  $x \geq 1$ . **125.** 2)  $x_1 = 2, x_2 = 0,5$ ; 4)  $x$  tin bunday manisi joq. **126.** 2)  $x < -6, x > 6$ . **127.** 2)  $(5$ ;  
 $0), (-2; 0), (0; 10)$ ; 4)  $(1; 0), \left(-\frac{11}{7}; 0\right), (0; -11)$ . **128.** 2)  $(-1; 4)$ ; 4)  $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ . **130.** 150 m hám 150 m.  
**131.** 2)  $p = 1, q = 0$ . **132.** 1)  $x_1 = 1, x_2 = -5$ ; 2)  $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$ . **133.** 2)  $x < 2, x > 4$ ; 4)  $x < 3$ ,  
 $x > 4$ . **134.** 2)  $x < -6, x > 6$ ; 4)  $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ . **135.** 2)  $x < \frac{1}{2}, x > 4$ ; 4)  $-2 < x < \frac{1}{2}$ . **136.** 2) sheshim-  
 lerge iye emes; 4) sheshimlerge iye emes; 6) sheshimleri joq. **137.** 2)  $x < -1, 1 < x < 4$ ; 4)  $x < -\frac{1}{2}$ ,  
 $4 < x \leq 7$ ; 6)  $x \geq 2, -\frac{1}{2} \leq x < 1$ . **138.** 2)  $x \leq -\frac{3}{2}, x \geq -1$ ; 4)  $x = \frac{2}{3}$ . **139.** 2)  $-1 < x < -\frac{1}{5}, \frac{3}{4} < x < 2$ ;  
 4)  $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{5}, \frac{1}{2} < x \leq 2$ . **140.** 12 km/h tan kem emes. **142.** 2)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2}\right)$ .  
**143.** 2)  $(-1; -1); (1; 1)$ . **144.** 2)  $x > 2$ ; 4)  $x \leq -2$ . **145.** 2)  $x = 16$ . **146.** 2)  $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$ . **147.** 2)

$x$  – qálegen san; 4)  $2 \leq x \leq 11$ ; 6)  $x < -7, -3 \leq x < -1, x \geq 3$ . **148.** 2) kemeyedi; 4) kemeyedi. **149.** 2) taq; 4) jup ta, taq ta bolmaydi.. **150.** 2)  $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ . **151.** 2)  $x_1 = -1, x_2 = 7$ ; 4)  $x = 81$ . **152.** 1)  $x < -1, x > 9$ ; 2)  $-1 < x \leq 0, 3 \leq x < 4$ ; 3)  $\frac{2}{3} \leq x < 6$ ; 4)  $x \geq 4$ . **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154.** 2) (7; -5), (-4; 6); 4) (-1; -1), (7; 23). **155.** 2) (4; -3); (17; 10); 4) (4; 1), (-1; -4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (-2; -5), (-5; -2). **157.** 2) (4; -1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2); 4) (1; 5), (5; 1), (-1; -5), (-5; -1). **159.** 5 hám 13. **160.** 4 hám 36. **161.** 2) (7; -1), (-1; 7). **163.** 1) (4; 1) (-1; -4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 m, 200 m. **165.** 2) (4; 5) hám (5; 4). **166.** 2) (1; -2) hám (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (-3; -4), (-4; -3). **169.** 2) (2; 5) va (5; 2); 4) (1; 3) hám (19; -3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (-3; -5), (-5; -3); 4) (1; 7), (7; 1), (-1; -7), (-7; -1). **171.** 2) (20; 4) hám (-20; -4); 4) (3; 6) hám (6; 3). **172.** 2) (-1; 1) (1; 1)  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 \right)$ , 2)  $\left( \frac{\sqrt{2}}{2}; 2 \right)$ ; 4) (-5; -2), (-5; 2), (5; -2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (-5; -1), (-3; -5), (3; 5), (5; 3), **175.** (1; 9) hám (9; 1). **176.** 2) sistema sheshimge iye emes. **177.** 2)  $-9 \leq x \leq 3$ ; 4)  $-6 \leq x \leq 2$ . **178.** 2.  $-\infty < x < -3$  hám  $2 < x < +\infty$ . **179.**  $-3 < x \leq -2$  hám  $1 \leq x \leq 2$ . **180.**  $-7 < x < 0$ . **181.**  $-1 \leq x \leq 0$ . **182.** 2)  $\emptyset$ . **194.** (-1; -4) va (4; 4); 2) (2; -2) hám (9; 5). **195.** 2) (-5; 6) hám (6; -5); 4) (-1; 10) hám (10; -1). **196.** 2) (6; -2); 4) (3,5; -1,5). **197.** 2) (-2; -3) hám (2; 3); 4) (2; 6) hám (6; 2). **198.** 2) (-1; 3) hám (3; -1). **199.** 2) (-3; 1) hám (1; 5). **200.** 2) (-2; 1) hám (2; 1); 4) (-1; 4) hám (24; 0,6). **201.** 2) (4;  $\sqrt{3}$ ) hám (4;  $\sqrt{3}$ ); 4) (-6; -2), (-6; 2), (6; -2), (6; 2). **202.** 2) (1; -2) hám (2; -1); 4) (2; 1). **203.** 2)  $\left( -2\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$  va  $\left( -2\sqrt{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$ . **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) Boyı 1,2 cm hám eni 0,8 cm. **207.** 2)  $-5 < x < -3$ ; 4)  $1 \leq x \leq 2$ . **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2)  $\frac{2\pi}{3}$ ; 4)  $\frac{5\pi}{6}$ ; 6)  $\frac{8\pi}{45}$ ; 8)  $\frac{7\pi}{9}$ . **214.** 2)  $20^\circ$ ; 4)  $135^\circ$ ; 6)  $\left( \frac{720}{\pi} \right)^0$ ; 8)  $\left( \frac{324}{4\pi} \right)^0$ . **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2)  $2\pi < 6,7$ ; 4)  $\frac{3\pi}{2} < 4,8$ ; 6)  $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$ . **218.** 0,4 m. **219.** 2 rad. **220.**  $\frac{3\pi}{8}$  cm<sup>2</sup>. **221.** 2 rad. **222.** 2) (-1; 0); 4) (0; -1); 6) (1; 0). **224.** 2) ekinshi sherek; 4) tórtinshi sherek; 6) ekinshi sherek; **225.** 2) (0; 1); 4) (-1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2)  $2\pi k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; 4)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k = 0, -1, -2, \dots$ . **227.** 2) ekinshi sherek; 4) tórtinshi sherek; **228.** 2)  $x = 1,8\pi, k = 4$ ; 4)  $x = \frac{4}{3}\pi, k = 3$ ; 6)  $x = \frac{5}{3}\pi, k = 2$ . **230.** 2) (0; 1); 4) (0; -1). **231.** 2)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k = 0, \pm 1$ ,

$\pm 2, \dots; 4) \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **232.** 2)  $-\frac{1}{2}; 4) -1; 6) -1; 8) \frac{1}{\sqrt{2}}$ . **234.** 2)  $-1; 4) -1; 6) 1$ .

**235.** 2)  $0; 4) -1$ . **236.** 2)  $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}; 4) -\frac{1}{4}$ . **237.** 2)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 4) x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **239.** 2)  $-\frac{5}{4}; 4) \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ . **240.** 2)  $x = \pi + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 4) x = \pi + 2\pi k, k=0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots; 6) x = \frac{2}{3}\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **241.** 2)  $x = 2\pi k - 1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 4) x = k\pi - 1, k=0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots; 6) x = \frac{2\pi k}{3} + 1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **242.** 2) ekinshi sherek; 4) ekinshi

sherek; 6) ekinshi sherek; **243.** 2) o'ň; 4) o'ň; 6) o'ň; **244.** 2) teris; 4) teris; 6) o'ň; **245.**

2) o'ň; o'ň; 4) teris, teris; 6) teris, teris; 8) o'ň; o'ň; **246.** 2)  $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0,$

$\operatorname{tg} \alpha < 0, \operatorname{ctg} \alpha < 0; 4) \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0, \operatorname{tg} \alpha > 0, \operatorname{ctg} \alpha > 0$ . **247.** 2)  $\sin 3 > 0, \cos 3 < 0,$

$\operatorname{tg} 3 < 0; 4) \sin(-1,3) < 0, \cos(-1,3) > 0, \operatorname{tg}(-1,3) < 0$ . **248.** 2) teris; 4) o'ň; 6) o'ň; 8) teris. **249.**

Eger  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  yaki  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  bolsa, sina hám cosa belgileriniń sáykes keledi; eger

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  yaki  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  bolsa,  $\sin \pi$  hám  $\cos \pi$  sanları qarama-qarsı belgilerge iye

boladı. **250.** 2) teris; 4) o'ň; **251.** 2)  $\cos 1,3 > \cos 2,3$ . **252.** 2)  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 4) x = \pi +$

$+2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **253.** 2) ekinshi sherek. **254.**  $\frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$ . **255.** 2)  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3};$

4)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}; 6) \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ . **256.** 2)

orinlanadı; 4) orinlanbaydı. **257.** 2) orinlanbaydı. **258.**  $\cos \alpha = \frac{9}{11}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$ . **259.**  $\frac{1}{3}$ . **260.**

$\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ . **261.**  $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ . **262.** 2)  $\frac{1}{3}; 4) 2$ . **263.** 1)  $-\frac{3}{8}; 2) \frac{11}{16}$ . **264.** 1)  $x = \pi k, k=0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots; 2) x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 3) x = 2\pi k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots; 4) \frac{\pi}{2} + \pi k, k=0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots$  **266.** 1)  $0; 4) 1 + \sin \alpha$ . **267.** 2)  $3; 4) 4$ . **271.** 2)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . **272.**  $\frac{8}{25}$ . **273.**  $\frac{37}{125}$ . **274.** 1)  $x = \pi k,$

- $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; 2)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **275.** 2)  $\frac{1}{3}$ ; 4) -3. **276.** 2)  $2\cos\alpha$ ; 4) 2. **278.** 2)  $2\cos\alpha$ . **280.** 2)  $-\frac{1}{2}$ ; 4)  $-\frac{1}{2}$ . **281.** 2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 4) -1. **282.** 2)  $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$ . **283.** 2)  $\cos 3\beta$ ; 4) -1. **284.**  $-\sin\alpha - \sin\beta$ . **285.** 2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4) 1. **286.** 2)  $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$ . **287.** 2)  $-\sin\alpha - \cos\beta$ ; 4)  $\sin\alpha - \cos\beta$ . **288.**  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{84}{85}$ ;  $\cos(\alpha - \beta) = \frac{36}{85}$ . **289.** 2)  $-\frac{63}{65}$ . **290.** 2) 0; 4)  $\tan\alpha - \tan\beta$ . **293.** 2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $\frac{3}{2}$ . **294.** 2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 4) -1. **295.** 2)  $\frac{24}{25}$ . **296.** 2)  $\frac{7}{25}$ . **297.** 2)  $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ ; 4) 1. **298.** 2)  $2\cot\alpha$ ; 4)  $\cot^2\alpha$ . **300.** 2)  $\frac{8}{9}$ . **302.** 2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . **303.** 2)  $\cos 6\alpha$ ; 4)  $\frac{1}{2\sin\alpha}$ . **305.**  $\frac{15}{8}$ . **306.** 2)  $\sqrt{3}$ . **307.** 2) 0; 4) 0; 6) -1. **308.** 2)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 4)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 6)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ . **309.** 2)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; 4)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **310.** 2)  $-\frac{1}{2}$ ; 4)  $\frac{1}{2}$ ; 6)  $\sqrt{3}$ . **311.** 2)  $-\sqrt{2}$ ; 4) -1. **312.** 2)  $\cos 2\alpha$ . **313.** 2)  $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$ ; 4)  $\frac{1}{2}$ ; 6)  $\frac{5-3\sqrt{3}}{4}$ . **314.** 2) 1; 4)  $-\frac{1}{\cos}$ . **317.** 2)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ; 4)  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  **318.** 2)  $\sqrt{2}\sin\beta$ ; 4)  $\sin 2\alpha$ . **319.** 2) 0; 4)  $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ; 6)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ . **320.** 2)  $4\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$ ; 4)  $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ . **322.** 2)  $2\sin\alpha$ . **325.** 2)  $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$ . **326.** 2) 0. **327.** 2)  $2\cos\alpha(\cos\alpha - 1)$ ; 4)  $(\sin\alpha + \cos\alpha) \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$ . **328.** 2)  $\text{úshinshi sherek}$ ; 4)  $\text{ekinshi sherek}$ ; 6)  $\text{ekinshi sherek}$ ; **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; -1. **330.** 2) 2; 4) -1. **331.** 2)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ; 4)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ . **333.** 2) 3; 4)  $\tan^2\alpha$ . **334.** 2)  $-\frac{1}{3}$ . **335.** 2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ . **336.** 2)  $\sin 2\alpha$ ; 4)  $\tan 2\alpha$ . **337.** 2) 1; 4)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **338.** 2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ . **339.** 2)  $\cos 0 > \sin 5$ . **340.** 2)  $\text{óh}$ ; 4)  $\text{teris}$ . **341.** 2)  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ ; 4)  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; 6)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ . **342.** 2)  $\frac{1}{\sin\alpha}$ . **343.**  $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ ;  $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $\sin 2 = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ;  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ . **344.** 2)  $\tan\alpha$ .

345. 2)  $\frac{1}{\sin 4\alpha}$ ; 4)  $-\frac{1}{\cos 2\alpha}$ . 346. 2) 1; 4) 1. 347. 2) -7. 348. 2)  $\cos 4\alpha$ . 350. 2) 5, 8, 11; 4)  $-\frac{1}{3}$ ,  
 $0, \frac{1}{3}$ . 351. 2) boladi; 4) boladi; 352. 2) boladi; 4) boladi; 353. 2)  $n=9$ . 360. 2) -3, -1, 1, 3, 5. 362. 2) 79;  
4) -42. 363. 2)  $a_n = 29 - 4n$ ; 4)  $a_n = 6 - 5n$ . 364. 12. 365. Awa,  $n = 11$ . 366.  $n = 11$ , yaq. 367. 2)  
0,5. 368. 2) -13. 369. 2) -100. 370. 2)  $a_n = 5n - 17$ . 371.  $n \geq 9$ . 372.  $n < 25$ . 373. 2)  $a_9 = -57$ ,  $d$   
 $= 7$ ; 4)  $a_9 = -1$ ,  $d = -15$ . 374. 30. 375. 60. 376. 2) 10050; 4) 2550. 377. 4850. 378. 4480. 379. 2)  
-192. 380. 2) 204. 381. 2) 240. 382. 4905; 494550. 383. 2) 2900. 384. 10. 385. 2)  $a_{10} = 15\frac{5}{6}$   
 $d = \frac{3}{2}$ . 386. 2)  $a_1 = -88$ ,  $d = 18$ . 387. 78tosiq. 388. 44. 389.  $a_1 = 5$ ,  $d = 4$ . 392. 2) -3, 12, -48,  
192, -768. 394. 2)  $\frac{1}{16}$ ; 4)  $\frac{1}{81}$ . 395. 2)  $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ; 4)  $b_n = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ . 396. 2) 5; 4) 8. 397.  
2) 3; 4)  $-\frac{1}{5}$ . 398.  $b_8 = 2374$ ,  $n = 5$ . 399.  $b_7 = 3\sqrt{3}$ ,  $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 400.  $b_5 = 6$ ,  $b_1 = 30\frac{3}{8}$  yaki  
 $b_5 = -6$ ,  $\beta_1 = -30\frac{3}{8}$ . 401. 659100 swm. 402. 0,25 cm<sup>2</sup>. 403. 2)  $-\frac{31}{8}$ ; 4)  $-\frac{275}{81}$ ; 6) -400. 404.  
2) 2186. 405. 2)  $b = -1$ ,  $b_8 = 128$ . 406. 2)  $n = 7$ ; 4)  $n = 5$ . 407. 2)  $n = 9$ ,  $b_9 = 2048$ ; 4)  $n = 5$ ,  $q =$   
7. 408. 2) 364; 4) 305. 409. 2)  $b_5 = -4802$ ,  $S_4 = 800$ . 410. 2)  $-1\frac{31}{32}$ . 412. 2)  $q = 5$ ,  $b_3 = 300$  yoki  
 $q = -6$ ,  $b_3 = 432$ . 413. 2)  $q = 2$  yaki  $q = -2$ ; 4)  $S_5 = 781$  yaki  $S_5 = 521$ . 415. 2) awa; 4) awa; 416.  
2) 7,2; 4)  $-8\frac{1}{6}$ . 417. 2)  $\frac{27}{4}$ ; 4)  $\frac{2}{3}$ . 418. 2) yaq; 4) awa;. 419. 2)  $90\frac{10}{11}$ . 420. 2)  $6 + 4\sqrt{3}$ . 421.  
2)  $\frac{1}{2}$ . 422. 2a. 423.  $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot R_1$ . 424. 2) 1; 4)  $\frac{7}{30}$ . 425. 2)  $d = -\frac{1}{2}$ ,  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 1\frac{1}{2}$ ; 4)  
 $d = -3$ ,  $a_4 = \sqrt{2} - 9$ ,  $a_5 = \sqrt{2} - 12$ . 427.  $-5\frac{1}{3}$ . 428. 2) -1080. 429. 143. 430. 2) -22. 431.  
2)  $q = -\frac{1}{2}$ ,  $b_4 = -\frac{1}{32}$ ,  $b_5 = \frac{1}{64}$ ; 4)  $q = -\sqrt{2}$ ,  $b_4 = -10\sqrt{2}$ ,  $b_5 = 20$ . 432. 2)  $b_n = -0,5 \cdot$   
 $(-2)^{n-1}$ . 433. 2)  $b_n = \frac{125}{8}$ . 434. 2)  $S_{10} = 1\frac{85}{256}$ ; 4)  $S_9 = 5$ . 435. 2) 242; 4)  $\frac{65}{36}$ . 436. 2)  $-\frac{4}{5}$ . 437.

- 24  $\frac{41}{74}$ . **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.**  $-\frac{5}{2}$ . **440.** 2)  $a_{19} = 0, a_1 = -108$ . **441.** 2)  $x_1 = \frac{1}{3}$ ; 4)  $x_2 = -4$ .
- 443.** 14. **444.** 2)  $a_{16} = -1\frac{2}{3}, d = -\frac{2}{15}$ . **445.** 2) 27. **446.** 2) -27; 4)  $-\frac{1}{25}$ . **447.** 6. **448.** 2) yaq; 4) awa. **450.** Shárshembi kúni. **451.**  $a_1 = 8, d = -3$  yoki  $a_1 = 2, d = 3$ . **452.**  $a_1 = 5, d = -5$  yoki  $a_1 = -5, d = 5$ . **453.** 180 ret. **453.** 2) Júz beriwi múmkin emes. **454.** 2) Kútilmegen; 4) aniq hádiyse. **457.** 2) birgelikte júz bermeytuğın. **462.** teń imkaniyatlı emes. **466.** 2)  $\frac{1}{28}$ ; 4)  $\frac{3}{4}$ . **467.** 2)  $\frac{5}{9}$ ; 4) 1. **468.** 2)  $\frac{1}{3}$ ; 4)  $\frac{3}{4}$ ; 6)  $\frac{7}{12}$ . **469.** 2)  $\frac{1}{2}$ ; 4)  $\frac{1}{4}$ ; 6)  $\frac{5}{12}$ . **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.**  $\frac{29}{30}$ . **473.**  $\frac{1}{2}$ ; **474.** 2)  $\frac{1}{13}$ ; 2)  $\frac{9}{52}$ . **476.** 2)  $\frac{21}{46}$ ; 4)  $\frac{7}{92}$ . **477.** 1,4%. **482.** 2) múmkin, 4 ochko. **488.** 3 tańlanba. **489.** 2) 11; 4) 5 hám 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) -5,4; 4) 2,1. **494.** 2)  $\frac{3}{7}$ ; 4)  $\frac{3}{7}$ . **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 kg<sup>2</sup>; 4) 6m<sup>2</sup>. **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, -3 va 10, 2 3. **511.** 2) -0,5. **516.** 2)  $-15 < x < 2$ ; 4)  $x \leq 12, x \geq 12$ . **517.** 2)  $0 < x < \sqrt{5}$ ; 4)  $x < -\sqrt{3}; x > \sqrt{3}$ . **518.** 2)  $-9 < x < 6$ ; 4)  $-2 < x < 0,1$ ; 6)  $x \leq \frac{1}{8}, x \geq 2$ . **519.** 2)  $x = -12$ ; 4)  $x$  - qálegen haqıyqıy san; 6) sheshimge iye emes. **520.** 2)  $-0,7 < x < \frac{1}{2}$ ; 2)  $-2 \leq x \leq 1$ . **521.** 2)  $x \leq -2, x = 1$ ; 4)  $x \leq -\frac{1}{3}, 0 \leq x \leq 2$ . **522.** 2)  $-0,5 \leq x < 2$ . **523.** Biyiklik 3,1 cm den kóp, ortasha sıızığı 6, 2 cm den zıyat. **524.** 5 cm den artıq. **525.** 2)  $x < -7, -1 \leq x \leq 2$ ; 4)  $-1 \leq x < \frac{1}{3}, x > \frac{1}{3}$ . **526.**  $p = 5, q = -14$ . **527.** 2)  $p = 14, q = 49$ . **528.**  $y = -2x^2 + 11x - 5$ . **529.**  $y = \frac{n}{r^2}x^2$ . **530.** 2)  $a = -1, b = -1, c = 2$ . **531.** Kórsetpe. 1)  $\frac{a}{b} = A^3, \frac{b}{c} = B^3, \frac{c}{a} = C^3$  sıyaqlı belgilep hám  $ABC = 1$  teńlikti esapqa alıp, berilgen teńsizlikti  $A^3 + B^3 + C^3 \geq 3ABC$  kórinisinde jazıń, onı  $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geq 0$  kórinisine túrlendirıń.  $(A^2 + B^2 + C^2 \geq AB + AC + BC)$  teńsizlik usı  $A^2 + B^2 \geq 2AB, A^2 + C^2 \geq 2AC, B^2 + C^2 \geq 2BC$  teńsizliklerdi qosıw arqalı payda etiledi; 2) arifmetikalıq ortası hám geometriyalıq ortası muğdarlarınan tiyisli teńsizliklerdi qosıń:  $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c, \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a, \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$ ; 3)



teńsizliktiń shep bóleginen oń bólegin alıń hám payda bolǵan bólshektiń alımın mınaday kóriniste jazıń:  $(a+b)(a-b)^2 + (b+\tilde{n})(b-c)^2 + (a+c)(a-c)^2$ ; 1)  $x_{1,2} = \pm 2$ ; 2)  $x_{1,2} = \pm 1$ ; 3)  $x_{3,4} = \pm 3$ ; 3)  $x_1 = -1, x_2 = 2$ ; 4)  $x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ; 5)  $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$ ; 6)  $x_{1,2} = \pm 4, x_{3,4} = \pm 6$ . **534.** 2)  $2\frac{1}{3}$ ; 4)  $\frac{2x^2}{3y}$ . **535.** 2)  $3 - \sqrt[3]{2}$ ; 4)  $6\sqrt{7}$ . **536.** 2)  $(2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$ . **537.** 2)  $\sqrt{x}$ ; 4)  $9b^4$ . **538.** 2)  $5ab\sqrt{b}$ . **539.** 2)  $-\sqrt{3x^2}$ ; 4)  $\sqrt{5a^2}$ . **540.** 2) Yaq. **541.** 2) Yo'q. **544.** -1. **545.** 2) Teres. **548.** 2) -0,8. **547.** 2)  $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$ ; 4)  $\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$ . **548.**  $\sin\alpha = \frac{240}{289}$ ,  $\cos\alpha = -\frac{161}{289}$ ,  $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{240}{161}$ . **549.** 2)  $a_{12} = 47,5$ ,  $S_{12} = 537$ ; 4)  $a_{18} = 11\frac{2}{3}$ ,  $S_{18} = 108$ . **550.** 1220. **552.** 2)  $b_1 = 5$ . **553.** 2)  $b_4 = 125$ ,  $S_4 = 156$ ; 4)  $b_4 = 81$ ,  $S_5 = 61$ . **554.**  $15\frac{3}{4}$ . **555.** 2)  $4\frac{1}{6}$ ; 4) 1; 6)  $-\frac{5}{4}(1+\sqrt{5})$ . **557.** 2) -1; 4)  $-\frac{1}{x}$ . **558.** 2)  $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$ ; 4)  $0,1(5-\sqrt{5})5+\sqrt{5}$ . **559.** 2)  $-\frac{\sqrt{a}}{b}$ ; 4)  $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ . **560.** 2)  $x = 61$ . **561.** 2)  $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ . **562.** 2)  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $x = n + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . **565.**  $39\frac{2}{3}$ . **566.**  $b_1 = 5$ ,  $b_5 = 405$ . **567.**  $\frac{1}{8}$ . **561.** 8, 13, 18 yoki 20, 13, 6. **568.** 1)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ ; 2)  $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ . **569.**  $\sin\alpha = -\frac{120}{169}$ ,  $\cos\alpha = -\frac{119}{169}$ .

### «Ózińizdi tekseriń kóriń» tapsırmalarınıń juwapları

**I bap.** 1.  $x_1 = 0, x_2 = 2$ . 2.  $-1 < x < 1$  bolǵanda  $y > 0$ ;  $x < -1$  bolǵanda  $y < 0$ ;  $x > 1$ . 3. 1)  $x > 0$  bolǵanda funkciya ósedi;  $x < 0$  bolǵanda funkciya kemeyedi. 4. 1)  $x \geq 1$ ;  $-2 \leq x \leq 0$ . 5. 1)  $x \neq 1$ ; 2)  $-3 \leq x \leq 3$ . 6. 1)  $x = 28$ ; 2)  $x = 1$ .

**III bap.** 1. 1)  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ ,  $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$ . 2. 1) 1; 2)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 4)  $-\sqrt{3}$ ; 5)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 5. 1)  $\sin \alpha \cos \beta$ ; 2)  $\cos^2 \alpha$ ; 3)  $2 \sin \alpha$ .

**IV bap.** 1. 1)  $a_{10} = -25$ ,  $S_{10} = -115$ . 2. 1)  $b_6 = \frac{1}{8}$ ,  $S_6 = 7\frac{7}{8}$ . 3. 1)  $q = \frac{1}{3}$ ,  $S = 1,5$ .

### Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanışlı máselelerdiń juwapları

**I bap.** 1. Tezlik 60,01 km/saat tan aspawı kerek. 2.  $n \leq 30$ . 3. 2 mln. 10 m. 4. 125. 5. 1) 135; 2) 17739; 3)  $\approx 4,9$  ayda.

**II bap.** 1. 2) 20 qatar. 2. Birinshi brigadirde 8, ekinshisinde 12 jumısshı. 12 ta ishchi. 3. 2) 16%. 4. 2) 4 l hám 12 l. 5. Shamalsız hawa-rayında.

**III bap.** 1. 4)  $\approx 335,42$  km; 5)  $\approx 2243,3$  km. 2.  $\approx 11,3^\circ$ . 3. 1818 m. 4.  $\approx 12,8$  m.

**IV bap.** 1. 420. 2. 10 km. 3. 3072. 4. 39 300 000 swm. 5. 27 metr.

**V bap.** 1.  $E(X) = 26$ ,  $D(X) = 0,9964$ . 2.  $E(X) \approx 8,94$ ,  $E(Y) \approx 8,93$ ,  $D(X) \approx 0,07$ ,  $D(Y) \approx 0,03$ ,  $G(X) \approx 0,071$ ,  $\sigma(Y) \approx 0,76$ . 3.  $E(X_1) = E(X_2) = 3,36$ ,  $\sigma(X_1) \approx 1,47$ ,  $\sigma(X_2) \approx 1,41$ . 4.  $E(d_1) = 60$ ,  $D(d_1) = 1,2$ ,  $E(d_2) = 60,02$ ,  $D(d_2) = 0,76$ .

## MAZMUNÍ

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8-Klasta úyrenilgen temalardı tákirarlaw.....                                         | 3   |
| <b>I bap. KVADRAT FUNKCIYA. KVADRAT TEŇSIZLIKLER</b>                                  |     |
| 1-§. Kvadrat funkciyanıń anıqlaması.....                                              | 5   |
| 2- §. $Y = x^2$ funkciya.....                                                         | 7   |
| 3- §. $Y = ax^2$ funkciya.....                                                        | 10  |
| 4- §. $Y = ax^2 + bx + c$ funkciyası.....                                             | 14  |
| 5- §. Kvadrat funkciyanıń grafigin jasaw.....                                         | 18  |
| 6- §. Kvadrat teńsizlik hám onıń sheshimi.....                                        | 24  |
| 7- §. Kvadrat teńsizlikti kvadrat funkciya járdeminde sheshiw.....                    | 28  |
| 8- §. Intervallar usulı.....                                                          | 32  |
| 9- §. Funkciyanıń anıqlanıw oblastı.....                                              | 37  |
| 10- §. Funksiyanıń ósiw hám kemeyiwı.....                                             | 41  |
| 11- §. Funkciyanıń juplılıǵı hám taqlıǵı.....                                         | 46  |
| 12- §. Dáreje qatnasqan teńsizlik hám teńlemeler.....                                 | 51  |
| <i>I bapqa tiyisli shınıǵıwlar.....</i>                                               | 56  |
| <i>I bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları.....</i>                                 | 60  |
| <i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanış máseleler.....</i>                         | 63  |
| <i>Tariyxy maǵlıwmatlar.....</i>                                                      | 67  |
| <b>II bap.</b>                                                                        |     |
| <b>TEŇLEMELER HÁM TEŇSIZLIKLER SISTEMALARI</b>                                        |     |
| 13- §. Ekinshi dárejeli teńleme qatnasqan eń ápiwayı sistemalardı sheshiw.....        | 68  |
| 14- §. Teńlemeler sistemasın sheshiwdiń túrli usılları.....                           | 72  |
| 15- §. Ekinshi dárejeli bir belgisizli teńsizlikler sistemaları.....                  | 77  |
| 16- §. Ápiwayı teńsizliklerdi dálillew.....                                           | 80  |
| <i>II bapqa tiyisli shınıǵıwlar.....</i>                                              | 84  |
| <i>II bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları.....</i>                                | 87  |
| <i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanış máseleler.....</i>                         | 89  |
| <b>III bap.</b>                                                                       |     |
| <b>TRIGONOMETRIYA ELEMENTLERI</b>                                                     |     |
| 17- §. Múyeshtiń radian ólshemi.....                                                  | 93  |
| 18- §. Noqatı koordinatalar bası átirapında burıw.....                                | 97  |
| 19- §. Múyeshtiń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensiniń anıqlamaları.....       | 103 |
| 20- §. Sinus, kosinus hám tangenstiń belgileri.....                                   | 109 |
| 21- §. Berilgen bir múyeshtiń sinusı, kosinusı hám tangensi arasındaqı qatnaslar..... | 112 |
| 22- §. Trigonometriyalıq birdeylikler.....                                            | 117 |
| 23- §. A hám $-a$ múyeshteriniń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensi.....        | 120 |
| 24- §. Qosıw formulaları.....                                                         | 121 |
| 25- §. Qos múyeshtiń sinusı hám kosinusı.....                                         | 126 |

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 26- §. Keltiriv formulaları.....                                                      | 129 |
| 27- §. Sinuslardın qosındısı hám ayırması. Kosinuslardın qosındısı hám ayırması ..... | 135 |
| <i>III bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i> .....                                            | 138 |
| <i>III bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları</i> .....                              | 142 |
| <i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i> .....                      | 145 |
| <i>Tariyxıy máseleler</i> .....                                                       | 148 |
| <i>Tariyxıy maǵlıwmatlar</i> .....                                                    | 149 |

#### **IV bap. SANLÍ IZBE-IZLIKLER. PROGRESSIYALAR**

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 28- §. Sanlı izbe-izlikler.....                                            | 150 |
| 29- §. Arifmetikalıq progressiya .....                                     | 153 |
| 30- §. Arifmetikalıq progressiyanıń dáslepki $n$ aǵzasınıń qosındısı ..... | 158 |
| 31- §. Geometriyalıq progressiya.....                                      | 162 |
| 32- §. Geometriyalıq progressiyanıń dáslepki $n$ aǵzasınıń qosındısı.....  | 167 |
| 33- §. Sheksiz kemeyiwshi geometriyalıq progressiya .....                  | 171 |
| <i>IV bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i> .....                                  | 177 |
| <i>IV bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları</i> .....                    | 180 |
| <i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i> .....           | 182 |
| <i>Tariyxıy máseleler</i> .....                                            | 185 |
| <i>Tariyxıy maǵlıwmatlar</i> .....                                         | 185 |

#### **V bap. ITIMALLIQ TEORIYASÍ HÁM MATEMATIKALIQ STATISTIKA ELEMENTLERI**

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 34- § Hádiyseler .....                                           | 186 |
| 35- § Hádiyseniń itimallıǵı. ....                                | 190 |
| 36- § Kútilmegen hádiyseniń salıstırmalı jıyılıǵı.....           | 194 |
| 37- § Tosınnanlı shama .....                                     | 198 |
| 38- §. Kútilmegen muǵdarlardıń sanlı xarakteristikaları .....    | 206 |
| <i>V bapqa tiyisli shınıǵıwlar</i> .....                         | 213 |
| <i>V bapqa tiyisli sınaq (test) shınıǵıwları</i> .....           | 214 |
| <i>Ámeliy-usınılǵan hám pánlerara baylanıslı máseleler</i> ..... | 216 |
| 9 klass “Algebra” kursın tákırarlaw ushın shınıǵıwlar .....      | 222 |

**Alimov Sh. A.**

**A 51** Algebra: Uliwma orta bilim beriw mektepleriniń 9-klassı ushın sabaqlıq/  
Sh.A.Alimov, A.R.Xalmuxamedov, M.A. Mirzaxmedov.  
– 4-basilımı. – Tashkent: „O‘qituvchi“ BPDÚ, 2019. – 240 b.

ISBN 978-9943-5750-7-3

UO‘K: 512(075.3)=512.121

KBK 22.14ya72

**Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,  
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov**

## **ALGEBRA**

*(Qoraqalpoq tilida)*

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik  
Qayta ishlangan va to‘ldirilgan 4-nashri

«O‘QITUVCHI» nashriyot-matbaa ijodiy uyi.  
Toshkent–2019

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MChJ da tayyorlandi.

*Awdarmashi G. Nizanova*

*Redaktor G. Nizanova*

*Bezewshi dizayner R. Zaparov*

*Korrektor G. Nizanova*

*Kompyuterde betlewshi H. Safaraliyev*

*Tekstin teriwshi S. Niyazova*

Baspa licenziyası AI № 012. 20.07.2018.

Original-maketten basiwğa ruqsat etilgen waqtı 27.07. 2019. Formatı 70×90 1/16.

Times garniturası. Ofset baspa usulında basıldı. Shartli b.t. 17,55. Esap-b. t. 16,6.

Nusqası 11 915. Buyurtpa № 19-188.

Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administratsiyası janındağı Málimleme hám gálaba kommunikatsiyalar agentliginiń „O‘qituvchi“ baspa-poligrafiyalıq dóretiwshilik úyi.  
Tashkent – 206, Yunusobod rayoni, Yangishahar kóshesi, 1-úy. Shártname №.74-19.

Original-maketten Ózbekstan Respublikası Prezidenti Administratsiyası janındağı Málimleme hám gálaba kommunikatsiyalar agentliginiń „O‘zbekiston“ baspa-poligrafiyalıq dóretiwshilik úyi baspaxanasında basıp shıǵarıldı. Tashkent qalası, A. Nawayı kóshesi, 30-úy.

## Ijaraga berilgen sabaqlıqtıń jaǵdayın kórsetiwshi keste

| T/n | Oqıwshınıń<br>atı<br>familiyası | Oqıw<br>jılı | Sabaqlıqtıń<br>alıńandaǵı<br>jaǵdayı | Klass<br>basshısınıń<br>qol tańbasi | Sabaqlıqtıń<br>qaytıp<br>tapsırılǵandaǵı<br>jaǵdayı | Klass<br>basshısınıń<br>qol tańbasi |
|-----|---------------------------------|--------------|--------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| 1.  |                                 |              |                                      |                                     |                                                     |                                     |
| 2.  |                                 |              |                                      |                                     |                                                     |                                     |
| 3.  |                                 |              |                                      |                                     |                                                     |                                     |
| 4.  |                                 |              |                                      |                                     |                                                     |                                     |
| 5.  |                                 |              |                                      |                                     |                                                     |                                     |

**Sabaqlıq ijaraga berilgende hám, oqıw jılınıń juwmaǵında qaytarıp  
alıńanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegishi  
bahalawǵa muwapıq toltırıladı**

|                          |                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Jańa</b>              | Sabaqlıqtıń paydalanıwǵa birinshi berilgendegi jaǵdayı.                                                                                                                                                                 |
| <b>Jaqsı</b>             | Muqabası pútin, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar, jırtılmaǵan, koshpegen, betlerinde jazıw hám sıızılar joq.                                                                              |
| <b>Qanaatlanarlıq</b>    | Muqaba jazılgen, bir qansha sıızılıp, shetleri jelingan, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajırlıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qanaatlanarlıq ońlangan. Kóshken betleri qayta ońlangan, ayırım betleri sıızılǵan. |
| <b>Qanaatlandırmaydı</b> | Muqaba sıızılǵan, ol jırtılǵan, tiykarǵı bólimnen ajıralǵan yamasa pútkilley joq, qanaatlandırsızlıq ońılangan. Betleri jırtılǵan, betleri jetispeydi, sıızıp, boyap taslangan, sabaqlıqtı tiklewge bolmaydı.           |