Ш.А. Алимов, О.Р. Холмуҳамедов,
М.А. Мирзааҳмедов

АЛГЕБРА

КИТОБИ ДАРСӢ БАРОИ ДОНИШОМӮЗОНИ
СИНФИ 9-УМИ МАКТАБҲОИ
ТАЪЛИМИ МИЁНАИ УМУМӢ

Нашри чорум

Вазорати таълими халқи Республикаи Ӯзбекистон
ба нашр тавсия кардааст

ХОНАИ ЭҶОДИИ ТАБЪИ НАШРИ „O‘QITUVCHI“
ТОШКАНД-2019

УЎК: 512(075.3)=222.8
КБК 22.14я72
А 47

Муқарризон:

Ф.С. Раҳимова – *омӯзгори фанни математикаи ДТАТ ба номи Ал-Хоразмӣ;*
Г.А. Фозилова – *омӯзгори фанни математикаи мактаби рақами 274-уми ноҳияи Юнусободи, шаҳри Тошканд;*
Д.Ш. Абраев – *омӯзгори фанни математикаи мактаби рақами 326-уми Олмазори шаҳри Тошканд.*

Аломатҳои шартии китоб:

- ! – матне, ки донистани он муҳим ва дар хотир доштани он фоиданок аст (аз ёд кардан шарт нест)
- △ – оғози ҳалли масъала
- ▲ – анҷоми ҳалли масъала
- ○ – оғози асоснокkунии тасдиқи математикӣ ё баровардани формула
- ● – анҷоми асоснокkунӣ ё баровардани формула
- ═ – аломате, ки ҳатмӣ будани ҳалли масъалаҳоро ифода мекунад
- 33, 34... – масъалаҳои мураккаб
- ‖ – ҷудо кардани маводи асосӣ
- Худро бисанҷед! – кори мустақилона барои санҷиши дониш аз рӯи мавод;
- ✍ – масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқаи фанҳо
- ⧗ – масъалаҳои таърихӣ
- 📖 – маълумотҳои таърихӣ

Аз ҳисоби Бунёди мақсадноки китоби республика чоп шудааст.

ISBN 978-9943-5750-9-7

ТАКРОРИ МАВЗӮЪҲОИ СИНФҲОИ 8

Донишомӯзони азиз! Бо мақсади ба хотир овардани донишҳои дар „Алгебра“-и синфи 8 омӯхташуда якчанд мисолҳоро ба диққати шумоён ҳавола мекунем.

1. Графики функсияи

1) $y = 2x + 3$; 2) y = –3x + 4; 3) $y = 4x - 1$; 4) y=–2x – 5-ро кашед. График дар кадом чоряк мехобад? Координатаҳои нуқтаҳои буриши графикро бо тирҳои *Ox* ва *Oy* ёбед.

2. *y=Графики функсияи y =kx + b аз нуқтаҳои A (0;-7), B(2;3) мегузарад. k ва b-ро ёбед.*

3. Хати рост аз нуқтаҳои A (0;5), B(1;2) мегузарад. Муодилаи ҳамин хати ростро нависед.

4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} 7x+4y=29; \\ 5x+2y=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-4y=13; \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. Ба 3-то асп ва 4-то гов дар як рӯз 27 кг ем дода мешавад. Еме, ки дар як рӯз ба 9 асп дода мешавад аз еми ба 5 гов додашаванда 30 кг зиёд аст. Ба як асп ва як гов дар 1 рӯз чӣ қадар ем дода мешавад?

6. Китоб ва дафтар якҷоя 5800 сӯм меистад. 10% нархи китоб аз 35% нархи дафтар 220 сӯм қимат аст. Китоб ва дафтар алоҳида-алоҳида чанд сӯм меистанд?

7. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $3(x-4)+5x<2x+3$; 2) $|5-2x|\leq 3$; 3) $|3x-4|\geq 2$.

8. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} 4(2-x)>7-5x, \\ 15-4x<3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(3-2x)>8-5x, \\ 10-x>2. \end{cases}$

9. Ҳалли хурдтарини бутуни нобаробарии $\frac{3x+4}{2}-\frac{1-x}{3}<\frac{7x-3}{2}-\frac{3-x}{3}$ -ро ёбед.

10. Ҳисоб кунед:

1) $\sqrt{121\cdot 0,04\cdot 289}$; 2) $\sqrt{5\frac{1}{7}\cdot 3\frac{4}{7}}$; 3) $(\sqrt{32}+\sqrt{8})^2$.

11. Содда кунед:

1) $(8\sqrt{63}+3\sqrt{28}-5\sqrt{112}):2\sqrt{7}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{11}+3}+\frac{7}{\sqrt{11}-2}$;

2) $(15\sqrt{1,2}+\frac{1}{3}\sqrt{270}-2\sqrt{30}$; 4) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

Муодиларо ҳал кунед (12—14):

12. 1) $|7-x|=-7$; 2) $|x+6|=x+10$; 3) $\sqrt{(x-9)^2}=x-9$.

13. 1) $x^2-12x+11=0$; 2) $x^2-15x+56=0$;
3) $6x^2+7x-3=0$; 4) $16x^2+8x+1=0$.

14. 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $10x^4+7x^2+1=0$.

15. Масофаи 240 км-ро як автомобил нисбат ба автомобили дуюм 1 соат тезтар тай кард. Агар суръати як автомобил аз суръати автомобили дигар 20 км/соат зиёд бошад, суръати ҳар як автомобилро ёбед.

16. 1) Фарқи ду адад ба 2,5 ва фарқи квадратҳои онҳо ба 10 баробар бошад, ин ададҳоро ёбед. 2) Ду ададеро ёбед,ки суммааш ба 1,4 суммаи квадратҳояш ба 1 баробар бошад.

17. $x^2-8x+3=0$ агар решаҳои муодилаи x_1 ва x_2 бошад,

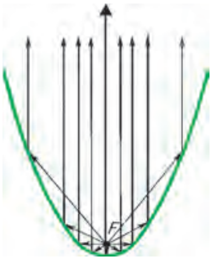
1) $x_1^2+x_2^2$; 2) $x_1^3+x_2^3$; 3) $x_1^2x_2+x_1x_2^2$; 4) $x_1^2-x_2^2$ - ро ёбед.

18. Ададро то садякӣ яклухт кунед. Саҳви нисбии яклухткуниро ёбед:
1) 6,7893; 2) 5,6409; 3) 0,9871; 4) 0,8245.

19. Ададро дар шакли стандартӣ нависед:
1) 437,105; | 2) 91,352; | 3) 0,000 000 85; | 4) 0,000 079.

БОБИ I.

ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ. НОБАРОБАРИИ КВАДРАТӢ



§ 1. ТАЪРИФИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

Шумо дар синфи VIII бо функсияи хаттии $y = kx + b$ ва графики он шинос шудед. Дар соҳаҳои гуногуни илм ва техника бисёр вақт функсияҳое дучор меоянд, ки онҳоро функсияҳои квадратӣ меноманд.

1) Масоҳати квадрати тарафаш x бо формулаи $y = x^2$ ҳисоб карда мешавад.

2) Агар ҷисм ба боло бо суръати v партофта шуда бошад, масофаи s он то сатҳи Замин дар лаҳзаи вақт t аз рӯи формулаи $s=-\frac{gt^2}{2}+vt+s_0$ муайян карда мешавад, ки дар ин ҷо s_0– масофа аз ҷисм то сатҳи Замин дар лаҳзаи вақти $t = 0$.

Дар ин мисолҳо функсияҳои намуди $y = ax^2+bx + c$ муоина шудаанд. Дар мисоли якум $a = 1$, $b = c = 0$, буда, x ва y тағйирёбандаҳо мебошанд.

Дар мисоли дуюм $a=-\frac{g}{2}$, $b=v$, $c=s_0$ буда, тағйирёбандаҳо бо ҳарфҳои t ва s ишорат шудаанд.

! Таъриф . Функсияи намуди $y = ax^2 + bx + c$, ки ин ҷо a, b ва c - ададҳои ҳақиқии додашуда, $a \neq 0$, x - тағйирёбандаи ҳақиқӣ аст, функсияи квадратӣ номида мешавад.

Масалан, функсияҳои зерин квадратӣ мебошанд:

$y = x^2$, $y=-2x^2$, $y=x^2-x$,

$y=x^2-5x+6$, $y=-3x^2+\frac{1}{2}x$.

Масъалаи 1. Қимати функсияи

$$y(x)=x^2-5x+6$$

-ро ҳангоми $x=-2$, $x=0$, $x=3$ будан, ёбед.

△ $y(-2)=(-2)^2-5\cdot(-2)+6=20;$

$y(0)=0^2-5\cdot0+6=6;$

$y(3)=3^2-5\cdot3+6=0.$ ▲

Масъалаи 2. Дар кадом қиматҳои х функсияи квадратии $y=x^2+4x-5$ қимати ба: 1) 7 ; 2) –9 ; 3) –8 ; 4) 0 баробар бударо мегирад?

△ l) Мувофиқи шарт $x^2+4x-5=7$ аст. Ин муодиларо ҳал намуда, ҳосил мекунем:

$$x^2+4x-12=0,$$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm4,\ x_1=2,\ x_2=-6.$$

Пас, $y(2)=7$ ва $y(-6)=7$.

2) Мувофиқи шарт $x^2+4x-5=-9$, аст, ки аз ин ҷо

$x^2+4x+4=0$, $(x+2)^2=0$, $x=-2$.

3) Мувофиқи шарт $x^2+4x-5=-8$ аст , ки аз ин ҷо $x^2+4x+3=0$. Ин муодиларо ҳал карда, $x_1=-3$, $x_2=-1$ ҳосил мекунем.

4) Мувофиқи шарт ин аст, ки аз ин ҷо $x_1=1$, $x_2=-5$ аст. ▲

Дар ҳолати охирин қиматҳои x, ки дар онҳо функсияи $y=x^2+4x-5$ қимати баробари 0-ро мегирад, яъне у(1)= 0 ва у(–5) = 0 аст, ёфта шудаанд. Чунин қиматҳои x-ро сифрҳои функсияи квадратӣ меноманд.

Масъалаи 3. Сифрҳои функсияи $y=x^2-3x$ -ро ёбед.

△ Муодилаи $x^2-3x=0$ -ро ҳал намуда, $x_1=0$, $x_2=3$-ро ҳосил мекунем. ▲

Машқҳо

1. (Шифоҳӣ.) Кадоме аз функсияҳои зерин квадратӣ мебошанд:

1) $y=2x^2+x+3;$ 2) $y=3x^2-1;$ 3) $y=5x+1;$

4) $y=x^3+7x-1;$ 5) $y=4x^2;$ 6) $y=-3x^2+2x$?

2. Қимати ҳақиқии х-ро ёбед,ки дар онҳо функсияи квадратии

у= x^2-x-3 қимати ба: 1) –1; 2) –3; 3) $-\frac{13}{4}$; 4) –5

баробар бударо қабул кунад.

3. Дар кадом қиматҳои ҳақиқии x функсияи $y = -4x^2 + 3x - 1$ қимати ба 1) –2; 2) –8; 3) –0,5; 4) –1 баробар бударо қабул мекунад?

4. Муайян намоед, ки кадоме аз ададҳои –2; 0; 1; $\sqrt{3}$ сифрҳои функсияи квадратӣ мебошанд:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 + x$; 3) $y = x^2 - 3$;
4) $y = 5x^2 - 4x - 1$; 5) $y = x^2 - x$; 6) $y = x^2 + x - 2$?

5. Сифрҳои функсияи квадратиро ёбед:

1) $y = x^2 - x$; 2) $y = x^2 + 3$; 3) $y = 12x^2 - 17x + 6$;
4) $y = -6x^2 + 7x - 2$; 5) $y = 3x^2 - 5x + 8$; 6) $y = 2x^2 - 7x + 9$.

6. Агар сифрҳои функсияи квадратии $y = x^2 + px + q$, x_1 ва x_2 маълум бошанд, коэффисиентҳои p ва q-ро ёбед:

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; 2) $x_1 = -4$, $x_2 = 1$;
3) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 5$, $x_2 = -3$.

7. Қиматҳои x-ро ёбед, ки дар онҳо функсияҳои $y = x^2 + 2x - 3$ ва $y = 2x + 1$ қиматҳои баробарро қабул мекунанд.

§ 2. ФУНКСИЯИ $y = x^2$

Функсияи $y = x^2$, яъне функсияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$ -ро ҳангоми $a = 1$, $b = c = 0$ будан, дида мебароем. Барои сохтани гафики ин функсия ҷадвали қиматҳои зерин тартиб медиҳем:

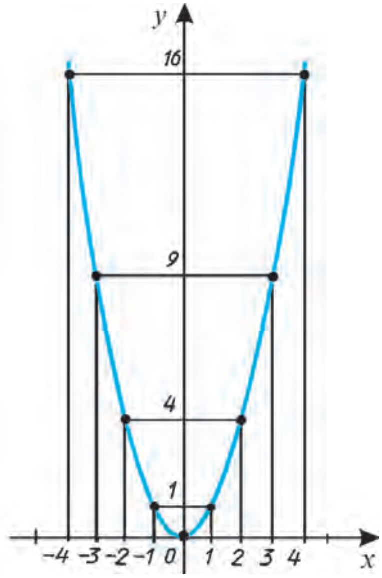
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Нуқтаҳои дар ҷадвал овардашударо сохта ва онҳоро бо хати каҷи равон пайваст намуда, графики функсияи $y = x^2$ -ро ҳосил мекунем (расми 1).

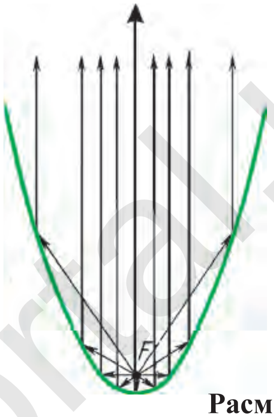
Хати каҷи графики функсияи $y = x^2$ *парабола* номида мешавад.

Хосиятҳои функсияи $y = x^2$ -ро дида мебароем.

1) Қимати функсияи $y = x^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан *мусбат* ва $x = 0$ будан ба *сифр* баробар аст. Пас, параболаи $y = x^2$ аз ибтидои координатаҳо



Расми 1.



Расми 2.

мегузарад ва нуқтаҳои дигари парабола болотари тири абсисса воқеъ аст. Мегӯянд,ки параболаи $y=x^2$ дар нуқтаи (0;0) ба тири абсисса мерасад.

2) Графики функсияи $y = x^2$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ аст, чунки $(-x)^2 = x^2$ мебошад. Масалан, $y(-3) = y(3) = 9$ (расми 1). Ҳамин тариқ, тири ординатаҳо тири симметрии парабола мебошад. Нуқтаи буриши параболаро бо тири симметриаш қуллаи парабола меноманд. Барои параболаи $y = x^2$ ибтидои координатаҳо қулла мебошад.

3) Ҳангоми $x \geq 0$ будан, ба қимати калонтари х қимати калонтари y мувофиқ меояд. Масалан, $y(3) > y(2)$ аст. Мегӯянд, ки функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $x \geq 0$ афзуншаванда мебошад (расми 1).

Ҳангоми $x \leq 0$ будан, ба қимати калонтари x қимати хурдтари y мувофиқ меояд. Масалан, $y(-2) < y(-4)$ аст. Мегӯянд, ки функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $x \leq 0$ камшаванда мебошад (расми 1).

Масъала. Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаи $y = x^2$ ва хати рости $y = x + 6$ -ро ёбед.

△ Координатаҳои нуқтаи буриш ҳалли системаи муодилаҳои

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6 \end{cases}$$ мебошад.

Аз ин система $x^2 = x + 6$, яъне, $x^2 - x - 6 = 0$ -ро ҳосил мекунем, ки аз ин ҷо $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ аст. Қиматҳои x_1 ва x_2 -ро ба яке аз муодилаҳои система гузошта, $y_1 = 9$, $y_2 = 4$-ро меёбем.

Ҷавоб: (3; 9), (–2; 4). ▲

Парабола дорои хосиятҳои зиёди шавқангез аст, ки дар техника истифода мешаванд.Масалан, дар тири симметрияи парабола нуқтаи F ҳаст, ки онро конун (фокус)-и парабола меноманд (расми 2). Агар дар ин нуқта манбаи рӯшноӣ воқеъ бошад, тамоми нурҳои аз парабола инъикосёфта ба таври параллел мераванд. Ин хосият ҳангоми сохтани прожекторҳо, локаторҳо ва дигар асбобҳо истифода бурда мешавад.

Конуни параболаи $y = x^2$ нуқтаи $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ мебошад.

Машқҳо

8. Графики функсияи $y = x^2$ -ро дар коғази миллиметрӣ созед.
Аз рӯи график тақрибан:
1) қимати тақрибии y -ро ҳангоми $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = 1,9$; $x = -2,3$; $x = -1,5$ будан ёбед;
2) агар $y = 2$; $y = 3$; $y = 4,5$; $y = 6,5$ бошад, қимати тақрибии x-ро ёбед.

9. Графики функсияи $y = x^2$ -ро насохта, муайян намоед, ки кадоме аз ин нуқтаҳо ба он тааллуқ дорад: $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$, $C(12; 144)$, $D(-3; -9)$.

10.. (Шифоҳӣ.) Нуқтаҳои нисбат ба тири ордината ба нуқтаҳои $A(3; 9)$, $B(-5; 25)$, С(4; 15), $D(\sqrt{3}; 3)$ симметрӣ бударо муайян намоед. Оё ин нуқтаҳо ба графики функсияи $y = x^2$ мутааллиқанд?

11.. (Шифоҳӣ.) Қиматҳои функсияи $y = x^2$ -ро муқоиса намоед:

1) $x = 2,5$ ва $x = 3\frac{1}{3}$;
2) $x = 0,4$ ва $x = 0,3$;
3) $x = -0,2$ ва $x = -0,1$;
4) $x = 4,1$ ва $x = -5,2$

12.. Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаи у $= x^2$ ва хати ростро ёбед:
1) $y = 25$;
2) $y = 5$;
3) $y = -x$;
4) $y = 2x$;
5) $y = 3 - 2x$;
6) $y = 2x - 1$.

13. Оё нуқтаи A нуқтаи буриши параболаи $y = x^2$ ва хати рости додашуда мебошад:

1) $y = -x - 6$, $A(-3; 9)$; *2)* $y = 5x-6$, $A(2; 4)$?

14. Оё тасдиқи зерин дуруст аст? Функсияи $y = x^2$ дар:

1) порчаи [1; 4] ;
2) дар интервали (2; 5);
3) дар интервали $x > 3$;
4) дар порчаи [–3; 4]?

15. Дар ҳамвории координатӣ параболаи $y = x^2$ ва хати рости $y = 3$ -ро созед. Дар кадом қиматҳои x нуқтаҳои парабола: болотари хати рост воқеанд; поёнтари хати рост воқеанд?

16. Дар кадом қиматҳои x қиматҳои функсияи $y = x^2$: 1) аз 9 калонтаранд; 2) аз 25 калонтар нестанд; 3) аз 16 хурдтар нестанд; 4) аз 36 хурдтаранд?

§ 3. ФУНКСИЯИ $y = ax^2$

Масъалаи 1. Графики функсияи $y=2x^2$ -ро созед.

△ Ҷадвали қиматҳои функсияи $y=2x^2$ -ро тартиб медиҳем:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

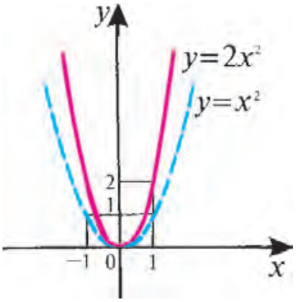
Нуқтаҳои ёфташударо месозем ва аз онҳо хати каҷи равонро мегузаронем (расми 3).▲

Графикҳои функсияҳои $y = 2x^2$ ва $y = x^2$ -ро муқоиса менамоем (расми 3). Дар худи як қимати x қимати функсияи $y = 2x^2$ назар ба қимати функсияи

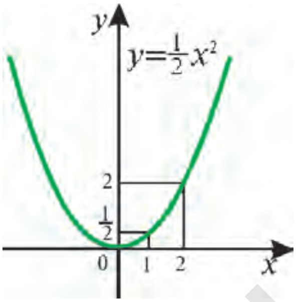
$y = x^2$ 2 маротиба калонтар аст. Ин чунин маъно дорад, ки ҳар як нуқтаи графики функсияи $y = 2x^2$ -ро аз нуқтаи графики функсияи $y = x^2$ -и дорои худи ҳамон абсисса ординатаашро 2 маротиба калон карда, пайдо кардан мумкин аст. Мегӯянд, ки графики функсияи $y = 2x^2$ ба воситаи аз тири Ox қад-қади тири Oy 2 маротиба ёзондани графики функсияи $y = x^2$ ҳосил мешавад.

Масъалаи 2. Графики $y = \frac{1}{2}x^2$ функцияро созед.

△Ҷадвали қиматҳои функсияи $y = \frac{1}{2}x^2$ -ро тартиб медиҳем:



Расми 3.



Расми 4.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=\frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Нуқтаҳои ёфташударо сохта, аз онҳо хати каҷи равон мегузаронем (расми 4).▲

Графикҳои функсияҳои $y=\frac{1}{2}x^2$ ва $y= x^2$ -ро муқоиса менамоем.

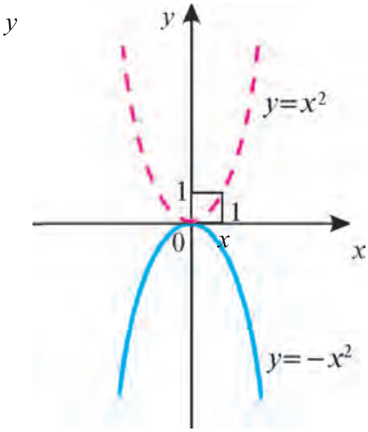
Ҳар як нуқтаи графики $y=\frac{1}{2}x^2$ -ро аз нуқтаи графики функсияи $y=x^2$ -и дорои худи ҳамон абсисса ординатаашро ду маротиба хурд карда, пайдо кардан мумкин аст.

Мегӯянд, ки графики функсияи $y=\frac{1}{2}x^2$ ба воситаи ба тири Ox қад-қади тири Oy 2 маротиба фишурдани графики функсияи $y=x^2$ ҳосил мешавад.

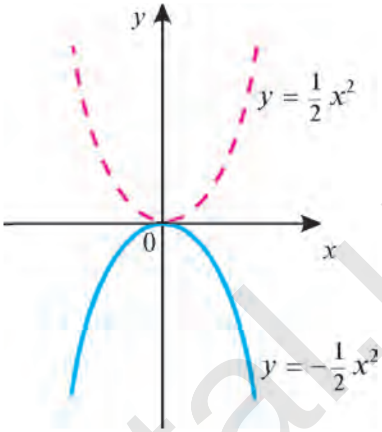
Масъалаи 3. Графики функсияи $y = – x^2$-ро созед.

△Функсияҳои $y = – x^2$ ва $y = x^2$ -ро муқоиса менамоем. Дар худи як қимати x қиматҳои ин функсияҳо аз рӯи модулҳо баробаранд ва аз рӯи аломат муқобиланд. Пас, графики функсияи $y = –x^2$ -ро ба воситаи симметрияи графики функсияи $y = x^2$ нисбат ба тири Ox сохтан мумкин аст (расми 5).▲

Мисли ҳамин, графики функсияи $y=\frac{1}{2}x^2$ ба графики функсияи $y=\frac{1}{2}x^2$ нисбат ба тири Ox симметрӣ аст (расми 6).



Расми 5.



Расми 6.

Графики функсияи $y = ax^2$-ро дар қимати дилхоҳи а $\neq 0$ низ парабола меноманд. Ҳангоми $a > 0$ будан, шохаҳои парабола ба боло, ҳангоми $a<0$ будан, ба поён равона шудаанд.

Қайд менамоем, ки конуни параболаи $y = ax^2$ дар нуқтаи $\left(0;\ \frac{1}{4a}\right)$ воқеъ мебошад.

Хосиятҳои асосии функсияи $y = ax^2$ -ро, ки ин ҷо $a \neq 0$ аст, номбар мекунем.

1) агар $a > 0$ бошад, функсияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан, қиматҳои мусбатро мегирад;

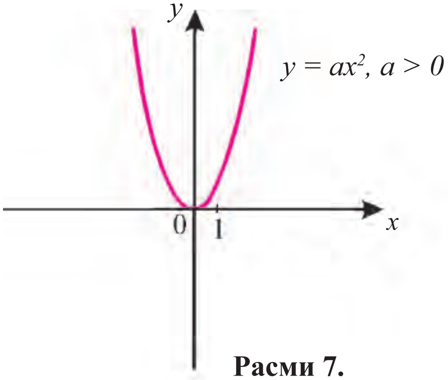
агар $a < 0$ бошад, функсияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \neq 0$ будан, қиматҳои манфиро мегирад,

қимати функсияи $y = ax^2$ танҳо ҳангоми $x = 0$ будан, ба 0 баробар аст.

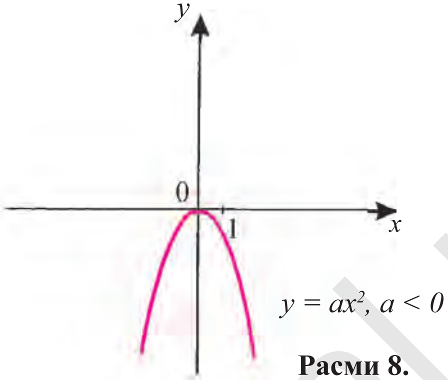
2) Параболаи $y = ax^2$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ аст;

3) агар а >0 бошад, функсияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \geq 0$ будан, меафзояд ва ҳангоми $x \leq 0$ будан, кам мешавад;

агар а < 0 бошад, функсияи $y = ax^2$ ҳангоми $x \geq 0$ будан, кам мешавад ва ҳангоми $x \leq 0$ будан, меафзояд.



Расми 7.



Расми 8.

Ҳамаи ин хосиятҳоро аз график ба таври аёнӣ дидан мумкин аст (расмҳои 7–8).

Машқҳо

17. Дар коғази миллиметрӣ графики функсияи $y = 3x^2$ -ро созед.
Аз рӯи график:
1) қиматҳои тақрибии y-ро ҳангоми $x = –2,8; –1,2; 1,5; 2,5$ будан ёбед;
2) қиматҳои тақрибии x-ро ҳангоми $y = 9; 6; 2; 8; 1,3$ будан, ёбед.

18. (Шифоҳӣ).Самти шохаҳои параболаро муайян кунед:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = \frac{1}{3}x^2$; 3) $y = -4x^2$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2$.

19. Графики функсияҳои зеринро дар як ҳамвории координатӣ созед:

1) $y = x^2$ ва $y = 3x^2$; 2) $y = -x^2$ ва $y = -3x^2$;
3) $y = 3x^2$ ва $y = -3x^2$; 4) $y = \frac{1}{3}x^2$ ва $y = -\frac{1}{3}x^2$.

Графикҳоро истифода карда, ошкор намоед, ки кадоме аз ии функсияҳо дар фосилаи $x \geq 0$ меафзоянд.

20. Координатаҳои нуқтаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед:

1) $y = 2x^2$ ва $y = 3x + 2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2$ ва $y = \frac{1}{2}x - 3$.

21. Оё функсияи

1) $y = 4x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^3$; 3) $y = -5x^2$; 4) $y = -\frac{1}{5}x^2$?

дар фосилаи $x \le 0$ камшаванда аст?

22. Муайян намоед, ки функсияи $y = -2x^2$:

1) дар порчаи $[-4; -2]$; 3) дар интервали $(3; 5)$;
2) дар порчаи $[-5; 0]$; 4) дар интервали $(-3;2)$

афзуншаванда ё камшаванда аст.

23. Масофаи ҳангоми ҳаракати собитшитоб тайкардаи ҷисм аз рӯи формулаи $s = \frac{at^2}{2}$ ҳисоб карда мешавад, ки ин ҷо s — масофа ба ҳисоби метр; a – шитоб ба ҳисоби м/с^2; t – вақт ба ҳисоби сония. Агар ҷисм дар 8 с масофаи баробари 96 м бударо тай карда бошад, шитоби a -ро ёбед.

§ 4. ФУНКСИЯИ $y = ax^2 + bx + c$

Масъалаи 1. Графики функсияи $y = x^2 - 2x + 3$ -ро созед ва онро бо графики функсияи $y = x^2$ муқоиса намоед.

△ Ҷадвали қиматҳои функсияи $y=x^2-2x+3$-ро тартиб медиҳем:

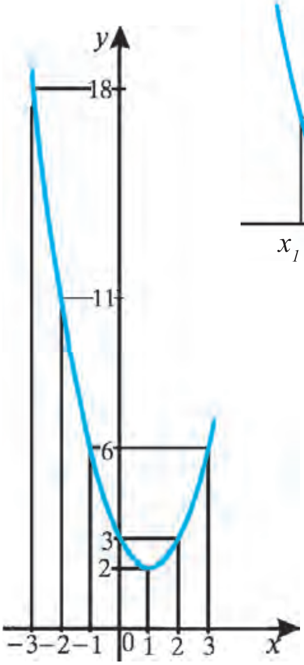
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2-2x + 3$	18	11	6	3	2	3	6

Нуқтаҳои ёфташударо месозем ва аз онҳо хати каҷи равонро мегузаронем (расми 9).

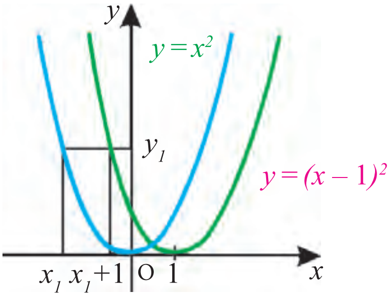
Барои муқоиса кардани графикҳо усули ҷудо кардани квадрати пурраро истифода намуда , формулаи $y = x^2-2x + 3$ -ро табдил медиҳем.

$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2.$$

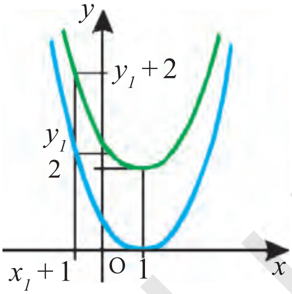
Аввал графики функсияҳои $y = x^2$ ва $y=(x-1)^2$-ро муқоиса менамоем. Мебинем, ки агар $(x_1; y_1)$ нуқтаи параболаи $y=x^2$, яъне $y_1 = x_1^2$ бошад, нуқтаи $(x_1+1;y)$ ба графики функсияи $y=(x-1)^2$ тааллуқ дорад, чунки $((x_1+1)-1)^2= x_1^2 =y_1$ аст. Пас, графики функсияи $y = (x-1)^2$ параболаест, ки аз параболаи $y = x^2$ дар натиҷаи ба тарафи рост ба як воҳид кӯчондан ҳосил мешавад (расми 10).



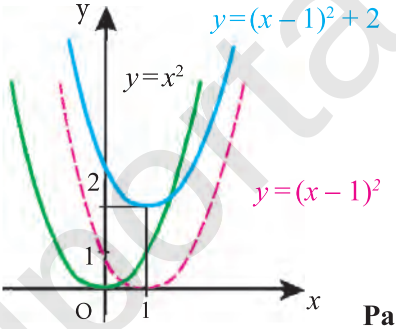
Расми 9.



Расми 10.



Расми 11.



Расми 12.

Акнун графики функсияҳои $y = (x–1)^2$ ва $y =(x–1)^2 + 2$ -ро муқоиса менамоем. Дар ҳар як қимати x қимати функсияи $y = (x–1)^2+2$ аз қимати функсияи $y=(x–1)^2$ ду воҳид калонтар аст. Пас, графики функсияи $y=(x–1)^2 + 2$ параболаест, ки он дар натиҷаи параболаи $y = (x–1)^2$ -ро ду воҳид ба боло кӯчондан пайдо шудааст (расми 11).

Пас, графики функсияи $y = x^2 – 2x + 3$ параболаест, ки он аз параболаи $y = x^2$ дар натиҷаи як воҳид ба рост ва ду воҳид ба боло кӯчондан ҳосил мешавад (расми 12). Тири симметрияи параболаи $y=x^2–2x+3$ хати рости ба тири ординатаҳо параллел ва аз қуллаи парабола - нуқтаи (1;2) гузаранда мебошад.▲

Графики функсияи $y =a(x - x_0)^2+y_0$ *параболаест, ки дар натиҷаи кӯчондани параболаи* $y = ax^2$ *ҳосил мешавад:*

агар $x_0 > 0$ бошад, қад-қади тири абсиссаҳо ба бузургии x_0 ба тарафи рост, агар $x_0 < 0$ бошад, ба бузургии $|x_0|$ ба тарафи чап кӯчонидан;

агар $y_0 > 0$ бошад, қад-қади тири ординатаҳо ба бузургии y_0 ба боло, агар $y_0 < 0$ бошад, ба бузургии $|y_0|$ ба поён кӯчонидан.

Функсияи квадратии дилхоҳи $y = ax^2+bx+c$ -ро ба воситаи ҷудо кардани квадрати пурра ба намуди

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a},$$

яъне, ба намуди $y = a(x-x_0)^2+y_0$ *навиштан мумкин аст,* ки ин ҷо

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = y(x_0) = \frac{-(b^2-4ac)}{4a}.$$

Ҳамин тариқ, графики функсия, $y=ax^2+bx+c$ параболаест, ки дар натиҷаи қад-қади тирҳои координатаҳо кӯчондани параболаи $y=ax^2$ ҳосил мешавад. Баробарии $y=ax^2+bx+c$ *-ро* муодилаи парабола меноманд. Координатаҳои қуллаи $(x_0;y_0)$ параболаи $y=ax^2+bx+c$ -ро аз рӯи формулаҳои

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\ y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

ёфтан мумкин аст. Тири симметрии параболаи $y=ax^2+bx+c$ хати ростест, ки ба тири ординатаҳо параллел буда, аз қуллаи парабола мегузарад.

Агар $a > 0$ бошад, шохаҳои параболаи $y = ax^2+bx+c$ ба боло равона шудаанд, вале агар $a < 0$ бошад — ба поён.

Масъалаи 2. Координатаҳои қуллаи параболаи $y=2x^2-x-3$ -ро ёбед.

△ Абсиссаи қуллаи парабола:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \text{ мебошад.}$$

Ординатаи қуллаи парабола

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8} \text{ мебошад.}$$

Ҷавоб: $\left(\frac{1}{4}; -3\frac{1}{8}\right)$. ▲

Масъалаи 3. Муодилаи параболаеро нависед,ки аз нуқтаи(–2;5) мегузарад ва нуқтаи (–1;2) қуллааш мебошад.

△ Азбаски қуллаи парабола нуқтаи (–1; 2) мебошад,бинобар ин муодилаи параболаро ба намуди $y = a(x + 1)^2 + 2$. навиштан мумкин аст.

$$y = a(x + 1)^2 + 2.$$

Мувофиқи шарт нуқтаи (–2; 5) ба парабола тааллуқ дорад ва пас,

$$5 = a(-2 + 1)^2 + 2,$$

мебошад, ки аз ин ҷо а = 3 -ро ҳосил мекунем.

Хулоса, парабола бо муодилаи

$$y = 3(x+1)^2+2 \text{ ва ё } y= 3x^2+6x + 5$$

муайян карда мешавад. ▲

Машқҳо

Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед (24–26):

24. (Шифоҳӣ.)

1) $y = (x - 3)^2 - 2$;
2) $y = (x + 4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x+2)^2-7$;
4) $y= -4(x-1)^2+ 5$.

25. 1) $y = x^2+4x+1$;
2) $y =x^2-6x-7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$;
4) $y = -3x^2+18x-7$.

26. 1) $y = x^2 + 2$;
2) $y= -x^2 - 5$;
3) $y = 3x^2 + 2x$;
4) $y = -4x^2 + x$;
5) $y = -3x^2 + x$;
6) $y = 2x^2 - x$.

27. *Дар тири Ох нуқтаеро ёбед, ки аз он тири симметрияи парабола мегузарад:*

1) $y = x^2 + 3$;
2) $y = (x + 2)^2$;
3) $y = -3(x + 2)^2 + 2$;
4) $y = (x - 2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$;
6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

28. Оё тири симметрияи параболаи $y= x^2-10x$ аз нуқтаҳои 1) (5; 10); 2) (3; –8); 3) (5; 0); 4) (–5; 1) мегузарад?

29. Координатаҳои нуқтаҳои буриши парабола ва тирҳои координатаҳоро ёбед.

1) $y = x^2 - 3x + 2$;
2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$;
4) $y = 3x^2 - 4x$

30. Маълум аст, ки парабола аз нуқтаи (–1; 6) мегузарад ва нуқтаи (1; 2) қуллаи он мебошад. Муодилаи ин параболаро нависед.

31. (Шифоҳӣ.) Оё нуқтаи (1; –6) ба параболаи $y=-3x^2+4x-7$ тааллуқ дорад? (1; 8) нуқта-чӣ?

32. Агар нуқтаи (–1; 2) ба параболаи: 1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$ *таалуқ дошта бошад,қимати k-ро ёбед.*

33. *Бо ёрии гардаи (шаблони)* параболаи $y=x^2$ график созед.
1) $y = (x + 2)^2$; 2) $y = (x - 3)^2$;
3) $y = x^2 - 2$; 4) $y=-x^2+1$;
5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2 + 1$.

34.. Муодилаи параболаи аз параболаи $y=2x^2$ ҳосилшударо нависед:
1)ба воситаи тири *Ox* 3 воҳид ба тарафи рост кӯчонидан;
2) ба воситаи тири *Oy* 4 воҳид ба боло кӯчонидан;
3) ба воситаи тири *Ox* 2 воҳид ба тарафи чап ва баъд қад-қади тири *Oy* 1 воҳид ба поён кӯчонидан;
4) ба воситаи тири *Ox* 1,5 воҳид ба тарафи рост ва баъд қад- қади тири *Oy* 3,5 воҳид ба боло кӯчонидан.

§ 5. СОХТАНИ ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ

Масъалаи 1. *Графики функсияи* $y=x^2-4x+3$- ро созед.

△ 1. Координатаҳои қуллаи параболаро ҳисоб менамоем:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2,$$

$$y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

Нуқтаи (2; –1)-ро месозем.

2. Аз нуқтаи (2; –1) хати рости ба тири ординатаҳо параллел бударо мегузаронем, ки он тири симметрияи парабола мебошад (расми 13, *a*)

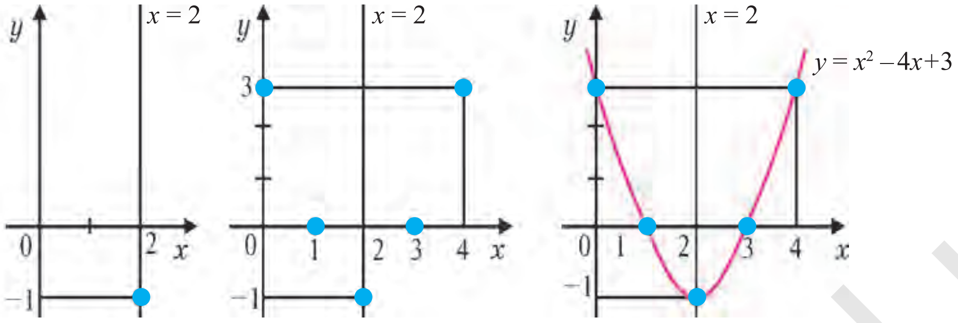
3. Муодилаи

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

-ро ҳал намуда, сифрҳои функсияро меёбем: $x_1 = 1$, $x_2 =3$. Нуқтаҳои (1; 0) ва (3; 0) -ро месозем (расми 13, б).

4. Дар тири *Ox* ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи $x = 2$ симметрӣ буда, масалан нуқтаҳои $x = 0$ ва $x = 4$-ро мегирем. Қимати функсияро дар ин нуқтаҳо меёбем: $y(0) = y(4) = 3$.

Нуқтаҳои (0; 3) ва (4; 3)-ро месозем (расми 13, *б*).



а) б) в) **расми 13.**

5. Аз нуқтаҳои сохташуда параболаро мегузаронем (расми 13, в). ▲

Графики функсияи квадратии дилхоҳи $y = ax^2 + bx + c$-ро аз рӯи худи ҳамин схема сохтан мумкин аст:

1. Аз рӯи формулаҳои $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$ қиматҳои x_0, ва y_0 -ро ҳисоб намуда, қуллаи парабола (x_0, y_0) сохта мешавад.

2. Аз қуллаи парабола хати рости ба тири ординатаҳо параллел сохта мешавад,ки он тири симметрияи парабола мебошад.

3. Сифрҳои функсия(агар мавҷуд бошанд) ёфта шуда, дар тири абсиссаҳо нуқтаҳои мувофиқи парабола сохта мешаванд.

4. Ду нуқтаи дилхоҳи парабола ,ки нисбат ба тири он симметрӣ мебошанд,сохта мешаванд.Барои ин дар тири Ox ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи x_0 $(x_0 \neq 0)$ симметрӣ гирифта шуда,қиматҳо мувофиқи функсияи ҳисоб карда мешаванд (ин қиматҳо баробаранд).Масалан, нуқтаҳои параболаи дорои абсиссаҳои $x = 0$ ва $x = 2x_0$ -ро сохтан мумкин аст (ординатаҳои ин нуқтаҳо ба c баробаранд).

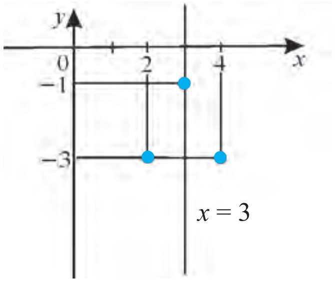
5. Аз нуқтаҳои сохташуда парабола гузаронида мешавад.Қайд менамоем,ки барои дақиқтар сохтани график боз якчанд нуқтаи параболаро сохтан муфид аст.

Масъалаи 2. *Графики функсияи* $y=-2x^2+12x-19$-ро созед.

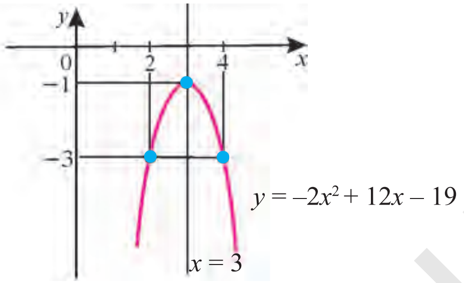
△ 1. Координатаҳои қуллаи параболаро ҳисоб менамоем:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3,\ y_0 = -2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 - 19 = -1\,.$$

Нуқтаи (3; –1)-ро, ки қуллаи парабола мебошад, месозем (расми 14).



Расми 14.



Расми 15.

2. Аз нуқтаи (3; –1) қуллаи симметрияи параболаро мегузаронем (расми 14).

3. Муодилаи $–2x^2 + 12x – 19 = 0$ ҳал намуда, боварӣ ҳосил мекунем,ки решаҳои ҳақиқӣ надорад ва бинобар ин парабола тири *Ох-ро бурида намегузарад.*

4. Дар тири *Ох* ду нуқтаи нисбат ба нуқтаи $x = 3$ симметрӣ буда, масалан нуқтаҳои $x = 2$ ва $x = 4$ -ро мегирем. Қимати функсияро дар ин нуқтаҳо меёбем:

$$y(2) = y(4) = –3.$$

Нуқтаҳои (2;-3) ва (4;-3)-ро месозем (расми 14).

5. Аз нуқтаҳои сохташуда парабола мегузаронем (расми 15).

Масъалаи 3. Графики функсияи $y=–x^2+x+6$ -ро созед ва муайян кунед, ки ин функсия дорои кадом хосиятҳо аст.

△ Барои сохтани график сифрҳои функсияро меёбем: $–x^2+x+6=0$, ки аз ин ҷо $x_1=–2$, $x_1=3$. Координатаҳои қуллаи параболаро ин тавр ёфтан мумкин аст :

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

Азбаски $a=–1 < 0$ аст, бинобар ин шохаҳои парабола ба поён равона шудаанд.

Боз якчанд нуқтаи параболаро меёбем: $y(–1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)=6$, $y(2)=4$. Параболаро месозем (расми 16).

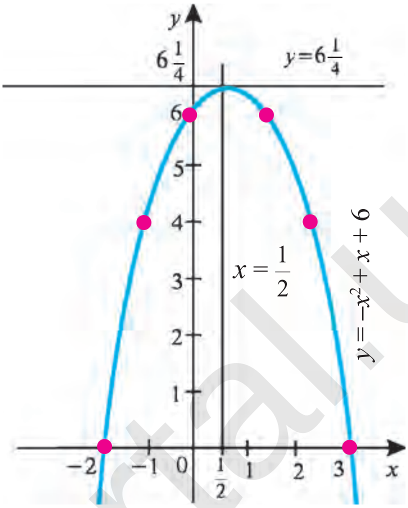
Бо ёрии график хосиятҳои зерини функсияи $y =–x^2+ x + 6$-ро ҳосил мекунем:

1) дар қиматҳои дилхоҳи x қиматҳои функсия хурдтар аз $6\frac{1}{4}$ ё баробари он мебошад.

2) ҳангоми $-2<x<3$ будан, қиматҳои функсия мусбатанд, ҳангоми $x<-2$ da ва $x>3$ будан, манфианд, ҳангоми $x=-2$ ва $x=3$ будан, ба сифр баробаранд;

3) дар фосилаи $x\leq\frac{1}{2}$ функсия меафзояд, дар фосилаи $x\geq\frac{1}{2}$ кам мешавад;

4) ҳангоми $x=\frac{1}{2}$ будан, функсия қимати калонтарини ба $6\frac{1}{4}$ баробар бударо мегирад;



Расми 16.

5) графики функсия нисбат ба хати рости $x=\frac{1}{2}$ симметрӣ аст. ▲

Қайд менамоем, ки функсияи $y=ax^2+bx+c$ *қимати калонтарин ё хурдтаринро* дар нуқтаи $x_0=-\frac{b}{2a}$ мегирад; нуқтаи x_0 абсиссаи қуллаи парабола мебошад.

Қимати функсияро дар нуқтаи x_0 аз рӯи формулаи $y_0=y(x_0)$ ёфтан мумкин аст. Агар $a>0$ *бошад, функсия дорои қимати хурдтарин мебошад, вале агар* $a<0$ *бошад, функсия дорои қимати калонтарин мебошад.*

Масалан, функсияи $y = x^2-4x+3$ ҳангоми $x = 2$ будан, қимати хурдтаринро дорад, ки он ба -1 баробар аст (расми 13, в); функсияи $y=-2x^2+12x-9$ ҳангоми $x = 3$ будан, қимати калонтаринро мегирад, ки он ба –1 баробар аст (расми 15).

Масъалаи 4. Суммаи ду адади мусбат ба 6 баробар аст. Агар суммаи квадратҳои онҳо хурдтарин бошад, ин ададҳоро ёбед. Қимати хурдтарини суммаи квадратҳои ин ададҳо ба чӣ баробар аст;

△ Адади якумро бо ҳарфи x ишорат менамоем, он гоҳ адади дуюм ба $6-x$ баробар мешавад, суммаи квадратҳои онҳо бошад ба $x^2+(6-x)^2$ баробар мешавад. Ин ифодаро табдил медиҳем:

$$x^2+(6-x)^2 = x^2+36-12x + x^2 = 2x^2-12x+36.$$

Масъала ба ёфтани қимати хурдгарини функсияи $y = 2x^2-12x+36$ оварда шуд. Координатаҳои қуллаҳои ин параболаро меёбем.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3,\ y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Хулоса, ҳангоми x = 3 будан, функсия қимати хурдтаринро мегирад, ки он ба 18 баробар аст.

Ҳамин тариқ, адади якум ба 3, адади дуюм низ ба 6-3=3 баробар аст. Қимати суммаи квадратҳои инададҳо ба 18 баробар аст ▲

Машқҳо

35. Координатаҳои қуллаи параболаро ёбед:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

36. Координатаҳои нуқтаҳои буриши парабола ва тирҳои координатаҳоро ёбед:

1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

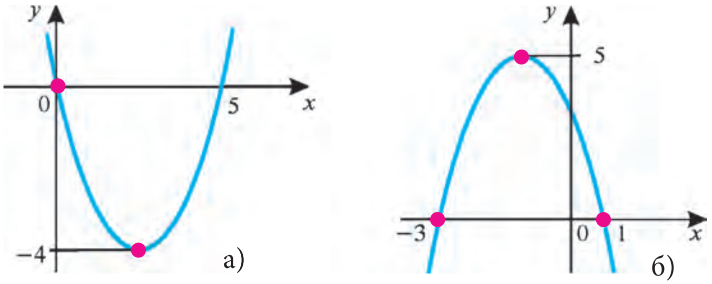
Графики функсияро созед ва аз рӯи график: 1) қиматҳои x- ро ёбед, ки дар онҳо қиматҳои функсия мусбатанд; манфианд; 2) фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавии функсияро ёбед; 3) муайян намоед, ки дар кадом қимати x функсия қимати калонтарин ё хурдтаринро мегирад ва онро ёбед **(37–38):**

37. 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

38. 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$.

39. Аз рӯи графики додашудаи функсияи квадратӣ (расми 17) хосиятҳои онро муайян намоед.

40. Адади 15-ро ба намуди суммаи ду адад чунон ифода намоед, ки ҳосили зарби онҳо калонтарин гардад.



Расми 17.

41. Суммаи ду адад ба 10 баробар аст. Агар суммаи кубҳои онҳо хурдтарин бошад, ин ададҳоро ёбед.

42. Майдони шаклан росткунҷаи ба девори хона ҳамҷаворро аз се тараф бо панҷараи 12 м иҳота кардан талаб карда мешавад.

Андозаҳои майдон чӣ гуна шавад, масоҳати он аз ҳама калон мешавад?

43. Дар секунҷа суммаи асос ва баландии ба ин асос фуровардашуда ба 14 баробар аст. Оё чунин секунҷа дорои масоҳати ба 25 см^2 баробар шуда метавонад?

44. Графикро насохта, муайян намоед, ки дар кадом қимати x функсия қимати калонтарин (хурдтарин) дорад; ин қиматро ёбед:

1) $y = x^2 - 6x + 13$;
2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$;
4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

45. Аломати коэффисиентҳои муодилаи $y=ax^2+bx+c$ -ро муайян намоед, агар шохаҳои парабола ба:

1) боло равон шуда, абсиссаи қулла манфӣ ва ординатааш мусбат бошад;

2) поён равон шуда, абсисса ва ординатаи қуллааш манфӣ бошанд.

46. Аз баландии 5 м аз камон бо суръати ибтидоии 50 м/с ба боло ба таври вертикалӣ тир холӣ карда шуд. Баъд аз t сония баландии тири баромада бо ҳисоби метр аз рӯи формулаи

$h=h(t)=5+50t-\frac{gt^2}{2}$ *ҳисоб карда мешавад, ки ин ҷои* $g \approx 10$ м/с^2. Баъд аз чанд сония тир: 1) ба баландии калонтарин мебарояд ва он ба чӣ баробар аст? 2) ба замин меафтад?

§ 6. НОБАРОБАРИИ КВАДРАТӢ ВА ҲАЛЛИ ОН

Масъалаи 1. Тарафҳои росткунча ба 2 дм ва 3 дм баробаранд. Ҳар як тарафҳои онро ба детсиметрҳои миқдорашон баробар зиёд намуданд, ки дар натиҷа масоҳати росткунча аз 12 дм^2 зиёд шуд. Ҳар як тараф чӣ тавр тағйир ёфт;

△ Бигзор ҳар як тарафи росткунча x детсиметрӣ зиёд карда шуд.

Он гоҳ тарафҳои росткунчаи нав $(2 + x)$ ва $(3 + x)$ детсиметр, масоҳати он $(2 + x)(3 + x)$ детсиметри квадратӣ мешаванд. Мувофиқи шарти масъала $(2 + x)(3 + x) > 12$ мешавад, ки аз ин ҷо $x^2 + 5x + 6 > 12$ ва ё $x^2+5x - 6 > 0$ ҳосил мешавад.

Қисми чапи ин нобаробариро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:

$$(x + 6)(x - 1) > 0.$$

Азбаски мувофиқи шарти масъала $x > 0$ аст, бинобар ин $x + 6 > 0$ мебошад.

Ҳар ду қисми нобаробариро ба адади мусбати $x + 6$ тақсим намуда,
$x - 1 > 0$, яъне, $x > 1$ -ро ҳосил намудем.

Ҷавоб: Ҳар як тарафи росткунҷаро ба аз 1 детсиметр зиёд дароз намуданд. ▲

Дар нобаробарии $x^2 + 5x - 6 > 0$ бо ҳарфи x адади номаълум ишора карда шудааст. Ин мисоли нобаробарии квадратӣ мебошад.

Агар дар қисми чапи нобаробарӣ сеаъзогии квадратӣ ва дар қисми росташ сифр истад, чунин нобаробариро нобаробарии квадратӣ меноманд.

Масалан, нобаробариҳои,

$$2x^2 - 3x + 1 \geq 0, \qquad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

квадратӣ мебошанд.

Хотиррасон мекунем, ки *ҳалли нобаробарии якномаълума* гуфта, ҳамон қимати номаълумро меноманд, ки дар он нобаробарӣ ба баробарии ададии дуруст табдил меёбад.

Ҳал кардани нобаробарӣ – ин ёфтани тамоми ҳалҳои он ё муқаррар кардаии мавҷуд набудани ҳалҳо мебошад.

Масъалаи 2. Нобаробариро ҳал намоед:

$$x^2 - 5x + 6 > 0.$$

△ Муодилаи квадратии $x^2 - 5x + 6 = 0$ ду решаи гуногун дорад: $x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Пас, сеаъзогии квадратии $x^2 - 5x + 6$-ро ба зарбкунандаҳо ҷудо кардан мумкин аст:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Бинобар ин, нобаробарии мазкурро ин тавр навиштан мумкин аст:

$$(x - 2)(x - 3) > 0$$

Агар зарбкунандаҳо аломатҳои якхела дошта бошанд, ҳосили зарби ду зарбкунандаҳо мусбат аст.

1) Ҳолатеро мебинем, ки ҳарду зарбкунандаҳо мусбатанд, яъне $x - 2 > 0$ ва $x - 3 > 0$.

Ин ду нобаробарӣ системаи $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$ -ро ташкил медиҳанд. Ин системаро ҳал намуда, $\begin{cases} x > 2, \\ x > 3 \end{cases}$ - ро ҳосил мекунем, ки аз ин ҷо $x > 3$ аст.

Пас, ҳамаи ададҳои $x > 3$ ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$ мебошанд

2) Акнун ҳолати манфӣ будани ҳар ду зарбкунандаро дида мебароем, яъне $x - 2 < 0$ ва $x - 3 < 0$.

Ин ду нобаробарӣ системаи: $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$ -ро ташкил медиҳанд

Системаро ҳал намуда, $\begin{cases} x < 2, \\ x < 3 \end{cases}$ -ро ҳосил мекунем, ки аз ии ҷо $x < 2$ аст. Пас, ҳамаи ададҳои $x < 2$ низ ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$ мебошанд.

Ҳамин тариқ, ҳалҳои нобаробарии $(x - 2)(x - 3) > 0$, пас нобаробарии аввалаи $x^2 - 5x + 6 > 0$ низ ададҳои $x < 2$ ва ададҳои $x > 3$ мебошанд.

Ҷавоб : $x < 2,\ x > 3$. ▲

Умуман, агар муодилаи квадратии $ax^2 + bx + c = 0$ ду решаи гуногун дошта бошад, барои ҳалли нобаробариҳои квадратии $ax^2 + bx + c > 0$ ва $ax^2 + bx + c < 0$ қисми чапи нобаробарии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо карда, ба ҳалли системаи нобаробариҳои дараҷаи якум овардан мумкин аст.

Масъалаи 3. Нобаробариро ҳал намоед: $-3x^2-5x+2>0$

△ Барои қулайтар гузаронидани ҳисоб нобаробарии мазкурро ба намуди нобаробарии квадратии дорои коэффисиенти якуми мусбат ифода менамоем. Барои ин ҳар ду қисми онро ба - 1 зарб мезанем:

$$3x^2+5x-2<0.$$

Решаҳои муодилаи $3x^2+5x-2=0$ -ро меёбем:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm7}{6},$$

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-2.$$

Сеаъзогии квадратиро ба зарбкунандаҳо ҷудо карда, ҳосил намудем:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Аз ин ҷо ду системаро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases}x-\frac{1}{3}>0,\\x+2<0;\end{cases}\qquad\begin{cases}x-\frac{1}{3}<0,\\x+2>0.\end{cases}$$

Системаи якумро ба намуди:

$$\begin{cases}x>\frac{1}{3},\\x<-2,\end{cases}$$

навиштан мумкин аст, ки аз ин ҷо ҳал надоштани он аён аст.

Системаи дуюмро ҳал намуда, ҳосил мекунем: $\begin{cases}x<\frac{1}{3},\\x>-2,\end{cases}$

ки аз ин ҷо $-2<x<\frac{1}{3}$.

Аз ин ҷо бармеояд, ки ҳалҳои нобаробарии, $3(x-\frac{1}{3})(x+2)<0$ яъне нобаробарии $-3x^2-5x+2>0$ ҳамаи ададҳои фосилаи $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$ мебошад.

Ҷавоб: $-2<x<\frac{1}{3}$. ▲

Машқҳо

47. (Шифоҳӣ.) Нишон диҳед, ки кадоме аз нобаробариҳои зерин квадратӣ мебошанд:

1) $x^2 - 4 > 0$; 2) $x^2 - 3x - 5 \le 0$; 3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$; 5) $x^2 - 1 \le 0$; 6) $x^4 - 16 > 0$.

48. Нобаробариҳоро ба намуди нобаробариҳои квадратӣ оред:

1) $x^2 < 3x + 4$; 2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$; 4) $2x(x + 1) < x + 5$.

49. (Шифоҳӣ.) Кадоме аз ададҳои 0; –1; 2 ҳалҳои нобаробарии зерин мебошанд:

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$; 2) $-x^2 + 3,5x + 2 \ge 0$;
3) $x^2 - x - 2 \le 0$; 4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$

Нобаробариҳоро ҳал намоед (50—52):

50. 1) $(x - 2)(x + 4) > 0$; 2) $(x - 11)(x - 3) < 0$;
3) $(x - 3)(x + 5) < 0$; 4) $(x + 7)(x + 1) > 0$.

51. 1) $x^2 - 4 < 0$; 2) $x^2 - 9 > 0$;
3) $x^2 + 3x < 0$; 4) $x^2 - 2x > 0$.

52. 1) $x^2 - 3x + 2 < 0$; 4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$; 5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$; 6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

53. Нобаробариҳоро ҳал намоед:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$; 2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \le 0$;

3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$; 4) $(x - 1)(x + 3) > 5$.

54. Графики функсияро созед. Аз рӯи график чунин қиматҳои x-ро ёбед, ки дар онҳо функсия қиматҳои мусбат; манфӣ; баробари сифрро қабул мекунанд.

1) $y = 2x^2$; 2) $y = -(x + 1,5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$; 4) $y = -3x^2 - x - 2$.

55. Маълум аст, ки ададҳои x_1 ва x_2 (ин ҷо $x_1 < x_2$ аст) сифрҳои функсияи $y = ax^2 + bx + c$ мебошанд. Исбот намоед, ки агар адади дар байни x_1 ва x_2 воқеъ буда, яъне $x_1 < x_0 < x_2$ бошад, нобаробарии $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$ ҷой дорад.

§ 7. БО ЁРИИ ГРАФИКИ ФУНКСИЯИ КВАДРАТӢ ҲАЛ НАМУДАНИ НОБАРОБАРИИ КВАДРАТӢ

Хотиррасон менамоем, ки функсияи квадратӣ ба воситаи формулаи $y = ax^2 + bx + c$ (ин ҷо $a \neq 0$) аст, муайян карда мешавад.

Бинобар ин, ҳал кардани нобаробарии квадратӣ бо ёфтани сифрҳои функсияи квадратӣ ба фосилаҳое, ки дар онҳо функсияи квадратӣ қиматҳои мусбат ё манфиро мегирад, оварда мешавад.

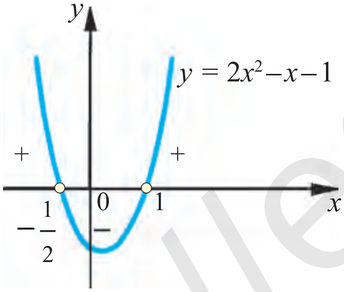
Масъалаи 1. Нобаробарии:

$2x^2 - x - 1 \leq 0$. -ро бо ёрии график ҳал намоед.

△ Графики функсияи квадратии у $= 2x^2 - x - 1$ параболаест, ки шохаҳояш ба боло равона шудаанд.

Нуқтаҳои буриши ин парабола ва тири Ох -ро меёбем. Барои ии муодилаи квадратии $y = 2x^2 - x - 1 = 0$ -ро ҳал менамоем. Решаҳои ин муодила

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4};\ x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{2}.$$



Расми 18.

Пас, парабола тири Ox -ро дар нуқтаҳои $x = -\frac{1}{2}$ ва $x = 1$ мебурад (расми 18).

Нобаробарии $2x^2 - x - 1 \leq 0$ -ро ҳамон қиматҳои Ox қонеъ менамоянд, ки дар онҳо қиматҳои функсия ба сифр баробар ё манфианд, яъне ҳамон қиматҳои x, ки дар онҳо нуқтаҳои парабола дар тири Ox ё поёнтари ин тир воқеанд. Аз расми 18 аён аст, ки ҳамаи ададҳои порчаи $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ ҳамин қиматҳо мебошанд.

Ҷавоб : $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. ▲

Графики ин функсияро ҳангоми ҳал кардани нобаробариҳои дигар, ки аз нобаробарии додашуда танҳо бо аломати нобаробарӣ фарқ мекунанд, низ истифода кардан мумкин аст.

1) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 < 0$ ададҳои фосилаи $-\frac{1}{2} < x < 1$, яъне $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ мебошанд.i

2) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 > 0$ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x < -\frac{1}{2}$ ва $x > 1$ мебошанд.

3) ҳалҳои нобаробарии $2x^2 - x - 1 \geq 0$ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x \leq -\frac{1}{2}$ ва $x \geq 1$ мебошанд.

Масъалаи 2. Нобаробарии:

$$4x^2 + 4x + 1 > 0.$$

△ Ангораи графики функсияи $y = 4x^2 + 4x + 1 = 0$ -ро месозем.

Шохаҳои ин парабола ба боло равон шудаанд. Муодилаи $4x^2+4x+1=0$ дорои як решаи $x = -\frac{1}{2}$ мебошад ва аз ҳамин сабаб парабола дар нуқтаи $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

ба тири

Ox мерасад. Графики ин функсия дар расми 19 тасвир ёфтааст. Барои ҳал кардани ин нобаробарӣ муқаррар кардан лозим аст, ки дар кадом қиматҳои x қиматҳои функсия мусбатанд.

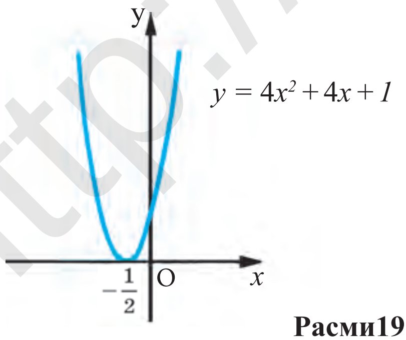
Ҳамин тариқ, нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 > 0$ -ро ҳамон қиматҳои x қонеъ менамоянд, ки дар онҳо нуқтаҳои парабола болотари тири Ox воқеъ мебошанд. Аз расми 19 аён аст, ки чунин қиматҳо аз тамоми ададҳои ҳақиқии x, ғайр аз

$x = -0,5$ иборатанд.

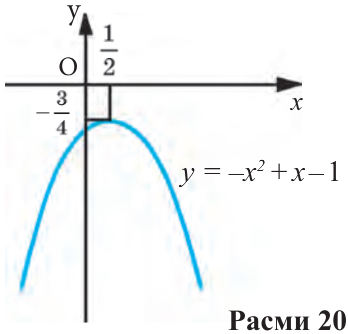
Ҷавоб: $x \neq -0,5$. ▲

Аз расми 19 инчунин аён аст, ки

1) ҳалҳои нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$ тамоми ададҳои ҳақиқӣ мебошанд;



Расми19.



Расми 20.

2) нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 \le 0$ дорои як ҳалли $x = -\frac{1}{2}$ аст;

3) нобаробарии $4x^2 + 4x + 1 < 0$ ҳал надорад.

Агар пешакӣ $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$ буданаш ба эътибор гирифта шавад, ин нобаробариро шифоҳӣ ҳал кардан мумкин аст.

Масъалаи 3. Нобаробарии $-x^2 + x - 1 < 0$ -ро ҳал намоед.

△ Ангораи графики функсияи $y=-x^2+x-1$-ро месозем. Шохаҳои ин парабола ба поён равона шудаанд. Муодилаи $-x^2+x-1 = 0$ решаҳои ҳақиқӣ надорад, бинобар ин парабола тири Ox -ро намебурад. Пас, ин парабола поёнтари тири Ох воқеъ аст (расми 20). Ин чунин маъно дорад, ки қиматҳои функсияи квадратӣ дар тамоми қиматҳои х манфӣ мебошанд, яъне нобаробарии $-x^2 + x - 1 < 0$ дар тамоми қиматҳои ҳақиқии x ҷой дорад. ▲

Аз расми 20 инчунин аён аст, ки тамоми қиматҳои ҳақиқии х ҳалҳои нобаробарии $-x^2 + x - 1 \le 0$ мебошанд, вале нобаробариҳои $-x^2+x-1> 0$ ва $x^2 + x - 1 \ge 0$ ҳал надоранд.

Ҳамин тавр, барои бо ёрии график ҳал кардани нобаробарии квадратӣ зарур аст, ки:

1) аз рӯи аломати коэффисиенти якуми функсияи квадратӣ самти шохаҳои парабола муайян карда шавад;

2) решаҳои ҳақиқии муодилаи квадратии мувофиқ ёфта шавад ё муқаррар карда шавад, ки онҳо вуҷуд надоранд;

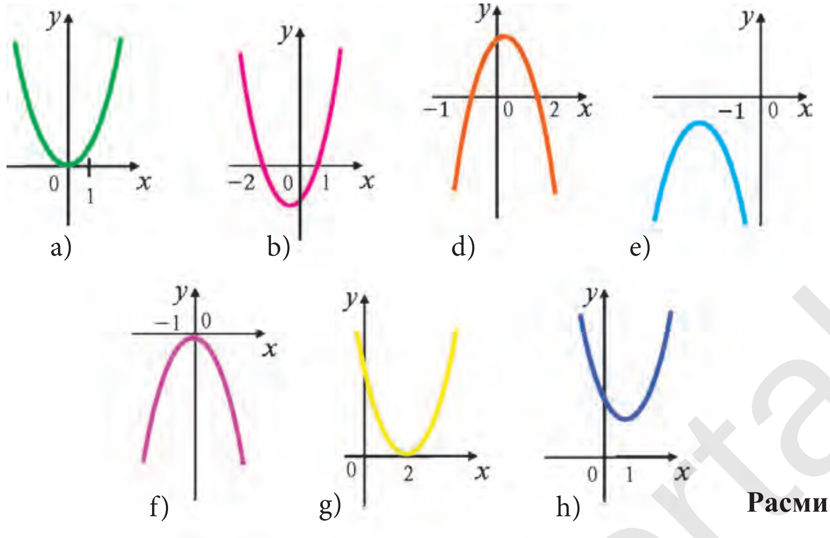
3) нуқтаҳои буриш ё расиш бо тири Ох -ро агар онҳо вуҷуд дошта бошанд, истифода бурда, ангораи графики функсияи квадратӣ сохта шавад;

4) аз рӯи график фосилаҳое, ки дар онҳо қиматҳои матлуби функсия воқеъ мебошанд, муайян карда шаванд.

Машқҳо

56. Графики функсияи $y =x^2+x-6$ -ро созед. Аз рӯи график қиматҳои х-ро ёбед, ки дар онҳо функсия: қиматҳои мусбатро мегирад; қиматҳои манфиро мегирад.

57. (Шифоҳӣ.) Графики функсияи $y =ax^2+bx+c$ -ро истифода намуда (расми 21) нишон диҳед, ки дар кадом қиматҳои х функсия қиматҳои мусбат; манфӣ; баробари сифрро мегирад.



Расми 21.

Нобаробарии квадратиро ҳал намоед : (**58–62**):

58. 1) $x^2 - 3x + 2 \leq 0$; 2) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$;
3) $-x^2 + 3x - 2 < 0$; 4) $-x^2 + 3x + 4 > 0$.

59. 1) $2x^2 + 7x - 4 < 0$; 2) $3x^2 - 5x - 2 > 0$;
3) $-2x^2 + x + 1 \geq 0$; 4) $-4x^2 + 3x + 1 \leq 0$.

60. 1) $x^2 - 6x + 9 > 0$; 2) $x^2 - 14x + 49 \leq 0$;
3) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$; 4) $4x^2 - 20x + 25 < 0$.

61. 1) $x^2 - 4x + 6 > 0$; 2) $x^2 + 6x + 10 < 0$;
3) $x^2 + x + 2 > 0$; 4) $x^2 + 3x + 5 < 0$;
5) $2x^2 - 3x + 7 < 0$; 6) $4x^2 - 8x + 9 > 0$.

62. 1) $5 - x^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 7 < 0$;
3) $-2{,}1x^2 + 10{,}5x < 0$; 4) $-3{,}6x^2 - 7{,}2x < 0$.

63. (Шифоҳӣ.) Нобаробариро ҳал кунед:
1) $x^2 + 10 > 0$; 2) $x^2 + 9 < 0$;
3) $(x - 1)^2 + 1 > 0$; 4) $(x + 5)^2 + 3 < 0$;
5) $-(x + 1)^2 - 2 < 0$; 6) $-(x - 2)^2 - 4 > 0$.

(Шифоҳӣ.) Нобаробариҳои квадратӣ ҳал кунед: (**64–66**):

64. 1) $4x^2 - 9 > 0$; 2) $9x^2 - 25 > 0$;
3) $x^2 - 3x + 2 > 0$; 4) $x^2 - 3x - 4 < 0$;
5) $2x^2 - 4x + 9 \leq 0$; 6) $3x^2 + 2x + 4 \geq 0$.

65. 1) $2x^2 - 8x \leq -8$; 2) $x^2 + 12x \geq -36$;
3) $9x^2 + 25 < 30x$; 4) $16x^2 + 1 > 8x$;
5) $2x^2 - x \geq 0$; 6) $3x^2 + x \leq 0$.

66. 1) $x(x + 1) < 2(1 - 2x - x^2)$; 2) $x^2 + 2 < 3x - \frac{1}{8}x^2$;
3) $6x^2 + 1 \leq 5x - \frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x - 1) < 3(x + 1)$.

67. Тамоми қиматҳои х -ро ёбед, ки дар онҳо функсия қиматҳои аз сифр калонтар набударо мегирад:
1) $y = -x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 4\frac{1}{2}$; 4) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4x - 12$.

68. 1) Нишон диҳед, ки ҳангоми $q > 1$ будан, ҳамаи қиматҳои ҳақиқии х ҳалҳои нобаробарии $x^2 - 2x + q > 0$ мебошанд;
2) нишон диҳед, ки ҳангоми $q > 1$ будан, нобаробарии $x^2+2x+q \leq 0$ ҳалҳои ҳақиқӣ надорад

69. *Тамоми ҳалҳои r -ро ёбед, ки дар онҳо нобаробарии* $x^2-(2+r)x+4 > 0$ *дар ҳамаи қиматҳои ҳақиқии х ҷой дорад.* .

§ 8. УСУЛИ ИНТЕРВАЛҲО

Ҳангоми ҳалли нобаробариҳо бисёр вакг усули интервалҳо истифода бурда мешавад. Ин усулро ба воситаи мисолҳо мефаҳмонем.

Масъала1. Муайян намоед, ки дар кадом қиматҳои х сеаъзогии $x^2 - 4x + 3$ қиматҳои мусбат ва дар кадомашон қиматҳои манфӣ қабул мекунад.

△ Решаҳои муодилаи $x^2-4x+3= 0$-ро меёбем.

$x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Бинобар ин, $x^2-4x+ 3= (x - 1)(x - 3)$.

Нуқтаҳои $x = 1$ ва $x = 3$ (расми 22) тири ададиро ба се фосила ҷудо мекунанд:

$$x < 1; \quad 1 < x < 3; \quad x > 3.$$

Чун фосилаҳои $1 < x < 3$, фосилаҳои $x < 1$, $x > 3$ низ интервалҳо номида мешаванд.

Расми 22.

Қад-қади тири ададӣ аз рост ба чап ҳаракат намуда, мушоҳида мекунем, ки дар интервали $x > 3$ сеаъзогии $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ қиматҳои мусбатро мегиранд, чунки дар ин ҳолат ҳар ду зарбкунандаи $x - 1$ ва $x - 3$ мусбат мебошанд.

Дар интервали оянда, яъне $1 < x < 3$ ин сеаъзогӣ қиматҳои манфиро мегирад ва ҳамин тариқ, ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 3$ аломаташро иваз мекунад. Ин аз он сабаб рӯй медиҳад, ки дар ҳосили зарби

$(x - 1)(x - 3)$ ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 3$ зарбкунандаи якум $x - 1$ аломаташро иваз намекунад, вале зарбкунандаи дуюм $x - 3$ аломаташро иваз мекунад.

Ҳангоми гузариш аз нуқтаи $x = 1$ сеаъзогӣ боз аломаташро иваз мекунад, чунки дар ҳосили зарби $(x - 1)(x - 3)$ зарбкунандаи якум $x - 1$ аломаташро иваз мекунад, вале зарбкунандаи дуюм $x - 3$ аломаташро иваз намекунад.

Пас, ҳаигоми аз рӯи тири ададӣ аз рост ба чап аз як интервал ба интервали ҳамсоя ҳаракат кардан, аломатҳои ҳосили зарби $(x-1)(x-3)$ иваз мешаванд.

Ҳамин тавр, масъалаи оид ба аломати сеаъзогии квадратии $x^2 - 4x + 3$ -ро бо усули зерин ҳал кардаи мумкин аст.

Дар тири ададӣ решаҳои муодилаи $x^2 - 4x + 3 = 0$ яъне, нуқтаҳои $x = 1$, $x = 3$-ро қайд мекунем. Онҳо тири ададиро ба се интервал ҷудо мекунанд (расми 22). Дар интервали $x > 3$ мусбат будани қиматҳои сеаъзогии

$x^2 - 4x + 3$ -ро ба назар гирифта, дар интервалҳои дигар аломатҳои онро аз рӯи тартиби ивазшавӣ мегузорем (расми 23). Аз расми 23 аён аст, ки ҳангоми $x < 1$ ва $x > 3$ будан, $x^2 - 4x + 3 > 0$ аст ва ҳангоми $1<x<3$ будан, $x^2 - 4x + 3 < 0$ аст. ▲

Расми 23.

Тарзи муоинашударо усули интервалҳо меноманд. Ин усул ҳангоми ҳал кардани нобаробариҳои квадратӣ ва баъзе нобаробариҳои дигар истифода бурда мешавад.

Масалан, масъалаи 1-ро ҳал карда, мо амалан бо усули интервалҳо нобаробариҳои $x^2 - 4x + 3 > 0$ ва $x^2 - 4x + 3 < 0$ -ро ҳал намудем.

Масъалаи 2. Нобаробарии $x^3 - x < 0$ -ро ҳал намоед.

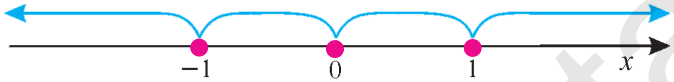
△ Бисёраъзогии $x^3 - x$ -ро ба зарбкунандаҳо ҷудо мекунем:
$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$.

Пас, нобаробариро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$(x + 1)x(x - 1) < 0.$$

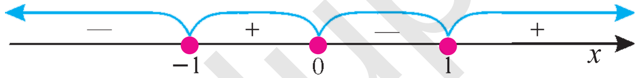
Нуқтаҳои –1, 0 ва 1 -ро дар тири ададӣ қайд мекунем. Ин нуқтаҳо тири ададиро ба чор интервал ҷудо мекунанд (расми 24).

$$x < -1; \quad -1 < x < 0; \quad 0 < x < 1; \quad x > 1$$



Расми 24.

Ҳангоми $x > 1$ будан, ҳамаи зарбкунандаҳои ҳосили зарби $(x+1)x(x-1)$ мусбатанд ва аз ҳамин сабаб дар интервали $x > 1$ нобаробарии $(x + 1)x(x - 1) > 0$ ҷой дорад. Ҳангоми гузариш ба интервали ҳамсоя иваз шудани аломати ҳосили зарбро ба назар гирифта, аломати ҳосили зарби $(x + 1)x(x - 1)$ -ро барои ҳар як интервал меёбем (расми 25).



Расми 25.

Ҳамин тариқ ,ҳамаи қиматҳои x,ки мутааллиқӣ интервалҳои $x<-1$ ва $0<x<1$ мебошанд,ҳалҳои нобаробарӣ мебошанд.

Ҷавоб: $x < -1$, $0 < x < 1$. ▲

Масъалаи 3. Нобаробарии $(x^2 - 9)(x + 3)(x - 2) > 0$ ҳал намоед.

△ Ин нобаробариро бо намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$(x + 3)^2(x - 2)(x - 3) > 0. \qquad (1)$$

Азбаски ҳангоми ҳамаи $x \neq -3$ нобаробарии $(x + 3)^2 > 0$ ҷой дорад, бинобар ин, ҳангоми $x \neq -3$ будан, маҷмӯи ҳалҳои нобаробарии (1) ва нобаробарии

$$(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (2)$$

мувофиқ меоянд.

Қимати $x = -3$ ҳалли нобаробарии (1) намебошад, чунки ҳангоми $x = -3$ будан, қисми чапи нобаробарӣ ба 0 баробар аст. Нобаробарии (2)-ро бо усули интервалҳо ҳал намуда, $x < 2$, $x > 3$ -ро ҳосил мекунем (расми 26).

Расми 26.

Ҳалли нобаробарии аввала набудани $x = -3$ -ро ба назар гирифта, ба таври комил ҳосил менамоем:

$x < -3$; $-3 < x < 2$; $x > 3$. ▲

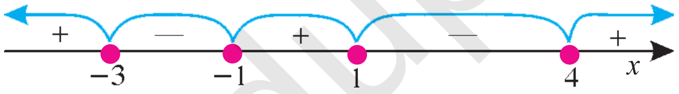
Масъалаи 4. Нобаробариро ҳал намоед:

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4} \geq 0.$$

△ Сурат ва махраҷи касрро ба зарбкунандаҳо ҷудо намуда,ҳосил мекунем:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geq 0. \qquad (3)$$

Дар тири ададӣ нукгаҳои -3; -1; 1; 4 -ро, ки дар онҳо сурат ё махраҷ ба сифр табдил меёбад, қайд менамоем. Ин нуқтаҳо хати рости ададиро ба 5 интервал ҷудо мекунанд (расми 27).



Расми 27.

Ҳангоми $x > 4$ будан, ҳамаи зарбкунандаҳои сурат ва махраҷи каср мусбатанд ва аз ҳамин сабаб каср мусбат аст. Ҳангоми гузариш аз як интервал ба интервали дигар каср аломаташро иваз менамояд, бинобар ин аломатҳои касрро чуноне, ки дар расми 27 нишон дода шудааст, ҷойгир кардан мумкин аст. Қиматҳои $x = -3$ ва $x = 1$ нобаробарии (3)-ро қонеъ менамоянд, вале ҳангоми $x = -1$ ва $x = 4$ будан, каср маъно надорад. Ҳамин тариқ, нобаробарии додашуди ҳалҳои зерин дорад:

$x \leq -3$; $-1 < x \leq 1$; $x > 4$. ▲

Машқҳо

70. (Шифоҳӣ.) Нишон диҳед, ки қимати $x = 5$ ҳалли нобаробарӣ мебошад.

1) $(x-1)(x-3) > 0$;   2) $(x+2)(x+5) > 0$;

3) $(x-7)(x-10) > 0$;   4) $(x+1)(x-4) > 0$.

Нобаробариҳоро бо усули интервалҳо ҳал намоед (**71–77**):

71. 1) $(x+2)(x-7)>0$; 2) $(x+5)(x-8)<0$;

3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right)>0$.

72. 1) $x^2+5x>0$; 2) $x^2-9x>0$; 3) $2x^2-x<0$;

4) $x^2+3x<0$; 5) $x^2+x-12<0$; 6) $x^2-2x-3>0$.

73. 1) $x^3-16x<0$; 2) $4x^3-x>0$;

3) $(x^2-1)(x+3)<0$; 4) $(x^2-4)(x-5)>0$.

74. 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;

3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$.

75. 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1,5-x}{3+x}\geq 0$;

4) $\frac{3,5+x}{x-7}\leq 0$; 5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geq 0$.

76. 1) $\frac{x^2+2x+3}{(x-2)^2}\leq 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geq 0$; 3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$.

77. 1) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 2) $(x+2)(x^2+x-12)>0$;

3) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leq 0$; 4) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leq 0$.

Нобаробариро ҳал намоед (**78–80**):

78. 1) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 2) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$; 3) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leq 0$;

4) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}\geq 0$; 5) $\frac{x^2+5x+6}{x+3}\geq 0$; 6) $\frac{x^2-8x+7}{x-1}\leq 0$.

79. 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$.

80. 1) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 2) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$; 3) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geq 0$.

§ 9. СОҲАИ МУАЙЯНКУНАНДАИ ФУНКСИЯ

Шумо дар синфи 8 бо мафҳуми функсия шинос шудед. Ҳамин мафҳумро хотиррасон мекунем.

Агар барои ҳар як қимати а-и аз ягон маҷмуи ададҳо гирифташуда адади у мувофиқ гузошта шуда бошад, дар он маҷмӯъ функсияи у(х) дода шудааст, мегӯянд. Дар ин ҳолат х тағйирёбандаи озод ё ки аргумент, у бошад, тағйирёбандаи ғайриозод ё ки функсия номида мешавад.

Барои шумо функсияи хаттии $y=kx+b$ ва функсияи квадратии $y=ax^2+bx+c$ шиносанд. Барои ин функсияҳо адади дилхоҳи ҳақиқӣ қимати аргумент шуда метавонад.

Акнун барои ҳар як адади ғайриманфии х функсияи ададии $\sqrt{x}$ мувофиқ гузорандаро, яъне функсияи $y=\sqrt{x}$ -ро дида мебароем. Барои ин функсия аргумент метавонад фақат ададҳои ғайриманфиро қабул кунад: $x \geq 0$. Дар ин маврид функсия дар тамоми маҷмӯи ададҳои ғайриманфӣ муайян номида мешавад ва ин маҷмӯъ барои функсияи $y=\sqrt{x}$ соҳаи муайянкунанда номида мешавад.

Умуман, соҳаи муайянкунандаи функсия гуфта маҷмӯи ҳамон қиматҳоеро меноманд, ки аргументи он метавонад қабул кунад.

Масалан, функсияи бо формулаи $y=\frac{1}{x}$ додашуда ҳангоми $x \neq 0$ будан муайян аст, яъне соҳаи муайянкунии ин функсия — маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқии аз сифр фарққунанда мебошад..

Агар функсия бо формула дода шуда бошад, он гоҳ функсияро дар тамоми қиматҳои аргумент, ки формулаи додашуда ба маъно соҳиб аст (яъне дар ифодаи дар қисми рости формула истода ҳамаи амалҳои нишондодашуда иҷрошаванда), муайяншуда номидан қабул гардидааст.

Ёфтани соҳаи муайянкунандаи функсияи бо формула додашуда — ин ёфтани тамоми қиматҳои аргумент мебошад, ки дар он формула ба маъно соҳиб аст.

Масъалаи 1. Соҳаи муайянкунандаи функсияро ёбед:

1) $y(x)=2x^2+3x+5x$;   2) $y(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $y(x)=\dfrac{1}{x+2}$;   4) $y(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$.

△ Азбаски ифодаи $2x^2+3x+5$ дар қиматҳои дилхоҳи x ба маъно соҳиб аст, бинобар ин функсия дар тамоми x-ҳо муайяншуда мебошад

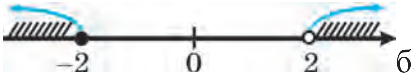
Чавоб: x – адади дилхоҳ

2)Ифодаи $\sqrt{x-1}$ ҳангоми $x-1\geq 0$ будан, ба маъно соҳиб аст, яъне функсия ҳангоми x ≥ 1 будан, муайяншуда мебошад.

Чавоб: $x\geq 1$.

3) Ифодаи $\dfrac{1}{x+2}$ ҳангоми $x+2\neq 0$ будан, ба маъно соҳиб аст, яъне функсия ҳангоми $x\neq -2$ будан, муайяншуда мебошад

Чавоб: $x\neq -2$.

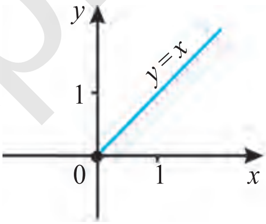


Расми 28.

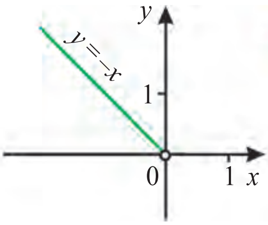
4) Ифодаи $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-2}}$ ҳангоми $\dfrac{x+2}{x-2}\geq \mathbf{0}$ будан ба маъно соҳиб аст. Ин нобаробариро ҳал карда ҳосил мекунем (расми 28). 1) $x \leq -2$ ва $x> 2$, функсия ҳангоми $x \leq -2$ ва $x>2$ будан, муайяншуда мебошад.

Чавоб: $x\leq -2, \quad x>2$. ▲

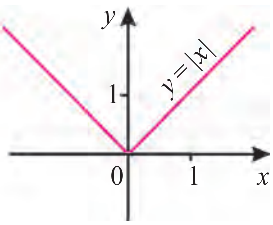
Хотиррасон мекунем, ки дар ҳамвории координатӣ графики функсия гуфта, маҷмӯи нуқтаҳоеро меноманд, ки абсиссаҳои он ба қиматҳои тағйирёбандаи новобастаи аз соҳаи муайянкунандаи функсия гирифташуда ва ординатаҳои он, ба қиматҳои мувофиқи функсия баробар.



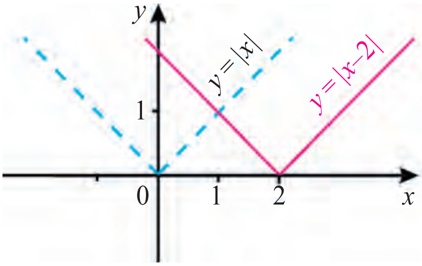
Расми 29



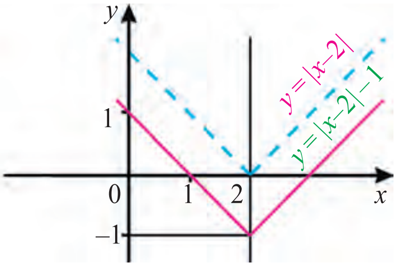
Расми 30.



Расми 31.



Расми 32.



Расми 33.

Масъалаи 2. *y Соҳаи муайянкунандаи функсияи y = |x| -ро ёбед ва графики онро созед.*

△Хотиррасон мекунем: $|x|=\begin{cases} x, \text{ агар } x^3\geq 0 \text{ бошад,} \\ -x, \text{ агар } x<0 \text{ бошад.} \end{cases}$

Ҳамин тавр, ифодаи $|x|$ дар x -ҳои ҳақиқии ихтиёрӣ ба маъно соҳиб аст, яъне соҳаи муайянкунандаи функсияи $y = |x|$ маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

Агар $x > 0$ бошад, дар он ҳолат $|x| = x$ аст, бинобар ин ҳангоми $x > 0$ будан, графики функсияи у = $|x|$ биссектрисаи кунҷи якуми координати мешавад (расми 29).

Агар x < 0 бошад, он гоҳ $|x|$ = –x мешавад, бинобар ин барои x- ҳои манфи графики функсияи у = $|x|$ биссектрисаи кунҷи дуюми координатӣ мешавад (расми 30).

Графики функсияи у = $|x|$ дар расми 31 тасвир шудааст. ▲

Барои x-и ихтиёри $|-x| = |x|$ аст. Бинобар ин графики функсияи $y=|x|$ нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ ҷойгир шудааст.

Масъалаи 3. Графики функсияи $y=|x-2|-1$ -ро созед.

△ Графики функсияи $y = |x - 2|$ аз графики функсияи $y = |x|$ ҳангоми онро дар тири Ox 2 воҳид ба тарафи рост кӯчонидан ҳосил мешавад (расми 32).

Барои ҳосил кардани графики функсияи $y=|x-2|-1$ графики функсияи

$y=|x-2|$- ро як воҳид ба поён кучонидан кифоя (расми 33).▲

Машқҳо

81. Функсия бо формулаи $y(x) = x^2 - 4x + 5$дода шудааст
1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y(2)$ ро ёбед;
2) агар $y(x) = 1$, $y(x) = 5$, $y(x) = 10$, $y(x) = 17$ бошад, *қимати x-ро ёбед.*

82. Функсия бо формулаи $y(x)=\frac{x+5}{x-1}$ дода шудааст:

1) $y(-2)$, $y(0)$, $y(\frac{1}{2})$, $y(3)$ -ро ёбед. 2) агар $y(x) = -3$, $y(x) = -2$, $y(x) = 13$, $y(x) = 19$ бошад, қимати x- ро ёбед

Соҳаи муайянкунандаи функсияро ёбед (**83–84**):

83. (Шифоҳӣ).

1) $y=4x^2-5x+1$; 2) $y=2-x-3x^2$; 3) $y=\frac{2x-3}{x-3}$;

4) $y=\frac{3}{5-x^2}$; 5) $y=\sqrt[4]{6-x}$; 6) $y=\sqrt{\frac{1}{x+7}}$.

84. 1) $y=\frac{2x}{x^2-2x-3}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-7x+10}$;

3) $y=\sqrt[3]{3x^2-2x+5}$; 4) $y=\sqrt[6]{\frac{2x+4}{3-x}}$; 5) $y=\sqrt{\frac{3x-2}{4-x}}$.

85. Функсия бо формулаи $y(x)=|2-x|-2$ дода шудааст:
1) $y(-3)$, $y(-1)$, $y(1)$, $y(3)$ -ро ёбед
2) агар $y(x)=-2$, $y(x)=0$, $y(x)=2$, $y(x)=4$ бошад, қимати x -ро ёбед.

86. Соҳаи муайянкунандаи функсияро ёбед:

1) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$; 2) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

3) $y=\sqrt[4]{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 4) $y=\sqrt{\frac{x^2-4}{x+1}}$;

5) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)(x-4)}$; 6) $y=\sqrt[8]{\frac{x^2+4x-5}{x-2}}$.

87. Оё нуқтаи (−2; 1) мутааллиқи графики мешавад:
1) $y=3x^2+2x+29$; 2) $y=|4-3x|-9$;
3) $y=\frac{x^2+3}{x-1}$; 4) $y=\left|\sqrt{2-x}-5\right|-2$?

88. Графики функсияро созед:
1) $y=|x+3|+2$; 2) $y=-|x|$; 3) $y=2|x|+1$;
4) $y=1-|1-x|$; 5) $y=|x|+|x-2|$; 6) $y=|x+1|-|x|$.

89. *Функсияи* $y=\mathrm{a}x^2+bx+c$ *аз нуқтаҳои* A (0; 1), B (1; 2), C ($\frac{5}{6}$;1) мегузарад.1) a, b, c -ро ёбед; 2) дар кадом қиматҳои x $y=0$ мешавад 3)графики функсияро созед

§ 10. АФЗУНШАВӢ ВА КАМШАВИИ ФУНКСИЯ

Шумо бо функсияҳои $y=x$ ва $y=x^2$ шинос ҳастед. Ин функсияҳо ҳолатҳои хусусии функсияи дараҷагӣ, яъне

$$y=x^r \qquad (1)$$

(дар ин ҷо r– адади додашуда) мебошад. Бигзор r адади натуралӣ бошад, яъне $r=n=1, 2, 3, ...$ Дар ин ҳол функсияи дараҷагии нишондиҳандааш натуралии у = x^n-ро ҳосил мекунем.
Ин функсия дар маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ, яъие дар тамоми тири ададт муайяншуда мебошад. Одатаи, маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқт бо ҳарфи R ишорат карда мешавад. Ҳамии тавр, функсияи дараҷагии нишондиҳандааш натуралии $y=x^n$ барои $x\in\boldsymbol{R}$ муайяншуда мебошад. Агар дар (1) $r=-2k$, $k\in N$ бошад, он гоҳ функсияи $y=x^{-2k}=\frac{1}{x^{2k}}$ ҳосил мешавад. Ин функсия дар тамоми қиматҳои x, ки аз сифр фарқ мекунад, муайяншуда мебошад. Графики он нисбат ба тири Oy симметрӣ мебошад. Агар $r=-(2k-1)$, $k\in N$ бошад, он гоҳ функсияи $y=x^{-(2k-1)}=\frac{1}{x^{2k-1}}$ -ро ҳосил мекунем. Хосиятҳои он ба шумо, шинос буда, ба хосиятҳои функсияи $y=\frac{1}{x}$ монанд аст. Бигзор p ва q ададҳои натуралӣ ва $r=\frac{p}{q}$ касри ихтисорнашаванда бошад. Соҳаи муайянкунандаи функсияи $y=\sqrt[q]{x^p}$ ҷуфт ё тоқ будани p ва q нигоҳ

карда, гуногун мешавад. Масалан, функсияҳои $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x}$ барои $x\in\boldsymbol{R}$ ихтиёрӣ муайяншуда мебошад. Функсияи $y=\sqrt[4]{x^3}$ бошад, дар қиматҳои ғайриманфии х, яъне дар қиматҳои $x \geq 0$ муайяншуда аст.

Аз курси «Алгебра»-и синфи 8 маълум аст, ки ҳар як адади ирратсионалиро бо касри даҳии охирнок, яъне бо адади ратсионалӣ наздик кардаи мумкин аст. Дар амалиёт амалҳо бо ададҳои ирратсионалӣ тавассути наздикшавии ратсионалии оиҳо иҷро карда мешавад. Ии амалҳо тарзе дохил карда мешавад, ки хосиятҳои баробариҳо ва нобаробариҳо барои ададҳои ратсионалӣ, ҳамчунин барои ададҳои ирратсионалӣ низ пурра нигоҳ дошта мешаванд.

Бигзор ададҳои ратсионалии, r_1, r_2, ..., r_k, ... барои адади ирратсионалии г наздикшавии ратсионалӣ бошад. Дар ии ҳолат дар мавриди адади мусбат будани x дараҷаҳои ратсионалии х, яъие ададҳои x^{r1}, x^{r2}, ... , x^{rR}, . наздикшавии дараҷаи x^r мебошанд. Дараҷаи бо ии тарз муайяншуда, дараҷаи нишондиҳандааш ирратсионалӣ номида мешавад. Бинобар ин, барои $x > 0$ функсияи $y = x^r$ -ро, ки r – нишондиҳандаи дараҷаи ихтиёрӣ мебошад, муайян кардаи мумкин аст. Функсияи дараҷагӣ барои қиматҳои x, ки формулаи (1) маъио дорад, муайяншуда мебошад. Масалан, соҳаи муайянкунандаи функсияҳои $y = x$ ва $y = x^2$ ($r = 1$ ва $r = 2$) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад; соҳаи муайянкунандаи функсияи $y=\frac{1}{x}$ ($r = -1$) маҷмуи ҳамаи ададҳои ҳақиқии аз сифр фарққунанда мебошад; соҳаи муайянкунандаи функсияи $y=\sqrt{x}$ ($r=\frac{1}{2}$) маҷмӯи ҳамаи ададҳои ғайриманфӣ мебошад.

Хотиррасон менамоем, ки агар ба қимати калони аз ягон фосила гирифтаи аргумент қимати калони функсия мувофиқ ояд, яъне барои x_1, x_2-и ихтиёрии ба ҳамон фосила мутааллиқ, аз нобаробарии $x_2>x_1$ нобаробарии $y(x_2) > y(x_1)$ бараояд, функсияи $y(x)$ дар ин фосила афзуншаванда ном дорад.

Агар барои x_1, x_2-и ихтиёрии ба ягон фосила мутааллиқ аз нобаробарии $x_2 > x_1$ $y(x_2) < y(x_1)$ бароояд, функсияи $y(x)$ дар ин фосила камшаванда номида мешавад.

Масалан, функсияи $y = x$ дар тири адади меафзояд. Функсияи $y=x^2$ дар фосилаи $x \geq 0$ меафзояд, дар фосилаи $x \leq 0$ кам мешавад.

Афзоиш ё камшавии функсияи дарачагии $y = x^r$ аз ишораи нишондиҳандаи дарача вобаста аст.

Агар $r>0$ бошад, он гоҳ функсияи дарачагии $y=x^r$ дар фосилаи $x\geq 0$ меафзояд.

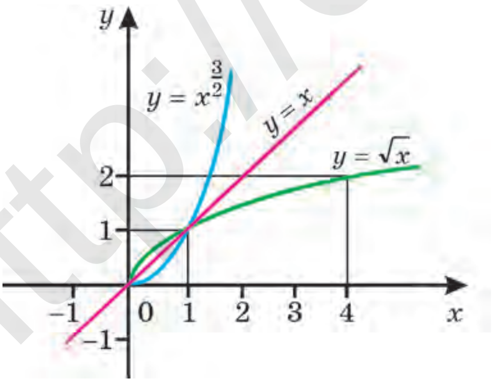
○ Бигзор $x_2>x_1\geq 0$ бошад. Нобаробарии $x_2>x_1$ *дарачаи мусбати $r > 0$ бардошта ҳосил мекунем:* $x_2^r > x_1^r$,яъне $y(x_2) > y(x_1)$. ●

Масалан, $y=\sqrt{x}$ ва $y=x^{\frac{3}{2}}$ дар фосилаи $x \geq 0$ меафзоянд. Графики ин функсияҳо дар расми 34 тасвир шудаанд. Чӣ тавре аз расм мебинем, графики функсияи $y=\sqrt{x}$ дар фосилаи $0 < x < 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар боло, дар фосилаи $x > 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар поён мехобад.

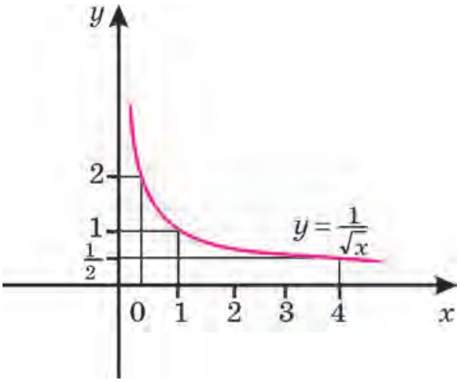
Агар $0 < r < 1$ бошад, графики функсияи $y = x^r$ айнан ба ҳамин хосият соҳиб мешавад.

Графики функсияи $y = x^2$ дар фосилаи $0 < x < 1$ аз графики функсияи $y = x$ дар поён, дар фосилаи $x > 1$ бошад, аз графики функсияи $y = x$ дар боло мехобад.Агар $r > 1$ бошад, графики функсияи $y = x^r$ айнан ба ҳамин хосият соҳиб мешавад.

Агар $r < 0$ бошад, он гоҳ функсияи дарачагии $y = x^r$ дар фосилаи $x > 0$ кам мешавад.



Расми 34.



Расми 35.

○ Бигзор $x_2 > x_1 > 0$ бошад. Нобаробарии $x_2>x_1$-ро ба дараҷаи манфӣ бардошта,аз рӯи хосияти нобаробариҳои қисмҳои чап ва рост $x^r_2 < x^r_1$, яъне $y(x_2) < y(x_1)$ -ро ҳосил мекунем. ●

Масалан, $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$, яъне функсияи $y=x^{-\frac{1}{2}}$ дар фосилаи $x > 0$ кам мешавад. Графики ин функсия дар расми 35 тасвир шудааст.

Масъалаи 1. Муодилаи $x^{\frac{3}{4}}=27$ -ро ҳал кунед.

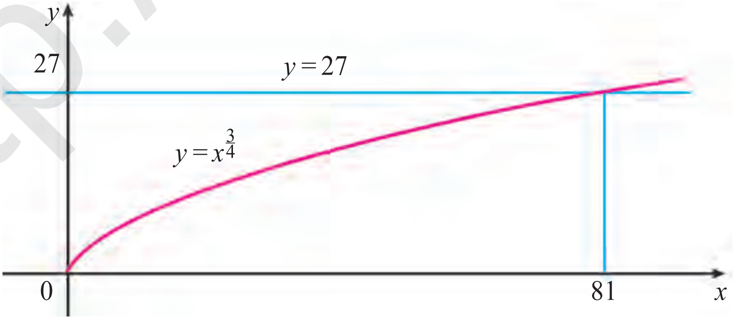
△ Функсияи $y=x^{\frac{3}{4}}$ дар фосилаи $x \geq 0$ муайяншуда мебошад.

Бинобар ин муодилаи додашуда фақат решаҳои ғайриманфиро соҳиб шуда метавонад. Яке аз чунин решаҳо: $x=27^{\frac{4}{3}}=\left(\sqrt[3]{3^3}\right)^4=3^4=81$

Муодила ба дигар решаҳо соҳиб нест, чунки функсияи $y=x^{\frac{3}{4}}$ ҳангоми $x \geq 0$ меафзояд ва бинобар ин, агар $x > 81$ бошад, он гоҳ $x^{\frac{3}{4}}>27$, агар $x < 81$ бошад, он гоҳ $x^{\frac{3}{4}}>27$, мешавад (расми 36). ▲

Азбаски муодилаи $x^r = b$ (ин ҷо – $r \neq 0$, $b > 0$) ҳамеша соҳиби решаи мусбати $x = b^{\frac{1}{r}}$ аст ва решаи ягона будани он монанди ҳамин исбот карда мешавад. Пас, функсияи $y = x^r$ (ин ҷо $r > 0$) ҳангоми $x > 0$ будан, ҳамаи қиматҳои мусбатро қабул мекунад.

Ин бошад, сарфи назар аз афзоиши бомароми функсияи $y=x^{\frac{3}{4}}$ (расми 36), аз тири Ox ба қадри имкон дуршавии графики он ва чӣ



Расми 36.

гунагии адади мусбати b, буришашро бо хати рости $y=b$ мефаҳмонад.

Масъалаи 2. Дар фосилаи $x > 1$ афзоиши функсияи $y=x+\frac{1}{x}$ -ро исбот кунед.

△ Бигзор $x_2 > x_1 > 1$ бошад, $y(x_2) > y(x_1)$ буданашро нишон медиҳем. Фарқи $y(x_2) - y(x_1)$ -ро дида мебароем:

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-(x_1+\frac{1}{x_1})=(x_2-x_1)\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}.$$

Азбаски $x_2 > x_1$, $x_1 > 1$, $x_2 > 1$ аст, пас $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 > 1$, $x_1x_2 > 0$ мебошад. Бинобар ин $y(x_2) - y(x_1) > 0$, яъне $y(x_2) > y(x_1)$. ▲

Машқҳо

90. Графики функсияро созед. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиро ёбед.

1) $y=2x+3$; 2) $y=1-3x$; 3) $y=x^2+2$;
4) $y=3-x^2$; 5) $y=(1-x)^2$; 6) $y=(2+x)^2$.

91. (Шифоҳӣ). Функсияи

1) $y=x^{\frac{3}{7}}$; 2) $y=x^{-\frac{3}{4}}$; 3) $y=x^{-\sqrt{2}}$; 4) $y=x^{\sqrt{3}}$

дар фосилаи x > 0 афзун мешавад ё кам?

92. Ҳангоми $x > 0$ будан, тарҳи графики функсияро кашед:

1) $y=x^{\frac{3}{2}}$; 2) $y=x^{\frac{2}{3}}$; 3) $y=x^{-\frac{3}{2}}$; 4) $y=x^{-\frac{2}{3}}$.

93. Решаи мусбати муодиларо ёбед:

1) $x^{\frac{1}{2}}=3$; 2) $x^{\frac{1}{4}}=2$; 3) $x^{-\frac{1}{2}}=3$; 4) $x^{-\frac{1}{4}}=2$;

5) $x^{\frac{5}{6}}=32$; 6) $x^{-\frac{4}{5}}=81$; 7) $x^{-\frac{1}{3}}=8$; 8) $x^{\frac{4}{5}}=16$.

94. Дар коғази миллиметрӣ графики функсияи $y=\sqrt[4]{x}$ -ро кашед.

Аз рӯи график:

1) қимати x-ро ҳангоми у = 0,5; 1; 4; 2,5 будан;

2) қиматҳои тақрибии $\sqrt[4]{1,5}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{2,5}$; $\sqrt[4]{3}$ -ро ёбед.

95: Координатаҳои нуктаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед

1) $y=x^{\frac{4}{3}}$ ва $y=625$; 2) $y=x^{\frac{6}{5}}$ ва $y=64$;

3) $y=x^{\frac{3}{2}}$ ва $y=216$; 4) $y=x^{\frac{7}{3}}$ ва $y=128$.

96. 1)Дар фосилаи $0<x<1$ камшавии функцияи $y=x+\frac{1}{x}$ -ро исбот кунед.

2) Дар фосилаи $x\geq 0$ камшавӣ ва дар фосилаи $x \leq 0$ афзуншавии функцияи $y=\frac{1}{x^2+1}$ -ро исбот кунед.

3) Дар фосилаҳои $x\leq 1$ ва $x\geq 1$афзуншавӣ ва дар порчаи $-1\leq x\leq 1$ камшавии функцияи $y=x^3-3x$ *-ро исбот кунед;*

4) Дар фосилаи $x\geq 1$ афзуншави ва дар порчаи $-1\leq x\leq 1$ камшавии функцияи $y=x-2\sqrt{x}$ -ро исбот кунед.

97. Графики функсияро созед,фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиро ёбед:

1) $y=\begin{cases} x+2, \text{ агар } x\leq -1 \text{бошад,} \\ x^2, \text{ агар } x>-1 \text{ бошад,} \end{cases}$

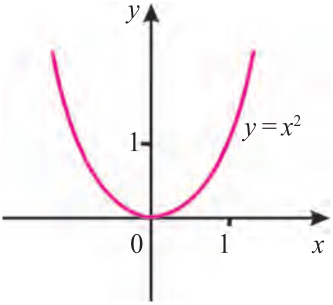
2) $y=\begin{cases} x^2, \text{агар } x\leq 1 \text{ бошад,} \\ 2-x^2, \text{ агар } x>1 \text{ бошад,} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x-1, \text{агар } x<-1 \text{ бошад,} \\ -x^2+1, \text{агар } x\geq -1 \text{ бошад,} \end{cases}$

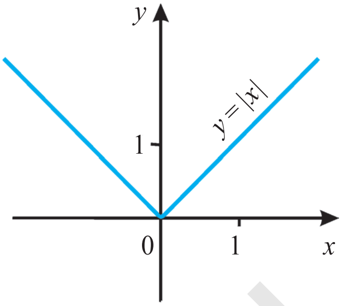
4) $y=\begin{cases} x^3, \text{ агар } x\leq 1 \text{ бошад,} \\ -x^2+2x, \text{агар } x\geq 1 \text{ бошад.} \end{cases}$

§ 11. ФУНКСИЯҲОИ ҶУФТ ВА ТОҚ

Шумо нисбат ба тири ординатаҳо симметрӣ будани графики функсияҳои $y=x^2$ ва $y=|x|$ (расмҳои 37 ва 38)-ро медонед. Ин гуна функсияҳо функсияҳои ҷуфт номида мешаванд.



Расми 37.



Расми 38.

! Агар барои x-и ихтиёрии аз соҳаи муайянкунандаи функсияи *y(x)* гирифташуда *y(-x) = y(x)* бошад, ин функсия функсияи ҷуфт номида мешавад.

Масалан, функсияҳои $y = x^4$ ва $y = \frac{1}{x^2}$ функсияҳои ҷуфт мебошанд, чунки барои x-и ихтиёрӣ $(-x)^4 = x^4$ ва барои $x \neq 0$ -и ихтиёрӣ $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ аст.

Масъалаи 1. Ба ибтидои координатаҳо симметрӣ будани графики функсияи $y = x^3$ -ро исбот кунед ва графики онро созед.

△ 1) Соҳаи муайянкунандаи функсияи $y = x^3$ – маҷмӯи ҳамаи ададҳои ҳақиқӣ.

2) Қиматҳои функсияи $y = x^3$ ҳангоми $x > 0$ будан, мусбат, ҳангоми $x < 0$ будан, манфӣ, ҳангоми $x = 0$ будан, ба сифр баробар аст.

○ Фарз мекунем, ки нуқтаи $(x_0; y_0)$ мутааллиқи графики функсияи $y = x^3$, яъне $y_0 = x_0^3$ бошад. Нуқтае, ки нисбат ба ибтидои координатаҳо ба нуқтаи $(x_0; y_0)$ симметрӣ аст, координатаҳои $(-x_0; -y_0)$ -ро соҳиб аст. Ин нуқта низ ба графики функсияи $y = x^3$ мутааллиқ аст, чунки ҳар ду қисми баробарии дурусти $y_0 = x_0^3$ -ро ба –1 зарб карда, ҳосил мекунем: $-y_0 = -x_0^3$ ва ё $-y_0 = (-x_0)^3$.●

Ин хосият барои сохтани графики функсияи $y = x^3$ имконият медиҳад: аввал график барои $x \geq 0$ сохта мешавад, баъдан акси симметриаш нисбат ба ибтидои координатаҳо ҳосил карда мешавад.

3) Функсияи $y = x^3$ дар тамоми соҳаи муайянкунанда меафзояд.

Ин аз хосияти афзуншавии функсияи дараҷагии нишондиҳандааш мусбат ҳангоми $x \geq 0$ будан ва аз симметрӣ будани график нисбат ба ибтидои координатаҳо бармеояд.

4) Барои баъзе қиматҳои $x \geq 0$ (масалан, $x = 0, 1, 2, 3$) ҷадвали қиматҳои функсияи $y = x^3$ -ро тартиб медиҳем, ҳангоми $x \geq 0$ будан, як қисми графикро месозем ва баъдан бо ёрии симметрия қисми дигари графикро, ки ба қиматҳои манфии x мувофиқ аст, месозем

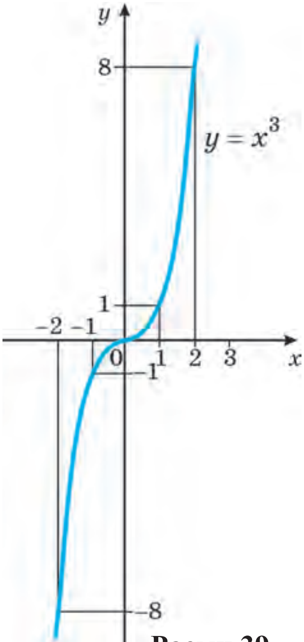
(расми 39).Функсияҳои графикҳояшон нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ функсияҳои тоқ номида мешаванд. Ҳамин тавр, $y = x^3$ -функсияи тоқ аст.

Агар барои x-и ихтиёрии аз сохаи муайянкунандаи функсияи $y(x)$ гирифташуда $y(-x) = -y(x)$ бошад, ин функсия функсияи тоқ номида мешавад.

Масалан, $y = x^5$, $y = \frac{1}{x^3}$ функсияҳои тоқ мебошанд, чунки барои x-и ихтиёрӣ $(-x)^5 = -x^5$ ва барои $x \neq 0$ -и ихтиёрӣ $\frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3}$ аст.

Нисбат ба ибтидои координатаҳо симметрӣ будани соҳаи муайянкунандаи функсияҳои ҷуфт ва тоқро хотиррасон мекунем.

Функсияҳое мавҷуданд, ки онҳо ба хосиятҳои функсияҳои ҷуфт ва тоқ соҳиб нестанд. Масалан, ҷуфт ё тоқ набудани функсияи $y = 2x + 1$ -ро нишон медиҳем. Агар ин функсия ҷуфт бошад, он гоҳ барои тамоми x баробарии $2(-x) + 1 = 2x+1$ иҷро шаванда мебуд; лекин масалан ҳангоми $x=1$ будан ин нобаробарӣ нодуруст аст: $-1 \neq 3$. Агар ин функсия тоқ бошад, он гоҳ барои тамоми x баробарии $2(-x) + 1 = -(2x-1)$ иҷро шаванда мебуд; лекин, масалан ҳангоми $x=2$ будан, ин баробарӣ нодуруст аст: $-3 \neq -5$.



Расми 39.

Масъалаи 2. Графики функсияи $y = \sqrt[3]{x}$ -ро созед.

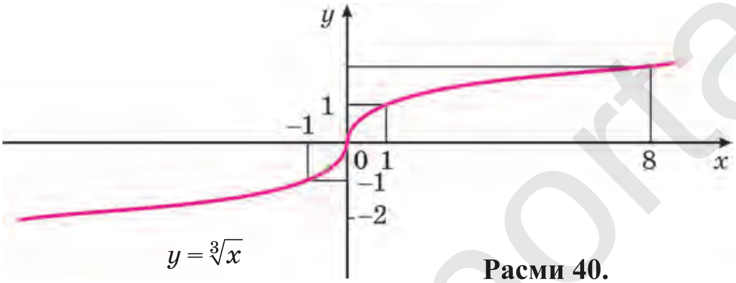
△ 1) Соҳаи муайянии онҳамаи ададҳои ҳақиқӣ мебошад.

2) Функсия тоқ аст, чунки барои x-и ихтиёрӣ $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$;

3) Ҳангоми $x \geq 0$ будан функсия мувофиқи хосияти функсияи дараҷагии нишондиҳандааш мусбат меафзояд, чунки ҳангоми $x \geq 0$ будан $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$;

4) Ҳангоми $x > 0$ будан қимати функсия мусбат аст; $y(0) = 0$.

5) Якчанд нуқтаҳои ба график мутааллиқ, масалан (0; 0), (1; 1), (8; 2)-ро ёфта, барои қиматҳои $x \geq 0$ як қисми графикро месозем ва баъдан бо ёрии симметрия барои $x < 0$ қисми дуюми графикро месозем (расми 40). ▲



Расми 40.

Таъкид мекунем, ки функсияи $y = \sqrt[3]{x}$ барои x-ҳои ихтиёрӣ, функсияи $y = x^{\frac{1}{3}}$ бошад, фақат барои $x \geq 0$ муайяншуда мебошад.

Машқҳо

Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед (**98–99**):

98. 1) $y=2x^4$; 2) $y=3x^5$; 3) $y=x^2+3$; 4) $y=x^3-2$.

99. 1) $y=x^{-4}$; 2) $y=x^{-3}$; 3) $y=x^4+x^2$; 4) $y=x^3+x^5$.

100. Ангораи графики функсияро кашед:

1) $y=x^4$; 2) $y=x^5$; 3) $y=-x^2+3$; 4) $y=\sqrt[5]{x}$.

101. На ҷуфт ва на тоқ будани функсияро нишон диҳед:

1) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 2) $y=\frac{x^2+x-1}{x+4}$; 3) $y=\frac{x-1}{x+1}$.

102. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед

1) $y=x^4+2x^2+3$; 2) $y=x^3-2x+1$; 3) $y=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}$;

4) $y=x^4+|x|$; 5) $y=|x|+x^3$; 6) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

103. Аз симметрия истифода намуда, графики функсияи ҷуфтро созед:

1) $y=x^2-2|x|+1$; 2) $y=x^2-2x$.

---

104. Аз симметрия истифода намуда, графики функсияи тоқро созед:

1) $y=x|x|-2x$; 2) $y=x|x|+2x$.

105. Хосиятҳои функсияро муайяи намоед ва графики онро созед:

1) $y=\sqrt{x-5}$; 2) $y=\sqrt{x}+3$; 3) $y=x^4+2$; 4) $y=1-x^4$;

106. Графики функсияро созед:

1) $y=\begin{cases} x^2, \text{ агар } x\geq 0 \text{ бошад,} \\ x^3, \text{ агар } x<0 \text{ бошад;} \end{cases}$ 2) $y=\begin{cases} x^3, \text{ агар } x>0 \text{ бошад,} \\ x^2, \text{ агар } x\leq 0 \text{ бошад;} \end{cases}$

3) $y=\begin{cases} -x^3, \text{ агар } x\leq 0 \text{ бошад,} \\ -x^2, \text{ агар } x\geq 0 \text{ бошад;} \end{cases}$ 4) $y=\begin{cases} x^4, \text{ агар } x\leq 1 \text{ бошад,} \\ -x^2+2x, \text{агар } x\geq 1 \text{ бошад,} \end{cases}$

Дар кадом қиматҳои аргумент мусбат будани қимати функсияро муайян кунед. Фосилаҳои афзуншавӣ ва камшавиашро нишон диҳед.

107. *Функсияи у* дода шудааст. Агар:

1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y=x^2+x$; 4) $y=x^2-x$.

бошад ҳангоми $x>$будан, графики ин функсияро созед. Барои $x<0$ графики ҳар яке аз функсияҳои додашударо чунон созед, ки графики сохташуда: а) графики функсияи ҷуфт; б) графики функсияи тоқ бошад. Ҳар як функсияи ҳосилшударо бо ёрии як формула нависед.

108. Муодилаи тири симметрияи графики функсияро нависед:

1) $y=(x+1)^6$; 2) $y=x^6+1$; 3) $y=(x-1)^4$.

109. Координатаҳои маркази симметрияи графики функсияро нишон диҳед:

1) $y=x^3+1$; 2) $y=(x+1)^3$; 3) $y=x^5-1$.

§ 12. НОБАРОБАРӢ ВА МУОДИЛАҲОИ ДАРАҶА ИШТИРОКНАМУДА

Хангоми ҳал кардани муодила ва нобаробариҳои гуногун аз хосиятҳои функсияи дараҷагӣ истифода мебаранд.

Масъалаи 1. Нобаробарии $x^5>32$-ро ҳал кунед.

△ Функсияи $y=x^5$ дар тамоми қиматҳои ҳақиқии x муайяншуда ва афзоянда мебошад. Азбаски $y(2)=32$ мебошад,ҳангоми $x>2$, $y(x)>32$ ва $x<2$ будан $y(x)<32$ мешавад.

Ҷавоб: $x>2$. ▲

Масъалаи 2. Нобаробарии $x^4\leq 81$-ро ҳал кунед.

△ *Функсияи* $y=x^4$ ҳангоми $x\leq 0$ будан,камшаванда ва ҳангоми $x\geq 0$ будан афзуншаванда аст. Муодилаи $x^4=81$ ду решаи ҳақиқии: $x_1=-3$, $x_2=3$-ро соҳиб аст. Бинобар ин нобаробарии $x^4\leq 81$ ҳангоми $-3\leq x\leq 0$ ва $x\geq 0$ будан,ба ҳалҳои $0\leq x\leq 3$ доро аст (расми 41).

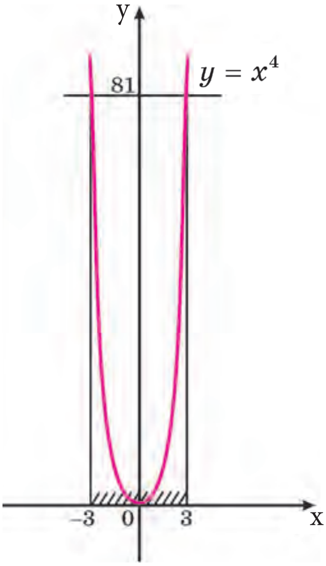
Ҷавоб: $-3\leq x\leq 3$. ▲

Масъалаи 3. Бо ёрии графикҳои функсияҳо муодилаи $\frac{3}{x}=x^2+1$ -ро ҳал кунед.

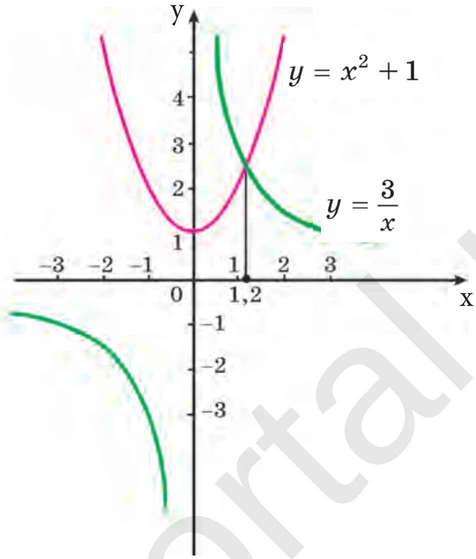
Дар як ҳамвории координатӣ графики функсияҳои $y=\frac{3}{x}$ ва $y=x^2+1$ -ро месозем (расми 42).

△ Ҳангоми $x<0$ будан, муодилаи $\frac{3}{x}=x^2+1$ дорои решаҳо нест, чунки $\frac{3}{x}<0$, лекин $x^2+1>0$. Ҳангоми $x>0$ будан, ин муодила дорои ҳалли ягонаи ба абссисаи нуқтаи буриши ин функсияҳо баробар соҳиб аст.

Аз расми 42 аён аст, ки $x_1\approx 1{,}2$ аст. Муодила ба дигар решаҳои мусбат соҳиб нест, чунки ҳангоми $x>x_1$ будан, функсияи $y=\frac{3}{x}$ кам мешавад ва $y=x^2+1$ бошад, меафзояд ва аз ин сабаб графикҳои ин функсияҳо



Расми 41.



Расми 42.

ҳангоми $x > x_1$ будан, якдигарро намебуранд. Пас, онҳо ҳангоми $0 < x < x_1$ будан низ якдигарро намебуранд.

Чавоб: $x_1 \approx 1,2$. ▲

Масъалаи 4. Муодилаи $\sqrt{2-x^2}=x$ -ро ҳал кунед.

△ Фарз мекунем, ки x-решаи муодилаи додашуда бошад, яъне x – чунин ададест, ки муодилаи (1)-ро ба баробарии дуруст табдил медиҳад. Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем:

$$2-x^2=x^2. \tag{2}$$

Аз ин чо $x^2=1$, $x_{1,2}=\pm 1$.

Пас фарз мекунем, ки муодилаи (1) ба решаҳо соҳиб аст, мо дониста гирифтем, ки ин решаҳо танҳо ададҳои 1 ва –1 буданашон мумкин аст. Месанчем, ки ин ададҳо решаи муодилаи (1) мебошанд ё не. Ҳангоми $x = 1$ будан, муодилаи (1) ба баробарии дуруст табдил меёбад: $\sqrt{2-1^2}=1$. Бинобар ин $x=1$ решаи муодилаи (1) мебошад.

Ҳангоми $x=-1$ будан, қисми чапи муодилаи (1) ба $\sqrt{2-(-1)^2}=\sqrt{1}=1$ баробар, қисми росташ бошад, ба –1 баробар аст, яъне $x=-1$ решаи муодилаи (1) шуда наметавонад. .

Ҷавоб: $x=1$. ▲ Дар масъалае, ки дида баромадем, муодилаи (1) бо роҳи ҳар ду қисмашро ба квадрат бардоштан ҳал карда шуд. Дар ин ҳолат муодилаи (2) ҳосил шуд.

Муодилаи (1) танҳо дорои як реша аст: $x=1$ Муодилаи (2) бошад ду реша дорад: $x_{1,2}=\pm1$, яъне ҳангоми аз муодилаи (1) ба муодилаи (2) гузаштан, решаҳои бегона номидашаванда пайдо шуд. Маълум мешавад, ки ҳангоми $x=-1$ будан, муодилаи (1) ба баробарии нодурусти $1=-1$ табдил меёбад, ҳангоми ҳар ду қисми баробарии нодурустро ба квадрат бардоштан баробарии иборат аз $1^2=(-1)^2$ ҳосил мешавад.

Ҳамин тавр, ҳангоми ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардопгган, мумкин аст решаҳои бегона найдо шаванд.

Бинобар ин, ҳангоми бо роҳи ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардопгга, ҳал кардан, санчиш бояд гузаронид.

Муодилаи (1) — мисоли муодилаи ирратсионалӣ мебошад.

Ба муодилаҳои ирратсионалӣ мисолҳо меорем

$$\sqrt{3-2x}=1-x;\ \sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-3}\,.$$

Ҳалли якчанд муодилаҳои ирратсионалиро дида мебароем

Масъалаи 5. Муодиларо ҳал кунед.: $\sqrt{5-2x}=1-x$.

△ Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат мебардорем

$$5-2x=x^2-2x+1$$

ва ё $x^2=4$, аз ин ҷо. $x_1=2$, $x_2=-2$. Решаҳои ёфташударо месанҷем. Ҳангоми $x=2$ будан, қисми чапи муодилаи додашуда ба $\sqrt{5-2\cdot2}=1$ баробар аст, қисми росташ ба $1-2=-1$ баробар аст. Азбаски $1\neq-1$ аст, пас $x=2$ решаи муодилаи додашуда шуда наметавонад. Ҳангоми $x=-2$ будан, қисми чапи муодила ба $\sqrt{5-2\cdot2}=1$ баробар аст, қисми росташ ба $1-(-2)=3$ баробар аст. Бинобар ин, $x=-2$ решаи муодилаи додашуда мебошад.

Ҷавоб: $x=-2$. ▲

Масъалаи 6. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x-2}+3=0$.

△ Муодиларо дар шакли $\sqrt{x-2}=-3$ менависем.

Решаи арифметики манфӣ буда наметавонад, бинобар ин муодила дорои решаҳо нест.

Ҷавоб: Решаҳо надорад. ▲

Масъалаи 7. Муодиларо ҳал кунед: $\sqrt{x-1}+\sqrt{11-x}=4$.

△.Ҳар ду қисми муодиларо ба квадрат бардошта, ҳосил мекунем: :

$x-1+2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}+11-x=16$

Аъзоҳои монандашро ислоҳ намуда, муодиларо дар намуди зерин менависем: $2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=6$ ёки $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{11-x}=3$

Ҳар ду қисми муодилаи охиринро ба квадрат бардорем.

$(x-1)(11-x)=9$ ёки $x^2-12x+20=0$,

аз ин ҷо $x_1=2$, $x_2=10$.

Санҷиш нишон медиҳад, ки ҳар яке аз ададҳои 2 ва 10 решаи муодилаи додашуда буда метавонад.

Ҷавоб: $x_1=2$, $x_2=10$. ▲

Масъалаи 8. Нобаробариро ҳал кунед $\sqrt{5-x}\leq 7+x$.

△ Нобаробарӣ дар қиматҳои x -и $-7 \leq x \leq 5$ маъно дорад. Агар нобаробарӣ ҳал дошга бошад, ҳал ба порчаи [–7; 5] тааллуқ доштанаш лозим аст. Ҳар ду қисми нобаробариро ба квадрат бардошга баъд аз содда кардан, нобаробарии $x^2+15x+44\geq 0$ -ро ҳосил мекунем. Ҳалли он бошад, $x\leq -11$, $x\geq -4$ мебошад. Қисми умумии ин фосилаҳо бо фосилаи [–7; 5] $-4\leq x\leq 5$, яъне порчаи [–4; 5] мебошад.

Ҷавоб: $-4\leq x\leq 5$. ▲

Машқҳо

110.: Нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $x^7>1$; 2) $x^3\leq 27$; 3) $y^3\geq 64$; 4) $y^3<125$;
5) $x^4\leq 16$; 6) $x^4>625$; 7) $x^5\leq 243$; 8) $x^6\geq 64$.

111. 1)Агар маълум бошад, ки масоҳати квадрат аз 361см^2 калон аст, тарафи он чӣ қадар шуданаш мумкин аст?

2) Агар ҳаҷми куб аз 343дм^3 калон бошад, теғаи он чӣ гуна мешавад?

112. (Шифоҳӣ.) Нишон диҳед, ки адади 7 решаи муодила шуда метавонад:

1) $\sqrt{x-3}=2$; 2) $\sqrt{x^2-13}-\sqrt{2x-5}=3$; 3) $\sqrt{2x+11}=5$.

113. (Шифоҳӣ.) Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{x}=3$; 2) $\sqrt{x}=7$; 3) $\sqrt{2x-1}=0$; 4) $\sqrt{3x+2}=0$.

Муодиларо ҳал кунед (**114–117**):

114. 1) $\sqrt{x+1}=2$; 2) $\sqrt{x-1}=3$; 3) $\sqrt{1-2x}=4$;

4) $\sqrt{2x-1}=3$; 5) $\sqrt{3x+1}=10$; 6) $\sqrt{9-x}=4$.

115.1) $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$; 2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{3x\quad 6}$;

3) $\sqrt{x^2+24}=\sqrt{11x}$; 4) $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

116. 1) $\sqrt{x+2}=x$; 2) $\sqrt{3x+4}=x$; 3) $\sqrt{20-x^2}=2x$;

4) $\sqrt{0{,}4-x^2}=3x$; 5) $\sqrt{4-x}=-\frac{x}{3}$; 6) $\sqrt{26-x^2}=5x$.

117. 1) $\sqrt{x^2-x-8}=x-2$; 2) $\sqrt{x^2+x-6}=x-1$.

118. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $(x-1)^3>1$; 2) $(x+5)^3>8$; 3) $(2x-3)^7\geq 1$;

4) $(3x-5)^7<1$; 5) $(3-x)^4>256$; 6) $(4-x)^4>81$.

119.Фаҳмонед, ки чаро муодилаҳои додашуда дорои решаҳо нестанд:

1) $\sqrt{x}=-8$; 2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-4}=-3$; 3) $\sqrt{-2-x^2}=12$;

4) $\sqrt{7x-x^2-63}=5$; 5) $\sqrt{x^2+7}=2$; 6) $\sqrt{x-2}=x$.

Муодиларо ҳал кунед: **(120–122)**:

120. 1) $\sqrt{x^2-4x+9}=2x-5$; 2) $\sqrt{x^2+3x+6}=3x+8$;

3) $2x=1+\sqrt{x^2+5}$; 4) $x+\sqrt{13-4x}=4$.

121. 1) $\sqrt{x+12}=2+\sqrt{x}$; 2) $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=4$.

122. 1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}=3$; 2) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+4}=4$;

3) $\sqrt{x-7}-\sqrt{x+17}=-4$; 4) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1$.

123. Дар кадом қиматҳои *x* функсияҳо қиматҳои якхеларо қабул мекунанд:

1) $y=\sqrt{4+\sqrt{x}},\ y=\sqrt{19-2\sqrt{x}}$; 2) $y=\sqrt{7+\sqrt{x}},\ y=\sqrt{11-\sqrt{x}}$?

124. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $\sqrt{x-2}>3$; 2) $\sqrt{x-2}\le 1$; 3) $\sqrt{2-x}\ge x$;

4) $\sqrt{2-x}<x$; 5) $\sqrt{5x+11}>x+3$; 6) $\sqrt{x+3}\le x+1$.

Машқҳо доир ба боби I

125. Дар кадом қимати *x* қимати функсияи квадратии $y = 2x^2 - 5x + 3$ ба: 1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) –1 баробар мешавад, ёбед.

126. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $x^2 \le 5$; 2) $x^2 > 36$; 3) $x^2 \ge 9$; 4) $x^2 < 8$.

127. Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатаҳо ёбед:

1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;

3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$.

128. Координатаи қуллаи параболаро ёбед:

1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;

3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$.

129. Графики функсияро созед ва аз рӯи график хосиятҳои онро муайян кунед:

1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

130. Периметри росткунҷа ба 600 м баробар аст. Барои масоҳати росткунҷа калонтарин шудан дарозӣ ва барои бояд он чӣ гуна бошад?

131. Функсияи квадратии $y=x^2+px+q$ дода шудааст:1) ҳангоми $x=0$ қимати 2, ҳангоми $x=1$ қимати 3-ро қабул кунад, коэффитсиентҳои p ва q-ро ёбед:
2) ҳангоми $x = 0$ будан қимати 0,ҳангоми $x = 2$ қимати 6-ро қабул кунад,коеффитсиентҳои p ва q-ро ёбед:

132. Дар кадом қиматҳои x функсияҳо қиматҳои баробарро қабул мекунад:

1) $y = x^2 + 3x + 2$ ва $y = |7 - x|$;
2) $y = 3x^2 - 6x + 3$ ва $y = |3x - 3|$?

Нобаробариро ҳал кунед:(**133–137**):

133. 1) $(x - 5{,}7)(x - 7{,}2) > 0$; 2) $(x - 2)(x - 4) > 0$;
3) $(x - 2{,}5)(3 - x) < 0$; 4) $(x - 3)(4 - x) < 0$.

134. 1) $x^2 > x$; 2) $x^2 > 36$; 3) $4 > x^2$; 4) $\frac{9}{16} \geq x^2$.

135. 1) $-2x^2 + 4x + 30 < 0$; 2) $-2x^2 + 9x - 4 > 0$;
3) $4x^2 + 3x - 1 < 0$; 4) $2x^2 + 3x - 2 < 0$;

136. 1) $x^2 - 3x + 8 > 0$; 2) $x^2 - 5x + 10 < 0$;
3) $2x^2 - 3x + 5 \geq 0$; 4) $3x^2 - 4x + 5 \leq 0$;
5) $-x^2 + 2x + 4 \leq 0$; 6) $-4x^2 + 7x - 5 \geq 0$.

137. 1) $(x - 2)(x^2 - 9) > 0$; 2) $(x^2 - 1)(x - 4) < 0$;
3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \leq 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)} \geq 0$; 5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3} \geq 0$;
6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1} < 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-4)}{x^2-1} \geq 0$; 8) $\frac{x+1}{6x^2-7x-3} \leq 0$.

Нобаробариро ҳал кунед:(**138–139**):

138. 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\ge 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\le (x+1)^2$;

3) $x(1-x)>1{,}5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\ge x(x-1)$.

139. 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2-9x-2}<0$; 3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1}\le 0$;

4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\ge 0$; 5) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}>0$; 6) $\frac{x^2+8x+7}{x^2+x-2}\le 0$.

140. Қаиқ дар муддати аз 4 соат зиёд набуда ,ба равиши чараён 22,5 км шино карда,ба қафо баргаштанаш лозим аст. Агар суръати чараёни дарё 3км/соат бошад, қаиқ нисбат ба об бо кадом суръат ҳаракат мекунад?

141. Графики функсияҳоро дар як системаи координатӣ созед ва дар кадом қимати х қимати яке аз функсияҳо аз дуюмаш калон(хурд) шуданашро муайян кунед натичаро, нобаробариҳои дахлдорро ҳал карда, санчед:

1) $y=2x^2$, $y=2-3x$;
2) $y=x^2-2$, $y=1-2x$;
3) $y=x^2-5x+4$, $y=7-3x$;
4) $y=3x^2-2x+5$, $y=5x+3$.

Координатаҳои нуқтаҳои буриши графики функсияҳоро ёбед: (**142–143**):

142. 1) $y=x^2$, $y=x^3$; 2) $y=\frac{1}{x}$, $y=2x$; 3) $y=3x$, $y=\frac{3}{x}$.

143. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$; 2) $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\frac{1}{x}$; 3) $y=\sqrt{x}$, $y=x$.

144. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $x^4\le 81$; 2) $x^5>32$; 3) $x^6>64$; 4) $x^5\le -32$.

Муодилаҳоро ҳал кунед: (**145–146**):

145. 1) $\sqrt{3-x}=2$; 2) $\sqrt{3x+1}=7$; 3) $\sqrt{3-11x}=2x$.

146. 1) $\sqrt{2x-1}=x-2$; 2) $\sqrt{5x-1+3x^2}=3x$; 3) $\sqrt{2-2x}=x+3$.

147. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

1) $y=\sqrt[5]{x^3+x-2}$; | 2) $x=\sqrt[3]{x^2+2x-15}$; | 3) $x=\sqrt[6]{6-x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[4]{13x-22-x^2}$; | 5) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+6x+5}{x+7}}$; | 6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2+8x+7}}$.

148. Дар фосилаи додашуда афзуншавӣ ё камшавии функсияро муайян кунед:

1) $y=\dfrac{1}{(x-3)^2},\ x>3$ 2) $y=\dfrac{1}{(x-2)^3},\ x<2$

3) $y=\sqrt[3]{x+1},\ x\geq 0$ 4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}},\ x<-1$

Худро санҷида бинед!

1. Бо ёрии графики функсияи $y = -x^2 + 2x + 3$ дар кадом қимати x ,қимати функсия ба 3 баробар мешавад,муайян кунед:

2. Аз рӯи графики функсияи $y=1-x^2$ дар кадом қимати x функсия қимати мусбат; манфӣ қабул мекунад ёбед:

3. Функсияи 1) $y = 2x^2$; 2) $y = -3x^2$ дар кадом фосила меафзояд?кам мешавад.Графики онро созед:

4. Нобаробариро бо усули интервалҳо ҳал кунед:
1) $x(x-1)(x+2)\geq 0$; 2) $(x+1)(2-x)(x-3)\leq 0$.

5. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

1) $y=\dfrac{8}{x-1}$; 2) $y=\sqrt{9-x^2}$; 3) $y=\sqrt{4-2x}$.

6. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{x-3}=5$; 2) $\sqrt{3-x-x^2}=x$; 3) $y=\sqrt{32-x^2}=x$.

149. Ҷуфт ё тоқ будани функсияро муайян кунед:

1) $y=x^6-3x^4+x^2-2$; 2) $y=x^5-x^3+x$;

3) $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$; 4) $y=x^7+x^5+1$.

150. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $(3x+1)^4>625$; 2) $(3x^2+5x)^5\leq 32$; 3) $(x^2-5x)^5>216$.

151. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1$; 2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=x+4$;

3) $\sqrt{x+11}=1+\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+19}=1+\sqrt{x}$.

152. Нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $\sqrt{x^2-8x}>3$; 2) $\sqrt{x^2-3x}<2$; 3) $\sqrt{3x-2}>x-2$;

4) $\sqrt{2x+1}\leq x-1$; 5) $\sqrt{3-x}>1-x$; 6) $\sqrt{4x-x^2}>4-x$.

Машқҳои санҷишӣ (тест) доир ба боби I.

Дар ҳар як машқи санҷишӣ 4-то "ҷавоб"дода шудааст. Аз 4-то "ҷавоб" фақат яктояш дуруст,боқимондааш нодуруст. Аз хонандагон машқҳои санҷиширо иҷро карда ёки бо ёрии дигар мулоҳизаҳо ёфтани (қайди)ин гуна ҷавобҳо талаб карда мешавад.

1. Чунин қимати a-ро ёбед,ки абсиссаи яке аз нуқтаҳои буриши параболаи $y = ax^2$ ва хати рости $y=5x+1$ $x = 1$ бошад

А) $a = 6$; Б) $a = -6$; В) $a = 4$; Г) $a = -4$.

Координатаҳои нуқтаҳои буриши параболаро бо тирҳои координатӣ ёбед (**2–3**):

2. $y = x^2 - 2x + 4$.

А) $(-1; 3)$; Б) $(3; 1)$; В) $(1; 3)$; Г) $(0; 4)$.

3. $y = 6x^2 - 5x + 1$.

А) $(\frac{1}{3}; 0), (\frac{1}{2}; 0), (0; 1)$; Б) $(-\frac{1}{3}; 0), (-\frac{1}{2}; 0), (1; 0)$;

В) $(0; \frac{1}{3}), (0; \frac{1}{2}), (0; 1)$; Г) $(\frac{1}{3}; 0), (-\frac{1}{2}; 0), (0; -1)$.

Координатаи қуллаи параболаро ёбед (**4–5**):

4. $y = x^2 - 4x$.

А) (0; 4); Б) (4; 2); В) (2; –4); Г) (–4; 2).

5. $y = x^2 + 6x + 5$.

А) (–3; –4); Б) (–5; –1); В) (–1; –5); Г) (3; 4).

6. Муодилаи параболаи тири абссисаро дар нуқтаҳои $x=1$ ва $x=2$ ва ординатаро дар нуқтаи $y=\frac{1}{2}$ бурида гузарандаро нависед:

А) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$; Б) $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$;

В) $y = x^2 - 3x + 2$; Г) ҷавоби дуруст нест

Парабола дар кадом чоракҳо ҷойгир шудааст (**7–8**):

7. $y = 3x^2 + 5x - 2$.

А) I, II, III; Б) II, III, IV; В) I, III, IV; Г) I, II, III, IV;

8. $y = -x^2 - 6x - 11$.

А) III, IV; Б) I, II, III; В) II, III, IV; Г) I, II.

9. Ҳосили ҷамъи ду адади мусбат ба 160 баробар аст.Агар ҳосили ҷамъи кубҳои ин ададҳо хурдтарин бошад, ин ададҳоро ёбед:

А) 95; 65; Б) 155; 5; В) 75; 85; Г) 80; 80.

10. Қимати хурдтарини функсияи $y=x^2-4x+3$ -ро ёбед:

А) –1 Б) 1; В) 7; Г) –8.

Нобаробариро ҳал кунед: (**11–15**):

11. $2x^2-8\leq 0$.

А) $-2\leq x\leq 2$; Б) $-2\leq x$; В) $x\geq 2$; Г) $0\leq x\leq 4$.

12. $3x^2-9\geq 0$.

А) $x<\sqrt{3}$; B) $x>\sqrt{3}$; C) $x<-\sqrt{3},\ x>\sqrt{3}$; D) $x\geq 3$.

13. $6x^2+5x-6>0$.

А) $x>\frac{2}{3}$; B) $x<\frac{3}{2}$; C) $x<-\frac{3}{2},\ \ x>\frac{2}{3}$; D) $-\frac{3}{2}<x<\frac{2}{3}$.

14. $\frac{x^2-7x+10}{x^2-3x-10} \leq 0.$

А) $-2<x\leq 2$; Б) $-2< x <5$; В) $x\neq -2,\ x\neq 5$; Г) $-2<x<0$.

15. $\frac{x^2+x}{-x^2+6x-8} \geq 0.$

А) $-2<x<3$; Б) $x<-2;\ -1\leq x\leq 1,\ x>3$;
В) $-1 \leq x<3$; Г) $x\neq -2,\quad x\neq 3$.

16. Ҳосили ҷамъи ҳамаи ҳалҳои бутуни нобаробарии $x^2+6x+5<0$ -ро ёбед:

А) 10; Б) 9; В) –9; Г) –10.

17. Дар кадом қимати a дар дилхоҳ қимати x нобаробарии $ax^2+4x+9a<0$ ҷой дорад?

А) $a < -\frac{2}{3}$; B) $a > \frac{2}{3}$; C) $a < -1$; D) $a > 1$.

18. Дар кадом қимати a дар дилхоҳ қимати x нобаробарии $ax^2-8x+2a<0$ ҷой дорад?

А) $-8<a<8$; Б) $a\geq 8$; В) $a<8$; Г) $a<-8$.

19. Соҳаи муайянии функсияи $y = \sqrt{-x^2+3x-2}$. -ро ёбед:

А) $1\leq x\leq 2$; Б) $1<x<2$; В) $x\geq 2,\ x\leq 1$; Г) $-2\leq x\leq -1$.

20. Кадоме аз функсияҳои зерин ҷуфт аст:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y=x^2+|x|$; 3) $y = -3 + \frac{5}{x^4}$; 4) $y = x^2 - \frac{3}{x}$.

А) 1, 2; Б) 3, 4; В) 2, 3; Г) 1, 4.

21. Кадоме аз функсияҳои зерин тоқ аст:

1) $y = 6x$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y=4x+7$; 4)$y=2x^3-10$.

А) 1, 2; Б) 2, 3; В) 3, 4; Г) 1, 4.

Масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъалаи 1. Автомобили сабук бо суръати тағйирнаёбандаи v ҳаракат карда истодааст. То хати Stop 50 м масофа мондан чароғи сабзӣ светофор ба хомӯш даргирифтан сар кард. Баъд аз ним сония вақт гузаштан ронанда ба тормоздиҳӣ сар кард ва то ба хати Stop нарасида автомобил боз истод. Аз қоидаҳои ҳаракати роҳ маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии автомобили бо суръати $v_0 = 50$ км/соат ҳаракаткунанда ба $S_0 = 23{,}5$ м баробар аст. Дар ин ҷо роҳи тормоздиҳи гуфта роҳи аз аввали тормоздиҳӣ то истодан тайкардаи автомобилро меноманд. Бо суръати v-и ҳангоми хомӯш дар гирифтани светофор соҳиббудаи автомобил баҳо диҳед.

△ Автомобил баъд аз светофор хомӯш дар гирифтан то саршавии тормоздиҳӣ масофаи $0{,}5\ v$ -ро, пас аз курси физика маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии kv^2 -ро тай мекунад, дар ин ҷо:

$$k=\frac{s_0}{v_0^2}=\frac{23{,}5}{13{,}88^2}\approx 0{,}12.$$

Пас,масофаи умумии роҳи тайкарда бо суръати 50 км/соат ба 13,88 м/с буданашро ба ҳисоб гирем ва аз 50 метр зиёд нашуданро ба эътибор гирифта

$$0{,}5\,v + 0{,}12v^2 \le 50,$$

яъне $0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 \le 0$ -ро ҳосил мекунем (1)

△ Барои ин нобаробариро ҳал кардан аввал сифрҳои сеаъзогии $0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50$ -ро меёбем:

$$0{,}12v^2 + 0{,}5v - 50 = 0, \text{ аз ин ҷо } 12v^2 + 50v - 5000 = 0.$$

Муодиларо ҳал мекунем:

$$v_{1,2}=\frac{-50\pm\sqrt{50^2-4\cdot 12(-5000)}}{2\cdot 12}=\frac{-25(1\pm\sqrt{97})}{12},$$

аз ин ҷо $v_1 = \dfrac{-25(1+\sqrt{97})}{12}$ ва $v_2 = \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12}$.

Дар ин ҳол ҳалли нобаробарии (1) аз ададҳои фосилаи $v_1 \le v \le v_2$ иборат аст. Мувофиқи моҳияти масъала $v > 0$, пас, суръати баҳодиҳанда аз фосилаи $0 < v \le v_2$ берун нахобиданаш лозим, яъне $v \le \dfrac{25(\sqrt{97}-1)}{12} \approx 18{,}43$ м/с ёки аз 66,35км/соат зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: Суръат аз 66,35 км/соат зиёд нашуданаш лозим. ▲

Масъалаи 2. Фарз мекунем ,ки дар бозор n-дона маҳсулот ҳаст ва ҳар донаи он бо p ченаки пулӣ фурӯхта мешавад. Мониторинг нишондод,ки агар талаб ба ин маҳсулот зиёд шавад нархи он меафзояд ва адади шумораи оварда мешуда бо формулаи $n = 40p$ меафзояд. Аз тарафи дуюм адади маҳсулоти ба бозор дохилшуда ва ба харидор таклиф кардашуда афзояд, нархи маҳсулот бо мутаносибии чаппа кам шуда рафтанаш маълум аст:

$$p = \frac{150}{n-40}.$$

Шарти ба адади маҳсулоти ба бозор дохил шудаистодаро муайян кунед.

△ Барои шарти дар масъала пурсидашударо муайян кардан, аз шарти нархи таклифшуда $\dfrac{150}{n-40}$ аз нархи ба талаб вобаста $\dfrac{n}{40}$ кам нашуданаш лозим истифода мебарем:

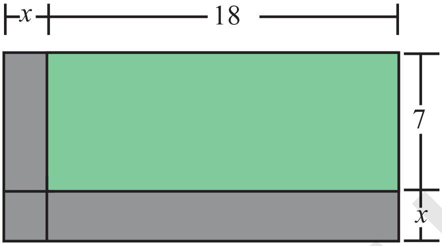
$$\frac{150}{n-40} \ge \frac{n}{40}.$$

Аз ин ҷо $n^2 - 40n - 6000 \le 0$

-ро ҳосил менамоем. Ҳалли ин нобаробари $-60 \le n \le 100$. Мувофиқи моҳияти масъала,адади маҳсулоти ба бозор дохилшаванда адади натуралӣ ва он аз 100 зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: $n \le 100$. ▲

Масъалаи 3. Шумо ба ду тарафи боғи росткунҷашакли бараш 7м ва дарозиаш 18 м аз санг пайраҳа сохтанатон лозим аст (расми 43). Лекин шумо маблағи ба сангфарш кардани 54 метри квадратӣ мерасидаро ҷудо карда метавонед. Бари ин пайраҳа аз ҳама зиёд чӣ қадар шуданаш мумкин аст?



Расми 43.

△ Равшан аст, ки барои ёфтани ҳалли масъала ба фарқи масоҳати умумӣ $(x+18)\cdot(x+7)$ метри квадратӣ ва масоҳати росткунҷа $18\cdot 7=126$ метри кв. масоҳати пайраҳа аз 54 метри кв. калон нашуданашро ба эътибор гирифтанамон лозим:

$$(x+18)\cdot(x+7) - 18\cdot 7 \le 54. \qquad (1)$$

Аз ин ҷо

$$x^2+25x-54\le 0 \qquad (2)$$

ҳосил мешавад. Сифрҳои сеаъзогии квадратӣ $x_1=-27$ ва $x_2=2$.Ҳалли нобаробарии (2) ададҳои фосилаи $-27\le x\le 2$ иборат аст. Лекин мувофиқи моҳияти масъала бари пайраҳа адади манфӣ ёки сифр шуда наметавонад. Аз ҳамин сабаб бари пайраҳа адади қонеъкунандаи нобаробарии $0<x\le 2$ шуда метавонад. Пас, бари пайраҳа аз 2 метр зиёд нашуданаш лозим.

Ҷавоб: бари пайраҳаи аз ҳама зиёд ба 2 метр баробар аст.▲

Масъалаҳо

1. Автомобили боркаш бо суръати тағйирнаёбандаи v ҳаракат карда истодааст.То хати Stop 50 м масофа мондан чароғи сабзи светофор ба хомӯшдаргирифтан сар кард.Баъд аз ним сония вақт гузаштан ронанда ба тормоздиҳӣ сар кард ва то ба хати Stop нарасида автомобил боз истод. Аз қоидаҳои ҳаракати роҳ маълум аст, ки роҳи тормоздиҳии автомобили бо суръати $v_0=50$ км/соат ҳаракаткунанда

ба $S_0 = 28{,}9$ м баробар аст. Суръати автомобили боркашро ҳангоми саршавии хомӯшдаргирифтани светофор ёбед ва то 0,01 яклухт кунед.

2. Фарз мекунем, ки дар бозор n-дона як навъи маҳсулот ҳаст ва ҳар донаи он бо p ченаки пулӣ фурӯхта мешавад. Мониторинг нишондод, ки агар талаб ба ин маҳсулот зиёд шавад нархи он меафзояд ва маҳсулоти оварда мешуда бо формулаи $n = 60p$ меафзояд. Аз тарафи дуюм адади маҳсулоти ба бозор дохилшуда ва ба харидор таклиф кардашуда афзояд, нархи маҳсулот бо мутаносибии чаппа кам шуда рафтанаш маълум аст:

$$p = \frac{60}{n - 40}.$$

Шарти ба адади маҳсулоти ба бозор дохилкардашударо муайян кунед:

3. Фарз мекунем, ки компания барои реклама x (100 ҳазорҳо) сӯм сарфкарда,дар натиҷаи он P фоида мебинад. Дар ин ҷо $P(x) = 20 + 40x - x^2$. Ба реклама чи қадар пул сарф кунад, дар натиҷа фойда аз ҳама зиёд мешавад?

4. Фоидаи моҳонаи корхонаи хурди маҳсулот истеҳсолкунанда бо модели $P = 250n - n^2$ (дар ҳазорҳо сум) ифода карда шудааст, гӯем дар ин ҷо n – адади маҳсулоти кор карда баромада ва фурӯхташуда. Барои гирифтани фоидаи калон корхонаи хурд ҳар моҳ чандто маҳсулот кор карда баромада фурӯхтанаш лозим?

5. Дар яке аз бешазорҳои сербориши Америкаи Ҷанубӣ навъи ноёби ҳашарот ёфта шуд ва мутахасисси гирду атрофро омӯзанда ҳашаротҳоро ба ҳудуди ҳимоя кардашуда гузаронид. Баъд аз гузаронидан шумораи ҳашаротҳо дар t моҳ бо қонунияти

$$P(t) = 45(1 + 0{,}6t)(3 + 0{,}02t)$$

зиёд шуда рафта бошад:

1) ҳангоми $t = 0$ адади ҳашаротҳо чандто буд?
2) баъд аз10 сол адади онҳо чандто мешавад?
3) Кай адади онҳо 549 то мешавад?

Маълумотҳои таърихӣ

Абӯрайҳон Беруни
(973–1048)

Функсия вожаи лотинӣ буда, аз калимаи ,,functio“ гирифта шуда, маънои „содир шудан“, „иҷро кардан“-ро ифода мекунад.

Нахустин таърифҳои функсия дар асарҳои **Г. Лейбнитс (1646-1716), И. Бернулли (1667- 1748), Н.И. Лобачевский (1792- 1856)** дода шудаанд.

Ҳарчанд таърифи имрӯзаи функсияро надонанд ҳам, олимони қадим дар байни ададҳои тағйирёбанда зарурати ҷой доштани вобастагиҳои функсионалиро дарк мекарданд.

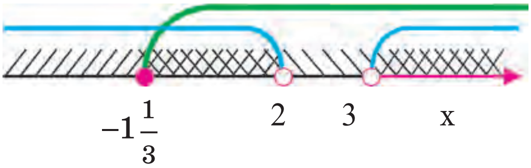
Чор ҳазор сол муқаддам олимони Бобулистон барои ёфтани масоҳати доираи радиусаш r, хато бошад ҳам формулаи $S=3r^2$-ро ихтироъ кардаанд.

Нахустин маълумотҳо дар бораи дараҷаи ададҳо дар катибаҳои қадимаи Бобулистон, ки ба мо расидаанд, мавҷуданд. Хусусан, дар онҳо ҷадвалҳои квадрат, кубҳои ададҳои натуралӣ дода шудаанд.

Ҷадвалҳои квадратҳо, кубҳои ададҳо, ҷадвалҳои логарифмҳо, ҷадвалҳои тригонометрӣ, ҷадвали решаҳои квадратӣ бо усули ҷадвали вобастагиҳои байни ададҳо дода шудаанд.

Олими барҷаста Абӯрайҳон Берунӣ низ дар асарҳои худ аз мафҳуми функсия, хосиятҳои ои истифода намудааст. Дар мақолаи шашуми асари машҳури „Қонуни Масъудӣ“-и Абӯрайҳон Берунӣ ба фосилаҳои тағйирёбандагии аргумент ва функсия, ишораҳо, қиматҳои калонтарин ва хурдтарини функсия таъриф дода шудааст.

БОБИ II. СИСТЕМАҲОИ НОБАРОБАРИҲО ВА МУОДИЛАҲО



§ 13. ҲАЛ КАРДАНИ СИСТЕМАҲОИ ОДДИТАРИНЕ,КИ МУОДИЛАИ ДАРАҶАИ ДУЮМРО ДАРБАР МЕГИРАД

Масъалаи 1. Гипотенузаи сскунчаи росгкунча ба $\sqrt{13}$ см, масоҳати он ба 3 см^2 баробар аст. Катетҳои сскунчаро ёбед.

△ Бигузор катетҳо ба x ва y сантиметр баробаранд. Теоремаи Пифагор ва формулаи масоҳати скунчаи росткунчаро истифода карда, шарти масъаларо ин тавр менависем:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ \frac{1}{2}xy=3. \end{cases} \qquad (1)$$

Ба муодилаи якуми система муодилаи дуюмро ба 4 зарб карда, ҷамъ мекунем ва ҳосил мекунем: $x^2+y^2+2xy=25$, ки аз ин ҷо $(x+y)^2=25$ ёки $x+y=\pm5$. Азбаски x ва y ададҳои мусбатанд, бинобар ин $x+y=5$ мешавад. Аз ин муодила y -ро ба воситаи x ифода менамоем ва ба яке аз муодилаҳои система, масалан ба муодилаи дуюм мегузорем::

$$y=5-x, \quad \frac{1}{2}x(5-x)=3.$$

Муодилаи ҳосилшударо ҳал мекунем:

$$5x-x^2=6, \;\; x^2-5x+6=0, \;\; x_1=2, \;\; x_2=3.$$

Ин қиматҳоро бо формулаи $y = 5 - x$ гузошта, $y_1 = 3$, $y_2 = 2$ -ро меёбем. Дар ҳар ду ҳолат яке аз катетҳо ба 2 см, катети дигар ба 3 см баробар аст.

Ҷавоб: 2 см, 3 см. ▲

Масъалаи 2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

△ *Аз рӯи теоремае, ки ба теоремаи Виет чаппа аст, ададҳои x ва y решаҳои муодилаи квадратии*

$$z^2 - 3z - 10 = 0$$

мебошанд. Ин муодиларо ҳал намуда, $z_1 = 5$, $z_2=-2$. -ро пайдо мекунем. Пас, ҳалҳои система ду ҷуфт ададҳои зерин мебошанд: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ ва $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Ҷавоб: (5; –2), (–2; 5). ▲

Масъалаи 3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

△ Ин системаро бо тарзи гузориш ҳал мекунем:

$$y = 3x - 6,$$
$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Ин муодиларо содда намуда ҳосил мекунем: $5x^2 - 48x + 43 = 0$, аз ин ҷо $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. *Қиматҳои x -ро ба формулаи $y = 3x - 6$ гузошта, $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$ -ро меёбем.*

Ҷавоб: (1; –3), (8,6; 19,8). ▲

Масъалаи 4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

△ Муодилаи якуми системаро ба намуди зер менависем: $(x-y)(x+y)=16$.

Дар ин ҷо $x-y=2$ -ро гузошта, $x+y=8$ ҳосил мекунем. Ҳамин тавр,

$$\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Ин системаро ба тарзи ҷамъкунӣ ҳал карда, $x=5$, $y=3$ -ро меёбем.

Ҷавоб: (5; 3). ▲

Машқҳо

153. Системаи муодилаҳои дараҷаи якуми дуномаълумаро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2y+x=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+5y=9, \\ 3y-2x=-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+y+4=0, \\ 4y+8x-4=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y+4=0. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**154–158**):

154. 1) $\begin{cases} y=x+6, \\ x^2-4y=-3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2-y, \\ y^2+x=32; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+2y=1, \\ x+y^2=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3x=2, \\ x^2-2y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=4-y, \\ x^2+y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y-4x=5, \\ y^2+2x=-1. \end{cases}$

155. 1) $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-xy-y^2=19, \\ x-y=7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x-y=3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

156. 1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=7, \\ x+y=8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x+y=12, \\ xy=11; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy=2, \\ x+y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+y=-11, \\ xy=18. \end{cases}$

157. 1) $\begin{cases} x-y=7, \\ x^2-y^2=14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=3, \\ x^2-y^2=15; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=24, \\ x+y=4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2-y^2=8, \\ x-y=2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2-y^2=-3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ x+y=7. \end{cases}$

158. 1) $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ xy=4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=10, \\ x^2+y^2=29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy=3, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} xy=5, \\ x^2+y^2=26; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2=50, \\ xy=7. \end{cases}$

159. Суммаи ду адад ба 18, ҳосили зарби онҳо ба 65 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

160. Миёнаи арифметикии ду адад ба 20, миёнаи геометрии онҳо ба 12 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед.

161. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**161–163**):

1) $\begin{cases} x+2y=-3, \\ y^2-2x=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=-7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=21, \\ x+y=7. \end{cases}$

162. 1) $\begin{cases} x-y=2, \\ xy=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=3, \\ xy=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2-y^2=46, \\ xy=10. \end{cases}$

163. 1) $\begin{cases} (x-y)^2=4, \\ x+y=6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 4+xy=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y=4, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1. \end{cases}$

164. Майдони росткунҷашаклро бо девори дарозиаш 1 км иҳота кардан даркор аст. Агар масоҳати ин майдон ба 6 га баробар бошад, дарозӣ ва бари он чиқадарӣ шуданаш даркор аст?

§ 14. УСУЛҲОИ ГУНОГУНИ ҲАЛЛИ СИСТЕМАИ МУОДИЛАҲО

Масъалаи 1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 10, \\ x + y - 2xy = -2. \end{cases}$$

△ Муодилаҳои системаро аъзо ба аъзо ҷамъ намуда, ҳосил мекунем: $2x+2y = 8$, аз ин ҷо $y=4-x$. Ин ифодаро, ба муодилаи дилхоҳи система масалан ба муодилаи дуюм мегузорем:

$$x + 4 - x - 2x(4-x) = -2,$$

$$4 - 8x + 2x^2 = -2, \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = 3.$$

аз $y=4-x$ будан $y_1=3$, $y_2=1$.

Ҷавоб: (1; 3), (3; 1). ▲

Масъалаи 2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y^2 = 3, \\ xy^2 = 28. \end{cases}$$

△ Аз муодилаи якуми система $y^2=x-3$. Ин ифодаро ба муодилаи дуюми система мегузорёем: $x(x-3)=28$, $x^2-3x-28=0$,

Аз ин ҷо

$x_1=7$, $x_2=-4$.

аз $y^2=x-3$ будан y -ро меёбем:

1) Агар $x=7$ бошад, дар ин ҳол $y^2 = 7 - 3$, $y^2=4$, аз ин ҷо $y=2$ ёки $y=-2$;

2) Агар $x=-4$ бошад, дар ин ҳол $y^2=-4-3<0$, пас, решаҳои ҳақиқӣ надорад.

Ҷавоб: (7; 2), (7; –2). ▲

Ҳаминро гуфтан ҷоиз аст ,ки агар дар муодилаи якум x-ро бо воситаи у ифода карда ба муодилаи дуюм гузорем, барои ҳалли муодилаи биквадратӣ оварда мерасонад.

Масъалаи 3. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8}. \end{cases}$$

△ Агар (x; y) ҳалли система бошад ,он гоҳ $x\neq 0$ ва $y\neq 0$.

Муодилаи дуюми системаро чунин менависем: $\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{8}$.

Дар муодилаи ҳосилшуда қимати $x+y=12$ -ро гузошта

$\frac{12}{xy}=\frac{3}{8}$ -ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $xy = 32$.

Ҳалли системаи додашуда ба ҳалли системаи зерин оварда мерасонад:

$$\begin{cases} x+y=12, \\ xy=32. \end{cases}$$

Дар асоси теоремаи ба теоремаи Виет чаппа ҳосил мекунем: $x_1=4$, $y_1 = 8$; $x_2=8$, $y_2 = 4$.

Ҷавоб: (4; 8), (8; 4). ▲

Масъалаи 4. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^3-y^3=7, \\ x^2y-xy^2=2. \end{cases}$$

△ Муодилаи дуюми системаро ба намуди $xy(x-y) = 2$ навишта мегирем. Равшан аст,ки $x \neq 0$, $y \neq 0$, ва $x - y \neq 0$, дар ин ҳол муодилаи якуми системаро ба муодилаи дуюм тақсим карда , ҳосил мекунем

$$\frac{x^3-y^3}{x^2y-xy^2}=\frac{7}{2};$$

$$\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy(x-y)}=\frac{7}{2};$$

$$2(x^2+xy+y^2)=7xy,$$

$$2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Муодилаи ҳосилшударо ҳамчун ба сифати муодилаи квадратӣ нисбат ба x ҳисобида, решаҳояшро муайян мекунем:

$$x_{1,2}=\frac{5y\pm\sqrt{25y^2-16y^2}}{4},$$

$$x_{1,2}=\frac{5y\pm 3y}{4}.$$

Аз ин ҷо $x_1=2y$ ёки $x_2=\frac{y}{2}$.

Ба муодилаи дуюми система ифодаи x бо y ифода кардашударо гузошта, ҳосил мекунем:

1) агар $x=2y$ бошад, дар ин ҳол $4y^3-2y^3=2$, аз ин ҷо $y^3=1$ ва $x=2$;

2) агар $x=\frac{y}{2}$ бошад, дар ин ҳол $\frac{y^3}{4}-\frac{y^2}{2}=2$, аз ин ҷо $y^3=-8$, $y=-2$ ва $x=-1$.

Ҷавоб: (2; 1), (–1; –2).

Масъалаи 5. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases}x^2-2xy+4y^2=7,\\ x^3+8y^3=35.\end{cases}$$

Формулаи суммаи кубҳоро истифода бурда муодилаи дуюми системаро ба намуди зерин навишта мегирем:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=35.$$

Ин муодиларо ба муодилаи якуми система тақсим карда, меёбем: $x+2y=5$.

Дар ин муодила $2y$*-ро бо воситаи* x *ифода кунем*: $2y=5-x$ ва ба муодилаи дуюми система мегузорем:

$$x^3+(5-x)^3=35,$$

$$x^3 + 125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35,$$
$$15x^2 - 75x + 90 = 0,$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$
$$x_1 = 3, \;\; x_2 = 2.$$

Мувофиқан,қиматҳои *у-ро* меёбем:

1) $2y=5-3$, аз ин ҷо $y_1=1$, 2) $2y=5-2$, аз ин ҷо $y_2 = \frac{3}{2}$.

Ҷавоб: (3; 1), $(2; \frac{3}{2})$.

Масъалаи 6. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{x}{y}} = t$ истифода мебарем $\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{t}$, $t > 0$. Дар ин ҳол муодилаи дуюми система намуди $t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6}$-ро мегирад. Ду тарафи ин муодиларо ба t зарб мезанем:

$$t^2 - \frac{5}{6}t - 1 = 0.$$

Аз ин ҷо $t_{1,2} = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{25}{144} + 1} = \frac{5}{12} \pm \frac{13}{12}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -\frac{2}{3}$.

Аз сабаби $t>0$ будан $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$ ёки $\frac{x}{y} = \frac{9}{4}$, аз ин ҷо $x = \frac{9}{4}y$.

Ба ҷои x-и муодилаи якуми система гузошта ҳосил мекунем: $\frac{9}{4}y - y = 5$, $\frac{5}{4}y = 5$, $y=4$, аз ҳамин сабаб $x=9$.

Ҷавоб: (9; 4).

Машқҳо

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: (**165–175**):

165. 1) $\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy - 2(x + y) = 7, \\ xy + x + y = 29. \end{cases}$

166. 1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

167. 1) $\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x^2 - 9y^2 = 27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

168. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$

169. 1) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 2x^2 - xy - 3y^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 133; \\ x + y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy^2 + x = -9, \\ 2y - 3x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 6xy + 8yx^2 = 91, \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$

170. 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ xy = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ xy = 15; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 6xy + y^2 = 8, \\ xy = 7. \end{cases}$

171. 1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{x - y} = \dfrac{3}{2}, \\ xy = 80; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 3, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -0,3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 0,5. \end{cases}$

172. 1) $\begin{cases} x^2 - y = 7, \\ x^2y = 18; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + y = 3, \\ x^2y - 1 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 12, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

173. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ xy^2 + x^2y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^2 + xy^3 = 10, \\ x + xy = 10. \end{cases}$

174. 1) $\begin{cases} x^3 + 27y^3 = 54, \\ x^2 - 3xy + 9y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 19, \\ x^2 + xy + y^2 = 49. \end{cases}$

175. 1) $\begin{cases} x + y = 41, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{41}{20}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4. \end{cases}$

§ 15. СИСТЕМАИ НОБАРОБАРИҲОИ ДАРАҶАИ ДУЮМИ ЯКНОМАЪЛУМА

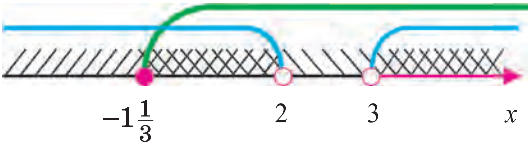
Масъалаи 1. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ 3x + 4 \ge 0. \end{cases}$$

△ Нобаробарии якум нобаробарии квадратӣ ва дуюмаш бошад нобаробарии хаттӣ мебошад. Ҳалли нобаробарии якум, ки дар параграфи 6 масъалаи 2 нишон дода будем аз ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x < 2$ ва $x > 3$ иборат буд. Ҳалли нобаробарии дуюм ададҳои фосилаи $x \ge -1\frac{1}{3}$ мебошад. Дар як тири ададӣ ҳалҳои нобаробариҳои якумро ва дуюмро тасвир кунем. Равшан аст, ки ададҳои дар як вақт нобаробариҳои

$x>3$

системаро қонеъкунанда аз фосилаҳои $-1\frac{1}{3} \le x < 2$ ва $x>3$ ва $x<3$ иборат аст (расми 44).



Расми 44.

Ҷавоб: $-1\frac{1}{3} \le x < 2,\ x > 3.$ ▲

Масъалаи 2. Нобаробариро ҳал кунед:

$$|x^2-x-1|<1.$$

△ Нобаробарии $|x^2-x-1|<1$ ба нобаробарии дучандаи $-1<x^2-x-1<1$ баробарқувва аст. Ин бошад ба ду системаи нобаробариҳои зерин баробарқувва мебошад:

$$\begin{cases} x^2 - x - 1 < 1, \\ x^2 - x - 1 > -1. \end{cases}$$

ё ки

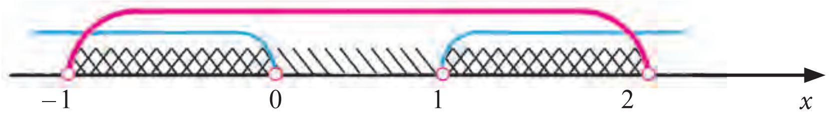
$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$$

Сараввал системаи нобаробарии якумро ҳал мекунем:

$D=(-1)^2-4(-2)=9>0$, пас , $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$ Аз ин ҷо ҳал аз ададҳои фосилаи $-1<x<2$ иборат аст.

Нобаробарии дуюмро ҳал мекунем: $x^2-x=x(x-1)>0$. Ҳалли ин нобаробарӣ ҳамаи ададҳои фосилаҳои $x<0$ ва $x>1$ мебошад.

Ҳалҳои ду нобаробариро дар як тири ададӣ тасвир мекунем (расми 45).



Расми 45 .

Аз ин ҷо ҳалли система аз ҳамаи ададҳои дар фосилаҳои $-1<x<0$ ва $1<x<2$ хобида иборат аст.

Ҷавоб: $-1<x<0$, $1<x<2$. ▲

Масъалаи3. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

$$y=\sqrt{3x^2-x-14}+\sqrt{-x}.$$

△ Аз шарти адади тахти решаи квадратӣ манфӣ нашуданаш,соҳаи муайянии функсия аз ҳалли системаи нобаробарии зерин иборат мешавад:

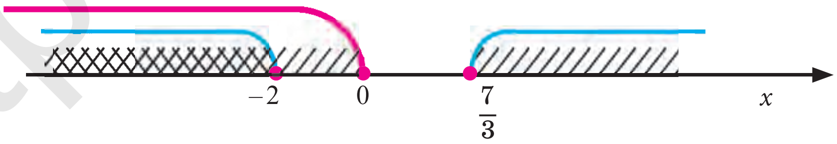
$$\begin{cases}3x^2-x-14\geq 0,\\ -x\geq 0.\end{cases}$$

Нобаробарии якумро ҳал мекунем.Дискриминанти сеаъзогии квадратии $3x^2-x-14$-ро меёбем:

$D=(-1)^2-4\cdot3(-14)=169$, пас $x_1=\dfrac{1-13}{6}=-2,\ x_2=\dfrac{1+13}{6}=\dfrac{7}{3}.$

Аз сабаби шохаҳои сеаъзогии квадратӣ ба боло равон будан,ҳалли нобаробарии якум аз фосилаҳои $x\leq-2$ ва $x\geq\dfrac{7}{3}$ иборат аст.

Равшан аст, ки нобаробарии дуюмро ба –1 зарб карда ,ҳалли он аз ҳамаи ададҳои бутуни аз фосилаи $x\leq 0$ гирифташуда иборат бударо дидан мумкин аст. Ҳалҳои нобаробариҳои якум ва дуюмро дар як тири ададӣ тасвир мекунем (расми 46).



Расми 46.

Аз $x\leq-2$ будани ҳалли система бармеояд

Ҷавоб: $x\leq-2$. ▲

Машқҳо

176. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ 4x+9>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+5x-2\le 0, \\ 2x+7<0. \end{cases}$

177. Нобаробариро ҳал кунед:

1) $|x^2-6x|<27$; 2) $|x^2+6x|\le 27$;

3) $|x^2+4x|<12$; 4) $|x^2-4x|\le 12$.

Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед: **(178–181)**:

178. 1) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ -x^2+2x+3\le 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6>0, \\ x^2+x+6>0. \end{cases}$

179. 1) $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x^2-7x+12>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+x-6<0, \\ x^2+x-2\ge 0. \end{cases}$

180. 1) $\begin{cases} 7x-x^2>0, \\ 36-x^2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+x^2<0, \\ 49-x^2>0. \end{cases}$

181. 1) $\begin{cases} -x^2+x+20\le 0, \\ x^2-x-2>0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+4x<0, \\ -x^2+x+2\ge 0. \end{cases}$

182. Соҳаи муайянии функсияро ёбед:

1) $y=\sqrt{-x^2-6x-8}+\sqrt{\frac{1}{3}x+2}$, 2) $y=\sqrt{x-x^2}-\sqrt{-x^2+12x-35}$.

§ 16. ИСБОТИ НОБАРОБАРИҲОИ СОДДА

Усулҳои гуногуни исботи нобаробариҳо мавҷуд аст.Истифодаи баъзе аз онҳоро дида мебароем.

Масъалаи 1. Исбот кунед,ки миёнаи арифметикии ададҳои мусбати a ва b аз миёнаи геометрии ин ададҳо хурд намебошад.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \qquad (1)$$

△ Нобаробариро бевосита ба таъриф асос карда исбот мекунем,дар ин ҷо исботи $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$ талаб карда мешавад. Тарафи чапи ин нобаробариро табдил дода ,зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Дар муносибати (1) аломати баробарӣ ҳангоми $a = b$ будан дуруст буданашро таъкид менамоем ▲

Масъалаи 2. Исбот кунед ки миёнаи геометрии ду адади мусбати a ва b аз миёнаи гармоникии ин ададҳо хурд намебошад:

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (2)$$

△ Барои исботи ин нобаробарӣ аз исботи нобаробарии (1) ва инчунин агар суръати каср тағйир наёфта махраҷаш хурд шавад қимати каср калон мешавад,истифода бурда исбот мекунем

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

Масъалаи 3. Барои ҳар гуна адади мусбати *a нобаробарии*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \qquad (3)$$

-ро исбот кунед.

△ Ин нобаробариро бо усули баръакс фарз кардан исбот мекунем. Барои ин дар ягон қимати мусбати а нобаробарӣ иҷро намешавад гуфта фарз мекунем, яъне нобаробарии зерин ҷой дорад.

$$a + \frac{1}{a} < 2$$

Ду тарафи нобаробариро ба a зарб карда ҳосил мекунем:

$$a^2 + 1 < 2a,$$

яъне $a^2 + 1 - 2a < 0$ ёки $(a - 1)^2 < 0$, ин бошад ,нобаробарии нодуруст, чунки квадратӣ ҳар як адади ҳақиқӣ (аз ҷумла $(a - 1)^2$) манфӣ намебошад. Зиддияти ҳосилшуда нобаробарии (3)-ро дар ҳар як қимати мусбати a нобаробарии дуруст буданашро нишон медиҳад. ▲

Масъалаи 4. Фурӯшанда себҳоро дар тарозуи содда бар кашида истодааст. Харидор 1 кг себ харид, баъд аз фурӯшанда ҷои себ ва санги тарозуро иваз карда баркашиданро илтимос карда, боз 1 кг себ гирифт. Агар тарозу рост карда нашуда кӣ зарар мебинад?

△ Фарз мекунем китфҳои тарозу ба a ва b баробар аст (расми 47). Аз расм дида мешавад, ки $a \neq b$. Дар навбати якум харидор x кг себ гирифт. Аз курси физика маълум аст, ки $x \cdot b = 1 \cdot a$, аз ин ҷо $x = \frac{a}{b}$. .Дар дафъаи дуюм харидор y кг себ гирифт .Аз шарти мувозанатӣ $y \cdot a = 1 \cdot b$, аз ин ҷо $y = \frac{b}{a}$. Ҳамин тавр, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ себ харида гирифтааст. Аз миёнаи арифметикӣ ва миёнаи геометрии ададҳои $\frac{a}{b}$ ва $\frac{b}{a}$ истифода бурда нобаробарии зеринро ҳосил мекунем:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} > \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

аз ин ҷо $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

Ҷавоб: фурӯшанда зарар мебинад ▲

Машқҳо

183. Барои ададҳои дилхоҳи ҳақиқии a, b, x ҷой доштани нобаробариҳои зеринро исбот кунед:

1) $\frac{a^2+1}{2} \ge a;$ 2) $\frac{b^2+16}{4} \ge b;$ 3) $\frac{2x}{x^2+1} \le 1;$ 4) $\frac{2x}{4x^2+9} \le \frac{1}{6}.$

184. Агар $ab > 0$ бошад, нобаробариро исбот кунед:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2;$ 2) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \ge 4.$

185. Агар $a \ge -1$, $a \ne 0$ бошад, нобаробариро исбот кунед:

$$\frac{4a^2+a+1}{4|a|} \ge \sqrt{a+1}.$$

186. $a \ge 0$, $b \ge 0$ ва $a \ne b$ бошад, дар ин ҳол кадоми аз $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ ва $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ калон аст ?

187. Нобаробариро исбот кунед:

$$(a+1)\,(a+2)\,(a+3)\,(a+6) > 96a^2,$$

дар ин ҷо $a > 0$.

188. Агар $a > 0$ бошад, нобаробариро исбот кунед :

$$\frac{a+4}{2} + \frac{a+9}{2} > 5\sqrt{a}.$$

189. Агар a, b, c, d ададҳои мусбат бошад,дар ин ҳол

$$\frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2} \ge \sqrt{(a+b)(c+d)}$$

нобаробариро исбот кунед:

190. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$ ва $c > 0$ бошад, дар ин ҳол $\frac{ac^2 + b}{c} \geq 2\sqrt{ab}$ -ро исбот кунед:

191. Агар $a > 0$, $b > 0$ бошад, дар ин ҳол $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4$ -ро исбот кунед:

192. Агар $a > 0$, $b > 0$ ва $c > 0$ бошад, дар ин ҳол нобаробарии $\left(1+\frac{a^2}{bc}\right)\left(1+\frac{b^2}{ac}\right)\left(1+\frac{c^2}{ab}\right) \geq 8$ -ро чой доштанашро исбот кунед:

Машқҳо оид ба боби II

193. Ифодаи додашударо ба намуди сеаъзогии квадратии як тағйирёбанда дошта нависед:

1) $2y^2 - xy + 3$, агар $y = 3x + 1$;

2) $2xy + 3x^2 - 7$, агар $x = 2y + 1$.бошад.

194. Системаи муодилаҳоро бо усули гузориш ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x + y = -1, \\ y^2 - 7x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 3y = 13, \\ x - y = 3. \end{cases}$

195. Системаи муодилаҳоро бо истифодаи теоремаи ба теоремаи Виет чаппа ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 21; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = -30, \\ x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -6, \\ xy = -16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 9, \\ xy = -10. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**196–198**):

196. 1) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 18, \\ x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 7 + y, \\ x^2 = 56 + y^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x - 5, \\ x^2 = 10 + y^2. \end{cases}$

197. 1) $\begin{cases} y^2 + xy = 4, \\ x^2 + xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy + x^2 = 10, \\ xy + y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 16 + 2xy. \end{cases}$

198. 1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9, \\ x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Системаи муодилаҳоро ҳал кунед (**199–204**):

199. 1) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 1, \\ \dfrac{x+2}{y-3} = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (y-3)(x+1) = 4, \\ \dfrac{x+1}{y-3} = 1. \end{cases}$

200. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{5}{4}, \\ x + y = 3. \end{cases}$

201. 1) $\begin{cases} x - y^2 = 6, \\ xy^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y^2 + 1 = x, \\ xy^2 = 12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ x^2 - y^2 = 40; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 32, \\ x^2 + y^2 = 40. \end{cases}$

202. 1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26, \\ x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 3 + y, \\ x^3 - y^3 = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ xy(x + y) = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 16, \\ 2xy(x + 2y) = 16. \end{cases}$

203. 1) $\begin{cases} 2x^4 - 3x^2y = 36, \\ 3y^2 - 2x^2y = -9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^4 - 2x^2y = 24, \\ 2y^2 - 3x^2y = -6. \end{cases}$

204. 1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

205. 1) Адади дурақама аз ҳосили ҷамъи рақамҳояш се маротиба калон аст,квадрати ҳосили ҷамъи рақамҳояш бошад аз адади додашуда се маротиба калон аст. Ин ададро ёбед.

2) Адади дурақама аз ҳосили ҷамъи рақамҳояш 4 маротиба калон буда, квадрати ҳосили ҷамъи рақамҳояш $\frac{3}{2}$ қисми адади додашударо ташкил медиҳад. Ин ададро ёбед.

206. 1) Нисбати тарафҳои квадрат 5:4 аст. Агар тарафҳои ҳар як квадратро 2 см кӯтоҳ кунем ,он гоҳ фарқи масоҳатҳои квадратҳои ҳосилшуда ба 2,8 см^2 баробар мешавад.Тарафҳои квадратҳои додашударо ёбед.

2) Нисбати дарозии росткунҷа ба бари он 3:2 аст. Агар онҳоро 1 см зиёд кунем ,масоҳати росткунҷа нави ҳосилшуда аз масоҳати росткунҷаи якум 3 см^2 калон мешавад. Дарозӣ ва бари росткунҷаи якумро ёбед:

207. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

1) $\begin{cases} x^2 + x - 6 < 0, \\ -2x^2 + 3x + 2 > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 < 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} -3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ -x^2 - 3x - 2 \geq 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \\ 3x^2 - 3x - 6 < 0. \end{cases}$

208. 1) Агар $xy = 9$ ва $x > 0$ бошад ,қимати хурдтарини $x + y$-ро ёбед:
2) Агар $ab = 8$ ва $b > 0$ бошад, дар ин ҳол қимати хурдтарини $2a+b$-*ро ёбед*

209. Қимати хурдтарини ифодаро ёбед:

1) $\mathbf{4x + \frac{81}{25x}, (x > 0);}$ 2) $\mathbf{\frac{(x+3)(x+12)}{x}, x > 0;}$

3) $\mathbf{\frac{4y^2 - 7y + 25}{y}, (y > 0);}$ 4) $\mathbf{\frac{y^4 + y^2 + 1}{y^2 + 1}}.$

210. Агар $x+y=10$ ва $x>0$, $y>0$ бошад,дар ин ҳол қимати калонтарини xy -ро ёбед:

211. Агар $2x+y=6$ ва $x>0$, $y>0$ бошад, дар ин ҳол қимати калонтарини xy-ро ёбед:

212. Нобаробариро исбот кунед: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Машқҳои санҷишӣ(тест) оид ба боби II

1. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \mathbf{x + y = 5,} \\ \mathbf{xy = 4.} \end{cases}$

А) $x = -4$, $y = -1$; Б) $x = 1$, $y = -4$;
В) $x = 4$, $y = -1$; Г) (1; 4) ва (4; 1).

2. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} \mathbf{x + y = 4,} \\ \mathbf{x^2 - y^2 = 8.} \end{cases}$

А) $x = 3$, $y = 1$; Б) $x = 5$, $y = -1$;
В) $x = 4$, $y = 0$; Г) $x = 1$, $y = 3$.

3. Фарқи ду адад ба 3 ва ҳосили зарби онҳо ба 28 баробар аст. Ин ададҳоро ёбед:

А) 7 ва 4; Б) 5 ва 2;

В) 14 ва 2; Г) 11 ва 8.

4. Периметри росткунҷа ба 30 м ва масоҳаташ ба 56 м^2 баробар аст. Дарозии он аз бараш чанд метр дароз аст.

А) 1,2 м; Б) 1 м; В) 2 м; Г) 2,5 м.

5. Масофаи 60 км-ро велосипедрони якум нисбат ба дуюм 1 соат дертар тай мекунад.Агар суръати велосипедрони якум нисбат ба дуюм 5 км/соат кам бошад, суръати ҳар яки онҳоро ёбед:

А) 20 км/соат, 25 км/соат; Б) 10 км/соат, 15 км/соат;
В) 15 км/соат, 20 км/соат; Г) 12км/соат, 17 км/соат.

6. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} x+20y+10xy=40, \\ x+20y-10xy=-8. \end{cases}$

А) (0,6; 4) ва (12; 0,2); Б) (0,4; 6) ва (0,12; 2);
В) (4; 0,6) ва (12; 0,2); Г) (4; 0,2) ва (12; 0,6).

7. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед: $\begin{cases} x-y^2=-3, \\ xy^2=54. \end{cases}$

А) (6; 4) ва (4; 3); Б) (–3; 6) ва (6; –3);
В) (6; 3) ва (3; –6); Г) (6; 3) ва (6; –3)

8. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед :

$$\begin{cases} x-5y=-20, \\ \frac{5}{x}+\frac{5}{y}=2. \end{cases}$$

А) (–10; 5) ва (2; 5); Б) (–10; 2) ва (5; 5);
В) (5; –10) ва (–10; 2); Г) (5; 5) ва (–2; 10).

9. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} x^3-64y^3=56, \\ x^2y-4xy^2=4. \end{cases}$$

А) (4; $\frac{1}{2}$) ва (–2; –1); Б) (–2; $\frac{1}{2}$) ва (4; –1);

В) (4; 1) ва (–4; –2); Г) (–2; –1) ва (2; 1).

10. Системаи муодилаҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x-2}{y+5}} - \sqrt{\dfrac{y+5}{x-2}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 12. \end{cases}$$

А) (–1;12); Б) (12;–1); В) (–1;11); Г) (11;–1).

11. Системаи нобаробариҳоро ҳал кунед:

$$\begin{cases} 3x^2 + 10x - 8 < 0, \\ 2x + 9 \geq 0. \end{cases}$$

А) $-4 < x < \frac{2}{3}$; Б) $-4,5 < x < \frac{2}{3}$; В) $x > -4,5$; Г) $x < \frac{2}{3}$.

12. Нобаробариро ҳал кунед: $|x^2 + x - 1| \leq 1$.

А) $-2 \leq x \leq 1$, $2 < x \leq 3$; Б) $-2 \leq x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$;

В) $-1 \leq x \leq 0$, $1 < x \leq 2$; Г) $x \leq -2$, $x \geq 1$.

Масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъала. Ду мошини боркаш якҷоя кор карда борро дар 6 соат кашонданаш лозим аст. Мошини дуюм аз сабаби ба саршавии кор дер монданаш, то омадани он мошини якум $\frac{3}{5}$ қисми борро кашонида шуда буд. Бори боқимондаро танҳо мошини дуюм кашонид ва ҳамагӣ 12 соат вақт сарф шуд. Ҳар як мошина алоҳида-алоҳида борро дар чӣ қадар вақт ба манзил мерасонад?

△ Бори мошинҳои боркаш ба манзил мерасондаро 1 гуфта қабул мекунем. Фарз мекунем мошини якум танҳо худаш барои кашондани бор x соат ва мошини дуюм танҳо худаш y соат вақт сарф мекунад. Дар ин ҳол мошини якум дар як соат $\frac{1}{x}$ қисми бор ва мошини дуюм $\frac{1}{y}$ қисми борр мекашонад.

Дар якҷоягӣ ҳар ду мошин дар як соат $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ қисми борро мекашонад ва мувофиқи шарти масъала борро дар 6 соат ба манзил мерасонад.Аз ҳамин сабаб, $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1$.

Лекин дар асл мошини яку м ба кашонидани аз $\frac{3}{5}$ қисми бор аз $\frac{3}{5}$ ҳисса вақти худро сарф намуд, барои кашондани қисми боқимондаи бор мошини дуюм $\frac{2}{5}$ қисми вақти худро сарф намуд. Дар ин ҳолат барои кашондани бор 12 соат вақт сарф шудаашро ба ҳисоб гирем, муодилаи дуюмро ҳосил мекунем:

$$\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.$$

Масъала ба ҳалли системаи зерин оварда расонд:

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot 6=1,\\ \frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y=12.\end{cases}$$

Системаро содда карда, баъд бо усули гузориш ҳал мекунем:

$$\begin{cases}6x+6y=xy,\\ 3x+2y=60,\end{cases}$$

$$3x=60-2y,\ 120-4y+6y=(20-\frac{2}{3}y)y,$$

$$60+y=10y-\frac{1}{3}y^2,$$

аз ин ҷо, $y^2-27y+180=0$,

$$y_{1,2}=\frac{27}{2}\pm\sqrt{\frac{729}{4}-180}=\frac{27}{2}\pm\frac{3}{2},\ y_1=15,\ y_2=12.$$

Аз формулаи $x = -20 - \frac{2}{3}y$ истифода бурда ҳосил мекунем

$$x_1 = 10, \ x_2 = 12.$$

Ҷавоб: 10 соат ва 15 соат – агар мошинҳо имкониятҳои бардоштани бори гуногун дошта бошад; 12 соат ва 12 соат – агар мошинҳои боркаш имкониятҳои бардоштани бори якхела дошта бошад. ▲

Масъалаҳо

1. 1) Дар зали тамошои якум 420- то, дар зали дуюм 480- то ҷой ҳаст. Дар зали дуюм нисбат ба зали якум 5 қатор кам, лекин дар ҳар як қатор нисбат ба қаторҳои зали якум ҷойҳо 10- то зиёд аст. Дар ҳар як қатори зали якум чандтогӣ ҷойи нишаст аст?

2) Дар зали сурх 320- то, дар зали кабуд 360 то ҷой ҳаст. Дар зали сурх нисбат ба зали кабуд 2- то қатор зиёд аст. Лекин дар ҳар як қатораш нисбат ба қаторҳои зали кабуд 4- тогӣ ҷой кам. Дар зали сурх чандто қатор ҳаст.

2. 1) Дуто насос якҷоя кор карда ҳавзи 80 м^3 ҳаҷм доштаро дар вақти муайян бо об пур мекунад. Агар танҳо бо насоси якуми самаранокиаш $1\frac{1}{3}$ маротиба зиёд шуда, ҳавзро барои пур кардан аз 2 соат зиёдтар вақт сарф мешуд. Агар танҳо бо насоси дуюми самаранокиаш дар як соат 1 м^3 кам шуда, ҳавзро бо об пур кунем нисбат ба вақти ҳавзро бо об пур кардан сарфшуда $3\frac{1}{3}$ маротиба зиёд вақт сарф мешуд (нисбат ба вақти ҳавзро ду насос якҷоя бо об пур карда сарфшуда) самаранокии ҳар як насосро ёбед?

2) Ду бригадаи шумораи коргаронаш гуногун лекин малакаҳои якхела дошта, детал тайёр мекунанд ва ҳар як коргар дар як рӯз ду дона детал тайёр мекунад. Аввал танҳо бригадаи якум меҳнат карда 32 дона детал, баъд бригадаи дуюм танҳо меҳнат карда 48 дона детал тайёр карданд. Барои тайёр кардани ин деталҳо 4 рӯз вақт сарф шуд. Пас ду бригада якҷоя 6 рӯз кор карда, 240дона детал тайёр карданд. Дар ҳар як бригада чандтогӣ коргар ҳаст?

3. 1) Нисфи маҳсулот бо фоидаи 10%, нисфи боқимонда бо фоидаи 20% фурӯхта шуд. Агар фоидаи умумии аз фурӯхтани ҳамаи маҳсулот. 12% ро ташкил диҳад, фоидаи чоряки боқимондаи маҳсулот чанд фоизро ташкил медиҳад.

2) Фирмаи савдо ба дӯконҳо маҳсулотҳоро бо нархи иловагӣ оварда мерасонад: ба $\frac{3}{5}$ ҳиссаи маҳсулот 5% нархи изофа, ба нисфи маҳсулоти боқимонда 4% нархи изофа гузошта мефурӯшанд. Агар нархи изофаи ба ҳамаи маҳсулот гузошташуда 7% -ро ташкил диҳад ба нисфи дуюми маҳсулот ба ҳисоби фоиз чӣ қадар нархи изофа гузошта шудааст?

4. 1) Омехтаи ду модда ҳаст.Агар ба ин омехта аз моддаи дуюм 3 кг ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳол миқдори он дар омеха ду маротиба зиёд мешавад, агар ба омехтаи ибтидоӣ аз моддаи якум 3 кг ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳол миқдори моддаи дуюм ба ҳисоби фоиз ду маротиба кам мешавад. Массаи дар омехтаи ибтидоӣ будаи ҳар як моддаро ёбед.

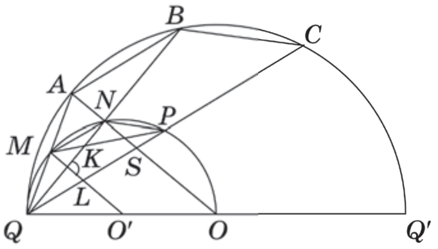
2) Омехтаи ду моеъ мавҷуд аст. Агар ба ин омехта аз моеъи якум 8 литр ҳамроҳ карда шавад, дар ин ҳолат консентратсияи он ду маротиба зиёд мешавад,агар ба омехтаи аввала аз моеъи дуюм 8 л рехта шавад, дар ин ҳолат консентратсияи моеъи якум 1,5 маротиба кам мешавад. Ҳаҷми ҳар як моеъи омехтаро ёбед.

5. Самолёт аз A ба B ба равиши шамол ва аз B ба A ба муқобили шамол парвоз кард,суръати шамол бетағйир монд. Дафъаи дигар самолёт рейсро бо маршрути пешина дар обу ҳавои бешамол амалӣ гардонд. Дар ҳар ду ҳолат ҳам мотори самолёт бо як хел тавоноӣ кор кард. Дар кадом ҳолат ба парвози умумӣ вақт камтар сарф мешавад?

6. Ду тракторчи майдони киштро дар p рӯз шудгор мекунанд. Агар тракторчии якум нисфи майдони киштро ва дуюмаш нисфи дуюми боқимондаашро шудгор кунад, дар ин ҳол q рӯз сарф мешавад. Исбот кунед, ки $q \geq 2p$ аст.

Боби III.

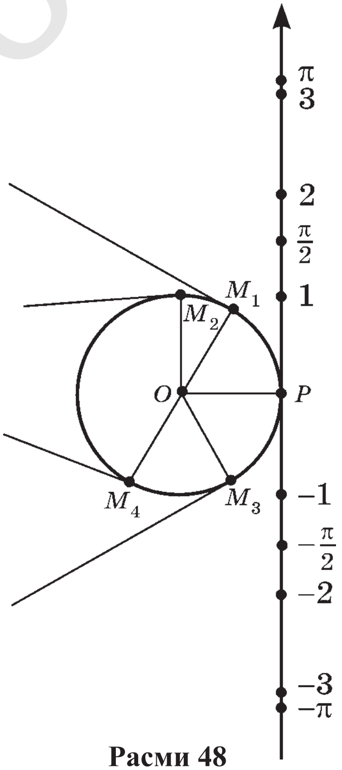
ЭЛЕМЕНТҲОИ ТРИГОНОМЕТРИЯ



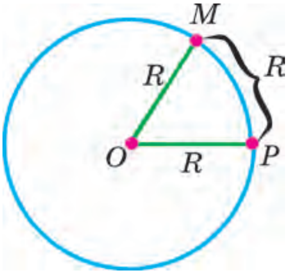
§ 17. ЧЕНАКИ РАДИАНИИ КУНҶ

Фарз мекунем, ки хати рости вертикалӣ ба давраи марказаш дар нуқтаи О ва радиусаш ба 1 баробар ба нуқтаи *P* расанда аст (расми 48). Ин хати ростро тири ададии ибтидояш нуқтаи Р гуфта, самти болоиашро дар хати рост самти мусбат ҳисоб мекунем. Дар тири адади ба сифати воҳиди ченаки дарозӣ радиуси давраро мегирем. Дар хати рост якчаид нуқтаҳои: ± 1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ± 3, $\pm\pi$ (ёдовар мешавем, ки π адади ирратсиоиалии тақрибан ба 3,14 баробар аст)-ро қайд мекунем.

Ии хати ростро дар нуқтаи *P*-и давра маҳкамкардашуда ва ба сифати риштаи наёзанда тасаввур карда, онро фикран ба давра мепечонем.Дар ин вақт,нуқтаҳои координатии, масалан 1, $\frac{\pi}{2}$, –1, –2-и хати рости ададӣ(тир) ба чунин нуқтаҳои M_1, M_2, M_3, M_4 -и давра мегузаранд,ки дарозии камони PM_1 ба 1, дарозии камони ба PM_2 ба $\frac{\pi}{2}$ баробар мешавад ва ғайра.



Расми 48



Расми 49.

Ҳамии тавр, ба ҳар як нуқтаи хати рост ягон нуқтаи давра мувофиқ гузошта мешавад. Барои он ки ба нуқтаи хати росте, ки координаташ ба 1 баробар аст, нуқтаи M_1 мувофиқ гузошта шудааст, кунҷи POM_1 -ро кунҷи воҳидӣ ҳисобидан мумкин аст ва бо ченаки ин кунҷ чен кардани кунҷҳои дигар табиӣ мебошад. Масалан, кунҷи POM_2 ба $\frac{\pi}{2}$, кунҷи POM_3 ба –1 ва кунҷи POM_4 -ро ба –2 баробар ҳисобидан лозим аст. Ин тавр чен кардани кунҷҳо дар математика ва физика ба таври васеъ истифода карда мешавад. Дар ин маврид кунҷҳоро дар ченаки радианӣ чен карда шудааст, меноманд. POM_1 бошад кунҷи ба 1 радиан (1 рад) баробар номида мешавад. Ба радиуси давра баробар будани дарозии камони PM_1 -ро хотиррасон мекунем. (расми 48)

Акнун давраи ихтиёрии радиуси R-ро дида мебароем ва дар он камони PM-и дарозиаш ба R баробар ва кунҷи POM-ро қайд мекунем. (расми 49)

Кунҷи марказии ба камони дарозиаш ба радиуси давра баробар такя кардаро, кунҷи ба 1 радиан баробар меноманд.

Дар ин ҳолат, кунҷи ба 1 радиан баробар камони дарозиаш ба R баробарро дар ҳам мекашад, мегуянд.

Ченаки градусии кунҷи ба 1 радиан баробарро ҳисоб мекунем. Азбас- ки камони дарозиаш πR (нимдавра) кунҷи марказии 180°-ро мекашад, пас камони дарозиаш ба R баробар кунҷи π маротиба хурд будаоро мекашад, яъне

$$\boxed{1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o}.}$$

Азбаски $\pi \approx 3{,}14$ аст, пас 1 рад $\approx 57{,}3$ мешавад.

Агар кунҷ аз α радиан иборат бошад, он гоҳ ченаки градусии он ба зерин баробар мешавад:

$$\boxed{1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\alpha\right)^{o}.} \qquad (2)$$

Масъалаи 1. Ченаки градусии кунҷҳои ба 1) π рад; 2) $\frac{\pi}{2}$ рад; 3) $\frac{3\pi}{4}$ рад баробарро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$1)\ \pi\ \text{рад} = 180°;\quad 2)\ \frac{\pi}{2}\,\text{rad} = 90°;\quad 3)\ \frac{3\pi}{4}\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{4}\right) = 135°.$$ ▲

Ченаки радиании кунҷи ба 1°-ро меёбем. Азбаски кунҷи 180° ба π рад баробар аст, пас мешавад.

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}}$$

мешавад.

Агар кунҷ аз α градус иборат бошад, он гоҳ ченаки радиании он ба

$$\boxed{\alpha° = \frac{\pi}{180}\alpha\ \text{rad}} \tag{2}$$

баробар мешавад.

Масъалаи 2. Ченаки радиании кунҷи ба 1) 45°; 2) 15 баробар бударо ёбед.△

Аз рӯи формулаи (2) меёбем:

$$1)\ 45° = \frac{\pi}{180}\cdot 45\ \text{rad} = \frac{\pi}{4}\ \text{rad};\qquad 2)\ 15° = \frac{\pi}{180}\cdot 15\ \text{rad} = \frac{\pi}{12}\,\text{rad}.$$ ▲

Ченаки градусӣ ва радиании кунҷҳоеро, ки бисёртар вомехӯранд, меорем

Градус	0	30	45	60	90	180
Радиан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Одатан агар ченаки кунҷ бо радианҳо дода шуда бошад, номи „рад“ партофта мешавад.

Ченаки радиании кунҷ барои ҳисоб кардани дарозии камонҳои давра қулай аст. Азбаски кунҷи ба 1 радиан баробар камони дарозиаш ба радиуси R баробарро мекашад, пас кунҷи α радиан камони дарозиаш зеринро мекашад:

$$l = \alpha R \tag{3}$$

Масъалаи 3. Мили ақрабаки дақиқаи соати бурҷи шаҳр дар доираи радиусаш $R \approx 0{,}8$ м ҳаракат мекунад. Мили ин ақрабак дар давоми 15 дақиқа чӣ қадар масофаро тай мекунад?

△ Ақрабаки соат дар давоми 15 дақиқа ба кунҷи ба $\frac{\pi}{2}$ радиан баробар тоб мехӯрад. Аз рӯи формулаи (3) бошад, агар $\alpha = \frac{\pi}{2}$ бошад, меёбем:

$$l = \frac{\pi}{2} R \approx \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8 \text{ m} \approx 1{,}3 \text{ m}.$$

Ҷавоб: 1,3 м ▲

Формулаи (3) ҳангоми радиуси давра $R = 1$ будан, намуди оддиро соҳиб мешавад. Дар ин ҳолат дарозии камон ба бузургии кунҷи маркази бо он камон кашидашуда баробар мешавад, яъне $l = \alpha$. Истифодабарии ченаки радианӣ дар математика, физика, техника ва дар дигар фанҳо аз ин ҷиҳат қулай мебошад.

Масъалаи 4.Сектори доиравии радиусаш ба R баробар кунҷи a радро соҳиб аст. Масоҳати ин сектор ба $S = \frac{R^2}{2}\alpha$ баробар буданашро исбот кунед, ки дар ин ҷо $0 < a < \pi$.

△Масоҳати сектори доиравии π радианӣ (нимдоира) ба $\frac{\pi R^2}{2}$ баробар аст. Бинобар ин масоҳати сектори 1 радиан π маротиба хурд аст,яъне $\frac{\pi R^2}{2} : \pi$. Аз ин рӯ масоҳати сектори α радиан ба $\frac{R^2}{2}\alpha$ баробар аст. ▲

Машқҳо

213. Ченаки радиании кунҷҳои дар градусҳо ифодашударо ёбед:
1) 40°; 2) 120°; 3) 105°; 4) 150°;
5) 75°; 6) 32°; 7) 100°; 8) 140°.

214. Ченаки градусии кунҷҳои дар радианҳо ифодашударо ёбед:
1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{9}$; 3) $\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$; 5) 2;
6) 4; 7) 1,5; 8) 0,36; 9) $\frac{2\pi}{5}$; 10) 4,5.

215. Ададҳоро то саҳеҳии 0,01 нависед:

1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{3}{2}\pi$; 3) 2π; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}$..

216. Ададҳоро муқоиса кунед:

1) $\frac{\pi}{2}$ ва 2; 2) 2π ва 6,7; 3) π ва $3\frac{1}{5}$;

4) $\frac{3}{2}\pi$ ва 4,8; 5) $-\frac{\pi}{2}$ ва $-\frac{3}{2}$; 6) $-\frac{3}{2}\pi$ ва $-\sqrt{10}$.

217. (Шифоҳӣ.) Ченаки градусӣ ва радиании кунҷҳои: а) секунҷаи баробартараф; б) секунҷаи росткунҷаи баробарпаҳлу; в) квадрат; г) шашкунҷаи мунтазамро муайян кунед.

218. Кунҷи марказии 0,9 рад камоии дарозиаш 0,36 м-ро дарҳам кашад, радиуси давраро ёбед.

219. Агар радиуси давра ба 1,5 см баробар бошад, бузургии кунҷи марказии камони дарозиаш 3 см кашида истодаро ёбед.

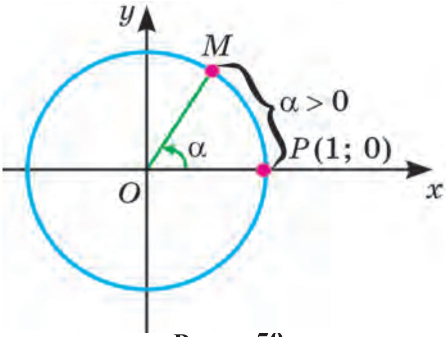
220. Камони сектори доиравиро кунҷи $\frac{3\pi}{4}$ рад дар ҳам кашида меистад. Агар радиуси доира ба 1 см баробар бошад, масоҳати секторро ёбед.

221. Радиуси доира ба 2,5 см, масоҳати сектори доиравӣ бошад, ба 6,25 см^2 баробар аст. Кунҷи камони ҳамон сектори доиравӣ кашидаистодаро ёбед.

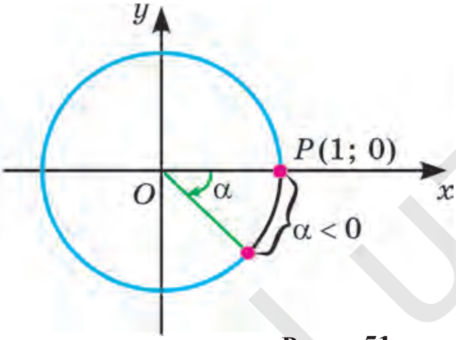
§ 18. ДАР АТРОФИ ИБТИДОИ КООРДИНАТАҲО ЧАРХ ЗАНОНИДАНИ НУҚТА

Дар параграфи аввала аз усули нишондиҳандаи мувофиқати нуқтаҳои хати рости ададӣ ба нуқтаҳои давра истифода карда шуд. Акнун чигунагии мувофиқати байни ададҳои ҳақиқиро бо нуқтаҳои давра ҳаигоми чархзании нуқтаҳои давра нишон медиҳем.

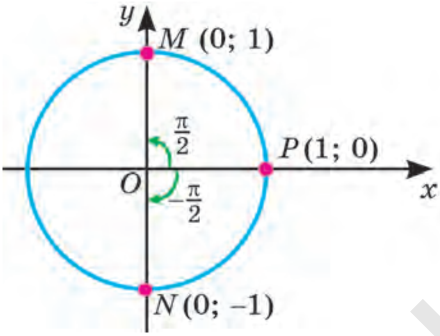
Дар ҳамвории координатӣ давраи радиусаш ба 1 баробар ва марказаш дар ибтидои координатаҳо бударо дида мебароем. Он давраи воҳидӣ номида мешавад. Мафҳуми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи α радиан чархзании нуқтаи давраи воҳидиро дохил мекунем (дар ии ҷо α – адади ҳақиқии дилхоҳ).



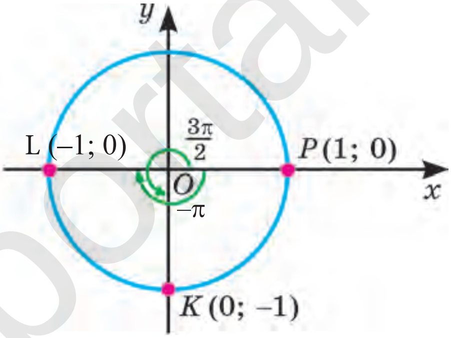
Расми 50.



Расми 51.



Расми 52.



Расми 53.

1. Бигзор, $\alpha > 0$ бошад. Нуқтаи муқобили ҳаракати ақрабаки соат қадқади давраи воҳидӣ аз нуқтаи *P* роҳи дарозиаш ба a баробарро тай намояд (расми 50). Нуқтаи охирини роҳро бо *M* ишорат мекунем.

Дар ии ҳолат нуқтаи *M* ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи *a* радиаи чарх занонидани нуқтаи *P* ҳосил мешавад.

2. *Бигзор,* $a<0$ бошад. Дар ин ҳолат ҳаракат ба кунҷи *a* радиан тобхӯриро мувофиқи самти ақрабақи соат ва роҳи дарозиаш |*a*|- ро тай намудани нуқтаро мефаҳмонад (расми 51).

Ба 0 радиан чарх задан ин дар ҷои худ мондани нуқта аст.

Мисолҳо:

1) Ҳангоми ба кунҷи $\frac{\pi}{2}$ рад чархзании нуқтаи P(1; 0) нуқтаи координатаҳояш (0; 1)-и *M* ҳосил карда мешавад (расми 52).

2) Ҳангоми ба кунҷи $-\frac{\pi}{2}$ рад чархзании нуқтаи *P*(1;0) нуқтаи *N*(0; –1) ҳосил мешавад (расми 52).

3) Ҳангоми ба кунҷи $\frac{3\pi}{2}$ рад чархзании нуқтаи $P(1;0)$ нуқтаи $K(0;\ -1)$ ҳосил мешавад. (расми 53).

4) Ҳангоми ба кунҷи $-\pi$ рад чархзании нуқтаи $P(1;\ 0)$ нуқтаи $L\ (-1;\ 0)$ ҳосил мешавад (расми 53).

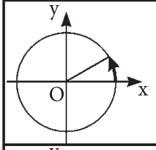
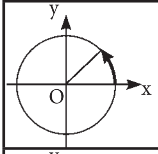
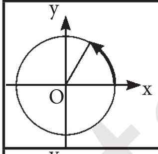
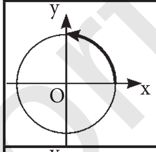
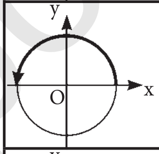
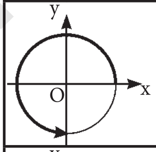
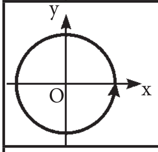
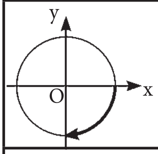
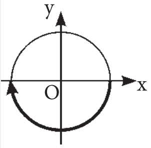
Дар курси геометрия кунҷҳои аз 0° то 180° дида баромада шудааст.

Аз чархзании нуқтаҳои давраи воҳидӣ дар атрофи ибтидои координатаҳо истифода бурда, кунҷҳои аз 180° калон, ҳамчунин, кунҷҳои манфиро низ дида баромадан мумкин аст. Чархзании кунҷҳоро ҳам бо градусҳо ва ҳам бо радианҳо ифода кардан мумкин аст. Масалан, чархзании нуқтаи $P(1;\ 0)$ ба кунҷи $\frac{3\pi}{2}$ чархзании онро ба 270° мефаҳмонад; чархзанӣ ба кунҷи $-\frac{\pi}{2}$ ин –90° мебошад.

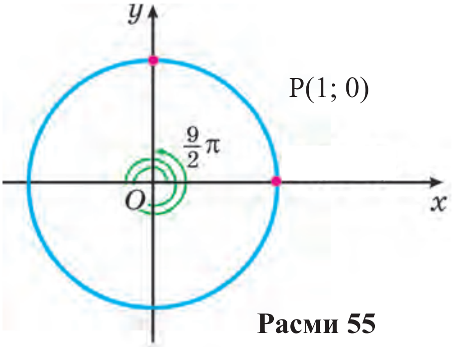
Ҷадвали чархзании радианӣ ва градусии баъзе кунҷҳоро меорем (расми 54).

Таъкид карда мегузарем, ки чархзании нуқтаи *P(1; 0)* ба кунҷи 2π, яъне 360° ин ба мавқеи аввалааш баргаштани он аст (ба ҷадвал нигаред). Ин нуқтаро ба -2π, яъне –360°, чарх занонем, он боз ба мавқеи аввала бармегардад.

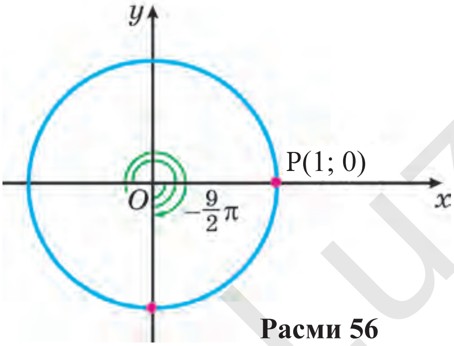
Мисолҳоро оид ба чархзании нуқта ба кунҷҳои аз 2π калон ва аз -2π хурд дида мебароем. Масалан, ҳангоми ба кунҷи $\frac{9\pi}{2}=2\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}$ чарх задан, нуқта

	$\frac{\pi}{6}$	30°
	$\frac{\pi}{4}$	45°
	$\frac{\pi}{3}$	60°
	$\frac{\pi}{2}$	90°
	π	180°
	$\frac{3\pi}{2}$	270°
	2π	360°
	$-\frac{\pi}{2}$	-90°
	$-\pi$	-180°

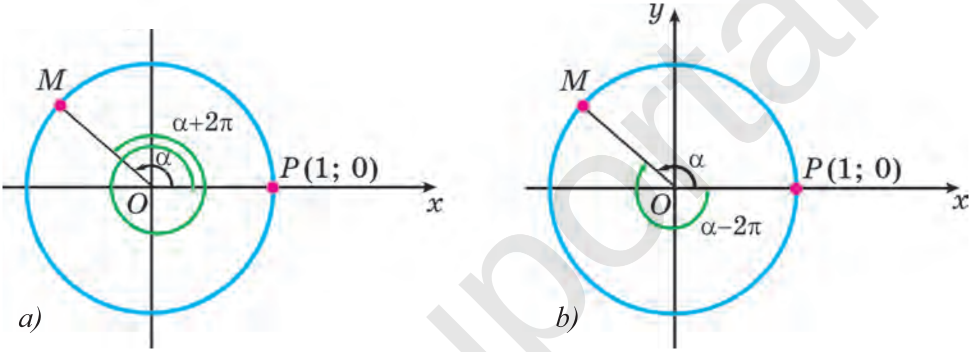
Расми 54.



Расми 55



Расми 56



a) *b)*

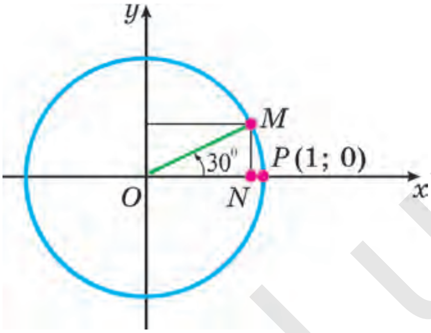
Расми 57.

муқобили самти ақрабаки соат ду маротиба пурра чарх мезанад ва боз роҳи $\frac{\pi}{2}$ -ро тай мекунад (расми 55).

Ҳангоми ба кунчи $-\frac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{2}$ чарх задан, нуқта мувофиқи самти ақрабаки соат ду маротиба пурра чарх мезанад ва боз дар ҳамои самт роҳи ба $\frac{\pi}{2}$ баробарро тай мекунад (расми 56).

Таъкид мекунем, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;0)$ ба кунчи $-\frac{9\pi}{2}$ айнан чархзании онро ба кунчи $-\frac{\pi}{2}$ ҳосил мекунад (расми 56).

Умуман,агар ба кунчи $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$ дар ин ҷо k – адади бугун) бошад, он гоҳ ҳангоми ба кунчи a чарх занонидан, нуқтаи айнан ҳангоми ба кунчи a_0 чарх занонидан ҳосил мешавад.



Расми 58.

Ҳамин тавр, барои ҳар як адади ҳақиқии a нуқтаи ягонаи давраи воҳидӣ, ки ҳангоми ба кунҷи a рад чарх занонидани нуқтаи (1; 0) ҳосил мешавад, мувофиқ меояд.

Лекин, айнан барои як нуқтаи M-и давраи воҳидӣ (ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;0)$ нуқтаи M ҳосил мешаванд) ададҳои ҳақиқии ниҳоят бисёри $a+2\pi k$ мувофиқ меояд, k — адади бутун (расми 57).

Масъалаи 1. Ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;\ 0)$ ба кунҷи: 1) 7π; 2) $-\frac{5\pi}{2}$ координатаҳои нуқтаи ҳосилшударо ёбед.

△ Азбаски $7\pi=\pi+2\pi\cdot 3$ мебошад,пас ҳангоми ба 7π чарх занонидан, ҳамон нуқтаи ҳангоми ба π чарх занонидан ҳосилшуда, яъне нуқтаи координатааш (—1; 0) ҳосил мешавад.

2) Азбаски $-\frac{5\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}-2\pi$ мебошад, пас ҳангоми ба $-\frac{5\pi}{2}$ чарх задан ҳамон нуқтаи ҳангоми ба $-\frac{\pi}{2}$ чарх задан ҳосилшуда, яъне нуқтаи координаташ (0; –1) ҳосил мешавад. ▲

Масъалаи 2. Ҳамаи кунҷҳои чархзанандаеро нависед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи (1; 0) нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ ҳосил мешавад.

△ Аз секунҷаи росткунҷаи (расми 58) ба $\frac{\pi}{6}$ баробар будани кунҷи NOM бармеояд, яъне яке аз кунҷҳои чархзанандаи мувофиқ ба $\frac{\pi}{6}$ баробар аст. Бинобар ин ҳамаи кунҷҳои чархзанӣ, ки ҳангоми чархзании нуқтаи (1; 0) нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ ҳосил мешавад, чунин ифода карда мешавад: $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, дар ин ҷо k — адади бутуни ихтиёрӣ, яъне $k=0;\pm1;\pm2;\ldots$ ▲

Машқҳо

222. Координатаҳои нуқтаҳоеро ёбед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;\ 0)$-и давраи воҳидӣ ба кунҷи:

1) 90°; 2) $-\pi$; 3) 180°; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 270°; 6) 2π

ҳосил мешавад.

223. Дар давраи воҳиди нуқтаҳоеро, ки ҳангоми чархзании нуқтаи $P(1;\ 0)$ ба кунҷи

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{3}$; 3) $-\frac{2}{3}\pi$; 4) $\frac{3}{4}\pi$;

5) $\frac{\pi}{2}+2\pi$; 6) $-\pi-2\pi$; 7) $\frac{\pi}{4}-4\pi$; 8) $-\frac{\pi}{3}+6\pi$

ҳосил мешавад, қайд кунед

224. Чоряки координатаҳои нуқтаи ҷойгиршударо муайян кунед, ки ҳангоми чархзании нуқтаи P (1; 0) ба кунҷи:

1) $2{,}1\pi$; 2) $2\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{13}{3}\pi$; 4) $-\frac{25}{4}\pi$; 5) 727°; 6) 460°

ҳосил мешавад.

225. Координатаҳои нуқгаеро, ки ҳангоми ба кунҷи:

1) 3π; 2) $-\frac{7}{2}\pi$; 3) $-\frac{15}{2}\pi$; 4) 5π;

5) 540°; 6) 810°; 7) $-\frac{9}{2}\pi$; 8) 450°

гардонидани нуқтаи P (1; 0) ҳосил мешавад, ёбед.

226. Ҳамаи кунҷҳои, чархзаниро, ки барои ҳосил кардани нуқтаҳои (–1; 0); 2) (1; 0); 3) (0; 1); 4) (0; –1) аз чархзании нуқтаи P (1; 0), лозим мешавад, нависед.

227. Нуқгтаи P (1; 0) дода шудааст. Чоряки координатаҳоеро, ки ҳангоми ба кунҷи: 1) 1; 2) 2,75; 3) 3,16; 4) 4,95; 5) 1,8 чархзанӣ, нуқтаи ҳосилшуда ҷойгир мешавад, муайян кунед.

228. Агар:

1) $a = 6{,}7\pi$; 2) $a = 9{,}8\pi$; 3) $a = 4\frac{1}{2}\pi$;

4) $a = 7\frac{1}{3}\pi$; 5) $a = \frac{11}{2}\pi$; 6) $a = \frac{17}{3}\pi$

бошад, адади x-ро, ки баробарии $a = x + 2\pi k$*-ро иҷро мекунад* (дар ин ҷо $0 \le x \le 2\pi$) ва адади натуралии *k-ро ёбед.*

229. Дар давраи воҳидӣ нуқтаеро созед, ки он ҳангоми ба кунҷи:

1) $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$; 2) $-\frac{\pi}{3} \pm 2\pi$; 3) $\frac{2\pi}{3} \pm 6\pi$; 4) $-\frac{3\pi}{4} \pm 8\pi$;
5) $4{,}5\pi$; 6) $5{,}5\pi$; 7) -6π; 8) -7π
чархзании нуқтаи P (1; 0) ҳосил мешавад.

230. Координатаҳои нуқгаеро ёбед, ки ҳангоми ба кунҷи:

1) $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; 2) $\frac{5\pi}{2} + 2\pi k$; 3) $\frac{7\pi}{2} + 2\pi k$; 4) $-\frac{9\pi}{2} + 2\pi k$

(дар ин ҷо k –адади бутун) чархзании нуқтаи P (1; 0) ҳосил мешавад.

231. Ҳамаи кунҷҳои чархзаниро, ки барои ҳосил кардани нуқтаҳои:

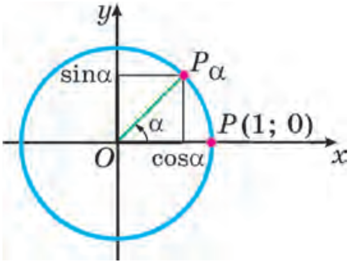
1) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

аз чархзании нуқтаи (1; 0) лозим аст, нависед.

§ 19. ТАЪРИФИ СИНУС,КОСИНУС,ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ КУНҶ

Дар курси геометрия синус, косинус ва тангенси кунҷи дар градусҳо ифодаёфта дохил карда шуда буд. Ин кунҷ дар фосилаи аз 0° то 180° дида баромада шудааст. Синус ва косинуси кунҷи ихтиёрӣ ба таври зерин таъриф дода мешаванд:

Таърифи 1. Синуси кунҷи α гуфта, ординатаи нуқтаеро меноманд, ки он ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷи α чарх занонидани нуқтаи (1 ;0) ҳосил мешавад (ишорат карда мешавад: sinα).



Косинуси кунчи α гуфта, абсиссаи нуқтаеро меноманд, ки он ҳангоми дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунчи α чарх занонидани нуқтаи (1; 0) ҳосил мегиавад (ишорат карда мешавад: cos a).

Дар ин таърифҳо кунҷи *a* ҳам дар градусҳо, ҳам дар радианҳо ифода шуданашон мумкин аст.

Масалан, ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба кунҷи $\frac{\pi}{2}$ яъне 90° чарх занонидан, нуқтаи (0; 1) ҳосил мешавад. Ординатаи нуқтаи (0; 1) ба 1 баробар аст, бинобар ин

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 90^\circ=1;$$

абсиссаи ин нуқта ба О баробар аст, бинобар ин

$$\cos\frac{\pi}{2}=\cos 90^\circ=0\,.$$

Таъкид мекунем, ки ҳангоми кунҷ дар фосилаи аз 0° то 180° будан, таърифҳои синус ва косинус ба таърифҳои синус ва косинуси курси геометрия маълум мувофиқ меояд.Масалан,

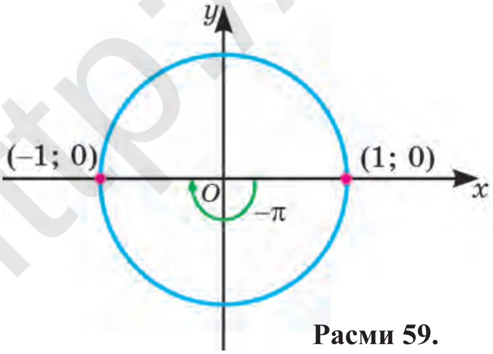
$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\ \cos\pi=\cos 180^\circ=-1\,.$$

Масъалаи 1. sin(–π) ва cos(–π) -ро ёбед.

△ Ҳангоми ба кунҷи -π чарх занонидани нуқтаи (1; 0) нуқтаи (-1; 0) ҳосил мешавад (расми 59). Бинобар ин, sin (–π)= 0, cos (–π) = –1. ▲

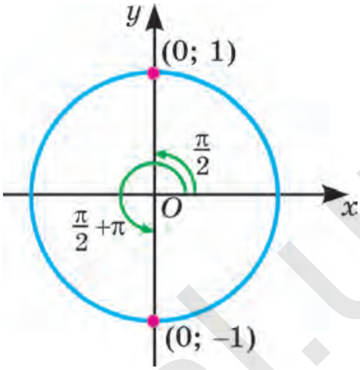
Масъалаи 2. sin 270° ва cos 270° -ро ёбед.

△Ҳангоми ба кунҷи 270° чарх занонидан нуқтаи (1; 0) ба нуқтаи (0; -1) мегузарад (расми 60). Бинобар ин, cos 270°=0, sin 270°= –1. ▲



Расми 59.

Расми 60.



Расми 61.

Масъалаи 3. Муодилаи $\sin t=0$ -ро ҳал кунед.

△Ҳал кардани муодилаи $\sin t=0$ ин муайян кардани ҳамаи кунҷҳое мебошад, ки синуси он ба 0 баробар аст.

Дар давраи воҳиди ординатааш ба сифр баробар ду нуқтаи: (1; 0) ва (–1; 0) мавҷуд аст. Ин нуқтаҳо ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро (расми 59) ба кунҷҳои 0, π, 2π, 3π ва ғайра, ҳамчунин ба кунҷҳои –π, –2π, -3π ва ғайра чарх занонидан ҳосил мешаванд.

Бинобар ин ҳангоми $t = k\pi$ будан (дар ин ҷо k — адади дилхоҳи бутун) $\sin t=0$ мешаванд. ▲

Маҷмӯи ададҳои бутун бо ҳарфи Z ишора карда мешаванд. Барои ишора кардани он, ки адади k ба Z тааллуқ дорад, аз навишти $k\in \boldsymbol{Z}$ («адади k мутааллиқ ба Z» хонда мешавад) истифода мебаранд. Бинобар ин ҷавоби масъалаи 3-ро чунин навиштан мумкин аст: $t = \pi k,\ k\in Z.$

Масъалаи 4. Муодилаи $\cos t=0$ -ро ҳал кунед.

△ Дар давраи воҳидӣ ду нуқтаи абсциссааш ба сифр баробар мавҷуд аст: (0, 1) ва (0; -1) (расми 61).

Ин нуқтаҳо ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба кунҷҳои $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi$, $\frac{\pi}{2}+2\pi$ ва ғайра, ҳамчунин ба кунҷҳои $\frac{\pi}{2}-\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$ ва ҳоказо, яъне ҳангоми ба кунҷи $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (дар ин ҷо $k\in \boldsymbol{Z}$) чарх занонидан ҳосил мешаванд.

Ҷавоб: $t=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Масъалаи 5. Муодиларо ҳал кунед: 1) $\sin t = 1$; 2) $\cos t = 1$.

△1) Нуқтаи (0; 1)-и давраи воҳидӣ ординатаи ба як баробарро соҳиб аст. Ин нуқта ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба кунҷи $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$ чарх занонидан ҳосил мешавад.

2) Ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба кунҷи $2k\pi$, $k\in \boldsymbol{Z}$ чарх занонидан, нуқтаи абсциссааш ба воҳид баробарро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: $t=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ бошад, $\sin t = 1$, $t=2\pi k$ бошад, $\cos t = 1$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ▲

Таърифи 3. Тангенси кунҷи α гуфта,нисбати синуси кунҷи α -ро бар косинуси он меноманд (чун tgα ишорат карда мешавад).

Ҳамин тавр, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Масалан, $\operatorname{tg}0^{\circ}=\frac{\sin 0^{\circ}}{\cos 0^{\circ}}=\frac{0}{1}=0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1.$

Баъзан аз котангенси кунҷи α истифода мебаранд (он чун ctg *a* ишорат карда мешавад) ва бо формулаи $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ муайян карда мешавад

Масалан

$$\operatorname{ctg}270^{\circ}=\frac{\cos 270^{\circ}}{\sin 270^{\circ}}=\frac{0}{-1}=0,\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{1}=1.$$

Таъкид кардан лозим аст, ки синус ва косинусҳо барои кунҷи ихтиёрьтаъриф дода шуда, қиматҳои онҳо дар фосилаи аз – 1 то 1 ҷойгир аст; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ танҳо, барои кунҷҳои cos $a\neq 0$, яъне ғайр аз кунҷҳои $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$ аз фарқкунандаи дилхоҳ муайян карда шудааст.

Ҷадвали қиматҳои аксар вохӯрандаи синус, косинус, тангенс ва котангенсро меорем.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад	0
ctgα	Вуҷуд надорад	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Вуҷуд надорад	0	Вуҷуд надорад

Масъалаи 6. Ҳисоб кунед:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}.$$

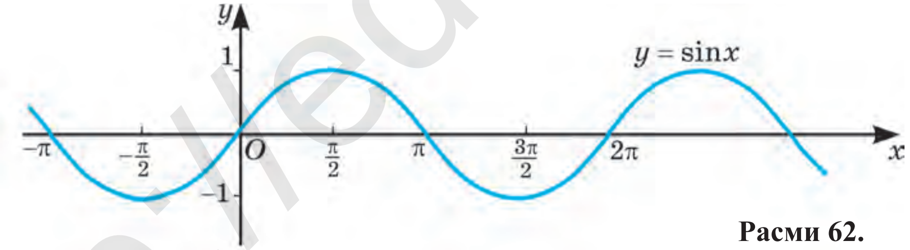
△Аз ҷадвал истифодабурда, ҳосил мекунем:

$$4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}=4\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1=2{,}5.$$ ▲

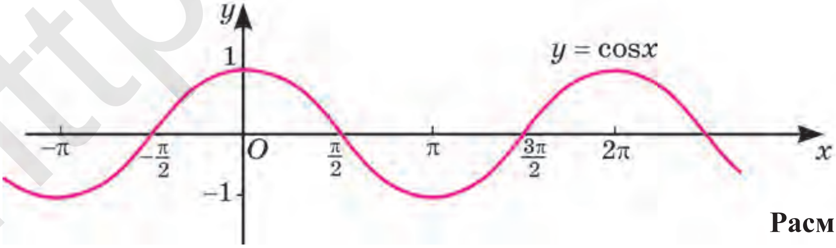
Қиматҳоро барои кунҷҳои ба ин ҷадвал дохилнашудаи синус, косинус, тангенс ва котангенс аз ҷадвали чорраҷамаи математикии В. М. Брадис, ҳамчунин бо ёрии микрокалкулятор ёфтан мумкин аст.

Агар барои ҳар як адади ҳақиқии х адади sin х мувофиқ гузошта шуда бошад, он гоҳ дар маҷмӯи ададҳои ҳақиқӣ функсияи $y = \sin x$ додашуда мебошад.Функсияҳои $y = \cos x$, $y = tgx$ ва $y = ctgx$ ҳамин гуна муайян карда мешаванд. Функсияи $y=\cos x$ барои $x\in R$ -и муайяншуда, функсияи $y=tgx$ барои $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}$, функсияи $y = ctgx$ бошад, барои $x \neq \pi k$, $k\in Z$ муайяншуда мебошанд. Графики функсияҳои $y=\sin x$ ва $y=\cos x$ дар расмҳои 62 ва 63 тасвир шудаанд.

Функсияҳои $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ функсияҳои *тригонометрӣ* номида мешавад.



Расми 62.



Расми 63.

Машқҳо

232. Ҳисоб кунед:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}$; 4) $\sin(-90°)$;

5) $\cos(-180°)$; 6) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 7) $\cos(-135°)$; 8) $\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

233. Агар :

1) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$; 5) $\sin\alpha=-0{,}6$; 6) $\cos\alpha=\frac{1}{3}$

бошад, дар давраи воҳидӣ нуқтаи ба кунҷи α мувофиқояндаро тасвир кунед.

Ҳисоб кунед (**234–236**):

234. 1) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}$; 3) $\sin\pi-\cos\pi$;

4) $\sin 0-\cos 2\pi$; 5) $\sin\pi+\sin 1{,}5\pi$; 6) $\cos 0-\cos\frac{3}{2}\pi$.

235. 1) $\mathrm{tg}\pi+\cos\pi$; 2) $\mathrm{tg}0°-\mathrm{tg}180°$; 3) $\mathrm{tg}\pi+\sin\pi$;

4) $\cos\pi-\mathrm{tg}2\pi$; 5) $\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}+\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}$.

236. 1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; 2) $5\sin\frac{\pi}{6}+3\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}-10\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$;

3) $\left(2\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$; 4) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$.

237. Муодиларо ҳал кунед:

1) $2\sin x=0$; | 2) $\frac{1}{2}\cos x=0$; | 3) $\cos x-1=0$; | 4) $1-\sin x=0$.

238. (Шифоҳӣ.) Оё sinα ва ё cosα ба:

1) 0,49; 2) –0,875; 3) $-\sqrt{2}$; 4) $2-\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}-1$

баробар шуда метавонад?

239. Барои қимати додашудаи *a* қимати ифодаро ёбед:

1) $2\sin\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha$, дар ин $\alpha=\frac{\pi}{4}$; | 2) $0{,}5\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$, дар ин $\alpha=60°$;

3) $\sin 3\alpha-\cos 2\alpha$, дар ин $\alpha=\frac{\pi}{6}$; | 4) $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}$, дар ин $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

240. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sin x = -1$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\sin 3x = 0$;
4) $\cos 0{,}5x = 0$; 5) $\cos 2x - 1 = 0$; 6) $1 - \cos 3x = 0$.

241. Муодиларо ҳал кунед:

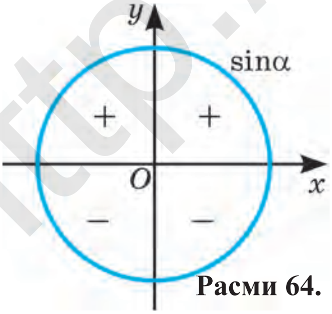
1) $\sin(x+\pi) = -1$; | 2) $\sin\frac{1}{2}(x-1) = 0$; | 3) $\cos(x+\pi) = -1$;
4) $\cos 2(x+1) - 1 = 0$; | 5) $\sin 3(x-2) = 0$; | 6) $1 - \cos 3(x-1) = 0$.

§ 20. ИШОРАҲОИ СИНУС, КОСИНУС ВА ТАНГЕНС

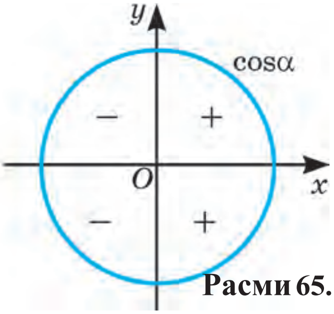
1. Ишораҳои синус ва косинус

Фарз мекунем, нуқтаи (1; 0) аз рӯи давраи воҳидӣ, муқобили ақрабаки соат ҳаракат мекунад. Дар ин ҳолат ординатаҳо ва абсиссаҳои нуқтаҳои дар чоряки (квадранти) якум ҷойгиршуда мусбат мебошанд.

Бинобар ин, агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha > 0$ ва $\cos\alpha > 0$ мешавад (расмҳои 64, 65)Барои нуқта, ки дар чоряки ду воқеъ аст, ордината мусбат, абсиссаҳо бошанд, манфианд. Бинобар ин, агар бошад, $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$ мешавад (расмҳои 64, 65). Ин ҳолатро дар чоряки сеюм $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$, дар чоряки чорум бошад, $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$ (расмҳои 64, 65) мушоҳида кардан мумкин аст. Дар ҳаракати минбаъдаи нуқта дар гирди давра ишораҳои синус ва косинус бо дар кадом чоряк истодани нуқта муайян карда мешавад. Ишораи синус дар расми 64, ишораи косинус дар расми 65 нишон дода шудааст.



Расми 64.



Расми 65.

Агар нуктаи (1; 0) мувофиқи ақрабаки соат ҳаракат кунад, дар ин ҳолат ҳам, ишораҳои синус ва косинус мувофиқи чоряки чойгиршавии нукта муайян карда мешавад, ки аз расмҳои 64, 65 дидан мумкин аст.

Масъалаи 1 . Ишораҳои кунҷии синус ва косинусҳоро муайян кунед:

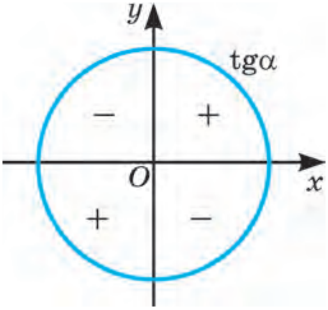
1) $\frac{3\pi}{4}$; 2) 745°; 3) $-\frac{5\pi}{7}$.

△ 1)Дар давраи воҳидӣ ба кунҷи $\frac{3\pi}{4}$ нуқтаи дар чоряки дуюм чойгирифта мувофиқ меояд. Бинобар ин, $\sin\frac{3\pi}{4} > 0$, $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$.

2) Азбаски $745° = 2\cdot 360° + 25°$ аст, пас ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба 745° чарх занонидан нуқтаи дар чоряки якум чойгирифта мувофиқ меояд.Бинобар ин sin745°>0, cos745°>0.

3) Азбаски $-\pi < -\frac{5\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$ аст, пас ҳангоми нуқтаи (1; 0)-ро ба $-\frac{5\pi}{7}$ чарх занонидан нуқтаи дар чоряки сеюм чойгирифта мувофиқ меояд.

Бинобар ин, $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right) < 0$. ▲



Расми 66.

2. Ишораҳои тангенс

Аз рӯи таъриф $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ аст. Аз ин рӯ агар sinα ва cosα дорои ишораи ягона бошад, tgα > 0, sina ва cosα ишораҳои муқобил дошта бошанд, tgα<0 мешавад. Ишораҳои тангенс дар расми 66 тасвир шудаанд.

Ишораҳои ctga бо ишораҳои tgα як хел аст.

Масъалаи 2. Ишораҳои кунҷии тангенсро муайян кунед:

1) 260°; 2) 3.

△ 1) Аз он сабаб, ки 180° < 260° < 270° аст, tg260°>0 мешавад.

2)Аз он сабаб,ки $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ аст, tg3<0 мешавад. ▲

Машқҳо

242. Агар:

1) $\alpha=\frac{\pi}{6}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=210°$; 4) $\alpha=-210°$;
5) $\alpha=735°$; 6) $\alpha=848°$; 7) $\alpha=\frac{2\pi}{5}$; 8) $\alpha=\frac{5\pi}{8}$.

бошад, чоряки чойгиршавии нуқтаеро муайян кунед, ки он ҳангоми ба кунҷи *a* чарх занонидани нуқтаи (1; 0) ҳосил мешавад.

243. Агар:

1) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; 2) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$; 3) $\alpha=-\frac{5}{8}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{4}{3}\pi$;
5) $\alpha=740°$; 6) $\alpha=510°$; 7) $\alpha=-\frac{7\pi}{4}$; 8) $\alpha=361°$

бошад, ишораҳои адади sinα-ро муайян кунед.

244. Агар:

1) $\alpha=\frac{2}{3}\pi$; 2) $\alpha=\frac{7}{6}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 4) $\alpha=-\frac{2}{5}\pi$;
5) $\alpha=290°$; 6) $\alpha=-150°$; 7) $\alpha=\frac{6\pi}{5}$; 8) $\alpha=-100°$

бошад, ишораҳои адади cosα-ро муайян кунед.

245. Агар:

1) $\alpha=\frac{5}{6}\pi$; 2) $\alpha=\frac{12}{5}\pi$; 3) $\alpha=-\frac{3}{5}\pi$; 4) $\alpha=-\frac{5}{4}\pi$;
5) $\alpha=190°$; 6) $\alpha=283°$; 7) $\alpha=172°$; 8) $\alpha=200°$

бошад, ишораҳои адади tgα ва ctgα -ро муайян кунед.

246. Агар:

1) $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; 3) $\frac{7}{4}\pi<\alpha<2\pi$;
4) $2\pi<\alpha<2{,}5\pi$; 5) $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$; 6) $1{,}5\pi<\alpha\leq 1{,}8\pi$

бошад, ишораҳои адади sinα, cosα, tgα, ctgα -ро муайян кунед.

247. Агар: 1) $\alpha=1$; 2) $\alpha=3$; 3) $\alpha=-3{,}4$; 4) $\alpha=-1{,}3$; 5) $\alpha=3{,}14$
бошад, ишораҳои sinα, cosα, tgα -ро муайян кунед.

248. Бигзор $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бошад. Ишораи ададро муайян кунед

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 4) $\sin(\pi-\alpha)$;
5) $\cos(\alpha-\pi)$; 6) $\mathrm{tg}(\alpha-\pi)$; 7) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

249. Қиматҳои аргумент α-ро дар фосилаи аз 0 то 2π муайян кунед, ки барои онҳо ишораҳои синус ва косинус якхел (ҳар хел) мешаванд.

250. Ишораи ададро муайян кунед:

1) $\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{3\pi}{4}}$; 4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}$.

251. Қимати ифодаҳоро муқоиса кунед :

1) $\sin 0{,}7$ ва $\sin 4$; 2) $\cos 1{,}3$ ва $\cos 2{,}3$.

252. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sin(5\pi+x)=1$; 2) $\cos(x-3\pi)=0$;

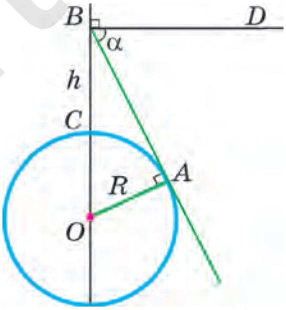
3) $\cos\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)=-1$; 4) $\sin\left(\frac{9}{2}\pi+x\right)=-1$.

253. Агар:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=-1{,}4$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=1{,}4$;
3) $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$; 4) $\cos\alpha-\sin\alpha=1{,}2$

бошад, нуқтаи ба адади α мувофиқ оянда дар кадом чоряк чойгир аст?

254. *(Масъалаи Берунӣ.)* Агар баландии кӯҳ $h = BC$ ва кунчи $\alpha = \angle ABD$ маълум бошад, радиуси Замин R -ро ёбед (расми 67).



Расми 67.

§ 21. МУНОСИБАТҲОИ БАЙНИ СИНУС,КОСИНУС ВА ТАНГЕНСИ ҲАМОН КУНЧ

Муносибати байни синус ва косинусро муайян мекунем.

Бигзор нуқтаи $M(x;y)$-и давраи воҳидӣ дар натиҷаи ба кунчи а чарх занонидани нуқтаи $(1;\ 0)$ ҳосил шуда бошад (расми 68). Дар ин ҳолат мувофиқи таърифи синус ва косинус

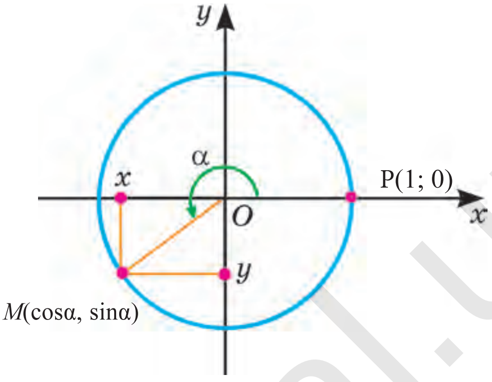
$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$ мешавад.

Нуқтаи М ба давраи воҳидӣ тааллуқ дорад, бинобар ин координатаҳои $(x;y)$-и он муодилаи $x^2 + y^2 = 1$ -ро қаноат мекунад.

Бинобар ин,

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (1)$$

Баробарии (1) барои қиматҳои ихтиёрии a иҷро мешавад ва айнияти асосии тригонометрӣ номида мешавад. Аз баробарии Аз баробарии (1) sinα-ро бо cosa ва баръакс, cosα-ро бо sinα ифода кардан мумкин аст:



Расми 68.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\,, \qquad (2)$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,. \qquad (3)$$

Ишораи дар назди реша истодаи ин формулаҳо бо ишораи ифодаи дар қисми чапи формула истода муайян карда мешавад.

Масъалаи 1. Агар $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, sinα -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (2) истифода мебарем.Азбаски $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ аст,пас $\sin\alpha < 0$ мешавад,бинобар ин дар формулаи (2) пеш аз реша ишораи “–" гузоштан лозим аст: $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$. ▲

Масъалаи 2. Агар $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ва $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ бошад, cosα -ро ҳисоб кунед.

△Азбаски $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ аст, $\cos\alpha > 0$ мешавад ва бинобар ин дар формулаи (3) пеш аз реша ишораи "+" гузоштан лозим аст: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. ▲

Акнун алоқамандии байни тангенс ва котангенсро муайян мекунем. Мувофиқи таърифи тангенс ва котангенс:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ин баробариҳоро зарб карда, баробарии зеринро ҳосил мекунем:,

$$\boxed{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1} \qquad (4)$$

Аз баробарии (4) tg *a*-ро бо ёрии ctg a ва баръакс, ctg *a*-ро бо ёрии tg a ифода кардан мумкин аст:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}. \qquad (6)$$

Баробариҳои (4)–(6) ҳангоми $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k,\ k\in\boldsymbol{Z}$ будан ҷой дорад.

Масъалаи 3. Агар tgα = 13 бошад, ctgα -ро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (6) меёбем: $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1}{13}$. ▲

Масъалаи 4. Агар $\sin\alpha=0{,}8$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бошад, tgα-ро ҳисоб кунед

△ Аз рӯи формулаи (3) cosa -ро меёбем. Аз он сабаб, ки $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ аст, cosα <0 мешавад. Аз ҳамин сабаб,

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0{,}64}=-0{,}6.$$

Пас, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0{,}8}{-0{,}6}=-\frac{4}{3}$. ▲

Аз айнияти асосии тригонометри ва таърифи тангенс истифода бурда, муносибати байни тангенс ва косинусро меёбем.

△ cosα ≠ 0 фарз карда, ҳарду қисми баробарии $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$-ро ба $\cos^2\alpha$ тақсим мекунем: $\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, аз ин ҷо

$$\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.} \quad ▲ \qquad (7)$$

Агар $\cos\alpha \neq 0$ бошад, яъне $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ бошад, формулаи (7) дуруст аст.

Аз формулаи (7) тангенсро бо косинус ва косинусро бо ёрии тангенс ифода кардан мумкин аст.

Масъалаи 5. Агар $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бошад, $\mathrm{tg}\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△Аз формулаи (7) ҳосил мекунем:

$$\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}-1=\frac{16}{9}.$$

Тангенс дар чоряки дуюм манфӣ аст, бинобар ин $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$. ▲

Масъалаи 6. Агар $\mathrm{tg}\alpha=3$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (7) ҳосил мекунем:

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{1}{10}.$$

барои он ки $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ аст,$\cos\alpha<0$ мешавад ва бинобар ин, $\cos\alpha=-\sqrt{0,1}$.▲

Машқҳо

255. Агар:

1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ ва $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ бошад, $\sin\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ -ро;

2) $\sin\alpha=0,8$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бошад, $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ -ро;

3) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ бошад, $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро;

4) $\sin\alpha=-\frac{2}{5}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бошад , $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ ва $\mathrm{ctg}\alpha$ -ро;

5) $\mathrm{tg}\alpha=\frac{15}{8}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ -ро;

6) $\mathrm{ctg}\alpha=-3$ ва $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ бошад, $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

256. Бо ёрии айнияти асосии тригонометрӣ дар як вақт иҷрошавӣ ва иҷронашавии баробариҳои зеринро муайян кунед:

1) $\sin\alpha=1$ ва $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=0$ ва $\cos\alpha=-1$;

3) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ ва $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ва $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

257. Оё баробариҳо дар як вақт иҷро мешаванд

1) $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ ва $\text{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{24}}$; 2) $\text{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ ва $\cos\alpha=\frac{3}{4}$?

258. Бигзор, α яке аз кунҷҳои секунҷаи росткунҷа аст. Агар $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{11}$ бошад, $\cos\alpha$ ва $\text{tg}\alpha$ -ро ёбед

259. Дар секунҷаи баробарпаҳлӯ тангенси кунҷи назди қулла ба $2\sqrt{2}$ баробар аст. Косинуси ин кунҷро ёбед

260. Агар $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\frac{1}{8}$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ёбед.

261. 1) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ бошад, $\cos\alpha$ -ро ёбед.

2) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ бошад, $\sin\alpha$ -ро ёбед.

262. Маълум аст, ки $\text{tg}a = 2$. Қимати ифодаро ёбед:

1) $\frac{\text{ctg}\alpha+\text{tg}\alpha}{\text{ctg}\alpha-\text{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; 3) $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{3\sin\alpha-5\cos\alpha}$;

4) $\frac{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{4\sin\alpha+\cos\alpha}$; 6) $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$.

263. Маълум аст, $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Қимати ифодаҳои: 1) $\sin\alpha\ \cos\alpha$; 2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ -ро ёбед.

264. Муодиларо ҳал кунед:

1) $2\sin x+\sin^2x+\cos^2x=1$; 2) $\sin^2x-2=\sin x-\cos^2x$;

3) $2\cos^2x-1=\cos x-2\sin^2x$; 4) $3-\cos x=3\cos^2x+3\sin^2x$.

§ 22. АЙНИЯТҲОИ ТРИГОНОМЕТРӢ

Масъалаи 1. Ҳангоми $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ будан ,чой доштани баробарии

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad (1)$$

-ро исбот кунед.

△ Мувофиқи таърифи котангенс $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ва бинобар ин

$$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (2)$$

Ин шакли ивазкуниҳо дуруст аст,чунки ҳангоми $\alpha \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ будан, $\sin\alpha \neq 0$. ▲

Баробарии (1) барои қиматҳои имкондоштаи ихтиёрии α ҷой дорад, яъне барои ҳамаи қиматҳои қисмҳои чап ва рости маънодоштаи он дуруст мебошад. Чунин баробариҳо айниятҳо номида мешаванд.

Масъалаҳо оид ба исботи ин гуна баробариҳо масъалаҳо доир ба исботи айниятҳо номида мешаванд.

Дар оянда агар исботи айниятҳо дар шарти масъалаҳо талаб карда нашуда бошад, қиматҳои ҷоизи кунҷҳоро намекобем.

Масъалаи 2. $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

$$△\ (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha) = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.\ ▲$$

Масъалаи 3. Айниятро исбот кунед: $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

△Барои исбот кардани ин айният нишон медиҳем, ки фарқи байни қисмҳои чап ва рости ин баробарӣ ба сифр баробар аст:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0.\ ▲$$

Ҳангоми ҳал кардани масъалаҳои 1–3 аз усулҳои зерини исботи айниятҳо истифода карда шуд: дар қисми рост шаклро иваз карда, дар қисми чап баробар будани онро нишон додан; фарқи байни қисмҳои чап ва рост ба сифр баробар буданашро нишон додан. Дар баъзе ҳолатҳо ҳангоми исботи айниятҳо, шаклҳои қисмҳои чап ва рости онро иваз карда ба ифодаи ягона овардан қулай аст.

Масъалаи 4. Айниятро исбот кунед: $\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

$$\triangle\ \frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

Айният исбот карда шуд, чунки қисмҳои чап ва рости он ба. $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ баробар аст. ▲

Масъалаи 5. Ифодаро содда кунед: $\frac{1}{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha}$.

$$\triangle\ \frac{1}{\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha.\ \blacktriangle$$

Ҳангоми ҳалли масъалаҳо доир ба содда кардани ифодаҳои тригонометрӣ, агар дар шарти масъала талаб карда нашуда бошад, қиматҳои ҷоизи қабулшавандаи кунҷҳоро намекобем

Машқҳо

265. Айниятро исбот кунед:

1) $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha$;

2) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\text{tg}^2\alpha$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\text{ctg}^2\alpha$;

5) $\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}+\sin^2\alpha=1$;

6) $\frac{1}{1+\text{ctg}^2\alpha}+\cos^2\alpha=1$.

266. Ифодаро содда кунед::

1) $\cos\alpha\cdot\text{tg}\alpha-2\sin\alpha$;

2) $\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\text{ctg}\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$;

4) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin\alpha}$;

5) $\frac{\text{tg}\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

267. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

1) $\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}$, дар ин $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$, дар ин $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

3) $\cos^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha + \sin^2\alpha$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos^2\alpha + \text{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

268. Айниятро исбот кунед

1) $(1-\sin^2\alpha)(1+\text{tg}^2\alpha)=1$; 2) $\sin^2\alpha(1+\text{ctg}^2\alpha)-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

269. Исбот кунед, ки барои ҳамаи қиматҳои ҷоизи a ифодаи зерин айнан як хел қиматро қабул мекунад, яъне аз a вобаста нест:

1) $(1+\text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha(1+\text{ctg}^2\alpha)$;

3) $\left(1+\text{tg}^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $\frac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{ctg}^2\alpha}-\text{tg}^2\alpha$.

270. Айниятро исбот кунед

1) $(1-\cos2\alpha)(1+\cos2\alpha)=\sin^2 2\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\frac{1}{1+\sin\alpha}$;

3) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

4) $(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$;

5) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$; 6) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

7) $\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\text{ctg}^2\alpha}=1$; 8) $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

271. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}-(1+\text{ctg}^2\alpha)$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{3}$;

2) $(1+\text{tg}^2\alpha)-\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}$, дар ин $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

272. Агар $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}6$ бошад, қимати $\sin\alpha\cos\alpha$ -ро ёбед

273. Агар $\cos\alpha-\sin\alpha=0{,}2$ бошад, қимати $\cos^3\alpha-\sin^3\alpha$ -ро ёбед

274. Муодиларо ҳал кунед.

1) $3\cos^2x-2\sin x=3-3\sin^2x$; 2) $\cos^2x-\sin^2x=2\sin x-1-2\sin^2x$.

§ 23. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ВА КОТАНГЕНСИ α ВА $-\alpha$

Бигзор нуқтаҳои M_1 ва M_2 -и давраи воҳидӣ ҳангоми мувофиқан ба кунҷҳои α ва $-\alpha$ чарх занонидани нуқтаи P (1; 0) ҳосил шуда бошад (расми 69). Дар ин ҳолат тири Ox кунҷи $M_1O\,M_2$-ро ба ду қисми баробар тақсим мекунад ва бинобар ин нуқгаҳои M_1 ва M_2 нисбат ба тири Ox симметрӣ ҷойгир шудаанд. Абсиссаи ии нуқгаҳо як хел мешаванд, ординатаҳояшон бошад, фақат бо ишораашон фарқ мекунад. Нуқгаи M_1 ба координатаҳои $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, нуқтаи M_2 бошад, ба координатаҳои $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$ соҳиб мебошад. Бинобар ин

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha.} \qquad (1)$$

Аз таърифи тангенс истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha\,.}$$

Пас,

$$\boxed{\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha.} \qquad (2)$$

Ба монанди ин,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha. \qquad (3)$$

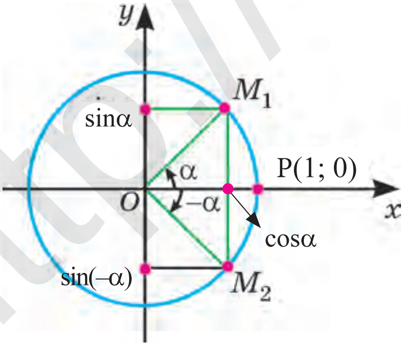
Формулаи (1) барои қиматҳои ихтиёрии α ҷой дорад, формулаи (2) бошад, ҳангоми $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in$ бо мавқеъ аст.

Агар $\alpha \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ бошад, дар он ҳолат нишон додан мумкин аст, ки $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$ аст. Формулаҳои (1)—(2) имкон медиҳад, ки қиматҳои синус, косинус ва тангенсро барои кунҷҳои манфӣ муайян кунем. Масалан:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}\,.$$



Расми 69.

Машқҳо

275. Ҳисоб кунед:

1) $\cos(-\frac{\pi}{6})\sin(-\frac{\pi}{3})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{4})$; 2) $\frac{1+\mathrm{tg}^2(-30^\circ)}{1+\mathrm{ctg}^2(-30^\circ)}$;

3) $2\sin(-\frac{\pi}{6})\cos(-\frac{\pi}{6})+\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3})+\sin^2(-\frac{\pi}{4})$;

4) $\cos(-\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\frac{3}{2}\pi)+\mathrm{ctg}(-\frac{\pi}{4})$.

276. Ифодаро содда кунед:

1) $\mathrm{tg}(-\alpha)\cos\alpha + \sin\alpha$; 2) $\cos\alpha - \mathrm{ctg}\alpha(-\sin\alpha)$;

3) $\frac{\cos(-\alpha)+\sin(-\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}(-\alpha)\mathrm{ctg}(-\alpha)+\cos^2(-\alpha)+\sin^2\alpha$.

277. Айниятро исбот кунед: $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\mathrm{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

278. Ҳисоб кунед:

1) $\frac{3-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+7,5\mathrm{tg}\,(-\pi)+\frac{1}{8}\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$.

279. Содда кунед:

1) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1-\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{1-(\sin\alpha+\cos(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

§ 24. ФОРМУЛАҲОИ ҶАМЪ

Формулаи ҷамъ гуфта, бо ёрии синус ва косинусҳои кунҷҳои α ва β ифодашавии $\cos(\alpha \pm \beta)$ ва $\sin(\alpha \pm \beta)$ -ро меноманд.

Теорема. Барои α ва β -и ихтиёри баробарии зерин ҷой дорад :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

○ Фарз мекунем, ки дар натиҷаи нуқтаи M_0 (1; 0)-ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба кунҷҳои $\alpha-\beta$ ва $\alpha+\beta$ радиан чарх занонидан мувофиқан нуқтаҳои M_α, $M_{-\beta}$ ва $M_{\alpha+\beta}$ ҳосил мешавад(расми 70). Мувофиқи таърифи синус ва косинус ин нуқтаҳо ба координатаҳои зерин соҳиб аст:

$$M_\alpha\ (\cos\alpha;\ \sin\alpha),\quad M_{-\beta}\ (\cos(-\beta);\ \sin(-\beta)),$$
$$M_{\alpha+\beta}\ (\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta)).$$

Азбаски $\angle M_0OM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$ аст, пас секунҷаҳои баробарпаҳлӯи $M_0OM_{\alpha+\beta}$ ва $M_{-\beta}OM_\alpha$ баробар ва бинобар ин асосҳои $M_0M_{\alpha+\beta}$ ва $M_{-\beta}M_\alpha$ - онҳо ҳам баробар аст. Пас ,

$$(M_0M_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2.$$

Аз формулаи масофаи байни ду нуқтаи маълуми курси геометрия истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2.$$

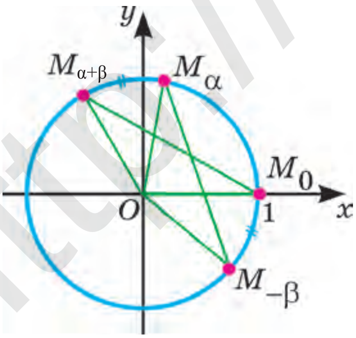
Аз формулаи (1)-и § 23 истифода бурда, шакли ин баробариро иваз мекунем:

$$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha.$$

Аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда ҳосил мекунем:

$$2-2\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta,$$

аз ин ҷо $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$. ●



Расми 70.

Масъалаи 1. cos75° -ро ҳисоб кунед.

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=$$
$$=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}.$$ ▲

Дар формулаи (1) β ро ба –β иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta),$$

аз ин ҷо

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Масъалаи 2. cos15°-ро ҳисоб кунед.

△ Аз рӯи формулаи (2) меёбем:

$$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$ ▲

Масъалаи 3. Формулаи зеринро исбот кунед:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (3)$$

△ Агар $\alpha=\frac{\pi}{2}$ бошад,аз рӯи формулаи (2) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\beta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\beta=\sin\beta,$$

яъне

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\beta. \qquad (4)$$

Дар ин формула β -ро бо α иваз карда, ҳосил мекунем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha.$$

Дар формулаи (4) $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ фарз кунем:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$ ▲

Аз формулаҳои (1)–(4) истифода бурда, барои синус формулаҳои ҷамъро мебарорем:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Ҳамин тавр

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

Дар формулаи (5) β -ро бо –β иваз карда ҳосил мекунем:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

аз ин ҷо

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

Масъалаи 4. sin210° ро ҳисоб кунед.

△ $\sin 210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=$

$$=\sin180^\circ\cos30^\circ+\cos180^\circ\sin30^\circ=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$ ▲

Масъалаи 5. Ҳисоб кунеед:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}.$$

△ $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0.$ ▲

Масъалаи 6. Баробариро исбот кунед:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

△ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$

Сурат ва махраҷи ин касрро ба cosα cos β тақсим карда, формулаи (7)-ро ҳосил мекунем.▲

Формулаи (7) ҳангоми ҳисобкуниҳо бомавқеъ шуда метавонад. Масалан, бо ёрии ҳамин формула меёбем:

$$\operatorname{tg}225^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}180^\circ+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}180^\circ\operatorname{tg}45^\circ}=1.$$

Машқҳо

Бо ёрии формулаҳои ҷамъ ҳисоб кунед (**280–281**):

280. 1) cos135°; 2) cos120°; 3) cos150°; 4) cos240°.

281. 1) cos57°30'cos27°30' + sin57°30'sin27°30';
2) cos19°30'cos25°30' – sin19°30'sin25°30';

3) $\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}$;

4) $\cos\frac{8\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

282. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, дар ин $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ва $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, дар ин $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Ифодаро содда кунед (**283–284**):

283. 1) cos3αcosα – sinαsin3α; 2) cos5βcos2β + sin5βsin2β;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$.

284. 1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\cos(\alpha-\beta)$.

Ифодаро содда кунед (**285–286**):

285. 1) sin73°cos17° + cos73°sin17°;
2) sin73°cos13° – cos73°sin13°;

3) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}$; 4) $\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$.

286. 1) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, дар ин $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ва $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, дар ин $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

287. Ифодаро содда кунед:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$; 2) $\cos(-\alpha)\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$;

4) $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta)$.

288. Агар $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ ва $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ бошад, $\cos(\alpha+\beta)$ ва $\cos(\alpha-\beta)$ -ро ҳисоб кунед.

289. Агар $\cos\alpha=-0{,}8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ ва $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin(\alpha-\beta)$ -ро ҳисоб кунед.

290. Ифодаро содда кунед:

1) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

3) $\frac{2\cos\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$; 4) $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

291. Айниятро исбот кунед:

1) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

3) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\frac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

292. Ифодаро содда кунед: 1) $\frac{\operatorname{tg}29^\circ+\operatorname{tg}31^\circ}{1-\operatorname{tg}29^\circ\operatorname{tg}31^\circ}$; 2) $\frac{\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi-\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}{1+\operatorname{tg}\frac{7}{16}\pi\cdot\operatorname{tg}\frac{3}{16}\pi}$.

§ 25. СИНУС ВА КОСИНУСИ КУНҶИ ДУЧАНДА

Аз формулаҳои ҷамъ истифода карда, формулаҳои синус ва косинуси кунҷи дучандаро ҳосил мекунем.

1) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

Ҳамин, тавр

! $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$ **(1)**

Масъалаи 1. Агар $\sin\alpha = -0{,}6$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед

△ Аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot(-0{,}6)\cdot\cos\alpha = -1{,}2\cos\alpha.$$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ аст, ва бинобар ин $\cos\alpha < 0$ мешавад ва:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8\cdot$$

Пас, $\sin 2\alpha = -1{,}2\cdot(-0{,}8) = 0{,}96.$ ▲

2) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

Ҳамин тавр,

! $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$ **(2)**

Масъалаи 2. Агар $\cos\alpha = 0{,}3$ бошад, $\cos 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (2) ва аз айнияти асосии тригонометрӣ истифода бурда ҳосил мекунем: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) =$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot(0{,}3)^2 - 1 = -0{,}82.$$ ▲

Масъалаи 3. Ифодаро содда кунед: $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$.

△ $$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha.$$ ▲

Масъалаи 4. Агар $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ бошад, $\operatorname{tg}2\alpha$ -ро ҳисоб кунед.

△ $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

аз рӯи формула фарз мекунем,ки $\beta = \alpha$ аст(ниг.ба § 24) ва:

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}. \qquad (3)$$

-ро ҳосил мекунем.

Агар $tg\alpha = \frac{1}{2}$ бошад,дар он ҳолат аз рӯи формулаи (3)

$$tg2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$ ▲

Машқҳо

Ҳисоб кунед: (**293–294**):

293. 1) $2\sin15°\cos15°$; 2) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;
3) $(\cos75° - \sin75°)^2$; 4) $(\cos15° + \sin15°)^2$.

294. 1) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$;
3) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$.

295. Агар :
1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
бошад, $\sin2\alpha$ -ро ёбед.

296. Агар:
1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 2) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ бошад, $\cos2\alpha$ -ро ёбед.

Ифодаро содда кунед (**297–298**):

297. 1) $\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 4) $\sin2\alpha + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

298. 1) $\frac{\cos2\alpha+1}{2\cos\alpha}$; 2) $\frac{\sin2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 4) $\frac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$.

299. Айниятро исбот кунед:

1) $\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$;
3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 4) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

300. Агар:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$; 3) $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{4}$

бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

301. Айниятро исбот кунед:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$.

302. Ҳисоб кунед:

1) $2\cos^2 15° - 1$; | 2) $1 - 2\sin^2 22{,}5°$; | 3) $2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$; | 4) $1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$.

303. Ифодаро содда кунед:

1) $1 - 2\sin^2 5\alpha$; 2) $2\cos^2 3\alpha - 1$; 3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$;

4) $\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}{\sin 2\alpha}$; 5) $1 + \cos 4\alpha$; 6) $1 - 2\cos^2 5\alpha$.

304. Айниятро исбот кунед:

1) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha - 1$; 2) $\frac{\sin 2\alpha - 2\cos\alpha}{\sin\alpha - \sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha$; 4) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$.

305. Агар $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$ бошад, $\operatorname{tg} 2\alpha$ -ро ҳисоб кунед:

306. Ҳисоб кунед: 1) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$; 2) $\frac{6\operatorname{tg}15°}{1-\operatorname{tg}^2 15°}$; 3) $\frac{4\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$.

§ 26. ФОРМУЛАҲОИ МУВОФИҚОВАРӢ

Ҷадвали қиматҳои синус, косинус, тангенс ва котангенс барои кунҷҳои аз 0° то 90°(ё аз 0 то $\frac{\pi}{2}$) сохта мешавад. Дар ин ҳолат қиматҳои онҳо барои дигар кунҷҳо, бо қиматҳои ба кунҷҳои тез овардашуда эзоҳ дода мешавад.

Масъалаи 1. sin870° ва cos870°-ро ҳисоб кунед.

△ 870° = 2·360° + 150°. Бинобар ин ҳангоми нуқтаи P(l; 0)-ро дар атрофи ибтидои координатаҳо ба 870° чарх занонидан, нуқта ду чархзаниро иҷро мекунад ва боз ба 150° чарх мезанад, яъне худи нуқтаи M ҳангоми ба 150° чарх задан ҳосил мешавад (расми 71).

Бинобар ин sin870° = sin 150° cos870° = cos 150°.

Нуқтаи M_1-и ба нуқтаи M нисбат ба тири Oy симметриро месозем (расми 72). Ординатаҳои нуқтаҳои M ва M_1 як хел, абсиссаҳояшон бошад фақат бо ишораҳояшон фарқ мекунад. Бинобар ин $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$;

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ҷавоб: $\sin 870^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 870^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. ▲

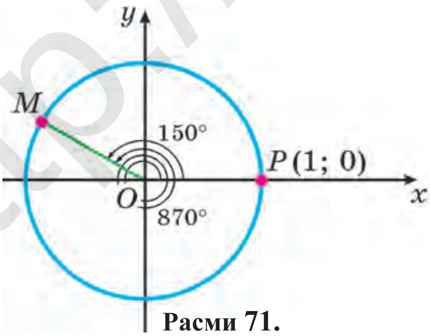
Ҳангоми ҳалли масъалаи 1 аз баробариҳои

$$\sin(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ,\ \cos(2\cdot 360^\circ + 150^\circ) = \cos 150^\circ, \qquad (1)$$

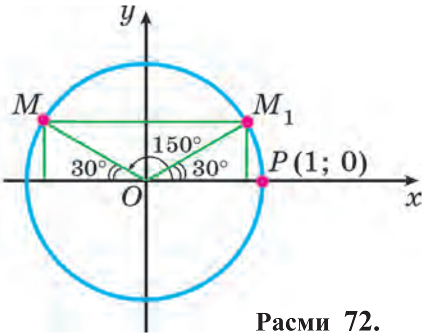
$$\sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ,\ \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ \qquad (2)$$

истифода бурдан мумкин аст.Баробарии (1) баробарии дуруст аст, чунки ҳангоми ба кунҷи α +2π*k*, *k*є***Z*** чарх занонидани нуқтаи *P* (1; 0), айнан нуқтаи ҳангоми онро ба кунҷи α чарх занонидан ҳосил мешавад . Бинобар ин формулаҳои зерин ҷой доранд:

! $$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha,\ k \in Z. \qquad (3)$$



Расми 71.



Расми 72.

Хусусан, $k = 1$ бошад,баробарии :

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha, \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$$

ҷой дорад.

Баробарии (2) ҳолати хусусии формула ҳисоб карда мешавад:

❗ $$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad (4)$$

Формулаи $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ -ро исбот мекунем.

○ Барои синус формулаи ҷамъро истифода бурда, ҳосил мекунем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha =$$

$$= 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin\alpha = \sin\alpha. \;●$$

Формулаҳои дуюми (4) ҳам айнан исбот карда мешавад. Формулаҳои (4) формулаҳои мувофиқоварӣ номида мешаванд. Бо ёрии формулаҳои (3) ва (4) синус ва косинуси кунҷи ихтиёриро ба ҳисобкунии қиматҳои онҳо барои кунҷи тез овардан мумкин аст.

Масъалаи 2. $\sin930°$ -ро ҳисоб кунед.

△ Аз формулаи (3) истифода бурда ҳосил мекунем.

$$\sin930° = \sin(3\cdot360° - 150°) = \sin(-150°).$$

Мувофиқи формулаи $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ ҳосил мекунем:$\sin(-150°) =-$
$- \sin150°$.
Аз рӯи формулаи (4)меёбем:

$$-\sin150° = -\sin(180° - 30°) = -\sin30° = -\frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: $\sin930^{\circ} = -\frac{1}{2}$. ▲

Масъала 3. $\cos\frac{15\pi}{4}$ -ро ҳисоб кунед.

$$△ \quad \cos\frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \;▲$$

Акнун нишон медиҳем, ки ҳисобкунии тангенси кунҷи ихтиёриро чӣ гуна ба ҳисобкунии тангенси кунҷи тез овардан мумкин аст.

Аз формулаи (3) ва аз таърифи тангенс баробарии

$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

бармеояд.

Аз ин баробарӣ ва аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi - 2\pi) = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - \alpha) =$$

$$= -\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = -\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Бинобар ин формулаи зерин ҷой дорад:

! $$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha,\ k \in Z.} \qquad \textbf{(5)}$$

Масъалаи 4. Ҳисоб кунед: 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4}$.

△ 1) $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{3} = \operatorname{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{4} = \operatorname{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. ▲

Дар § 24 (масъалаи 3) формулаҳои

! $$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha, \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$

исбот карда шуда буданд, ки онҳо низ *формулаҳои мувофиқоварӣ* номида мешаванд. Аз ин формулаҳо истифода карда, масалан,

$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6}$ -ро ҳосил мекунем.

Барои қимати дилхоҳи *x* дурустии баробариҳои $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ маълум аст.

Аз ин баробариҳо дида мешавад, ки ҳангоми ба 2π тағйир ёфтани аргумент қиматҳои синус ва косинус даврӣ такрор мешавад. Ин гуна *функсияҳо функсияҳои даврии davраш 2π* номида мешавад.

Агар чунин адади $T \neq 0$ мавҷуд бошад, ки барои x-и ихтиёрии соҳаи муайянии функсияи $y = f(x)$ баробарии $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ иҷро шавад, $f(x)$ функсияи даврӣ номида мешавад. Адади T даври функсияи f(x) ном дорад.

Аз ин таъриф дида мешавад, ки агар адади x мугааллиқи соҳаи муайянии функсияи $f(x)$ бошад, он гоҳ ададҳои $x+T$, $x–T$ ва умуман ададҳои $x+Tn$, $n \in Z$ низ ба соҳаи муайянии ҳамон функсияи даврӣ тааллуқ дорад ва $f(x + Tn) = f(x)$, $n \in Z$ мешавад

Нишон медиҳем, ки даври аз ҳама хурди мусбати функсияи $y=\cos x$, ба 2π баробар аст

○*Бигзор $T > O$ даври косинус бошад, яъне барои x-и ихтиёри баробарии $\cos(x + T) = \cos x$ иҷро мешавад. $x = O$ гуфта, $\cos T = 1$-ро ҳосил мекунем. Аз ин ҷо $T = 2\pi k$, $k \in Z$. Азбаски $T > O$ аст, пас T фақат қиматҳои 2π, 4π, 6π, ... -ро қабул карда метавонад ва бинобар ин қимати T аз 2π хурд шуда наметавонад..* ●

Исбот кардан мумкин аст,ки даври аз ҳама хурди мусбати функсияи $y=\sin x$ низ ба 2π баробар аст.

Машқҳо

Ҳисоб кунед (**307–310**):

307. 1) $\sin\frac{13}{2}\pi$; 2) $\sin 17\pi$; 3) $\cos 7\pi$; 4) $\cos\frac{11}{2}\pi$;

5) $\sin 720°$; 6) $\cos 540°$; 7) $\sin 12{,}5\pi$; 8) $\cos 2025°$.

308. 1) $\cos 420°$; 2) $\mathrm{tg}\,570°$; 3) $\sin 3630°$; 4) $\mathrm{ctg}\,960°$;

5) $\sin\frac{13\pi}{6}$; 6) $\mathrm{tg}\frac{11}{6}\pi$; 7) $\mathrm{tg}\,585°$; 8) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

309. 1) $\cos 150°$; 2) $\sin 135°$; 3) $\cos 120°$; 4) $\sin 315°$.

310. 1) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{5\pi}{3}$;

4) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

311. Қимати ададии ифодаро ёбед:

1) $\cos630^\circ - \sin1470^\circ - \operatorname{ctg}1125^\circ$;

2) $\operatorname{tg}1800^\circ - \sin495^\circ + \cos945^\circ$;

3) $\sin(-7\pi) - 2\cos\frac{13\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$;

4) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(-\frac{49\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)$.

312. Ифодаро содда кунед:

1) $\cos^2(\pi - \alpha) + \sin^2(\alpha - \pi)$;

2) $\cos(\pi - \alpha)\cos(3\pi - \alpha) - \sin(\alpha - \pi)\sin(\alpha - 3\pi)$.

313. Ҳисоб кунед:

1) $\cos7230^\circ + \sin900^\circ$; 2) $\sin300^\circ + \operatorname{tg}150^\circ$;

3) $2\sin6{,}5\pi - \sqrt{3}\sin\frac{19\pi}{3}$; 4) $\sqrt{2}\cos4{,}25\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{61\pi}{6}$;

5) $\frac{\sin(-6{,}5\pi)+\operatorname{tg}(-7\pi)}{\cos(-7\pi)+\operatorname{ctg}(-16{,}25\pi)}$; 6) $\frac{\cos(-540^\circ)+\sin480^\circ}{\operatorname{tg}405^\circ-\operatorname{ctg}330^\circ}$.

314. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}$; 2) $\frac{\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$;

3) $\frac{\sin(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; 4) $\frac{\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$.

315. Исбот кунед, ки синуси суммаи ду кунҷи дарунии секунҷа ба синуси кунҷи сеюмаш баробар аст.

316. Айниятро исбот кунед:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;

3) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\sin\alpha$; 4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\cos\alpha$.

317. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$; 2) $\sin(\pi-x)=1$; 3) $\cos(x-\pi)=0$; ;

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1$; 5) $\cos(\pi-2x)=1$; 6) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$.

§ 27. СУММА ВА ФАРҚИ СИНУСҲО. СУММА ВА ФАРҚИ КОСИНУСҲО

Масъалаи 1. Ифодаро содда кунед:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}.$$

△ Аз формулаҳои ҷамъ ва синуси кунҷи дучанда истифода бурда, ба зерин соҳиб мешавем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$ ▲

Агар аз формулаи суммаи синусҳо

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (1)$$

истифода карда шавад, ин масъаларо соддатар ҳал кардан мумкин аст. Бо ёрии он формулаи зеринро ҳосил мекунем:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha\,.$$

Акнун ҷоиз будани формулаи (l)-ро исбот мекунем:

○ Ба $\frac{\alpha+\beta}{2}=x,\ \ \frac{\alpha-\beta}{2}=y$ ишоракуниҳоро дохил мекунем. Он вақт $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$ мешавад, бинобарин, $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cos y+$ $+\cos x\sin y+\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\sin x\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. ●

Дар қатори формула (1) аз формулаи фарқи синусҳо,формулаҳои сумма ва фарқи косинусҳо низ истифода бурда мешавад:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{4}$$

Формулаҳои (3) ва (4) ҳам, монанди исботи формулаи (1) исбот карда мешавад; формулаи (2) бо роҳи иваз кардани β ба –β аз формулаи (1) ҳосил карда мешавад. (Инро мустақилона исбот кунед).

Масъалаи 2. $\sin75^\circ+\cos75^\circ$ -ро ҳисоб кунед.

△ $\sin75^\circ+\cos75^\circ=\sin75^\circ+\sin15^\circ=$

$$=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=2\sin45^\circ\cos30^\circ=2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$ ▲

Масъалаи 3. $2\sin\alpha+\sqrt{3}$ -ро ба ҳосили зарб иваз кунед.

△ $$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$$ ▲

Масъалаи 4. Исбот кунед, ки қимати аз ҳама хурди sina + cosa ба - $\sqrt{2}$, қимати аз ҳама калонаш бошад, ба $\sqrt{2}$ баробар аст.

△ Ифодаи додашударо ба ҳосили зарб иваз мекунем:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

Азбаски қимати аз ҳама хурди косинус ба —1, аз ҳама калонаш ба 1 баробар аст, бинобар ин қимати аз ҳама хурди ифодаи додашуда ба $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$, қимати аз ҳама калонаш ба $\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}$ баробар аст. ▲

Машқҳо

318. Ифодаро содда кунед:

1) $\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)$;
2) $\cos(\frac{\pi}{4}-\beta)-\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)$;
3) $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\sin^2(\frac{\pi}{4}-\alpha)$;
4) $\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{4})-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

319. Ҳисоб кунед:

1) $\cos105°+\cos75°$;
2) $\sin105°-\sin75°$;
3) $\cos\frac{11\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$;
4) $\cos\frac{11\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}$;
5) $\sin\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}$;
6) $\sin105°+\sin165°$.

320. Ба ҳосили зарб иваз кунед:

1) 1 + 2sinα;
2) 1 – 2sinα;
3) 1 + 2cosα;
4) 1 + sinα;
5) 1 – cosα;
6) 1 + cosα;

321. Айниятро исбот кунед:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;
2) $\frac{\sin2\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos4\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

322. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{2(\cos\alpha+\cos3\alpha)}{2\sin2\alpha+\sin4\alpha}$;
2) $\frac{1+\sin\alpha-\cos2\alpha-\sin3\alpha}{2\sin^2\alpha+\sin\alpha-1}$.

Айниятро исбот кунед (**323–324**):

323. 1) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=0$.

324. 1) $\frac{\sin2\alpha+\sin5\alpha-\sin3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

2) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha$.

325. Дар намуди ҳосили зарб нависед:

1) $\cos22^\circ+\cos24^\circ+\cos26^\circ+\cos28^\circ$; 2) $\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}$.

326. Айнияти $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$ -ро исбот ва ҳисоб кунед:

1) $\mathrm{tg}267^\circ+\mathrm{tg}93^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}+\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}$; 3) $\mathrm{tg}99^\circ+\mathrm{tg}81^\circ$.

327. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-2\cos\alpha+\cos2\alpha$;
3) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\mathrm{tg}\alpha$; 4) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\mathrm{tg}\alpha$.

Машқҳо доир ба боби III

328. Бигзор, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ бошад. Муайян кунед,ки дар натиҷаи ба кунҷҳои:

1) $\frac{\pi}{2}-\alpha$; | 2) $\alpha-\pi$; | 3) $\frac{3\pi}{2}-\alpha$; | 4) $\frac{\pi}{2}+\alpha$; | 5) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; | 6) $\pi-\alpha$

чарх занонидани нуқтаи P (l; O) нуқтаи ҳосилшуда дар кадом чоряк мехобад.

329. Қимати синус ва косинуси кунҷи додашударо ёбед:

1) 3π; 2) 4π; 3) $3{,}5\pi$; 4) $\frac{5}{2}\pi$;

5) $\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 6) $(2k+1)\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 7) $2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 8) $6{,}5\pi$.

330. Ҳисоб кунед:

1) $\sin 3\pi - \cos\frac{3\pi}{2}$; 2) $\cos 0 - \cos 3\pi + \cos 3{,}5\pi$;

3) $\sin\pi k + \cos 2k\pi$, дар ин ҷо k – адади бутун;

4) $\cos\frac{(2k+1)\pi}{2} - \sin\frac{(4k+1)\pi}{2}$, дар ин ҷо k – адади бутун

331. Ёбед, ки:

1) агар $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\cos\alpha$-ро;

2) агар $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\mathrm{tg}\alpha$ -ро;

3) агар $\mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$ ва $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha$ -ро;

4) агар $\mathrm{ctg}\alpha = \sqrt{2}$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha$ -ро.

332. Айниятро исбот кунед:

1) $5\sin^2\alpha + \mathrm{tg}\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 5 + \sin\alpha$;

2) $\mathrm{ctg}\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos\alpha - 2$;

3) $\frac{3}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} = 3\cos^2\alpha$; 4) $\frac{5}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = 5\sin^2\alpha$.

333. Ифодаро содда кунед

1) $2\sin(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - 2\cos(-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

2) $3\sin(\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $(1 - \mathrm{tg}(-\alpha))(1 - \mathrm{tg}(\pi + \alpha))\cos^2\alpha$;

4) $(1 + \mathrm{tg}^2(-\alpha))\left(\frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2(-\alpha)}\right)$.

334. Ифодаро содда кунед ва қимати ададии онро ёбед:

1) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)$, дар ин ҷо $\cos\alpha = \frac{1}{4}$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right)$, дар ин ҷо $\sin\alpha = \frac{1}{6}$.

335. Ҳисоб кунед:

1) $2\sin 75^\circ \cos 75^\circ$; 2) $\sin 15^\circ$; 3) $\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$;
4) $\sin 75^\circ$; 5) $\cos 75^\circ$; 6) $\sin 135^\circ$.

ХУДРО БИСАНҶЕД!

1. Агар: 1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ва $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ бошад, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$ -ро,

2) $\cos\alpha = -0{,}6$ ва $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад, $\sin\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$, $\cos 2\alpha$-ро

ҳисоб кунед.

2. Қимати ифодаро ёбед:

1) $4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\pi$;

2) $\cos 150^\circ$; 3) $\sin\frac{8\pi}{3}$; 4) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}$; 5) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$.

3. (Масъалаи Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошӣ.)
Исбот кунед, ки $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ аст.

4. Айниятро исбот кунед:

1) $3 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2$; 2) $1 - \sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = \sin^2\alpha$.

5. Қимати ифодаро ёбед::

1) $\sin(\alpha - \beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\beta)$; 2) $\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}(\pi - \alpha)\cos(\pi - \alpha) + \sin(4\pi + \alpha)$.

336. Қимати ифодаро ёбед::

1) $\cos^2(\pi - \alpha) - \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi + \alpha) - \sin^2(\alpha + 2\pi)}{2\cos(\alpha + 2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$; 4) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)}$.

Ҳисоб кунед (**337–338**):

337. 1) $\sin\frac{47\pi}{6}$; 2) $\text{tg}\frac{25\pi}{4}$; 3) $\text{ctg}\frac{27\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{21\pi}{4}$.

338. 1) $\cos\frac{23\pi}{4}-\sin\frac{15\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{25\pi}{3}-\text{tg}\frac{10\pi}{3}$;

3) $3\cos 3660° + \sin(-1560°)$; 4) $\cos(-945°) + \text{tg}1035°$.

339. Ададҳоро муқоиса кунед:

1) sin3 ва cos4; 2) cos0 ва sin5; 3) sin1 ва cos1.

340. Ишораи ададро муайян кунед:

1) sin3,5tg3,5; 2) cos5,01sin0,73; 3) $\frac{\text{tg}13}{\cos 15}$;

4) sin1cos2tg3; 5) sin2cos2; 6) tg1cos1.

341. Ҳисоб кунед:

1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 2) sin165°; 3) sin105°;

4) $\sin\frac{\pi}{12}$; 5) $1-2\sin^2 195°$; 6) $2\cos^2\frac{3\pi}{8}-1$.

342. Ифодаро содда кунед

1) $(1+\text{tg}(-\alpha))(1-\text{ctg}(-\alpha))-\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}$; 2) $\frac{\text{ctg}\alpha+\text{tg}(-\alpha)}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\frac{\text{tg}(-\alpha)}{\sin\alpha}$.

343. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ ва $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ дода шудааст. Қимати cosα, tgα, ctgα, sin2α, cos2α -ро ҳисоб кунед.

Ифодаро содда кунед (**344–346**):

344. 1) $\cos^3\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}$.

345. 1) $\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{4\cos\alpha}$; 2) $\frac{2\cos^2 2\alpha}{\sin 4\alpha\cos 4\alpha+\sin 4\alpha}$;

3) $\frac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$; 4) $\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha\cos 2\alpha-\cos 2\alpha}$.

346. 1) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}-\sin(\pi-x)$; 2) $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}+\cos(1,5\pi+x)$;

3) $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-\sin(1,5\pi+x)$; 4) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}+\cos(3\pi-x)$.

347. 1) Агар $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ ва tgβ = 2,4 бошад, tg(α + β) ро;

2) агар $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ ва ctgβ = –1 бошад, ctg(α + β) ро ҳисоб кунед.

348. Ифодаро содда кунед

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$;   2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

Машқ (тест)-ҳои санҷиш доир ба боби III

1. Ченаки радиании 153° -ро ёбед.

А) $\frac{17\pi}{20}$;   Б) $\frac{19\pi}{20}$;   В) 17π;   Г) $\frac{2\pi}{9}$.

2. Ченаки градусии 0,65π -ро ёбед.

А) 11,7°;   Б) 117°;   В) 116°;   Г) 118°.

3. Кадоме аз зарбшавандаҳо манфӣ аст?

А) cos314°sin147°;   Б) tg200°ctg201°;

В) cos163°cos295°;   Г) sin170°ctg250°.

4. Кадоме аз зарбшавандаҳо мусбат аст?

А) sin2cos2sin1sin1°;   Б) $\mathrm{tg}8^\circ\mathrm{ctg}8\mathrm{ctg}10^\circ\,\mathrm{ctg}\sqrt{10}$;

В) $\sin9^\circ\sin9\cos9^\circ\cos9$;   Г) $\cos10^\circ\cos10\cos11^\circ\cos\sqrt{11}$.

5. Ҳамаи кунҷҳоеро, ки ба он нуқтаи (1;0)-ро барои ёфтани нуқтаи $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ гардонидан лозим аст, ёбед.

А) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;   Б) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;

В) $\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$;   Г) $2\pi + \pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$.

6. Координатаҳои нуқгаеро, ки ҳангоми ба кунҷи $\frac{5\pi}{2}+2\pi k,\ k\epsilon \boldsymbol{Z}$ чархзанондани нуқтаи (1; 0) ҳосил мешавад, ёбед.

А) (0; 1);   Б) (0; –1);   В) (1; 0);   Г) (–1; 0).

7. Ададҳоро бо тартиби афзуншавӣ нависед:

$$a = \sin 1{,}57; \qquad b = \cos 1{,}58; \qquad c = \sin 3.$$

А) $a < c < b$; Б) $b < c < a$; В) $c < a < b$; Г) $b < a < c$.

8. Ададҳоро бо тартиби камшавӣ нависед:
$a = \cos 2$; $b = \cos 2°$; $c = \sin 2$; $d = \sin 2°$.

А) $a > c > d > b$; Б) $d > c > b > a$;
В) $b > c > d > a$; Г) $c > d > b > a$.

9. Ҳисоб кунед: $\dfrac{\sin 136° \cdot \cos 46° - \sin 46° \cdot \cos 224°}{\sin 110° \cdot \cos 40° - \sin 20° \cdot \cos 50°}$.

А) $\cos 40°$; Б) 0,5; В) $\sin 44°$; Г) 2.

10. Ҳисоб кунед: $\dfrac{\sin 10° \cdot \sin 130° - \sin 100° \cdot \sin 220°}{\sin 27° \cdot \cos 23° - \sin 157° \cdot \cos 153°}$.

А) 1; Б) –1; В) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Ҳисоб кунед: $\cos(-225°) + \sin 675° + \mathrm{tg}(-1035°)$.

А) 1; Б) –1; В) $\sqrt{2}$; Г) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\sin\alpha = 0{,}6$ бошад, $\mathrm{tg}2\alpha$ -ро ёбед $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

А) 3,42; Б) $3\dfrac{3}{7}$; В) $\dfrac{7}{24}$; Г) $-\dfrac{7}{24}$.

13. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{5}$ бошад, $\sin 2\alpha$ -ро ёбед.

А) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$; Б) $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; В) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; Г) $\sqrt{5}$.

14. $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$ бошад, $\cos 2\alpha$ -ро ёбед.

А) $\dfrac{4}{3}$; Б) $-\dfrac{4}{3}$; В) $\dfrac{3}{4}$; Г) $-\dfrac{3}{4}$.

15. Содда кунед: $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}$.

А) -1; Б) 1; В) $0{,}5$; Г) $-\frac{1}{2}$.

16. Содда кунед: $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin(\pi-\alpha)\cdot\cos\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

А) $3\sin\alpha$; Б) $\frac{1}{3}\sin\alpha$; В) $-\sin\alpha$; Г) $\frac{1}{3}\cos\alpha$.

17. $\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{7}$ бошад, $\dfrac{4\sin^4\alpha}{5\sin^2\alpha+15\cos^2\alpha}$ ро ҳисоб кунед.

А) $0{,}59$; Б) $0{,}49$; В) $-0{,}49$; Г) $0{,}2$.

18. $\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{1}{3}$ бошад, $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ -ро ёбед .

А) $\frac{81}{49}$; Б) $-\left(\frac{7}{9}\right)^2$; В) $\frac{49}{81}$; Г) $-1\frac{32}{49}$.

19. Ҳисоб кунед: $\sin 100°\cdot\cos 440°+\sin 800°\cdot\cos 460°$.

А) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Б) 1; В) -1; Г) 0.

20. Содда кунед: $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$.

А) $4\cos 2\alpha$; Б) $-2\sin 4\alpha$; В) $\sin 4\alpha$; Г) $2\cos 2\alpha$.

21. Решаи муодилаи $8x^2-6x+1=0$ $\sin\alpha$ ва $\sin\beta$ мебошанд, агар α, β дар чоряки I бошад, $\sin(\alpha+\beta)$ -ро ёбед .

А) $\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{8}$; Б) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{8}$; В) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$; Г) $\frac{\sqrt{3}(4-\sqrt{5})}{16}$.

22. Решаи муодилаи $6x^2-5x+1=0$ $\cos a$ ва $\cos\beta$ мебошанд, агар a, β дар чоряки I бошад, $\cos(a+\beta)$ -ро ёбед.

А) $\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$; Б) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$; В) $\frac{2\sqrt{6}-1}{7}$; Г) $\frac{1-2\sqrt{6}}{5}$.

23. Агар $2(x+\sqrt{2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\pi - \alpha)$ бошад,х-ро ёбед:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; Б) $\sqrt{2}$; В) $\sqrt{2}$; Г) $2\sqrt{2}$.

24. Решаи муодилаи $x^2 - 7x + 12 = 0$ tgα ва tgβ бошад, tg(a + β) -ро ёбед.

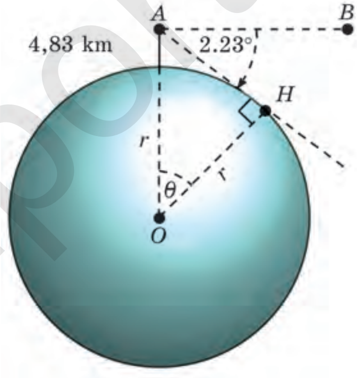
А) 1; Б) $\frac{7}{11}$; В) $\sqrt{3}$; Г) $-\frac{7}{11}$.

✍ Масъалаҳои амалӣ -татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъала. (масъалаи Берунӣ) Мушоҳидачӣ аз сатҳи баҳр дар ба қуллаи кӯҳи баландиаш 4,83 км истода, кунчи моили нисбат ба горизонти уқёнус 2,23°-ро чен кард. Радиуси Заминро ёбед:

Олими бузурги қомусии асри миёна Абӯрайҳон Муҳаммад ибн Аҳмад Берунӣ (973–1048) радиуси кураи Заминро саҳеҳтар чен кардааст.

Усули ҳалли масъалаи зерин ба он мансуб аст.



Расми 73.

△ Фарз мекунем,ки Замин курашакл аст. Бо *r радиуси Замин* , бо *A қуллаи кӯҳ,бо H* нуқтаи горизонти дар хати рости аз нуқтаи *A* бароянда хобандаи дар расми 73 нишон додааст. Нуқтаи *O* маркази Замин ва нуқтаи *B нуқтаи хати рости горизонталии аз нуқтаи A* гузаранда ва ба OA перпендикуляр аст. Кунҷи *∠AOH-ро* бо θ ишора мекунем.

Нуқтаи *A* аз сатҳи баҳр дар баландии 4,83 км ҷойгир шудааст, аз ҳамин сабаб $OA = r + 4{,}83$. Ба ғайр аз ин $OH = r$. АВ ба ОА перпендикуляр $\angle OAB$=90° ва аз ҳамин сабаб $\angle OAH$=90°—2,23°=87,77°. Сатҳи Заминро ба сифати давраи ба монанди дар расм додашуда бинем, АН расанда ба давра мешавад ва пас АН ва ОН ба якдигар перпендикуляр мешавад ,дар натиҷа, кунҷи ΔOHA=90°.Ҳосили ҷамъи кунҷҳои $\angle OAH$ ба 180°

баробар аст. Аз ин ҷо $\theta = 180° - 90° - 87,77° = 2,23°$.

Пас , $\cos\theta = \frac{OH}{OA} = \frac{r}{r+4,83}$, аз ин ҷо $\frac{r}{r+4,83} = \cos 2,23°$.

Ин муодиларо нисбат ба r ҳал мекунем:

$$r = (r+4,83)\cos 2,23° \Rightarrow r - r\cos 2,23° = 4,83\cos 2,23° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{4,83\cos 2,23°}{1-\cos 2,23°} \Rightarrow r = 6372,91.$$

Ҳаминро таъкид кардан ҷоиз аст, ки натиҷаи ҳосилкардашуда ба радиуси миёнаи аслии Замин 6373 км хеле наздик аст.

Ҷавоб: $r = 6372,91$ км ▲

Масъалаҳо

1. Радифи мушоҳидакунандаи Замин аз сатҳи Замин дар масофаи h (км) аз рӯи давра ҳаракат мекунад. Фарз мекунем d дарозии фосилае, ки аз радиф сатҳи Заминро мушоҳида карданаш мумкин аст (расми 74).

1) Муодилаи вобастагии байни кунҷи марказӣ θ (бо радианҳо) ва баланди h -ро ёбед;

2) Муодилаи вобастагии байни d ва θ-ро ёбед;

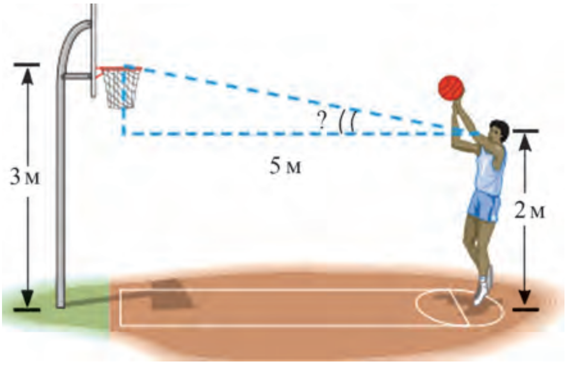
3) Муодилаи вобастагии d ва h-ро ёбед;

4) агар $d = 4000$ км бошад, радиуси Замин бояд дар кадом баландӣ бошад?

5) агар радиуси Замин дар баландии 100 км бошад, d-чӣ гуна мешавад.

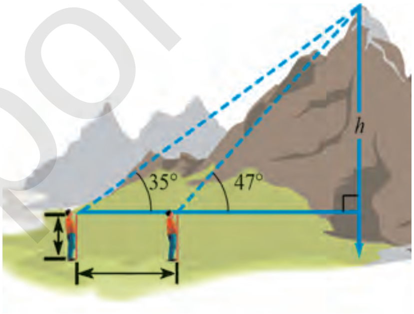
Расми 74.

2. Баскетболчӣ аз сабади баскетбол дар масофаи 5 метр,чашмонаш аз фарш дар баландии 2 метр, гардиши сабадча бошад аз фарш дар баландии 3 метр мебошад (расми 75). Кунҷи мушоҳидаи баскетболчӣ аз чашмони он то марказӣ гардиши сабад чанд градус аст?



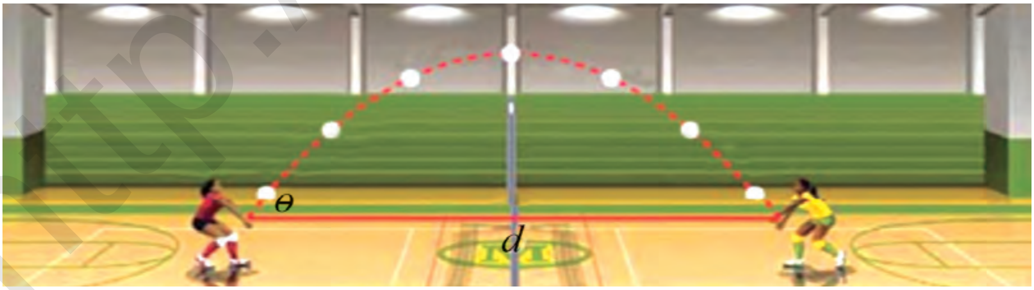
Расми 75.

3. Маркшейдер (мутахассиси конҳоро ба нақша гиранда ва аз онҳо дуруст истифодабаранда) барои чен кардани баландии кӯҳ аз ду нуқтаи масофаи байнашон ба 900 метр баробар кунҷҳои мушоҳидаҳоро чен кард (расми 76). Дар натиҷа муайян кард, ки кунҷи якум 47° ва дуюмаш ба 35° баробар аст. Агар баландии теодолит (асбоби кунҷро ченкунанда) 2 метр бошад, баландии кӯҳро ёбед.



Расми 76.

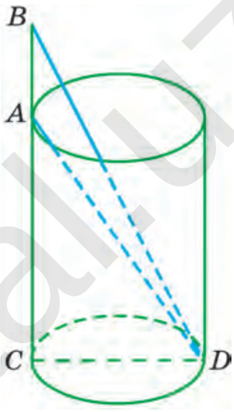
4. Дар бозии волейбол туб дар таҳти кунҷи θ, бо суръати ибтидоии v м/с ҳаво дода шуда, дар асоси формулаи $d = \frac{v}{9,75}\sin 2(\theta)$ ба масофаи горизонталии d парвоз карда меравад. Агар $\theta = 60°$ ва суръати 12 м/с бошад, *d-ро ёбед* (расми 77).



Расми 77.

Масъалаҳои таърихӣ

Масъалаҳои Абу Райҳон Берунӣ

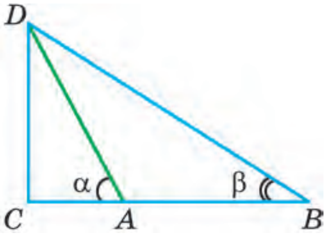


Расми 78.

1. Чоҳ дар шакли силиндр буда, қаъри он аз нуқтаи A зери кунҷи a, аз нуқтаи B зери кунҷи β менамояд (расми 78). Агар $AB = a$ бошад, чуқурии чоҳро ёбед:

Дода шудааст:
$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.
Ҳисоб кунед: $AC = ?$

2. Манора аз нуқтаи A-и замин зери кунҷи α, аз нуқтаи B бошад, зери кунҷи β менамояд (расми 79). Агар $AB = \alpha$ бошад, баландии манораро ёбед.
Дода шудааст:
$\angle CAD = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $AB = a$.
Ҳисоб кунед: $CD = ?$



Расми 79.

Масъалаи Ғиесиддин Ҷамшед ал-Кошӣ.

3. Барои кунҷи ихтиёрии α исбот кунед, ки

$$\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}}\,.$$

Масъалаи математики машҳур Абулвафо Муҳаммад ал-Бузҷонӣ (940–998).

4. Исбот кунед, ки барои α ва β-и ихтиёрӣ баробарии.

$$\sin(\alpha-\beta) = \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta} - \sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

дуруст аст

Маълумотҳои таърихӣ

Мирзо Улуғбек
(1394–1449)

Дар инкишофи математика, хусусан тригонометрия чунин муттафакирони бузург ба мисли Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Аҳмад Фарғонӣ, Абӯрайҳои Берунӣ, Мирзо Улуғбек, Алӣ Қушчӣ, Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошӣ саҳми босазо гузоштаанд. Муайян кардани координатаи ситораҳо дар сфераи осмонӣ, мушоҳидаи координатаи ситораҳо, пешгуӣ кардани гирифтани Моҳ ва Офтоб барин масъалаҳо ва дигар масъалаҳои илмӣ-амалӣ ҳисобу китоби дақиқ ва дар асоси онҳо тартиб дода шудани ҷадвалҳои дақиқро талаб мекард.

Чунин ҷадвалҳои астрономӣ (тригонометрӣ) дар Шарқ «Зиҷ»-ҳо ном доштанд. «Зиҷ»-ҳои олимони машҳур Муҳаммад ал-Хоразмӣ, Абӯ- райҳон Берунӣ, Мирзо Улуғбек монанди асарҳои математикиашон хеле машҳур буда, ба забонҳои лотинӣ ва дигар забонҳо тарҷума карда шуда буданд. Ии гуна асарҳо дар пешравии математика ва астрономияи Аврупо саҳми худро гузоштаанд.

Дар асари «Қонуни Маъсудӣ»-и Берунӣ ҷадвали синусҳо бо фосилаи 15 дақиқа, ҷадвали тангенсҳо бо фосилаи 1° бо саҳеҳии 10^{-8}дода шудаанд. Ниҳоят яке аз «Зиҷ»-ҳои аниқ ин «Зиҷи Курагонӣ»-и Мирзо Улуғбек мебошад. Дар ои ҷадвали синусҳо бо фосилаи 1 дақиқа, ҷадвали тангенсҳо аз 0° то 45° бо фосилаи 1 дақиқа ва аз 46° то 90° бо фосилаи 5 дақиқа бо саҳеҳии 10^{-10} дода шудаанд.

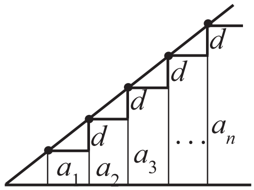
Ғиёсиддин Ҷамшед ал-Кошӣ дар «Рисола дар бораи хорда ва синус»-аш $\sin 1^0$-ро бо саҳеҳии 17 рақам баъд аз вергул ҳисоб кардааст:

$$\sin 1^\circ = 0{,}017452406437283512...$$

Дарозии давра ба миёнаи арифметикии периметрҳои бисёркунҷаҳои $3 \cdot 2^n$-и мунтазами дарун ва берункашидашуда баробар гуфта, ҳаигоми $n = 28$ будан, Ҷамшед ал-Кошт дар асари «Рисола дар бораи давра» барои 2π натиҷаи зеринро ҳосил кард:

$$2\pi = 6{,}283185307179586 5...$$

БОБИ IV. ПАЙДАРПАИҲОИ АДАДӢ ПРОГРЕССИЯҲО



§ 28. ПАЙДАРПАИҲОИ АДАДӢ

Дар ҳаёти ҳаррӯза барои нишон додани тартиби ҷойгиршавии ҷиҳозҳои гуногун аз рақамгузории онҳо истифода бурда мешавад. Масалан, хонаҳои дар ҳар як кӯча ҷойгиршуда рақамгузорӣ карда мешавад. Дар китобхона абонементҳои китобхонон рақамгузорӣ карда мешавад ва онҳо бо тартиби рақамгузорӣ ба картотекаҳои махсус ҷойгир карда мешавад. Дар банк бо воситаи рақами ҳисоб миқдори маблағи ба банк гузоштаи шахсро дидан мумкин аст. Гӯем, ки дар ҳисоб рақами №1 a_1 сӯм, дар ҳисоб рақами №2 a_2 сӯм ва ҳоказо маблағ ҳаст. Дар натиҷа пайдарпаии

$$a_1, a_2, a_3,..., a_N$$

-ро ҳосил мекунем, дар ин ҷо N–адади ҳамаи ҳисоб рақамҳо. Дар ин ҷо ба ҳар як адади натуралии аз 1 то N адади a_n мувофиқ гузошта шудааст.Дар математика пайдарпаиҳои ададии беохир омӯхта мешавад:

$$a_2, a_3,..., a_n,... .$$

a_1 – аъзои якуми пайдарпаи , a_2 – аъзои дуюми пайдарпаи, a_3 – аъзои сеюми пайдарпаии адади номида мешавад ва ҳоказо.Адади a_n– аъзои n-ум ва адади натуралии рақами он номида мешавад. Масалан, пайдарпаии аз квадратҳои ададҳои натуралӣ иборат будаи 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2,

$(n+1)^2$, ... $a_1=1$ аъзои якуми пайдарпаи, $a_n=n^2$ аъзои n-уми пайдарпаи; $a_{n+1}=(n+1)^2$ аъзои $(n+1)$-уми пайдарпаи аст.Пайдарпаиҳои ададӣ бисёртар бо ёрии формулаи аъзои n-ум дода мешавад.

Масалан , бо ёрии формулаи $a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ пайдарпаии ададии

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$ дода шудааст.

Масъалаи 1. Пайдарпаии ададии бо формулаи $a_n=n(n-2)$ дода шудааст.Аъзои 100-уми онро ёбед:

$$\triangle\ a_{100}=100\cdot(100-2)=9800.\ \blacktriangle$$

Масъалаи 2. Пайдарпаии ададии бо формула $a_n=2n+3$ дода шудааст.

1) 43 аъзои пайдарпаии ададӣ мебошад,рақами онро ёбед; 2) 50 аъзои пайдарпаии ададӣ шуда метавонад ё не?

△**1)** Мувофиқи шарт $2n+3=43$, аз ин ҷо $n=20$.

2) Агар 50 аъзои пайдарпаии ададӣ ва n- рақами аъзои он бошад,дар ин ҳол $2n+3=50$, аз ин ҷо $n=23{,}5$. Аз сабаби қимати n ададӣ натуралӣ нест, рақами пайдарпаи ададӣ шуда наметавонад.Аз ҳамин сабаб ададӣ 50 аъзои пайдарпаи намешавад. ▲

Дар баъзе ҳолатҳо пайдарпаи бо воситаи чунин формулаҳо дода мешавад,ки дар ин ҳол аз ягон рақамаш сар карда дилхоҳ аъзои онро бо ёрии якто ёки якчандто аъзоҳои пешина ҳисоб кардан мукин аст. Ин усули додашудани пайдарпаӣ усули рекуррентӣ (лотинӣ *recuro* – баргаштан) мебошад.

Масъалаи 3. Пайдарпаи ададӣ бо формулаи рекурентии $b_{n+2}=b_{n+1}+b_1$ ва бо ёрии шартҳои $b_1=1$, $b_2=3$ дода шудааст. Аъзои 5-уми ин пайдарпаиро ёбед;

$$\triangle\ b_3=b_2+b_1=3+1=4.$$

$$b_4=b_3+b_2=4+3=7.$$

$$b_5=b_4+b_3=7+4=11.$$

Ҷавоб: $b_5=11$. ▲

Машқҳо

349. Пайдарпаии ададӣ аз квадратҳои ададҳои натуралӣ иборат: 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2, $(n+1)^2$, ...дода шудааст.

1) Аъзоҳои сеюм, шашум, n- умро гӯед.

2) Рақамҳои аъзоҳои 4, 25, n^2, $(n+1)^2$ -ро нишон диҳед.

350. Се аъзоҳои аввалаи пайдарпаии ададии бо формулаи зерин додашударо ҳисоб кунед:

1) $a_n = 2n + 3$; 2) $a_n = 2 + 3n$; 3) $a_n = 100 - 10n^2$;

4) $a_n = \frac{n-2}{3}$; 5) $a_n = \frac{1}{n}$; 6) $a_n = -n^3$.

351. (Шифоҳӣ). Пайдарпаии ададӣ бо формулаи $x_n = n^2$ дода шудааст. Рақамҳои аъзоҳои ба 100; 144; 225 баробарро гӯед. Ададҳои 48, 49, 169 аъзоҳои ин пайдарпаи шуда метавонад ё не?

352. Пайдарпаии адади бо формулаи $a_n = n^2 - 2n - 6$ дода шудааст. Оё ададҳои 1) –3; 2) 2; 3) 3; 4) 9 аъзоҳои пайдарпаи шуда метавонад ё не?

353. Чор аъзои аввалаи пайдарпаии бо формулаи рекурентии

1) $a_{n+1} = 3a_n + 1$; 2) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$

ва шарти $a_1 = 2$ дода шударо ёбед.

354. Формулаи аъзои n-уми пайдарпаии $a_n = (n-1)(n+4)$ аст.Агар 1) $a_n = 150$; 2) $a_n = 104$ бошад, n-ро ёбед .

355. Чор аъзои аввалаи пайдарпаии бо формулаи рекурентии a_{n+1} ва шарти $a_1 = 256$ -ро ҳисоб кунед.

356. Шаш аъзои аввалаи пайдарпаии ададии бо формулаи рекурентии

1) $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 3}$; 2) $a_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2}{3}}$;

ва шарти $a_1 = 1$ дода шударо нависед.

357. Пайдарпаии ададӣ бо формулаи $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ ва шартҳои $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, дода шудааст .Аъзои панҷуми пайдарпаиро ҳисоб кунед.

358. Аъзоҳои $(n + 1)$, $(n + 2)$ ва $(n + 5)$-и, пайдарпаии бо формулаи аъзои n-ум додашударо нависед:

1) $a_n = -5n + 4$; | 2) $a_n = 2(n - 10)$; | 3) $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$; | 4) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

§ 29. ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

Масъалаи зеринро дида мебароем.

Масъала. Дар давоми тайёрӣ барои аз санҷиш гузаштан, донишомӯз ҳар рӯз ҳал кардани 5 масъалаи санҷишро ба нақша гирифт. Шумораи масъалаҳои санҷишие, ки дар як рӯз бояд ҳал карда шаванд, чӣ гуна тағйир меёбад?

Адади масъалаҳои ба нақша гирифташуда ҳар рӯз ба таври зерин тағйир меёбад:

рӯзи якум	рӯзи дуюм	рузи сеюм	рӯзи чорум...
5 то	10 то	15 то	20 то ...

Дар натиҷа чунин пайдарпаиро ҳосил мекунем:

$$5, 10, 15, 20, 25, \ldots .$$

Бо ёрии a_n адади ҳамаи масъалаҳоеро, ки дар n- рӯз бояд ҳал шаваид, ишора мекуием. Масалан: $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, ...

... . , . a_1, a_2, a_3, ..., a_n.. - и ҳосилшуда пайдарпаии ададӣ номида мешавад.Ҳар як аъзои ин пайдарпай, аз аъзои дуюм сар карда, дар натиҷаи ба аъзои пешоянд ҷамъ кардаии адади 5 ҳосил мешавад. Чунин пайдарпай *прогрессияи арифметикӣ* номида мешавад.

Агар дар пайдарпаии ададии a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...барои n-и натуралии дилхоҳ баробарии

$$a_{n+1}=a_n+d$$

(дар ин ҷо d-ягон адад) иҷро шавад,чунин пайдарпаӣ прогрессияи арифметикӣ номида мешавад

Аз ин формула бармеояд, ки $a_{n+1} - a_n = d$. Адади d – фарқи прогрессияи арифметикӣ номида мешавад.

1) Қатори ададҳои натуралии 1, 2, 3, 4, прогрессияи арифметикиро ташкил мекунанд. Фарқи ин прогрессия $d = 1$ аст.

2) Пайдарпаии ададҳои бутуни манфии –1, –2, –3, –4,…,–n,… прогрессияи арифметикии фарқаш $d = –1$ аст

3) Пайдарпаии 3,3, 3,..., 3, ... прогрессияи арифметикии фарқаш d=0 аст.

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи $a_n = 1{,}5 + 3n$ додашуда прогрессияи арифметикӣ мебошад.

△ *Нишон додани он талаб карда мешавад ,ки барои n- дилхоҳ фарқи* $a_{n+1}-a_n$ *айнан як хел (аз n вобаста нест) аст.*

Аъзои (n + 1) -уми пайдарпаии додашударо менависем:

$$a_{n+1} = 1{,}5 + 3(n + 1).$$

Бинобар ин $a_{n+1} - a_n = 1{,}5 + 3(n + 1) - (1{,}5 + 3n) = 3.$

Пас фарқи $a_{n+1} - a_n$ аз n вобаста нест. ▲

Аз таърифи прогрессияи арифметикӣ $a_{n+1}=a_n+d$, $a_{n-1}=a_n-d$ аст, аз ин ҷо

$$a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \ n>1$$

Ҳамин тавр, дар прогрессияи арифметикӣ аз аъзои дуюм сар карда, ҳар як аъзояш ба миёнаи арифметикии ду аъзои ҳамсоя баробар аст. Номи прогрессияи "арифметикӣ" бо ҳамин эзоҳ дода мешавад.

Таъкид мекунем, ки агар α_1 ва d дода шуда бошад, он гоҳ аъзоҳои боқимондаи прогрессияи арифметикӣ аз рӯи формулаи $a_{n+1}= a_n+ d$ ҳисоб кардан мумкин аст.

Бо ин усул ҳисоб кардани якчанд аъзоҳои аввала ягон душворӣ пайдо намекунад: лекин, масалан, барои a_{100} ҳисобкуниҳои зиёд талаб карда мешавад. Одатан барои ин аз формулаи аъзои n-ум истифода мебаранд.

Аз таърифи прогрессияи ариметикӣ

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d \text{ ва ғайра.}$$

Умуман,

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n - 1)d,} \qquad \textbf{(1)}$$

чунки аъзои n- уми прогрессияи арифметикӣ ҳангоми ба аъзои якум ададӣ d-ро $(n - 1)$ маротиба ҷамъ кардан ,ҳосил карда мешавад.

Формулаи (1) формулаи аъзои n-уми прогрессияи арифметикӣ номида мешавад.

Масъалаи 2. Агар $a_1 = - 6$ ва $d = 4$ бошад, аъзои садуми прогрессияи арифметикиро ёбед.

△ Аз рӯи формулаи (1): $a_{100} = - 6 + (100 - 1)\cdot 4 = 390$. ▲

Масъалаи 3 . Ададӣ 99 аъзои прогрессияи арифметикии 3, 5, 7, 9, ... мебошад. Аъзои чандум будани онро ёбед.

△ Фарз мекунем, ки n ададест, ки мо онро бояд пайдо кунем.

Бинобар $\alpha_1 = 3$ ва $d = 2$ буданаш, мувофиқи формулаи $a_n = a_1 + (n - 1)\ d$ баробарии $99 = 3 + (n\text{-}1)2$ ҳосил мешавад. Аз ин рӯ $99 = 3 + 2n\text{-}2$; $98 = 2n$; $n = 49$.

Ҷавоб: $n = 49$. ▲

Масъалаи 4. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_8 = 130$ ва $a_{12} = 166$ аст. Формулаи аъзои n-умро ёбед.

△ Аз формулаи (1) истифода бурда меёбем: $a_8 = a_1 + 7d$, $a_{12} = a_1 + 11d$ Қиматҳои додашудаи a_8 ва a_{12} -ро гузошта, нисбат ба a_1 ва d системаи муодилаҳоро ҳосил мекунем: $a_1 + 7d = 130$ ва $a_1 + 11d = 166$

Аз муодилаи дуюм муодилаи якумро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

△ Аз формулаи (1) ҳосил мекунем.

$$a_8 = a_1 + 7d, \ \ a_{12} = a_1 + 11d.$$

Қиматҳои додашудаи a_8 ва a_{12}-ро гузошта, нисбат ба a_1 ва d системаи муодилаҳоро ҳосил мекунем:

$$\begin{cases} a_1 + 7d = 130, \\ a_1 + 11d = 166. \end{cases}$$

Аз муодилаи дуюм муодилаи якумро тарҳ карда ҳосил мекунем

$$4d = 36, \ d = 9.$$

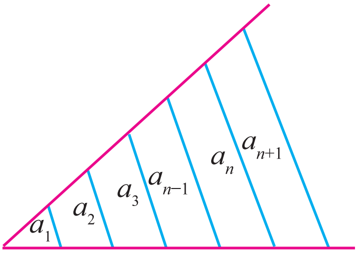
Пас, $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

Формулаи аъзои n-уми прогрессияро менависем:

$$a_n = 67 + 9(n - 1) = 67 + 9n - 9 = 58 + 9n.$$

Ҷавоб: $a_n = 9n + 58$. ▲

Масъалаи 5. Дар як тарафи кунҷ аз қуллаи он сар карда порчаҳои баробар ҷудо карда мешавад. Аз охирҳои онҳо хатҳои рости параллел мегузаронанд (расми 80). Исбот кунед, ки дарозии порчаҳои a_1, a_2, a_3, ... - и ҳамон хатҳои росте, ки дар байни тарафҳои кунҷ мехобад, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳанд.



Расми 80.

△ Дар трапетсияи асосҳояш a_{n-1} ва a_{n+1} *хати миёна ба* a_n баробар аст.Бинобар ин

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Аз ин ҷо $2a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ ёки

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Азбаски дар ин пайдарпаӣ фарқи ҳар як аъзо аз аъзои дар пеш истода ҳамон як адад мешавад, пас ин пайдарпаӣ прогрессияи арифметикӣ мешавад. ▲

Машқҳо

359. (Шифоҳӣ.) Аъзои якум ва фарқи прогрессияи арифметикиро гӯед:
1) 6, 8, 10, ...; 2) 7, 9, 11, ...;
3) 25, 21, 17, ...; 4) –12, –9, –6, ...

360. Агар:
1) $a_1 = 2$ ва $d = 5$; 2) $a_1 = -3$ ва $d = 2$; 3) $a_1 = 4$ ва $d = -1$ бошад,
панҷ аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро нависед.

361. Исбот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи аъзои n- ум додашудаи зерин прогрессияи арифметикӣ аст:
1) $a_n = 3 - 4n$; 2) $a_n = -5 + 2n$; 3) $a_n = 3(n + 1)$;
4) $a_n = 2(3 - n)$; 5) $a_n = 3 - 5n$; 6) $a_n = -7 + 3n$.

362. Дар прогрессияи арифметикӣ:1)агар $a_1=2$,$d=3$ бошад, a_{15} -ро ёбед;

2) агар $a_1 = 3$, $d = 4$ бошад, a_{20} -ро ёбед:
3) агар $a_1 = -3$, $d = -2$ бошад, a_{18}-ро ёбед:
4) агар $a_1 = -2$, $d = -4$ бошад, a_{11} -ро ёбед.

363. Формулаи аъзои n -уми прогрессияи арифметикиро нависед:
1) 1, 6, 11, 16, ...; 2) 25, 21, 17, 13, ...;
3) –4, –6, –8, –10, ...; 4) 1, –4, –9, –14, ...

364. Адади –22 аъзои прогрессияи арифметикии 44, 38, 3 2 ,... мебошад. Рақами ин ададро ёбед.

365. Оё адади 12 аъзои прогрессияи арифметикии –18, –15, –12, ... мешавад?

366. Адади –59 аъзои прогрессияи арифметикии 1, –5, ... аст. Рақами онро муайян кунед. Оё адади –46 аъзои ҳамон прогрессия мешавад?

367. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
1) $a_1 = 7$, $a_{16} = 67$; 2) $a_1 = -4$, $a_9 = 0$; 3) $a_2 = 8$, $a_{10} = 64$ бошад, фарқи онро ёбед.

368. Фарқи прогрессияи арифметикӣ ба 1,5 баробар аст. Агар:
1) $a_9 = 12$; 2) $a_7 = -4$; 3) $a_{16} = 32{,}5$ бошад, a_1 -ро ёбед.

369. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
1) $d = -3$, $a_{11} = 20$; 2) $a_{21} = -10$, $a_{22} = -5{,}5$;
3) $a_3 = -1$, $a_9 = 17$ бошад, аъзои якуми онро ёбед.

370. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
1) $a_3 = 13$, $a_6 = 22$; 2) $a_2 = -7$, $a_7 = 18$;
3) $a_7 = 11$, $a_{13} = 29$ бошад, формулаи аъзои n -уми онро ёбед.

371. Дар кадом қиматҳои n-аъзоҳои прогрессияи арифметикии 15, 13, 11, ... манфӣ мешавад?

372. Дар прогрессияи арифметики $a_1 = -10$, $d = 0{,}5$ бошад, дар кадом қиматҳои n нобаробарии $a_n < 2$ ичро мешавад?

373. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
1) $a_8 = 126$, $a_{10} = 146$; 2) $a_8 = -64$, $a_{10} = -50$;
3) $a_8 = -7$, $a_{10} = 3$; 4) $a_8 = 0{,}5$, $a_{10} = -2{,}5$
бошад, аъзои нӯҳум ва фарқи онро ёбед.

§ 30. ҲОСИЛИ ҶАМЪИ *n*-АЪЗОИ АВВАЛАИ ПРОГРЕССИЯИ АРИФМЕТИКӢ

Масъалаи 1 .Ҳосили ҷамъи ҳамаи ададҳои натуралии аз 1 то 100 ро ёбед.

△Ин ҳосили ҷамъро бо ду усул менависем: $S = 1+ 2 + 3 + ... + 99 + 100$,

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 2 + 1.$$

Ин баробариҳоро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{\text{100-то ҷамъкунанда}}$$

Бинобар ин $2S = 101 \cdot 100$, аз ин ҷо $S = 101 \cdot 50 = 5050$. ▲

Акнун прогрессияи арифметикии ихтиёрии $a_1, a_2, ... , a_n, ...$-ро дида мебароем.

Ҳосили ҷамъи n- аъзои аввалаи прогрессияи додашуда S_n бошад:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

❗ ***Теорема: Ҳосили ҷамъи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ ба зерин баробар аст:***

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n. \qquad \textbf{(1)}$$

○ S_n-ро дар ду тарз навишта мегирем::

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1.$$

Мувофиқи таърифи прогрессияи арифметикӣ ин баробариҳоро ба тарзи зерин навиштан мумкин аст:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n - 1)d), \qquad (2)$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n - 1)d). \qquad (3)$$

Баробариҳои (2) ва (3) -ро аъзо ба аъзо ҷамъ мекунем:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{n\text{-то ҷамъкунанда}}$$

Пас, $2S_n = (a_1 + a_n)n$, аз ин ҷо $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$. ●

Масъалаи 2. Ҳосили ҷамъи n-то адади натуралии аввaларо ёбед.

△ Фарқи пайдарпаии ададҳои ҷуфти натуралии

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

прогрессияи арифметикӣ $d = 1$ мебошад. Ҳангоми $a_1 = 1$ ва $a_n = n$ будан, аз рӯи формулаи (1) меёбем:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n .$$

Ҳамин тавр,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$ ▲

Масъалаи 3. Агар ҷамъшавандаҳои ҳосили ҷамъи 38 + 35 + 32 + ...+ + (–7) аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ бошад, суммаро ёбед.

△Аз рӯи шарти масъала $a_1 = 38$, $d = -3$, $a_n = -7$. аст. Формулаи $a_n = a_1 + (n-1)d$ -ро истифода бурда, –7 = 38 + (n – 1)(-3) -ро ҳосил мекунем, ки дар ин ҷо $n = 16$ аст.

Аз рӯи формулаи $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ меёбем: $S_{16} = \frac{38-7}{2} \cdot 16 = 248$. ▲

Масъалаи 4. Барои он ки ҳосили ҷамъ ба 153 баробар шавад, аз 1 сар карда чандто ададҳои натуралиро ҷамъ кардан лозим аст?

△ Қатори ададҳои натуралӣ, прогрессияи арифметикии фарқаш $d=1$ аст. Мувофиқи шарт $a_1 = 1$, $S_n = 153$. Формулаи ҳосили ҷамъи n-то аъзои аввaларо ба таври зерин табдил медиҳем:

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1+a_1+(n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n .$$

Аз додашудаҳо истифода бурда, нисбат ба n -и номаълум муодила ҳосил мекунем:

$$153 = \frac{2 \cdot 1+(n-1) \cdot 1}{2} \cdot n ,$$

аз ин ҷо

$$306 = 2n + (n - 1)n, \quad n^2 + n - 306 = 0.$$

Ин муодиларо ҳал карда меёбем:

$$n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+1224}}{2} = \frac{-1\pm35}{2},$$

$$n_1 = -18, \; n_2 = 17.$$

Миқдори ҷамъшавандаҳо манфӣ шуданаш мумкин нест, бинобар ин $n = 17$. ▲

Машқҳо

374. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 1$, $a_n = 20$, $n = 50$;
3) $a_1 = -1$, $a_n = -40$, $n = 20$;
2) $a_1 = 1$, $a_n = 200$, $n = 100$;
4) $a_1 = 2$, $a_n = 100$, $n = 50$

бошад, суммаи n -аъзои аввалаи онро ёбед.

375. Ҳосили ҷамъи ададҳои натуралии аз 2 то 98 -ро ёбед (98 низ ба сумма дохил мешавад).

376. Ҳосили ҷамъи ададҳои тоқи аз 1 то 133 -ро ёбед (133 низ ба сумма дохил мешавад).

377. Агар дар прогрессияи арифметикӣ::

1) $a_1 = -5$, $d = 0{,}5$; 2) $a_1 = \frac{1}{2}$, $d = -3$; 3) $a_1 = 36$, $d = -2{,}5$

бошад, суммаи дувоздаҳ аъзои аввалаи оиро ёбед.

378. 1) агар $n = 11$ бошад, 9; 13; 17; ...;
2) агар $n = 12$ бошад, –16; –10; –4; ...

ҳосили ҷамъи n аъзои аввалаи прогрессияи арифметикиро ёбед.

379. Агар ҷамъшавандаҳои суммаи:

1) 3 + 6 + 9 + ... + 273; 2) 90 + 80 + 70 + ... + (–60) аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ бошад, ин суммаро ёбед..

380. Ҳосили ҷамъи тамоми ададҳои дурақама, тамоми ададҳои серақамаро ёбед.

381. Прогрессияи арифметикӣ бо формулаи аъзои n -умаш дода шудааст. Агар: 1) $a_n = 3n + 5$;   2) $a_n = 7 + 2n$ бошад, S_{50} -ро ёбед.

382. Барои он ки ҳосили ҷамъ ба 75 баробар шавад, аз 3 сар карда чандто адади пайдарпаи натуралиро ҷамъ бояд кард?

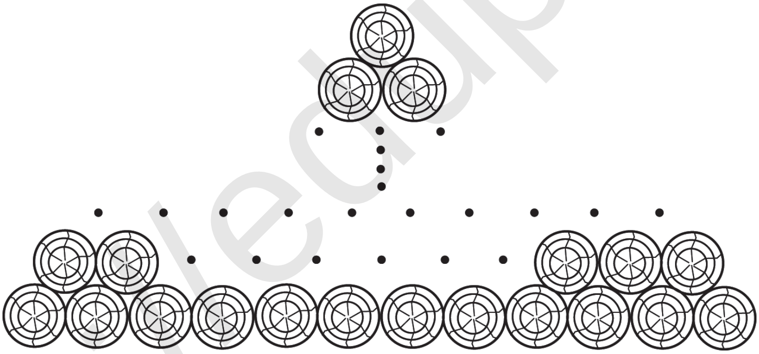
383. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 10, n = 14,\ S_{14} = 1050$;   2) $a_1 = 2\frac{1}{3},\ n = 10,\ S_{10} = 90\frac{5}{6}$ бошад, a_n ва d -ро ёбед.

384. Агар дар прогрессияи арифметикӣ::

1) $a_7=21,\ S_7=205$; | 2) $a_{11}=92,\ S_{11}=22$; | 3) $a_{20}=65,\ S_{20}=350$ бошад, a_1 ва d -ро ёбед.

385. Барои сохтмон ғӯлачӯбҳоро чун дар расми 81 нишондода барин чида тахт намуданд. Агар дар асоси он 12 ғӯлачӯб истода бошад, дар гарам чандто ғӯлачӯб ҳаст?



Расми 81.

386. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_3 + a_9 = 8$. S_{11}-ро ёбед.

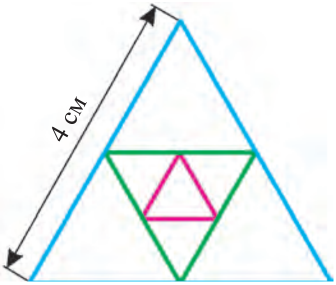
387. Дар прогрессияи арифметикӣ $S_5=65$ ва $S_{10} = 230$ бошад, аъзои якум ва фарқи онро ёбед.

388. Исбот кунед, ки барои прогрессияи арифметикӣ баробарии $S_{12} = 3(S_8 - S_4)$ иҷро мешавад .

§ 31. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ

Секунҷаи баробартарафи мунтазами тарафаш ба 4 см баробарбударо дида мебароем.

Секунҷаи қуллаҳояш дар миёиаҷоҳои тарафҳои ин секуиҷа воқеъбударо месозем (расми 82). Мувофиқи хосияти хати миёнаи секунҷа тарафи секунҷаи дуюм ба 2 см баробар аст. Созишҳои ба ии монандро давом дода, секунҷаҳои тарафҳояшон ба 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ см ва ҳоказоҳоро ҳосил мекунем.



Расми 82.

Пайдарпаии дарозиҳои ин секунҷаҳоро менависем:

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \dots .$$

Дар ин пайдарпаӣ ҳар як аъзои он аз аъзои дуюм сар карда, ҳангоми аъзои авваларо айнан ба як адад $\frac{1}{2}$ зарб кардан баробар аст. Ии гуна пайдарпаиҳоро прогрессияҳои геометрӣ меноманд.

Таъриф. *Агар дар пайдарпаии*

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \dots,\ b_n, \dots$$

барои n-и натуралии ихтиёрӣ баробарии

$$b_{n+1} = b_n q$$

иҷро шавад,ин намуд пайдарпаиҳо прогрессияи геометрӣ номида мешавад,дар ин ҷо $b_n \neq 0$, q – ягон адади ғайрисифрӣ.

Аз ин формула бармеояд,ки $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ аст. Адади q *махраҷи прогрессияи геометрӣ номида мешавад*.

Мисолҳо.

1) 2, 8, 32, 128, ... – *прогрессияи геометрии* махраҷаш $q = 4$ аст;

2) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, ... – *прогрессияи геометрии* махраҷаш $q = \frac{2}{3}$ аст.

3) $-\frac{1}{12}$, 1, –12, 144, ... – *прогрессияи геометрии* махраҷаш $q = -12$ аст;

4) 7, 7, 7, 7, ... – прогрессияи геометрии махраҷаш $q = 1$ аст.

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи $b_n = 7^{2n}$ додашуда прогрессияи геометрӣ мебошад.

△Таъкид мекунем, ки барои n -ҳои ихтиёрӣ $b_n = 7^{2n} \neq 0$ аст. Талаб карда мешавад, ки барои n-ҳои дилхоҳ ҳосили тақсим $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ ба ҳамон як адади аз n новобаста баробар буданаш исбот карда шавад. Дар ҳақиқат,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 49$$

яъне, ҳосили тақсими $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ · аз n вобаста нест. ▲

Мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ $b_{n+1} = b_n q$, $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$, аз ин ҷо

$$b^2_{n+1} = b_{n-1} b_{n+1}, \ n > 1 .$$

Агар ҳамаи аъзоҳои прогрессия мусбат бошанд, он гоҳ $b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$ мешавад яъне, аз аъзои дуюми прогрессияи геометрӣ сар карда ҳар як аъзои он ба миёнаи геометрии ду аъзоҳои ба он ҳамсоя баробар аст. Номи прогрессияи «геометрӣ» бо ин эзоҳ дода мешавад.

Таъкид мекунем, ки агар b_1 ва q дода шуда бошад, он гоҳ аъзоҳои боқимондаи прогрессияи геометрӣ аз рӯи формулаи рекуррентии

$b_{n+1} = b_n q$ ҳисоб карда шуданаш мумкин аст. Лекин, агар n, аз ҳад калон бошад, ои гоҳ меҳнати бисёр сарф мешавад. Одатаи аз формулаи аъзои n -ум истифода мебаранд.

Мувофиқи таърифи прогрессияи геометрӣ

$$b_2 = b_1 q,$$
$$b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3 \text{ ва ғайра.}$$

Умуман,

$$b_n = b_1q^{n-1}, \qquad (1)$$

чунки аъзои n-уми прогрессияи геометрӣ ҳангоми ба аъзои якум адади q -ро $(n-1)$ маротиба зарб кардан ҳосил карда мешавад.

Формулаи (1) *формулаи аъзои n -уми прогрессияи геометрӣ* номида мешавад.

Масъалаи 2. Агар $b_1 = 81$ ва $q = \frac{1}{3}$ бошад, аъзои ҳафтуми прогрессияи геометриро ёбед.

△ Мувофиқи формулаи (1) :

$$b_7 = 81 \cdot (\tfrac{1}{3})^{7-1} = \frac{81}{3^6} = \frac{1}{9}\,. \; ▲$$

Масъалаи 3. Адади 486 аъзои прогрессияи геометрии 2, 6, 18, ... мебошад. Аъзои чандуми он мешавад

△ Бигзор рақами ҳосилшаванда, n – бошад. Барои он ки $b_1 = 2$, $q = 3$ аст, мувофиқи формулаи $b_n = b_1q^{n-1}$:

$$486 = 2 \cdot 3^{n-1},\;\; 243 = 3^{n-1},\;\; 3^5 = 3^{n-1},$$

аз ин ҷо $n-1=5$, $n=6$. ▲

Масъалаи 4. Дар прогрессияи геометрӣ $b_6=96$ ва $b_8=384$. аст. Формулаи аъзои n-умро ёбед.

△ Мувофиқи формулаи $b_n = b_1q^{n-1}$: $b_6=b_1q^5$, $b_8=b_1q^7$. Қиматҳои додашудаи b_6 ва b_8 -ро гузошта ҳосил мекунем: $96=b_1q^5$, $384=b_1q^7$. Аз ин баробариҳо дуюмашро ба якумаш тақсим мекунем:

$$\frac{384}{96} = \frac{b_1q^7}{b_1q^5}\,,$$

аз ин ҷо $4=q^2$ ва ё $q^2=4$ аст. Аз баробарии охирин бармеояд,ки $q=2$ ёки $q = -2$ аст.

Барои ёфтани аъзои якуми прогрессия аз баробарии $96 = b_1q^5$ истифода мебарем:

1) Бигзор $q = 2$ бошад.Дар ин ҳолат $96 = b_1 \cdot 2^5$, $96= b_1 \cdot 32$, $b_1 = 3$ мешавад.

Агар, $b_1 = 3$ ва $q = 2$ бошад,формулаи аъзои n *чунин* $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ мешавад.

1) Бигузор q=–2 бошад. Дар ин ҳолат 96= $b_1(-2)^5$, 96= $b_1(-32)$, b_1=–3.

Агар b_1=–3 ва q=–2 бошад, формулаи аъзои n

$$b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$$

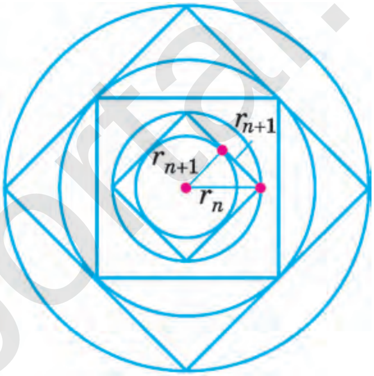
мешавад.

Чавоб: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ёки $b_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$. ▲

Масъалаи 5. Ба давра квадрат дарун кашида шуда, ба он бошад давраи дуюм дарун кашида шудааст. Ба давраи дуюм квадрати дуюм дарун кашида шуда, ба он бошад давраи сеюм дарун кашида шудааст ва ҳоказо (расми 83). Исбот кунед, ки радиусҳои давраҳо прогрессияи геометриро ташкил медиҳанд.

△ Бигзор r_n– радиуси давраи n-ум бошад. Мувофиқи теоремаи Пифагор $r_{n+1}^2 + r_{n+1}^2 = r_n^2$, аз ин чо $r_{n+1}^2 = \frac{1}{2} r_n^2$, яъне $r_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_n$.

Пас, пайдарпаии радиусҳои давраҳо прогрессияи геометрии махрачаш $\frac{1}{\sqrt{2}}$ бударо ташкил мекунад. ▲



Расми 83.

Машқҳо

389. (Шифоҳӣ.) Дар ҳамин прогрессияи геометрӣ аъзои якӯм ва маҳрач ба чӣ баробар аст: 1) 8, 16, 32, ... ; 2) –10, 20, –40, ... ; 3) 4, 2, 1, ... ; 4) –50, 10, –2, ... ?

390. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 12$, $q = 2$; 2) $b_1 = -3$, $q = -4$; 3) $b_1 = 16$, $q = -2$

бошад, панҷ аъзои аввaларо ёбед.

391. Пайдарпайии ададии зерини бо формулаи аъзои n-ум дода шуда, исбот кунед, ки прогрессияи геометрӣ мебошад.

1) $b_n = 3 \cdot 2^n$; 2) $b_n = 5^{n+3}$; 3) $b_n = (\frac{1}{3})^{n-2}$; 4) $b_n = \frac{1}{5^{n-1}}$.

392. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 3$ ва $q = 10$ бошад, b_4-ро;

2) $b_1 = 4$ ва $q = \frac{1}{2}$ бошад, b_7 -ро;

3) $b_1 = 1$ ва $q = -2$ бошад, b_5-ро;

4) $b_1 = -3$ ва $q = -\frac{1}{3}$ бошад, b_6 -ро ҳисоб кунед.

393. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи геометриро нависед:

1) 4, 12, 36, ...; | 2) 3, 1, $\frac{1}{3}$, ...; | 3) 4, –1, $\frac{1}{4}$, ...;

4) 3, –4, $\frac{16}{3}$, ... ; 5) 16, 8, 4, 2, ... ; 6)–9, 3, –1, $\frac{1}{3}$,... .

394. Дар прогрессияи геометрӣ рақами аъзои зераш хаткашида шударо ёбед:

1) 6, 12, 24, ... , $\underline{192}$, ...; 2) 4, 12, 36, ... , $\underline{324}$, ...;

3) 625, 125, 25, ... , $\underline{\frac{1}{25}}$; 4) –1, 2, –4, ... , $\underline{128}$, ...

395. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 2$, $b_5 = 162$; 3) $b_1 = -128$, $b_7 = -2$;

2) $b_1 = 3$, $b_4 = 81$; 4) $b_1 = 250$, $b_4 = -2$

бошад, махраҷи онро ёбед

396. Прогрессияи геометрии 2, 6, 18, ... дода шудааст. 1) Аъзои ҳаштуми ин прогрессияро ёбед; 2) Рақами аъзои ба 162 баробари ин пайдарпаиро ёбед.

397. Агар дар прогрессияи геометрӣ аъзои мусбат

1) $b_8 = \frac{1}{9}$, $b_6 = 81$; 2) $b_6 = 9$, $b_8 = 3$; 3) $b_6 = 3$, $b_8 = \frac{1}{3}$

бошад, аъзои ҳафтум ва махраҷи онро ёбед.

398. Агар дар прогрессияи геометрӣ

1) $b_4 = 9$, $b_6 = 20$; | 2) $b_4 = 9$, $b_6 = 4$; | 3)$b_4 = 320$, $b_6 = 204{,}8$, бошад, аъзоҳои панҷум ва якуми онро ёбед.

399. Амонатгузор дар бонки пасандоз 4 январи соли 2009-ум 300000 сӯм пул гузошт. Агар бонки пасандоз соле ба миқдори 30% -и пасандоз даромад диҳад, пули амонатгузор то 4 январи соли 2012 чӣ қадар мешавад?

400. Квадрати тарафаш 4 см дода шудааст. Миёнаҷоҳои тарафҳои он қуллаҳои квадрати дуюм мебошад. Миёнаҷоҳои тарафҳои квадрати дуюм бошад, қуллаҳои квадрати сеюм ва ҳоказо.Исбот кунед, ки пайдарпаии масоҳатҳои ҳамин квадратҳо прогрессияи геометриро ташкил мекунанд. Масоҳати квадрати ҳафтумро ёбед.

§ 32. ҲОСИЛИ ҶАМЪИ *n* *АЪЗОИ АВВАЛАИ ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРӢ*

Масъалаи 1.Ҳосили ҷамъи зеринро ёбед:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \qquad (1)$$

△ Ҳар ду қисми баробариро ба 3 зарб мекунем:

$$3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6. \quad (2)$$

Баробариҳои (1) ва (2) -ро ба таври зерин навишта мегирем::

$$S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5);$$
$$3S = (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 3^6.$$

Ифодаҳои дохили қавс як хел аст. Бинобар ин аз ифодаи поёнӣ ифодаи болоиро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

$$3S - S = 3^6 - 1, \quad 2S = 3^6 - 1,$$

$$S = \frac{3^6 - 1}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364 \text{ .} \ ▲$$

Акнун прогрессияи геометрии b_1, b_1q, ..., b_1q^n, ки махраҷаш $q \neq 1$ аст, дида мебароем. Бигзор S_n – ҳосили ҷамъи n -то аъзои аввалаи ин прогрессия бошад: $S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + ... + b_1q^{n-1}$. (3)

Теорема. Ҳосили ҷамъи *n* -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ, ки махраҷаш *q≠1* аст, ба зерин баробар мебошад:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}. \qquad (4)$$

○ Ҳар ду қисми баробарии (3) -ро ба q зарб мекунем:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^n. \qquad (5)$$

Баробариҳои (3) ва (5)-ро ба таври зерин навишта мегирем:

$$S_n = b_1 + (b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}),$$
$$qS_n = (b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-1}) + b_1q^n.$$

Ифодаҳои дохили қавс як хел аст. Бинобар ин аз ифодаи поёнӣ ифодаи болоиро тарҳ карда, ҳосил мекунем:

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n.$$

Аз ин ҷо

$$S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n), \quad S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$ ●

Агар $q = 1$ бошад, дар он ҳолат

$$S_n = \underbrace{b_1 + b_1 + \ldots + b_1}_{n\text{ -то ҷамъшаванда}} = b_1 n\,, \text{ яъне } S_n = b_1 n.$$

Масъалаи 2. Ҳосили ҷамъи панҷ аъзои аввалаи прогрессияи геометрии 6, 2, $\frac{2}{3}$, ... -ро ёбед:

△ Дар ин прогрессия $b_1 = 6$, $q = \frac{1}{3}$ аст.Аз рӯи формулаи (4) меёбем:

$$S_5 = \frac{6\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{6\cdot\left(1-\frac{1}{243}\right)}{\frac{2}{3}} = \frac{6\cdot 242\cdot 3}{2\cdot 243} = \frac{242}{27}.$$ ▲

Масъалаи 3. Ҳосили ҷамъи шаш аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ, ки махраҷаш $q = \frac{1}{2}$ аст, ба 252 баробар мебошад. Аъзои якуми ин прогрессияро ёбед.

△ Аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$252 = \frac{b_1\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}{1-\frac{1}{2}}.$$

Аз ин ҷо $252=2b_1\left(1-\frac{1}{64}\right)$, $252=\frac{b_1\cdot 63}{32}$, $b_1=128$. ▲

Масъалаи 4. Ҳосили ҷамъи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ ба –93 баробар аст. Аъзои якуми ин прогрессия ба –3, махраҷ бошад ба 2 баробар аст. n -ро ёбед:

△Аз формулаи (4) истифода бурда ҳосил мекунем:

$$-93=\frac{-3(1-2^n)}{1-2}.$$

Аз ин ҷо $-31 = 1 - 2^n$, $2^n = 32$, $2^5 = 2^n$, $n = 5$. ▲

Масъалаи 5. 5, 15, 45, ..., 1215, ... —прогрессияи геометрӣ аст. Ҳосили ҷамъи 5 + 15 + 45 + ... + 1215 -ро ёбед.

△ Дар прогрессия $b_1=5$, $q=3$, $b_n=1215$.Формулаи суммаи n- то аъзои авваларо чунин табдил медиҳем:

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{b_1-b_1q^{n-1}q}{1-q}=\frac{b_1-b_nq}{1-q}=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Аз шарти масъала истифода бурда меёбем:

$$S_n=\frac{1215\cdot 3-5}{3-1}=\frac{3645-5}{2}=1820.$$ ▲

Машқҳо

401. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=2$, $n=6$;   2) $b_1=-2$, $q=\frac{1}{2}$, $n=5$;

3) $b_1=1$, $q=-\frac{1}{3}$, $n=4$;   4) $b_1=-5$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=5$

бошад, ҳосили ҷамъи n -то аъзои аввалаи прогрессияи геомет- риро ёбед:

402. Ҳосили ҷамъи ҳафт аъзои аввалаи прогрессияи геометриро ёбед:

1) 5, 10, 20, ...; 2) 2, 6, 18, ...; 3) 1, 1, 1, 2, ...

1) 5, 10, 20, ... ;   2) 2, 6, 18, ... ;   3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, ...

403. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $q = 2$, $S_7 = 635$ бошад, b_1 ва b_7 -ро ёбед;
2) $q = -2$, $S_8 = 85$ бошад, b_1 ва b_8 -ро ёбед.

404. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $S_n = 189, b_1 = 3, q = 2;$

2) $S_n = 635, b_1 = 5, q = 2;$

3) $S_n = 170, b_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2};$

4) $S_n = -99, b_1 = -9, q = -2$

бошад, шумораи аъзоҳои он n -ро ёбед.

405. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 847$,бошад, n ва b_n -ро;

2) $b_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$ бошад, n ва b_n -ро;

3) $b_1 = 2,\ b_n = 1458,\ S_n = 2186$ бошад, n ва q-*ро*;

4) $b_1 = 1,\ b_n = 2401,\ S_n = 2801$ бошад, n ва q-ро

ёбед.

406. Агар ҷамъшавандаҳои суммаи ададҳо аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи геометрӣ бошад, ии суммаро ёбед:

1) $1 + 2 + 4 + ... + 128;$ 2) $1 + 3 + 9 + ... + 243;$

3) $-1 + 2 - 4 + ... + 128;$ 4) $5 - 15 + 45 - ... + 405.$

407. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_2 = 15,\ b_3 = 25;$ | 2) $b_2 = 14,\ b_4 = 686,$ | 3) $b_2 = 15,\ b_4 = 375,\ q > 0$ бошад, b_5 ва S_4-ро ёбед.

408. Прогрессияи геометрӣ бо формулаи аъзои n -ум дода шудааст:

1) $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$,бошад, S_5 -ро ёбед;

2) $b_n = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ бошад, S_6 -ро ёбед;

409. Агар n — нишондиҳандаи дараҷа ва адади натуралии аз 1 калон бошад айниятро исбот кунед:

$$(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1) = x^n - 1,$$

410. Дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_3 = 135, S_3 = 195$ бошад, b_1 ва q-*ро ёбед*;

2) $b_1 = 12, S_3 = 372$ бошад, q ва b_3-ро ёбед.

411. Дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 1$ ва $b_3 + b_5 = 90$ бошад, q-ро;
2) $b_2 = 3$ ва $b_4 + b_6 = 60$ бошад, q -ро;
3) $b_1 - b_3 = 15$ ва $b_2 - b_4 = 30$ бошад, S_{10} -ро;
4) $b_3 - b_1 = 24$ ва $b_5 - b_1 = 624$ бошад, S_5-ро ёбед.

§ 33. ПРОГРЕССИЯИ ГЕОМЕТРИИ БЕҲАД КАМШАВАНДА

Квадратҳои дар расми 84 тасвиршударо дида мебароем. Тарафи квадрати якум ба 1, дуюмаш ба $\frac{1}{2}$, сеюмаш ба $\frac{1}{2^2}$ баробар аст ва ғайра. Пас, тарафҳои квадратҳо прогрессияи геометрии махраҷаш ба $\frac{1}{2}$ баробарро ташкил мекардаанд:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ ...,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ ... . \qquad (1)$$

Масоҳатҳои ин квадратҳо бошад, прогрессияи геометрии махраҷаш ба $\frac{1}{4}$ баробари зеринро ташкил мекунанд:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ ...,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ ... . \qquad (2)$$

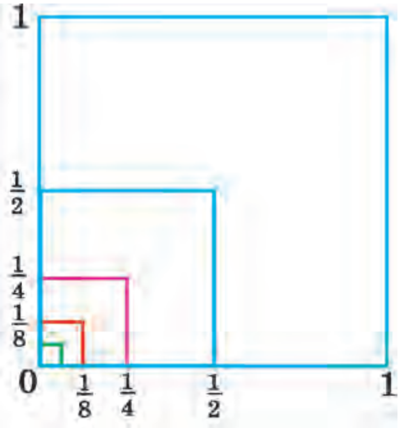
Аз расми 84 аён аст, ки тарафҳои квадратҳо ва масоҳатҳои онҳо бо афзудани рақами n торафт кам шуда,ба сифр наздик шуда мераванд. Бинобар ин прогрессияҳои (1) ва (2) прогрессияҳои беҳад камшаванда номида мешаванд. Таъкид, мекунем ки махраҷҳои ин прогрессияҳо аз як хурд аст.

Акнун прогрессияи геометрии зеринро дида мебароем:

$$1,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ -\frac{1}{3^3},\ ...,\ \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}},\ ... . \qquad (3)$$

Махраҷи ин прогрессия $q = -\frac{1}{3}$,

аъзоҳояш бошад $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{3}$, $b_3 = \frac{1}{9}$, $b_4 = -\frac{1}{27}$ ва ғайра.



Расми 84.

Бо зиёд шудани рақами n аъзоҳои ин прогрессия ба сифр наздик мешаванд. Прогрессияи (3) -ро низ прогрессияи беҳад камшаванда ме- номанд. Таъкид карда мегузарем, ки модули махраҷи он низ аз як хурд аст $|q|<1$.

Прогрессияи геометрии модули махраҷаш аз як хурд прогрессияи геометрии беҳад камшаванда номида мешавад.

Масъалаи 1. Исбот кунед, ки прогрессияи геометрии бо формулаи аъзои n- умаш

$b_n = \frac{3}{5^n}$ — додашуда, беҳад камшаванда аст.

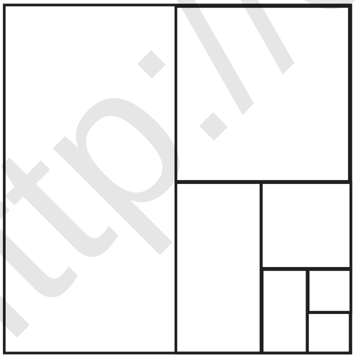
△ Мувофиқи шарт $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, аз ин ҷо $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$. Азбаски $|q|<1$ аст, пас прогрессияи геометрии додашуда беҳад камшаванда мешавад. ▲

Дар расми 85 квадрати тарафаш ба 1 баробар тасвир карда шудааст. Нисфи онро штрихпӯш мекунем. Сонӣ нисфи қисми боқимондаашро низ штрихпӯш мекунем ва ғайра. Масоҳатҳои росткунҷаҳои штрихонидашуда и прогрессияи геометрии беҳад камшаваидаи зерин- ро ташкил медиҳад.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots .$$

Агар бо ин роҳ ҳамон росткунҷаҳои ҳосилкардашударо штрихонем, он гоҳ тамоми квадрат бо штрих рӯйпуш мегардад. Табиист, ки суммаи масоҳатҳои ҳамаи росткунҷаҳои штрихонидашударо ба 1 баробар гуфта ҳисобидан мумкин аст, яъне:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1 .$$



Расми 85.

Дар қисми чапи ин баробарӣ ҳосили ҷамъи адади беҳад ҷамъшавандаҳо истодааст. Ҳосили ҷамъи n-то ҷамъшавандаҳои авваларо дида мебароем:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} .$$

Мувофиқи формула суммаи n-то аъзои аввалаи прогрессияи геометрӣ:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} .$$

Агар n беҳад афзун шавад,он гоҳ $\frac{1}{2^n}$ ба сифр наздик шудан мегирад (ба сифр майл мекунад). Ин ҳолат чунин навишта мешавад:

ҳангоми $n \to \infty$ $\frac{1}{2^n} \to 0$, (хонда мешавад:ҳангоми n ба беҳадӣ майл кардан $\frac{1}{2^n}$ ба сифр майл мекунад) ва ё

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

(хонда мешавад: ҳангоми n ба беҳадӣ майл кардан, лимити пайдарпаии $\frac{1}{2^n}$ ба сифр баробар аст.)

Умуман, барои ягон пайдарпаии a_n ҳангоми $n\to\infty$ будан $a_n - a \to 0$ бошад, он гоҳ пайдарпаии a_n ба адади майл мекунад (лимити пайдарпаии a_m ҳангоми $n\to\infty$ ба a баробар аст) мегӯянд ва ба таври $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ менависанд.

Азбаски ҳангоми $n\to\infty$ будан $\frac{1}{2^n} \to 0$ аст, пас ҳангоми $n\to\infty$ будан $\left(1 - \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}\right) \to 1$, яъне $n\to\infty$ бошад $S_n \to 1$. Бинобар ин ҳосили ҷамъи беҳад $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ ба 1 баробар ҳисобида мешавад. Акнун прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи дилхоҳро дида мебароем:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \dots,\ b_1q^{n-1},\ \dots,$$

дар ин ҷо $|q| < 1$.

Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда гуфта, ҳангоми $n\to\infty$ **адади суммаи** n**-то аъзои аввалаи он майлкунандаро меноманд.**

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ аз формула истифода мебарем. Онро интавр менависем:

$$S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} q^n . \qquad (4)$$

Азбаски $|q| < 1$ аст, ҳангоми беҳад афзудани n $q^n \to 0$ мешавад. Бинобар ин $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ ҳам ҳангоми $n\to\infty$ ба сифр майл мекунад. Дар формулаи (4) ҷамшавандаи якум ба n вобаста нест. Пас ҳангоми $n\to\infty$ ҳосили ҷамъи S_n бо адади $\frac{b_1}{1-q}$ майл мекунад.

! Ҳамин тавр ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи S ба зерин баробар аст:

$$\boxed{S=\frac{1}{1-q}} \qquad (5)$$

Дар ҳолати хусусӣ ,ҳангоми $b_1 = 1$ будан , $S=\frac{1}{1-q}$ -ро соҳиб мешавем.Одатан ин баробарӣ дар намуди зерин навишта мешавад:

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots=\frac{1}{1-q}.$$

Таъкид мекунем, ки ин баробарӣ ва баробарии (5) фақат ҳангоми $|q|<1$ будан, ҷой дорад.

Масъалаи 2. Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаи $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \ldots$ -ро ёбед.

△ Азбаски $b_1=\frac{1}{2}$, $b_2=-\frac{1}{6}$ аст, пас $q=\frac{b_2}{b_1}=-\frac{1}{3}$, $S=\frac{b_1}{1-q}$. Аз рӯи формулаи

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{8}. \blacktriangle$$

Масъалаи 3. Агар $b_3=-1$, $q=\frac{1}{7}$ бошад, ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед.

△ *Ҳангоми n = 3 будан формулаи* $b_n=b_1q^{n-1}$ -ро истифода барем, $-1=b_1\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3-1}$, $-1=b_1\cdot\frac{1}{49}$ ҳосил мешавад,аз ин ҷо $b_1=-49$.

Аз рӯи формулаи (5) суммаи *S-ро меёбем:*

$$S=\frac{-49}{1-\frac{1}{7}}=-57\frac{1}{6}. \blacktriangle$$

Масъалаи 4. Аз формулаи (5) истифода бурда касри даҳии даврии беҳади a = 0,(15)= 0,151515... -ро дар шакли касри оддӣ нависед.

△ Пайдарпаии зерини қиматҳои тақрибии касри беҳади додашударо тартиб медиҳем: $a_1=0{,}15=\frac{15}{100}$,

$$a_2 = 0{,}1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2},$$

$$a_3 = 0{,}151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3}.$$

Ин тавр навипггани қиматҳои тақрибӣ нишон медиҳад, ки касри даврии додашударо дар шакли прогрессияи геометрии беҳад камшаванда тасвир кардан мумкин аст:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + \ldots$$

Мувофиқи формулаи (5) ҳосил мекунем:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}. \ ▲$$

Машқҳо

412. Исбот кунед, прогрессияи геометрӣ беҳад камшаванда аст:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots;$

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots;$

3) $-81, -27, -9, \ldots;$

4) $-16, -8, -4, \ldots;$

5) $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \ldots;$

6) $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots.$

413. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 40, \ b_2 = -20;$

2) $b_7 = 12, \ b_{11} = \frac{3}{4};$

3) $b_7 = -30, \ b_6 = 15;$

4) $b_5 = -9, \ b_9 = -\frac{1}{27}$

бошад, он беҳад камшаванда мешавад? Инро муайян кунед.

414. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед:

1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots;$

2) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots;$

3) $-25, -5, -1, \ldots;$

4) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots;$

5) $128, 64, 2, \ldots;$

6) $-81, -27, -9, \ldots.$

415. Агар дар прогрессияи геометрии камшаванда:

1) $q = \frac{1}{2}, \ b_1 = \frac{1}{8};$

2) $q = -\frac{1}{3}, \ b_1 = 9;$

3) $q = \frac{1}{3}, \ b_5 = \frac{1}{81};$

4) $q = -\frac{1}{2}, \ b_4 = -\frac{1}{8}$

бошад, суммаи онро ёбед.

416. Оё пайдарпаии бо формулаи аъзои n-ум додашудаи зерин прогрессияи геометрии беҳад камшаванда мешавад?

1) $b_n = 3 \cdot (-2)^n$; 2) $b_n = -3 \cdot 4^n$; 3) $b_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$;

4) $b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; 5) $b_n = -2 \cdot (-3)^n$; 6) $b_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

417. 1) Ҳосили ҷамъи прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ёбед: $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$; 2) $100, -10, 1 \ldots$; 3) $98, 28, 8, \ldots$.

418. Агар дар прогрессияи геометрии беҳад камшаванда:

1) $q = \frac{1}{2}$, $b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$; 2) $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_4 = \frac{9}{8}$; 3) $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_9 = 4$

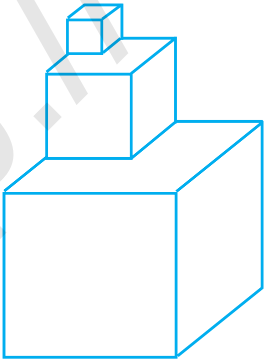
бошад, суммаи онро ёбед.

419. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда ба 150 баробар аст. Агар:

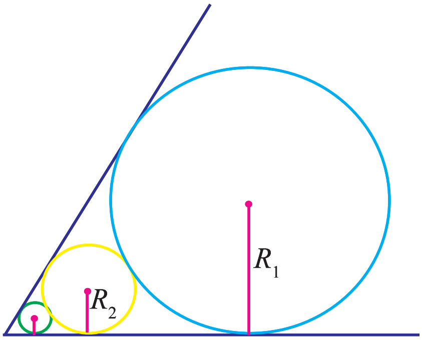
1) $q = \frac{1}{3}$, бошад, b_1-ро; 2) $b_1 = 75$; 3) $b_1 = 15$

бошад, q- ро ёбед.

420. Ба болои куби теғааш а куби теғааш $\frac{a}{2}$ гузоштанд, ба болои он куби тегааш $\frac{a}{4}$ гузоштанд, баъдан ба болои он куби теғааш $\frac{a}{8}$ гузоштанд ва ҳоказо (расми 86). Баландии шакли ҳосилшударо ёбед.



Расми 86.



Расми 87.

421. Ба кунҷи 60° баробар давраҳои ба якдигар расанда пай дар пай дарун кашида шудаанд (расми 87). Радиуси давраи якум ба R_1 баробар аст. Радиуси давраҳои боқимонда R_2, R_3, ..., R_n, ..ро ёбед ва нишон диҳед, ки онҳо прогрессияи геометрии беҳад камшавандаро ташкил мекунанд. Исбот кунед, ки суммаи $R_1 + 2(R_2 + R_3 + \ldots + R_n + \ldots)$ ба масофаи байни маркази давраи якум ва қуллаи кунҷ баробар аст.

422. Касри даҳии даврии беохирро дар шакли касри оддӣ нависед:
1) 0,(5); 2) 0,(9); 3) 0,(12); 4) 0,2(3); 5) 0,25(18).

Машқҳо доир ба боби IV

423. Фарқи прогрессияи арифметикиро ёбед, аъзоҳои чорӯм ва панҷуми онро нависед:

1) $4,\ 4\frac{1}{3},\ 4\frac{2}{3},\ \ldots;$ 2) $3\frac{1}{2},\ 3,\ 2\frac{1}{2},\ \ldots;$

3) $1,\ 1+\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3},\ \ldots;$ 4) $\sqrt{2},\ \sqrt{2}-3,\ \sqrt{2}-6,\ \ldots.$

424. Исбот кунед, ки пайдарпаии бо формулаи аъзои n-умаш $a_n=-2(1-n)$ додашуда прогрессияи арифметикӣ мебошад.

425. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 6,\ d=\frac{1}{2}$ бошад, a_5-ро; 2) $a_1=-3\frac{1}{3},\ d=-\frac{1}{3}$ бошад, a_7-ро;
3) $a_1=4{,}8,\ d=1{,}2$ бошад, a_{11}-ро ҳисоб кунед:

426. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:
1) $a_1=-1,\ a_2=1$; 2) $a_1=3,\ a_2=-3$; 3) $a_3=-2,\ a_5=6$ бошад, суммаи бист аъзои аввалаи онро ёбед.

427. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1=-2,\ a_n=-60,\ n=10;$ 2) $a_1=\frac{1}{2},\ a_n=25\frac{1}{2},\ n=11$

бошад, суммаи n-то аъзои аввалаи онро ёбед .

428. Агар ҷамъшавандаҳои суммаи:
1) –38 + (–33) + (–28) + ... + 12;
2) –17 + (–14) + (–11) + ... + 13

аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ бошад,ин суммаро ёбед.

429. Махраҷи прогрессияи геометрӣ ва аъзоҳои чорум ва панҷуми онро ёбед:

1) $3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \ldots;$ 2) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $3,\ \sqrt{3},\ 1,\ \ldots;$

4) $5,\ -5\sqrt{2},\ 10,\ \ldots;$ 5) 16, 4, 1, ...; 6) 8, –4, 2, ...

430. Формулаи аъзои n-уми прогрессияи геометриро нависед:

1) –2, 4, –8, ...; 2) $-\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ \ldots;$ 3) –27, –9, –3... .

431. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = 2,\ q = 2,\ n = 6;$ 2) $b_1 = \frac{1}{8},\ q = 5,\ n = 4;$

3) $b_1 = -8,\ q = \frac{1}{2},\ n = 5$, бошад, b_n -ро ёбед.

432. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = -4,\ n = 5;$ 2) $b_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ n = 10;$

3) $b_1 = 10,\ q = 1,\ n = 6;$ 4) $b_1 = 5,\ q = -1,\ n = 9$ бошад, суммаи n-аъзои аввалини онро ёбед.

433. Суммаи n -аъзои аввалини прогрессияи геометриро ёбед:

1) 128, 64, 31, ..., $n = 6;$ 2) 162, 54, 18, ..., $n = 5;$

3) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \ldots,\ n = 5;$ 4) $\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ n = 4.$

434. Исбот кунед, ки прогрессияи геометрӣ беҳад камшаванда аст, суммаи онро ёбед:

1) $-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \ldots;$ 2) $-1,\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{16},\ \ldots;$ 3) $7,\ 1,\ \frac{1}{7},\ \ldots.$

435. Агар дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 2\frac{1}{2}$ ва $a_8 = 23\frac{1}{2}$ бошад, фарқи онро ёбед.

436. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 5,\ a_3 = 15;$ 2) $a_3 = 8,\ a_5 = 2;$ 3) $a_2 = 18,\ a_4 = 14$ бошад, панҷ аъзои аввалини онро ёбед.

437. Байни ададҳои –10 ва 5 як ададро чунон гузоред, ки дар натиҷа се аъзои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ ҳосил шавад.

438. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_{13} = 28,\ a_{20} = 38;$ 2) $a_{18} = -6,\ a_{20} = 6;$ 3) $a_6 = 10,\ a_{11} = 0$ бошад, аъзои нуздаҳум ва якуми онро ёбед.

Худро бисанҷед!

1. Дар прогрессияи арифметикӣ 1) $a_1 = 2$, $d = -3$; 2) $a_1 = -7$, $d = 2$ бошад, a_{10} ва суммаи даҳ аъзои аввалаи онро ёбед.

2. Дар прогрессияи геометрӣ : 1) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$; 2) $b_1 = \frac{1}{9}$, $q = 3$ бошад, b_6 ва суммаи шаш аъзои аввалаи онро ёбед.

3. 1) Исбот кунед, ки пайдарпаии 1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \cdots$; 2) 128, 32, 8,… прогрессияи геометрии беҳад камшаванда аст ва суммаи аъзоҳои онро ёбед.

439. Дар кадом қиматҳои x ададҳои

1) $3x$, $\frac{x+2}{2}$, $2x - 1$; 2) $3x^2$, 2, $11x$; 3) x^2, $10x$, 25

аъзоҳои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ мешавад.

440. Нишон диҳед, ки ададҳои зерин се аъзои пайдарпаи прогрессияи арифметикӣ мебошанд:

1) $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin(\alpha - \beta)$;

2) $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\cos(\alpha - \beta)$;

3) $\cos2\alpha$, $\cos^2\alpha$, 1; 4) $\sin5\alpha$, $\sin3\alpha\cos2\alpha$, $\sin\alpha$.

441. Барои он ки сумма ба 252 баробар бошад, аз 5 сар карда чандто адади пайдарпаи тоқи натуралиро ҷамъ кардан лозим аст?

442. Агар дар прогрессияи арифметикӣ:

1) $a_1 = 40$, $n = 20$, $S_{20} = -40$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $n = 16$, $S_{16} = -10\frac{2}{3}$;

3) $a_1 = -4$, $n = 11$, $S_{11} = 231$ бошад, a_n ва d -ро ёбед.

443. Дар прогрессияи геометрӣ:

1) агар $b_1 = 4$ ва $q = -1$ бошад, b_9 -ро ёбед.

2) агар $b_1 = 1$ ва $q = \sqrt{3}$ бошад, b_7 -ро ёбед.

444. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_7 = 16$; 2) $b_3 = -3$, $b_6 = -81$;

3) $b_2 = 4$, $b_4 = 1$; 4) $b_4 = -\frac{1}{5}$, $b_6 = -\frac{1}{125}$

бошад, аъзои панҷуми онро ёбед.

445. Дар байни ададҳои 4 ва 9 як адади мусбатро чунон ҷойгир кунед, ки дар натиҷа се аъзои пайдарпаи прогрессияи геометрӣ ҳосил шавад.

446. Агар пайдарпаӣ бо формулаи аъзои n-умаш:

1) $b_n = 5^{n+1}$; 2) $b_n = (-4)^{n+2}$; 3) $b_n = \frac{10}{7^n}$; 4) $b_n = -\frac{50}{3^{n+3}}$

дода шуда бошад, оё прогрессияи геометрии беҳад камшаванда шуда метавонад?

447. Агар дар прогрессияи геометрӣ:

1) $b_2 = -81$, $S_2 = 162$; 2) $b_2 = 33$, $S_2 = 67$;

3) $b_1 + b_3 = 130$, $b_1 - b_3 = 120$; 4) $b_2 + b_4 = 68$, $b_2 - b_4 = 60$

бошад, нишон диҳед, ки он беҳад камшаваида аст.

448. Истироҳаткунанда ба тавсияи шифокор амал карда, рӯзи якум зери нури офтоб 5 дақиқа хобид, дар ҳар як рӯзи баъдина бошад, офтобхӯрӣ 5 дақиқагӣ афзуд. Агар ӯ ба офтобхӯрӣ рӯзи чоршаибе огоз карда бошад, дар кадом рӯзи ҳафта муддати офтобхӯрӣ ба 40 дақиқа баробар мешавад?

449. Агар дар прогрессияи $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ ва $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$ бошад, бошад, аъзои якум ва фарқи оиро ёбед.

450. Агар дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ва $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 50$ бошад, аъзои якӯм ва фарқи онро ёбед .

451. Дар соати 1 соат 1 маротиба, дар 2–2 маротиба, ..., дар 12–12 маротиба бонг мезанад. Мили соат ҳангоми ними ҳар як соати навбатиро нишон додан бошад, як маротиба бонг мезанад. Ин соат дар як шабонарӯз чанд маротиба бонг мезанад?

Машқ (тест)-ҳои санҷишӣ доир ба боби IV

1. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 3$, $d = -2$. S_{101} -ро ёбед.
А) –9797; Б) –9798; В) –7979; Г) –2009.

2. Дар прогрессияи арифметикӣ $d = 4$, $S_{50} = 5000$ бошад, a_1 -ро ёбед.
А) –2; Б) 2; В) 100; Г) 1250.

3. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 1$, $a_{101} = 301$ бошад, *d-ро ёбед.*
А) 4; Б) 2; В) 3; Г) 3,5.

4. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2 + a_9 = 20$ бошад, S_{10} -ро ёбед.
А) 90; Б) 110; В) 200; Г) 100.

5. Аъзои 5-уми пайдарпаиро ёбед, ки ҳангоми ба 8 тақсим кардан дар бақия 7 монад.
А) 47; Б) 55; В) 39; Г) 63.

6. Адади 701 аъзои аъзои чандуми прогрессияи 1, 8, 15, 22, ... мебошад?
А) 101; Б) 100; В) 102; Г) 99.

7. Аъзои прогрессияи 1002, 999, 996, ... аз кадом аъзо сар карда, ададҳои манфӣ мешаванд?
А) 335; Б) 336; В) 337; Г) 334.

8. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_2 + a_6 = 44$, $a_5 - a_1 = 20$ бошад, a_{100}-ро ёбед.
А) 507; Б) 495; В) 502; Г) 595.

9. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1 = 7$, $d = 5$, $S_n = 25450$ бошад, *n-ро ёбед*.
А) 99; Б) 101; В) 10; Г) 100.

10. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_{12} + a_{15} = 20$ бошад, S_{26} -ро ёбед.
А) 260; Б) 270; В) 520; Г) 130.

11. Дар байни ададҳои 1 ва 11 чунин 99 ададро ҷойгир кунед, ки оиҳо бо ии ададҳо дар якҷоягӣ прогрессияи арифметикиро ташкил диҳанд. Барои ии прогрессия S_{50} -ро ёбед.
А) $172\frac{1}{2}$; Б) 495; В) 300; Г) 178.

12. Дар прогрессияи арифметикӣ a1 = -20,7, d = 1,8 бошад, аз кадом аъзо сар карда, аъзоҳои прогрессия мусбат мешаванд?
А) 18; Б) 13; В) 12; Г) 15.

13. Суммаи чанд адади натуралии ба 7 каратӣ 385-ро ҳосил мекунад.?
А) 12; Б) 11; В) 10; Г) 55.

14. Дар прогрессияи геометрӣ $b_1 = 2$, $q = 3$ бошад, S_6 -ро ёбед.
А) 1458; Б) 729; В) 364; Г) 728.

15. Дар прогрессияи геометрӣ $q = \frac{1}{3}$, $S = 364$ бошад, b_1 -ро ёбед.
А) $242\frac{2}{3}$; Б) 81; В) $121\frac{1}{3}$; Г) 240.

16. Дар прогрессияи геометрӣ $S_4 = 10\frac{5}{8}$, $S_5 = 42\frac{5}{8}$, $b_1 = \frac{1}{8}$ бошад, q -ро ёбед.

А) 4; Б) 2; В) 8; Г) $\frac{1}{2}$.

17. Прогрессияи геометрӣ дорои 6 аъзо мебошад. Суммаи 3 аъзои аввала ба 26, суммаи 3 аъзои оянда ба 702 баробар аст. Махраҷи прогрессияро ёбед.

А) 4; Б) 3; В) $\frac{1}{3}$; Г) $2\sqrt{3}$.

18. Агар дар прогрессияи геометрии беҳад камшаванда $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ бошад, q -ро ёбед.

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{64}{65}$; В) $\frac{63}{64}$; Г) $\frac{1}{4}$.

19. Агар дар прогрессияи геометрӣ $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b_1 = 2-\sqrt{3}$ бошад, S-ро ёбед.

А) $2+\sqrt{3}$; Б) 3; В) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; Г) 2.

Масъалаҳои амалӣ-татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъалаи 1. Ҷисми озод афтанда дар сонияи якум 4,9 м ва дар сонияҳои минбаъда нисбат ба пештара 9,8 м зиёд масофаро тай мекунад. Ҷисм аз баландии 4410 метр дар чӣ қадар вақт ба замин меафтад?

△ Мувофиқи шарти масъала ҷисм дар сонияи якум $a_1=4{,}9$, сонияи дуюм $a_2=4{,}9+9{,}8$, сонияи сеюм $a_3=a_2+9{,}8=a_1+2\cdot 9{,}8$ ва ҳоказо дар сонияи n-ум $a_n=a_{n-1}+9{,}8=a_1+(n-1)9{,}8$ метр ба паст мефуроял,яъне масофаҳои дар ҳар як сония ба паст фуромадан, прогрессияи арифметикиро ташкил медиҳад. Пас,ҷисм дар n сония ба замин меафтад, гӯем, дар асоси формулаи ҳосили ҷамъи n-аъзои аввалаи прогрессияи арифметикӣ

$$4\,410 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2\cdot 4{,}9 + (n-1)\cdot 9{,}8}{2}\cdot n.$$

Аз ин ҷо $4{,}9n^2=4\,410$, $n^2=900$, $n=30$-ро ҳосил мекунем.

Ҷавоб: Ҷисм дар 30 сония ба замин меафтад. ▲

Масъалаи 2. Шахсе b сӯм маблағи худро бо фоизи солонаи $p\%$ гузошт ва баъд аз n сол гузаштан ҳама пулро баргардонда гирифт. Агар $b=4\,000\,000$, $p=8$ бошад,вай шахс баъд аз ду сол чӣ қадар пул гирифтааст?

△ Маблағи аввалаи гузоштааш b сӯм бошад, баъд аз як сол маблағи он $b_1=b\cdot(1+\frac{p}{100})$ сӯм мешавад.Барои солҳои оянда яке аз вариантҳои зерин шуданаш мумкин аст.

1) барои ҳар як соли оянда фоиз аз рӯи маблағи аввала b сӯм ҳисоб карда мешавад. Дар ин ҳол баъд аз соли дуюм $b_2=b+1+\frac{bp}{100}+\frac{bp}{100}=b\cdot\left(1+\frac{2p}{100}\right)$ сӯм ва ҳоказо баъд аз n сол $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сӯм мешавад. Ин гуна ҳисобкунии фоиз фоизи содда номида мешавад. Дар ин ҷо агар $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ бошад, дар ин ҳол $b_2=4\,000\,000\cdot 1{,}16=4\,640\,000$

2) Барои ҳар як соли оянда аз рӯи маблағи соли гузошта ҳисоб карда мешавад. Баъд аз ду сол $b_2=b_1\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ сӯм ва ҳоказо баъд аз n сол $b_n=b_{n-1}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ мешавад. Ин гуна ҳисобкунии фоиз фоизи мураккаб номида мешавад. Дар ин ҷо агар $b=4\,000\,000$, $p=8$, $n=2$ бошад, дар ин ҳо $b_2=4\,000\,000\cdot 1{,}08^2=$ $=4\,665\,600$ сӯм .

Ҷавоб: дар ҳолати фоизи содда $b_n=b\cdot\left(1+\frac{np}{100}\right)$ сӯм ; 4 640 000 сӯм;

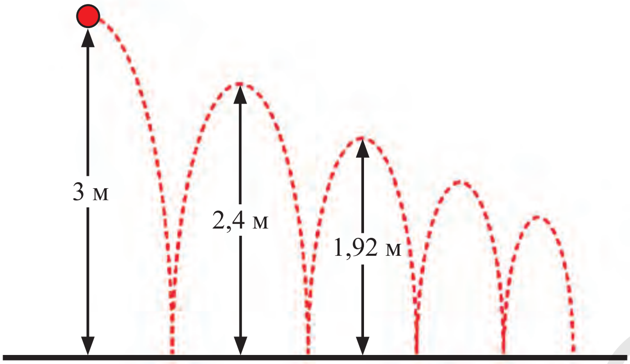
дар ҳолати фоизи мураккаб $b_n=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ сӯм; 4 665 600 сӯм. ▲

Масъалаҳо

1. Ҷисми озодафтанда дар сонияи якум 4,9 м роҳ ,дар ҳар як сонияҳои оянда, аз пештара 9,8 м зиёд роҳ тай мекунад. Ҷисми афтанда дар сонияи 5-ум кадом масофаро тай мекунад?
2. Дар яке аз секторҳои сирк дар ҳар як қатори оянда нисбат ба пешина якто ҷойи нишаст зиёдтар аст. Агар

   1) дар қатори якум 8 то ҷойи нишаст қаторҳо 22 то;

   2) дар қатори якум ҷойи нишаст 10 то ҷойи нишаст, қаторҳо 21- то бошад дар сектор чандто ҷой ҳаст?
3. Сайёҳон дар соҳили дарё 140 км масофаро тай карданро ба нақша гирифтанд. Рӯзи якум 5 км, ҳар як рӯзи оянда нисбат ба рӯзи гузашта 2 км зиёд роҳ гашта бошанд, онҳо дар саёҳат чанд рӯз буданд?
4. Ҳуҷайраҳои хамиртурӯш дар натиҷаи ба 2 тақсим шудани ҳуҷайра зиёд мешавад. Агар дар ҳолати аввала 6- то ҳуҷайра бошад ,баъд аз 10 маротиба тақсим шудан шумораи ҳуҷайраҳо чандто мешавад?
5. Маоши моҳонаи ходими завод дар давоми соли тақвимӣ ҳар моҳ бо як хел миқдор зиёд карда шуд.Миқдори умумии дар моҳҳои июн, июл, август гирифтаи моҳонаи 9 900 000 сӯм, сентябр, октябр, ноябр гирифта 10 350 000 сӯм аст. Музди меҳнати дар давоми сол гирифтаи ходимро ёбед.
6. Бо усули ваннаи ҳаво муолиҷакунӣ рӯзи якум 15 дақиқа давом мекунад, дар ҳар як рӯзҳои оянда 10 дақиқа зиёд шуда меравад. Барои қабули ванна аз ҳама зиёд 1 соату 45 дақиқа давом карданаш, бо тартиби нишондодашуда қабули ваннаи ҳаво чанд рӯз давом карданаш лозим аст?
7. Тӯпи эластикии партофташуда ба замин зада шуда боз боло мебарояд ва ҳар сафар ба 80% баландии пешина барояд,дар ин ҳол тӯпи аз 3 метр партофта шуд, ҳосили ҷамъи масофаҳои умумии вертикалии ба боло ба поён тай кардаи тӯпро ёбед (расми 88).



Расми 88.

Масъалаҳои таърихӣ

1. *Масъалаи Берунӣ.* Исбот кунед, ки агар дар прогрессияи геометрии аъзоҳояш мусбат: адади аъзоҳо тоқ бошад, он гоҳ $b_{k+1}^2 = b_1 \cdot b_{2k+1}$ адади аъзоҳо ҷуфт бошад, он гоҳ $b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_{2k}$ мебошад.

2. Масъалаи аз папируси Ахмес гирифташуда (солҳои 2000 пеш аз мелод). 10 ченак ғалларо байни 10 нафар чунон тақсим кунед, ки фарқи байни яке аз нафарҳо аз пасояндаш (ё пешояндаш) ба $\frac{1}{8}$ ченак баробар бошад.

Маълумотҳои таърихӣ

Абӯрайҳон Берунӣ дар асараш «Ёдгориҳои халқҳои қадим» ҳосили ҷамъи 64 аъзои аввалаи прогрессияи геометриро, ҳисоб мекунад, ки аъзои якумаш $b_1 = 1$, махраҷаш $q = 2$ буда, ба ривояти кашфи шоҳмот вобаста аст. Ӯ нишон медиҳад, ки агар аз адади ба катаки k-и тахтаи шоҳмот мувофиқоянда адади 1 тарҳ карда шавад, фарқ ба суммаи ҳамаи ададҳои катакҳои аз катаки k пештара мувофиқ баробар аст, яъне исбот мекунад, ки

$$q^k - 1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{k-1} \quad \text{аст.}$$

Боби V. Элементҳои назарияи эҳтимолият ва статистикаи математикӣ.

§ 34. ҲОДИСАҲО

Назарияи эҳтимолият ва статистикаи математикӣ фанест, ки алоқаи қонунҳои байни ҳодисаҳои тасодуфӣ ва истифодаи хулосаҳои аз онҳо ҳосилшударо, барои ҳалли масъалаҳои амалӣ меомӯзад.

1.Ҳодисаҳои рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ ва тасодуфӣ.

Дар ҳаёт ҳодиса гуфта,ҷараёни дилхоҳи рӯй доданаш мумкин ё ки рӯй доданаш ғайри имконро меноманд.Ба ғайр аз ин таҷрибаҳои аз тарафи одамон гузаронидашуда ёки санҷишҳо, мушоҳидаҳо ва натиҷаҳои корҳои ченкунӣ ҳам ҳодисаҳо мебошад. Ҳамин ҳодисаҳоро ба ҳодисаҳои рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ ва тасодуфӣ ҷудо кардан мумкин аст.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда рӯй доданаш ғайри имкон аст, ***ҳодисаи рӯй доданаш ғайриимкон*** номида мешавад. Ба ҳодисаи рӯй доданаш ғайриимкон мисолҳо меорем:

1) оби кӯл дар +30 градус ях мекунад

2)ҳангоми партофтани куби бозии дар рӯяҳояш рақамҳои аз 1-то 6 -ро партофтан, пайдо шудани рақами 8.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда албатта ҳар дафъа рӯй медиҳад, ***ҳодисаи муқаррарӣ*** номида мешавад.Масалан: 1)баъд аз зимистон баҳор меояд 2) ҳангоми партофтани шаш хол албатта рақами аз 6 калон набуда (аз сифр фарққунанда) пайдо мешавад.

Ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда рӯй доданаш ҳам, рӯй надоданаш ҳам мумкин аст, ***ҳодисаҳои тасодуфӣ*** номида мешавад.

Ҳодисаҳои зерин ба ҳодисаҳои тасодуфӣ мисол шуда метавонад:

1)Адади аз байни ададҳои натуралии аз 1 то 50 тасодуфӣ интихоб шуда ба 7 тақсим мешавад; 2)тангаи партофташуда бо тарафи герб афтид.

2. Ҳодисаҳои якҷоя, рӯй доданаш мумкин ва дар якҷоягӣ набуда.

Ду ҳодисае, ки дар шароитҳои додашуда дар як вақт содир шуданаш мумкин аст, ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаш мумкин номида мешавад, ҳодисаҳои дар як вақт содирнашаванда ҳодисаҳои дар якҷоягӣ набуда номида мешавад.

Масалан,ҳодисаҳои "офтоб баромад" ва "рӯз хунук" ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаш мумкин ,ҳодисаҳои "офтоб фурӯ рафт" ва "офтоб баромад" ҳодисаҳои дар якҷогӣ набуда мебошад. Ҳодисаҳои зерини ба шашхол вобастаро дида мебароем:1) омадани 3 хол; 2) омадани 4 хол; холи ба се каратӣ 3) омадани аз 3 хол зиёд афтид 4) омадани холи ба се каратӣ. Аз байни ин ҳодисаҳо се ҷуфти зерин ҳодисаҳои якҷоя рӯй доданаш мумкин: 1- ва 4- (адади 3 ба 3 каратӣ аст); 3- ва 4- (4 хол аз 3хол калон аст); 3- ва 4- (масалан ,6 хол). Ҳодисаҳои зерин ҳодисаҳои дар якҷоягӣ набуда мебошад; 1 ва 2 (дар як вақт омадани дуто адади гуногун мумкин нест); 1 ва 3 (холи аз 3 калон ,яъне холҳои 4,5,6 бо холи 3 дар як вақт намеояд); 2 ва 4 (адади 4 ба 3 каратӣ намебошад).

3. Ҳодисаҳои баробар имконият.

Мисолҳоро дар гурухи ҳодисаҳо бо таври зерин дида мебароем:

тарафи герб *тарафи рақам*

Расми 89

1) ҳангоми як маротиба партофтани танга тарафи "рақам"омадани танга ва тарафи "герб" омадани танга

2) ҳангоми як маротиба партофтани шашхол омадани "1 хол", омадани "2 хол",..., омадани "6 хол"

3) ҳангоми партофтани куби, як рӯяаш кабуд,рӯяҳои боқимондааш сурх рангкардашуда, боло афтодани рӯяи"кабуд" рангкардашуда ва рӯяи "сурх" рангкардашуда.

4) Аз даруни қуттии дар дохилаш 10-то кураи сафед ва якто сиёҳ дошта ҳангоми гирифтани якто кура "кураи сафед" ёки "кураи сиёҳ" буданаш дар мисолҳои 1- ва 2- барои рӯй додани ҳодисаҳо дар якаш нисбат ба дигараш ягон гуна бартарӣ дида намешавад (танга ва куб дуруст бошад албатта). Ин гуна ҳодисаҳои баробар имконият ном дорад. Дар мисолҳои 3- ва 4- ба ҳодисаҳои баробар имконият надошта мисолҳо оварда шудааст. Дар ҳақиқат ҳам 5 рӯяи куби рангкардашуда сурх ва як рӯяш сиёҳ аст пас имконияти омадани рӯяи сурх нисбат ба рӯяи сиёҳ бисёртар аст. Монанди ҳамин гирифтани кураҳои сафед нисбат ба кураи сиёҳ зиёдтар аст.

Машқҳо

Дар машқҳо шартҳо ва ҳодисаҳои бо ин шартҳо рӯйдиҳанда тасвир карда шудааст. Барои ҳар як ҳодиса (шифоҳӣ) рӯй доданаш ғайриимкон, муқаррарӣ тасодуфӣ буданаш муайян карда шавад **(452–456):**

452. Аз хонандагони мактаб: 1) номи дутояш як хел; 2) қади ҳаммааш як хел.

453. Китоби дарсии алгебраро тасодуфӣ кушода, дар саҳифаи тарафи рост калимаи сеюм интихоб карда шуд ин калима: 1) калимаи "эҳтимолият" 2) бо ишораи "!" сар мешавад.

454. Аз рӯйхати хонандагони синфи 9 (дар ин рӯйхат духтарон ҳам писарон ҳай аст) як хонанда интихоб карда шуд: 1) ӯ духтар бача; 2) хонандаи интихобшуда 16 сола; 3) хонандаи интихобшуда 15 моҳа; 4) синни соли ин хонанда аз 3 калон.

455. Имрӯз дар Самарқанд барометр фишори нормалии атмосфераро нишон дода истодааст.Дар ин ҳолат: 1) оби дар дег будаи аҳолии Самарқанд дар $t = 70°C$ меҷӯшад; 2) ҳарорати ҳаво $-5°C$ паст шавад,оби дар кӯлмак буда ях мекунад.

456. Дуто куби бозӣ партофта шуд: 1) дар куби якум 4 хол омад ва дар куби дуюм 6 хол омад; 2) ҳосили ҷамъи холҳои ду куб ба 1 баробар; 3) ҳосили ҷамъи холҳои ду куб ба 4 баробар; 4) холҳои омадаи ҳар ду куб ба 5 баробар; 5) ҳосили ҷамъи холҳои омадаи ду куб аз 12 калон нест.

Аз ҳодисаҳои додашуда ҷуфти ҳодисаҳои дар якҷоягӣ рӯй доданаш мумкин ва кадомҳояш дар якҷоягӣ набуда мебошад, нишон диҳед (**457–459**):

457. Дар бозии шашкаи Саодат ва Шухрат бозӣ карда : 1) Саодат ғалаба кард; Шухрат бозиро бой дод; 2) Саодат бой дод; Шухрат бой дод.

458. Куби бозӣ партофта шуд. Рӯяи болоии он:1)холи 5; 2) холи 3 3)холи 1; холи токро нишон дод.

459. Аз тудаи домино як дона домино гирифта шуд ,дар ин ҳол :1) яке аз ададҳои он аз 4 калон,дуюмаш ба 6 баробар; 2) яке аз ададҳо аз 5 хурд нест,дуюмаш аз 5 калон нест 3) яке аз ададҳо ба 5,ҳосили ҷамъи ду адад ба 12 баробар; 4) ҳар ду адад аз 4 калон ,ҳосили ҷамъи ададҳо аз 9 калон намебошад.

460. Аз ҳодисаҳои: 1) „барф борида истодааст“; 2) „ҳаво соф" 3) „ҳарорати ҳаво +37°С“ ҷуфти ҳодисаҳои имконпазирро тартиб дода ,аз байни онҳо ҳодисаҳои дар якҷоягӣ рӯй доданаш мумкин ва дар якҷоягӣ набударо муайян кунед.

461. Аз ҳодисаҳои зерин: 1) „баҳор омад“; 2) „мувофиқи ҷадвали дарсӣ 6 то дарс мешавад"; 3) „имрӯз 1-январ“; 4) „ҳарорати ҳавои Тошканд +40°С“ ҷуфти ҳодисаҳои имконпазирро тартибдода ,аз байни онҳо ҳодисаҳои дар якҷоғӣ рӯй доданаш мумкин ва дар якҷоғӣ рӯй доданаш мумкин набударо муайян кунед.

462. Аз 4-то қуттии гугурт яктояш холи аст .Бо тарзи тасодуфӣ яке аз қуттиҳои гугурт интихоб карда шуд.Оё ҳодисаҳои "Қуттии гугурти дарунхолӣ"ва "Қуттии гугурти дарунхолӣ не" ҳодисаҳои баробар имконият шуда метавонанд ё не ?

463. 1)1 то рӯяи; 2) 2 то рӯяи куби бозӣ бо ранги сабз ва рӯяҳои боқимонда бо ранги сурх ранг карда шуд.Ҳодисаҳои омадани "рӯяи ранги сабз " дошта ва "рӯяи ранги сурх" дошта оё ҳодисаҳои баробар имконият шуда метавонад ё не?

464. 6-то кураи сафед, 6-то кураи сурх,6-то кураи кабуд,6-то кураи зарди аз як то шаш номеронида шударо ба як халта андохта, омехта карда шуд .Аз даруни халта тасодуфан якто кура гирифта шуд. Оё ҳодисаҳои зерин баробар имконият шуда метавонад.

1) „ кураи сафеди интихобшуда “ ва „кураи кабуди интихобшуда“; 2) „рақами кураи интихобшуда 5“ ва „рақами кураи интихобшуда 4“; 3) „кураи интихобшуда сурх ва рақамаш 2“ ва „ кураи интихобшуда зард ва рақамаш 6“; 4) „кураи интихобшуда сурх“ ва „кураи интихобшуда сурх нест“; 5) рақами "кураи интихобшуда аз 2 калон не" ва "рақами кураи интихобшуда аз 2 калон"?

§ 35. ЭҲТИМОЛИЯТИ ҲОДИСАҲО

Дар ҳаёт ҳангоми дучоршавӣ ба ҳодисаҳои гуногун,дар бисёр ҳолат ба дараҷаи боваринокии рӯй додани ин ҳодисаҳо баҳо медиҳем. Дар ин ҳол оид ба баъзе "ҳодисаҳо" ин хел шуданаш мумкин нест гӯем оид ба ҳодисаҳои дигар "ин албатта рӯй медиҳад" ёки "барои рӯй додани ин ҳодиса боварӣ калон аст" мегӯем.Баҳодиҳи ба дараҷаи боваринокии рӯй додани ҳодиса ба мафҳуми эҳтимолӣ вобаста аст. Дар як қатор мактубҳои ба якдигар навиштаи олимони франсавии асри XVII Блез Паскал (1623–1662) ва Пйер Ферма (1601–1665) якумин бор мулоҳизаронии умумии ҳалли масъалаҳои ба эҳтимолият вобаста пайдо шуда буд. Блез Паскал дар мактуби 28 октябри соли 1654 ба Пйер Ферма навиштааш чунин мулоҳиза рондааст:"Бозингар ҳангоми кубро (шашхол) партофтан омадани кадом ададро намедонад,лекин ба имкониятҳои баробардоштани ададҳои 1, 2, 3, 4, 5 ва 6 ро медонад. Ба ғайр аз ин,бозингар дар натиҷаи таҷриба (партофтани куб) омадани яке аз адаҳои додашударо ва он ҳодисаи муқаррарӣ буданашро низ медонад. Агар мо имконияти содиршавии ҳодисаи муқаррарӣ 1 гуфта қабул кунем, дар ин ҳол омадани яке аз ин ададҳо масалан, (омадани 6 монанди ҳамин дигар ададҳо ҳам) 6 баробар хурд мешавад, яъне ба $\frac{1}{6}$ баробар мешавад.

Имконияти бо муввафақият рӯй додани ин ё он ҳодисаро математикҳо эҳтимолияти ҳодиса гуфта ном гузоштанд ва мувофиқ бо ҳарфи якуми калимаи лотинии *probabilitas*– эҳтимолият *P* ишора мекунад.Агар бо ҳодисаи *A* ҳангоми як маротиба партофтани куби бозӣ "омадани холи 5" -ро ишора кунем, дар ин ҳол эҳтимолияти ҳодисаи *A*-ро бо *P(A)* ишора кардашуда бо намуди $P(A)=\frac{1}{6}$ навишташуда ва эҳтимолияти ҳодиса ба $\frac{1}{6}$ баробар аст гуфта хонда мешавад.

Масъалаи 1. Ба карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 20 навишта шудааст(ба ҳар як карточка яктогӣ адад) карточкаҳо ба рӯи стол чаппа карда монда шуда, омехта карда шуд. Эҳтимолияти адади 7 будани карточкаи тасодуфан гирифташударо муайян кунед. Аз сабаби шумораи карточкаҳо 20-то буданаш ва ба ҳар як карточка ададҳои аз 1 то 20 як маротиба навишта шуданаш дар натиҷаи интихоб 20-то ҳодисаҳои баробаримконият рӯй доданаш мумкин аст(натиҷаи таҷриба):

1) баромадани адади 1;

2) баромадани адади 2; ... 20) баромадани адади 20. Дар ин ҷо "баромадани ягон адад" ҳодисаи муқаррарӣ.Эҳтимолияти ин ҳодисаи муқаррарӣ ба 1 баробар ва эҳтимолияти ҳодисаи *A*"баромадани адади 7" 20 маротиба хурд,яъне $P(A)=\frac{1}{20}$.

Ҷавоб: $\frac{1}{20}$ ▲.

Ба ғайр аз ҳодисаи элементарии дар боло додашуда, ҳодисаҳои мураккабтарро низ омӯхтан мумкин аст.

Масалан: Дар масъалаи 1 ёфтани эҳтимолияти адади содда будани карточкаи интихобшуда лозим бошад,адади *A* – "баромадани адаи соддаи аз 20 калон набуда"-ро дида мебароем. Ин ҳодиса дар 8 -то ҳолат содир мешавад-яъне ҳангоми баромадани ягонто ададҳои соддаи 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ин натиҷаҳо барои ҳодисаи *A* имкониятҳои мақбул пайдокунанда номида мешавад. Аз даруни ҳамаи натиҷаҳои имконпазир (онҳо 20-то) 8 тояш имкониятҳои мақбул пайдокунанда аст. Аз ҳамин сабаб эҳтимолияти ҳодисаи *A*

$$P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}.$$

Аз рӯи додани ҳодисаи *A ғайриимкон бошад ,дар инҳол натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул мавҷуд нест, яъне* $m=0$. Пас, дар ин ҳол $P(A)=\frac{0}{n}=0.$

Агар дар ягон таҷриба имконияти ба n-то баробар имконият бо якдигар ҷуфт-ҷуфт дар якҷояғӣ набуда натиҷа мавҷуд буда аз онҳо m-тояш барои ҳодисаи А имконияти мақбул пайдо кунанда бошад, дар ин ҳол нисбати $\frac{m}{n}$ эҳтимолияти содир шудани ҳодисаи А номида мешавад ва чунин навишта мешавад

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Масъалаи 2. Ҳангоми як маротиба партофтани куби бозӣ эҳтимолияти омадани адади тоқро ёбед:

Барои ҳодисаи А – „баромадани холи тоқ" 3 то натиҷаи (баромадани холи 1,баромадани холи 3 ва баромадани холи 5) пайдокунандаи мақбул мавҷуд аст, яъне $m = 3$. Шумораи натиҷаҳои баробар имконият бошад $n = 6$ аст, аз ҳамин сабаб

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{2}$. ▲

Масъалаи 3. Дар қуттӣ 6 дона кураи сурх ва 4 дона кураи кабуд ҳаст. Яке аз онҳоро тасодуфан интихоб намуда аз қуттӣ гирифтанд. Эҳтимолияти кураи гирифташуда сурх буданашро ёбед.

△ 10 то натиҷаҳои баробар имконияти таҷриба мавҷуд аст: гирифтани кураи 1, гирифтани кураи 2, ..., гирифтани кураи 10, яъне $n = 10$. Дигар адади натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул бошад $m = 6$ аст. Аз ҳамин сабаб

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ҷавоб: $\frac{3}{5}$. ▲

Оид ба эҳтимолияти ҳодисаҳои муқаррарӣ ғайриимкон ва ҳодисаҳои тасодуфи дар асоси формулаи (1) зеринро гуфтан мумкин. Агар ҳодисаи *A* ҳодисаи муқаррар рӯйдиҳанда бошад дар ин ҳол ҳамаи натиҷаҳо барои он пайдокунандаи мақбул мешавад, яъне $m = n$. Дар ин ҳол $P(A) = \frac{m}{n} = 1.$

Агар ҳодисаи А ҳодисаи тасодуфӣ бошад ,дар ин ҳол барои натиҷаҳои пайдокунандаи мақбул шарти $0 < m < n$ иҷро мешавад.Аз ҳамин сабаб дар ин ҳолатҳо $0 < P(A) = \frac{m}{n} < 1$.

Машқҳо

465. Ҳодисаҳои баробар имконияти элементарии рӯй доданаш мумкин будаи ҳолатҳои дар поён овардашударо шуморед: 1) партофтани танга; 2) партофтани шашхол; 3) партофтани тетраэдри рӯяҳояш ранги сафед, сурх, зард ва кабуд дошта; 4) чархзанондани стрелкаи рулеткаи сатҳаш ба 6 сектори бо ҳарфҳои *A, B, C, D, E* ва *F* ишора кардашуда.

466. Аз комплекти пурраи бозии домино як донааш тасодуфӣ гирифта шуд.Эҳтимолияти:
1) ададҳои 6 ва 5; 2) ададҳои 0 ва 1; 3) ададҳои якхела; 4) ададҳои гуногун будаи ин донаро ёбед.

467. Дар қутти 4 дона кураи сурх ва 5дона кураи кабуд ҳаст. Тасодуфан як кура гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) сурх;
2) кабуд; 3) сабз; 4) сурх ё кабуд будани кураро ёбед?

468. Дар қутти кураи 3 то кабуд, 4 то зард,5 то сурх ҳаст.Тасодуфан як кура гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) кабуд; 2) зард; 3)сурх; 4) кабуд набудани; 5) зард набудани; 6) сурх набудани кураҳоро ёбед.

469. Дар карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 12 навишта шудааст (бар ҳар як карточка яктоги адад) карточкаҳо ба стол чаппа карда гузошта шуда омехта карда шуд. Эҳтимолияти дар карточкаи тасодуфан гирифташуда:
1) адади 5; 2) адади ҷуфт; 3) адади ба 3 каратӣ ; 4) адади ба 4 каратӣ; 5) адади ба 5 тақсимшаванда ; 6) адади содда чӣ гуна аст?

470. Нигора ду рақами охирини телефони дугонаашро аз хотир фаромӯш карда, онро тахминан чинд. Эҳтимолияти ба телефони дугонааш занг задани Нигора чи гуна аст?

471. Дар1000 то лоторея 30 донааш бурднок мебошад. Якто лоторея харид карда шуд. Эҳтимолияти лотореяи харидшуда:
1) бурднок; 2) бурднок набуданаш чӣ гуна аст?

472. Талаба дар вақти тайёри ба имтиҳон аз 30 билет ба яктояш тайёрӣ дида натавонист. Эҳтимолияти дар имтиҳон афтодани билети тайёрӣ дидаи талабаро ёбед.

473. Ҳангоми 6 маротиба партофтани танга ҳар дафъа бо тарафи герб афтид.Танга боз як бори дигар партофта шавад, эҳтимолияти бо тарафи герб афтодани танга ба чӣ баробар аст?

474. Аз дастаи картаҳои 52-тагӣ як карта бо таври тасодуфӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти 1) шаш хиштин; 2) ҳашт; 3) валети ранги сурх дошта; 4) чиллики ададии рангин; 5) хиштини адади тоқи ранг дошта

§ 36. БАСОМАДИ НИСБИИ ҲОДИСАҲОИ ТАСОДУФӢ

Таърифи дар параграфи гузашта ба эҳтимолият додашуда,таърифи классикии эҳтимолият номида мешавад.Таърифи классикӣ, албатта гузаронидани санҷиш ёки таҷрибаро талаб намекунад.Натиҷаи баробар имкониятӣ ва пайдокунии мақбул ҳодисаҳоро аз ҷиҳати назариявӣ муайян мекунад.

Мувофиқи ин таъриф адади натиҷаҳои баробаримконияти элементарии таҷриба охирнок буда бо адади муайян ифода карда мешавад. Лекин дар амалиёт, яъне дар табиатшиносӣ, иқтисод, тиббиёт,дар истеҳсолот ва соҳаҳои дигар ҳангоми омӯхтани ҷараёнҳои тасодуфӣ тез-тез чунин санҷишҳо ёки таҷрибаҳо дучор мешавад,ки адади натиҷаҳои дар онҳо мумкин бударо аз бар намудан бо дараҷаи ғайриимкон зиёд аст. Дар як қатор ҳолатҳои дигар то таҷрибаҳоро дар амал нагузаронидан муайян кардани баробар имконият будани натиҷаҳо душвор ёки номумкин аст. Масалан фирма қисми зиёди лампочкаҳои истеҳсолкардаашро насанҷида "бенуқсон ёки нуқсондор "баробаримкон буданаш ёки набуданашро тасаввур кардан душвор аст. Аз ҳамин сабаб бо баробари таърифи классикии эҳтимолият дар амалиёт аз таърифи статистикии эҳтимолият низ истифода мебаранд. Барои бо ин таъриф шинос шудан,дохил кардани мафҳуми басомади нисбӣ лозим мебошад.

Дар таҷрибаҳои Бюффрон ва Пирсон гузаронида басомадҳои нисбии ҳосилшуда ба 0,5 хеле наздик мебошад. Пас, эҳтимолияти статистикии партофтани танга ба 0,5 баробар аст.

Дар қатори таҷрибаҳои додашуда басомади нисбии ҳодисаи *A* гуфта нисбати адади рӯй додани ин ҳодиса *M* ба адади ҳамаи таҷрибаҳои гузаронидашуда *N-ро меноманд.* Дар ин ҷо адади *M* *басомади ҳодисаи A номида мешавад.*

Басомади нисбии ҳодисаи A бо $W(A)$ ишора карда мешавад. Дар ин ҳол мувофиқи таъриф

$$W(A) = \frac{M}{N}. \tag{1}$$

Масъалаи 1. Дар синф 30 хонанда таҳсил мегирад.Аз кори назорати 6 хонанда баҳои "5" гирифтанд.Басомади нисби баҳои аълои кори назоратии гирифташударо ёбед.

△ *Ҳодисаи A* – „гирифтани баҳои 5"бошад ин ҳодиса 6 маротиба содир шуд,яъне $M = 6$. Адади таҷрибаҳои умумӣ $N = 30$,аз ҳамин сабаб:

$$W(A) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}.$$

Ҷавоб: $\frac{1}{5}$. ▲

Тадқиқотчии франсавӣ Бюффон(1707–1788) дар натиҷаи тангаро 4 040 марта партофтан, дар 2 048 ҳолат бо тарафи герб афтидааст. Пас, дар ин ҳол басомади нисбии афтидани герб ба $W(A) = \frac{2\,048}{4\,040} \approx 0,5069$ баробар аст. Математики англис Карл Пирсон дар натиҷаи тангаро 24 000 маротиба партофтан 12 012 маротиба тарафи герб афтодааст. Пас дар таҷрибаи ин танга партоӣ басомади нисбии афтидани герб ба $W(A) = \frac{12\,012}{24\,000} = 0,5005$ баробар аст. Натиҷаи ин ду ҳолатро муқоиса кунем, қимати басомади нисбӣ умуман гирем, дар таҷрибаҳои муайян вобаста ба адади онҳо тағйир ёфтанаш мумкин.

Лекин хосияти асосии басомади нисбии ҳодисаи тасодуфӣ аз он иборат аст, ки шумораи таҷрибаҳо чӣ қадаре, ки зиёд шавад,басомади нисбӣ торафт барқарор шуда, дар атрофи ягон гуна адад лаппида меистад. Ин адад ба сифати эҳтимолияти статистикии ҳодисаи тасодуфӣ қабул карда мешавад. Масалан, ҳангоми тангапартоӣ ин адад ба 0,5, яъне

Бо мақсади омӯхтани ҷараёнҳои гуногуни монанди тангапартоӣ аз тарафи тадқиқотчиён таҷрибаҳои зиёд гузаронида шуда ва дар асоси натиҷаҳои онҳо математики швесариягӣ Якоб Бернулли (1654–1705) қонуни ададҳои калонро асоснок карда додааст.

Ҳангоми адади таҷрибаҳо калон будан басомади нисбии ҳодиса $W(A)$ аз эҳтимолияти ин ҳодиса $P(A)$ *аз ҷиҳати амалӣ фарқ намекунад,яъне дар таҷрибаҳои ададаш калон тасдиқи* $P(A) = W(A)$-ро муқаррар гуфта ҳисоб кардан мумкин аст.

Масъалаи 2. Дар яке аз мамлакатҳо дар бораи сайёҳони хориҷӣ ва сайёҳони дар дохилӣ мамлакат сайёҳат карда (шаҳрвандони мамлакат) маълумотҳои зерин дода шуда бошад:

Солҳо	Шумораи умумии сайёҳон	
	Шумораи сайёҳони хориҷӣ	Сайёҳони дохилӣ
2014	610 623	403 989
2015	746 224	348 953
2016	822 558	316 897
2017	774 262	346 103
2018	811 314	351 028

Басомади нисбии адади шаҳрвандони дар дохилӣ мамлакат сайёҳат кардаро дар солҳои додашуда ёбед. Адади сайёҳони дар дохилӣ малакат сайёҳат карда:

M= 403 989 + 348 953 + 316 897 + 346 103 + 351 028 = 1 766 970, адади сайёҳони хориҷӣ : 610 623 + 746 224 + 822 558 + 774 262+ 811 314 = = 3 764 981.

Адади умумии сайёҳон: N = 1 766 970+3 764 981=5 531 951.

Дар ин ҳол,

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1\,766\,970}{5\,531\,951} \approx \mathbf{0,3194.}$$

Ҷавоб: $W \approx 0,3194$.

Машқҳо

475. Сутуни охирини ҷадвалро пур кунед:

Тартиби рақам	Таҷриба	Адади таҷрибаҳо (*N*)	Ҳодисаи А	*басомади ҳодисаи А*	*басомади нисбии ҳодисаи А* $\left(W(A)=\frac{M}{N}\right)$
1	Партофтани танга	150	омадани тарафи рақамдор	78	
2	Тирпарронӣ бо камон	200	расидан ба нишон	182	
3	Партофтани шашхол	400	афтоданаи 4	67	

476. Дар яке шаҳрҳо аз 920-то фуқаро бакор 350- тояш бо машина, 420-тояш бо транспорти ҷамоа, 80 -тояш бо велосипед, 70-тояш пиёда рафтанаш маълум бошад. Басомади нисбии адади 1) бо машина; 2) бо транспорти ҷамоа ; 3) бо велосипед; 4) пиёда мерафтагонро ёбед.

477. Аз 5 000дона диски сахтӣ тайёркардашуда 70 донааш нуқсондор баромад. Басомади нисбии диски нуқсондор баромаданро ёбед ва бо фоиз ифода кунед.

478. Гурӯҳи баскетболчиёни ҷавон машқи ба ҳалқа партофтани тӯбро гузаронидан. Натиҷаҳо дарҷадвали зерин дода шудааст:

Тӯби ба ҳалқа ҳаводода шуда (*N*)	10	50	100	250	500
Басомади тубҳои ба сабад афтода (*M*)	6	32	68	155	320
Басомади нисбии тӯбҳои ба ҳалқа афтода (*W*)					

Сатри охирини ҷадвалро пур кунед. Эҳтимолияти тӯбҳои ба ҳалқа афтода *P*-ро ёбед ва доир ба қимати он чӣ гуфтан мумкин аст. (то даҳяки яклухт кунед)?

§ 37 МИҚДОРҲОИ ТАСОДУФӢ

Фане ки барои ғун кардани маълумотҳо оид ба миқдорҳои тасодуфи, гурӯҳонидан, тасвири аёнии маълумотҳоро бо воситаи ҷадвалҳо, диаграммаҳо, графикҳо ва дигар намудҳо инчунин бо таҳлили ин маълумотҳо машғул мешавад статистика мебошад. Миқдори тасодуфӣ гуфта, бузургиеро меноманд, ки дар давоми мушоҳида ва гузаронидани таҷрибаҳо ба таври тасодуфӣ қабул кардани қиматҳои гуногун мумкин аст, меноманд. Оид ба ин гуна миқдорҳо қиматҳои онҳо ба тасодиф вобаста аст гуфта метавонем.

Миқдори тасодуфӣ гуфта, бузургиеро меноманд, ки дар давоми гузаронидани мушоҳида ва гузаронидани таҷрибаҳо бо таври тасодуфӣ қабул кардани қиматҳои гуногун мумкин аст, меноманд. Оид ба ин гуна миқдорҳо, қиматҳои онҳо ба тасодуф вобаста аст, гуфта метавонем.

Масалан, адади заррачаҳои аз коинот ба ҳавлии мактаб афтода истода, адади зангҳои ба стансияҳои телефон омада истода,суръати молекулаҳои чойи дар пиёла буда,ҳангоми шашхолро партофтан омадани чӣ гуна рақам ва ғайриҳо ба миқдорҳои тасодуфӣ мисол шуда метавонад.

Масъалаи 1. Дуто куби бозӣ партофта шуд.Ҳосили ҷамъи чи гуна холҳои аз ду куб афтода ба эҳтимолияти аз ҳама калонтарин соҳиб буданашро муайян кардан мумкин-мӣ?

Эҳтимолияти пайдошавии ҳар як ҳосили ҷамъро меёбем. Адади натиҷаҳои умумӣ ин адади ҳамаи ҷамъҳои аз партофтани ду куб ҳосилшуда ба $6 \cdot 6 = 36$ баробар аст. Ҷадвали холҳои ҷамъшударо тартиб медиҳем:

куби 1	куби 2					
	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Бо воситаи ҷадвал барои ҳар як ҷамъи муайян адади пайдокунии натиҷаҳои мақбул m-ро $m_2 = m_{12}=1$, $m_3 = m_{11} = 2$, $m_4 = m_{10} = 3$,

$$m_5 = m_9 = 4, \ m_6 = m_8 = 5, \ m_7 = 6.$$

Эҳтимолияти ин ё он ҷамъи холҳо ,ки дар вақти партофтани ду куб ҳосил мешавад ба намуди ҷадвали зерин ифода кардан мукин аст:

Ҷамъи холҳо	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Эҳтимолият $\left(p=\frac{m}{n}\right)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Аз ҷадвал ҳосили ҷамъи холҳо ба 7 баробар бошад ба эҳтимолияти калон $-\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ баробар буданаш аён аст.

Ҷавоб: ба эҳтимолияти калонтарин ҳосили ҷамъи холҳои ба 7 баробар соҳиб аст.

Дар масъалаи 1 ҳосили ҷамъи ҳалҳои ду куби партофташуда -миқдори тасодуфӣ аст. Онро бо воситаи X ишора кунем. Дар ин ҳол ададҳои $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, ..., $X_{10} = 11$, $X_{11} = 12$ қиматҳои миқдори тасодуфии X мебошад. Дар ҷадвали зерин ба ҳар як қимати X қиматҳои мувофиқи P_1, P_2, ..., P_{10}, P_{11} оварда шудааст

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Бо ёрии ин ҷадвал,ба саволҳои масалан миқдори *X бо эҳтимолияти яккхела чӣ гуна қиматро қабул мекунад;* кадом қимати миқдори X бо эҳтимолияти калон пайдо мешавад бо осонӣ ҷавоб ёфтан мумкин аст. Ин ҷадвалро *ҷадвали тақсимоти* аз рӯи эҳтимолияти миқдори тасодуфии X, иборат аз ҳосили ҷамъи холҳои ду кубики партофташуда мебошад, мегӯянд.

Қиматҳои миҷдори тасодуфии X ва ифодакунандаи ҷадвали эҳтимолияти қабулкунии ҳар як қимат ҷадвали тақсимот оид ба эҳтимолияти миқдори тасодуфӣ номида мешавад.

Ҷадвалҳои тақсимот оид ба эҳтимолият, дар асоси натиҷаҳои ҳисобкунии эҳтимолият аз ҷиҳати назариявӣ тартиб дода мешавад.Дар амалиёт, баъд аз гузаронидани таҷрибаҳои ҳақиқӣ ,ҷадвалҳои тақсимоти оид ба басомад ёки басомади нисбӣ тартиб дода мешавад. Баъд, барои аниқтар шудан, ҷадвали тақсимотҳо ба намуди диаграмма ёки полигони басомадҳо тасвир карда мешавад. Шумо дар курси "Алгебра"-и синфи 8 бо воситаи тасвири маълумотҳо бо ёрии диаграмма ва полигони басомадҳо шинос шуда будед.

Масъалаи 2. Барои омӯхтани шумораи ходимони дар 36 компания меҳнат карда истода аз ин компанияҳо маълумотҳо ҷамъ карда шуд ва он ба ҷадвали зерин дохил карда шуд:

23	30	24	25	30	24
32	33	31	31	25	33
23	30	29	24	33	30
26	29	27	29	26	28
29	30	27	30	28	32
31	27	30	27	33	28

Ин маълумотҳоро 1) дар ҷадвали тақсимотии басомадҳо (M) ва басомади нисби (W) ;2) бо ёрии полигони басомадҳо тасвир кунед.

△ 1) Аз ҷадвал дида мешавад, ки шумораи ходимонро бо X ишора кунем,микдори тасодуфӣ мешавад. Бевосита ҷадвалро омӯхта ин микдори тасодуфӣ қиматҳои аз 23 то 33 қабул карданашро мебинем ва ин ададҳо дар ҷадвал чанд маротиба такрор шуданашро шуморида, аз рӯи басомадҳо ҷадвал тартиб медиҳем:

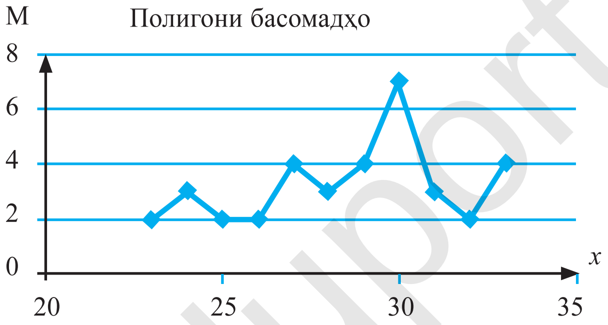
X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
M	2	3	2	2	4	3	4	7	3	2	4

Ҳар як басомадҳоро бо адади компанияҳо $N = 36$ тақсим карда,ҷадвали тақсимотро оид ба басомади нисбӣ ҳосил мекунем:

X	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$W = \frac{M}{N}$	0,06	0,08	0,06	0,06	0,11	0,08	0,11	0,19	0,08	0,06	0,11

Дар ин ҷо ҳосили ҷамъи басомадҳо ба $N = 36$ ва ҳосили ҷамъи басомадҳои нисбӣ ба 1 баробар буданашро ёдоварӣ мекунем

2) Полигони басомадҳои адади ходимҳои компанияро дар расми 90 дидан мумкин аст:



Расми 90.

Ҳосили ҷамъи ҳамаи қиматҳои ягон миқдорро ёфтани шавем аз аломати ∑-и аз тарафи Эйлер дохилкардашуда истифода мебарем. Масалан,агар басомади М қиматҳои M_1,M_2,...,$M_к$ -ро қабул кунад,дар ин ҳол аз ишораткунии зерин истифода мебарем:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_k = \sum M.$$

Ҳосили ҷамъи ҳамаи басомадҳои миқдорҳои тасодуфӣ ба адади таҷрибаҳо N баробар аст:

$$\sum M = N.$$

Барои ҳар гуна миқдори тасодуфӣ ҳосили ҷамъи басомадҳои нисбии он ба 1 баробар аст

$$\sum W = \sum\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M_1}{N} + \frac{M_2}{N} + \ldots + \frac{M_k}{N} =$$
$$= \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}{N} = \frac{\Sigma M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Миқдорҳои тасодуфии дар ин параграф додашуда қиматҳои аз якдигар чудокардашударо қабул мекунад ин гуна миқдорҳо миқдорҳои дискрет (аз калимаи лотинии *dickretus* – чудокардашуда,кандашуда) номида мешавад.

Агар миқдори тасодуфӣ ҳамаи қиматҳои ягон фосиларо қабул кунад,он гоҳ ин гуна миқдор миқдори тасодуфии бефосила номида мешавад.Ба миқдорҳои тасодуфии бефосила ҳамчун ба сифати мисол таъғирёбии ҳаво, вақти сарфшудаи аз хона ба мактаб рафтан, дарозии дарахти сафедори сабзида истода ,вақти омадани автобуси дар истгоҳ интизор буда ва ғайраҳоро овардан мумкин аст.

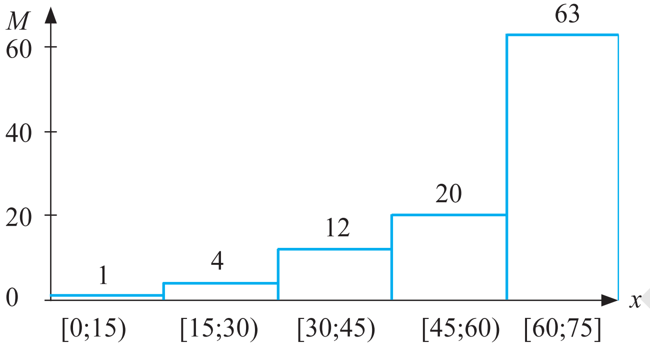
Миқдорҳои тасодуфии бефосила қиматҳои зиёди беохир қабул кунад ҳам , тақсимоти онҳоро додан мумкин аст. Барои ин фосилаи тағйирёбии қиматҳои миқдори бефосила ба қисмҳо чудо карда мешавад ва бузургии тасодуфии ба ҳар як қисм афтида ҳисоб карда мешавад.

Масалан.Хонанда 100 рӯз дар зали спортӣ буда ҳар сафар барои машқи спортӣ аз 1 соату 15 дақиқа вақти зиёд сарф накардаашро навиштааст. Дар ин ҳолат вақти сарфшуда бо дақиқа дар фосилаи [0;75] будагиашро ба назар гирифта, ин фосиларо ,масалан ба 5-то фосилаҳои баробари вақт чудо карда ,вақтҳои ба машқҳои спортӣ сарфшударо ба чадвали басомадҳо дохил кардан мумкин аст.

T (дақиқа)	[0; 15)	[15; 30)	[30; 45)	[45; 60)	[60; 75]
M	1	4	12	20	63

Бевосита ҳосили чамъи басомадҳоро ҳисоб карда, $\sum M = N = 100$ ҳосил кардан мумкин аст.

Маълумотҳои дар чадвал бударо ба намуди гистограммаи басомадҳо -шакли зинамонанд тасвир кардан мумкин аст.(расми 91).Дар ин чо дарозии асоси ҳар як зина *h бошад ,дар ин ҳол баландии сутун* $\frac{M}{h}$, дар ин чо *M басомади бузургии тасодуфии X* дар фосилаҳои мувофиқ аст. Пас,масоҳати ин гуна сутун ба $\frac{M}{h} \cdot h = M$ буда,масоҳати шакли таҳти гистограмма бошад, ба $\sum M = N$ баробар мешавад.

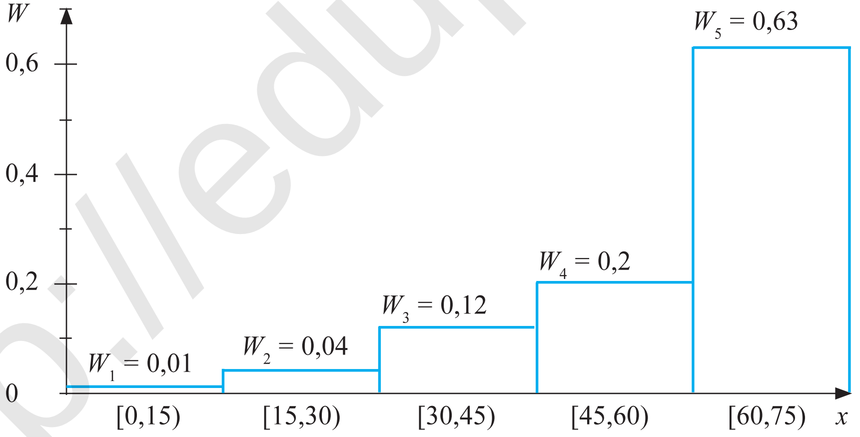


Расми 91.

Агар бо ёрии басомадҳо басомадҳои нисбӣ муайян карда шавад:

T (дақиқа)	[0;15)	[15;30)	[30;45)	[45;60)	[60;75]
$W = \frac{M}{N}$	0,01	0,04	0,12	0,2	0,63

дар ин ҳол шакли зинамонанди (расми 92) бо ёрии онҳо кашида шуда гистограммаи оид ба басомадҳои нисбии бузургии тасодуфӣ номида мешавад.



Расми 92.

Масоҳати зери ҳар як сутуни гистограммаи басомадҳои нисбӣ қимати мувофиқи W баробар мешавад.Дар ин ҳол масоҳати шакли зери гистограмма ба як баробар мешавад ($\sum W = 1$).

Машқҳо

479. 1) Дар куби оддии бозӣ; 2) куби дар ду рӯя 1 хол, дар ду рӯя 2 хол, дар ду рӯя 3 хол қайд кардашуда 3) куби дар се рӯя 1 хол,дар ду рӯя 2 хол ,дар як рӯя 3 хол қайд карда шуда; 4) куби дар ду рӯя 1хол,дар се рӯя 2 хол,дар як рӯя 3 хол қайд кардашуда дода шудааст. Ҷадвали тақсимотии дар асоси қиматҳои миқдори тасодуфии X эҳтимолиятҳои P*-и ҳангоми партофтани куб омадани "адади холҳо" тартиб диҳед.*

480. Дар стол ду танга партофта шуда истодааст. Агар "тарафи герб" афтад қимати ададии 0 ва агар "тарафи рақам" афтад қимати 1 медиҳем.Ҷадвали тақсимоти аз рӯи эҳтимолиятҳои P миқдори тасодуфии X ва суммаи ададии қиматҳои тангаҳои партофташуда тартиб диҳед.

481. Ду тетраэдри дар рӯяҳояш ададҳои 1,2,3,4 навишташуда дар як вақт ба стол партофта шуда истодааст,дар ин ҳол холҳои дар рӯяи ба стол расида истодаи ба ҳисоб гирифта мешавад. 1) ҳосили ҷамъи; 2) ҳосили зарби холҳои аз ду тетраэдр афтода ба эҳтимолияти калонтарин соҳиб буданашро муайян кардан мумкин-мӣ?

482. Ду куби бозӣ партофта шуд.Ҷадвали тақсимоти ҳосили зарби холҳои ду кубро ҳангоми партофтан омадаро аз рӯи эҳтимолиятҳо тартиб диҳед.

483. Соҳиби кафе дар давоми 50 рӯз ба ҷадвал бо мақсади дар вақти нонушта ба хӯрандагон дар вақташ хизмат расондан, дар ин вақт адади хизматчиёнро дуруст ба роҳ мондан ва харҷҳои барои тайёр кардани таомҳо сарфшударо дуруст ба нақша гирифтан, адади хӯрандагонро қайд карда рафт:

20	27	23	27	26	18	22	25	26	23
23	25	28	26	23	22	21	19	21	29
30	27	26	30	29	22	18	29	22	26
28	27	29	27	22	29	26	27	21	19
25	29	29	21	18	26	20	24	19	27

Бо ёрии ин ҷадвал адади шахсони хӯроки нисфирӯзи истеъмол кунандаи кафе- миқдори тасодуфии– *X оварда шудааст*:1) ҷадвали тақсимотро оид ба басомадҳо (M) ва басомадҳои нисбӣ(W) ; 2) полигони басомадҳоро тартиб диҳед.

484. Ҷадвали зерин адади духтарон ва писарони ба ҳавзаи обии пӯшида ,ки дар давоми 5-моҳ омаданд қайд карда шуда ,тартиб дода шуд:

Моҳ	Бачаҳои ба ҳавзаи оби омада	
	Дӯхтарон	Писарон
Апрел	311	357
Май	284	404
Июн	278	417
Июл	340	412
Август	322	406

Басомад,басомади нисбиро ёбед ва адади писарони ба ҳавзаи оби омада -миқдори тасодуфии *X-ро тартиб диҳед ва гистограммаи басомадҳоро тартиб диҳед.*

485. Ҷадвали тақсимотии оид ба басомадҳои миқдории тасодуфии *X ,ки қиматҳои номери телефонҳои рақамҳояш аз рақамҳои номери телефонҳои зерин иборат бударо тартиб диҳед*

1) 916 549 695, 939 749 596, 949 039 391, 913 229 296;

2) 945 539 391, 931 179 396, 913 749 193, 919 1494 94.

486. Полигони басомадҳо ва полигони басомадҳои нисбии миқдори тасодуфии X, ки бо тақсимоти зерин дода шудааст, ёбед:

1)

X	3	5	7	9	11
M	2	4	6	3	1

2)

X	6	7	9	10	12
M	5	4	7	3	6

487. Дар ҷадвал андозаи пойафзоли 16 нафар писарони синфи 9 оварда шудааст:

38	38	39	39	39	40	40	41
41	41	41	41	42	42	42	43

Ҷадвали тақсимоти оид ба басомадҳо ва басомадҳои нисбии миқдори тасодуфии x-андозаи пойафзоли писарони синфи 9-ро тартиб диҳед.

§ 38. ХАРАКТЕРИСТИКАИ АДАДИИ МИҚДОРҲОИ ТАСОДУФӢ

Шумо дар боби IV-уми ба таҳлили маълумотҳо бахшидашудаи курси "Алгебра"-и синфи 8 ба мафҳумҳои маҷмӯи холӣ,интихоб, қимати миёна, мода, медиана шинос шуда будед. Ин гуна мафҳумҳоро ба миқдорҳои тасодуфӣ ҳам дохил кардан мумкин аст.

Дар статистика ба сифати маҷмӯи маълумотҳо қиматҳои ададии миқдорҳои тасодуфӣ,басомадҳои онҳоро дар ҳолати ба эътибор гирифтан дида мешавад. Дар ин ҷо ҳамаи қиматҳои бузургии тасодуфӣ сармаҷмӯъ,ягон қисми интихоб кардашудаи ин маҷмӯъ бошад,интихоб номида мешавад. Интихоб интихоби репрезентатив номида мешавад,агар дар он қиматҳои бузургии тасодуфии дар сармаҷмӯъ ва фақат қиматҳои дар он буда иштирок кунад ва нисбати басомадҳои қиматҳо монанди сармаҷмӯъ бошад.

Мисол. Тақсимоти миқдори тасодуфии X бо басомадҳои M чунин дода шуда бошад:

X	– 3	5	9	11
M	5000	2000	7000	3000

ва ҳамаи қиматҳои миқдори тасодуфӣ (эътибор диҳед, адади онҳо 17000-то) ҳамчун сармаҷмӯъ қабул карда шуда бошад, сето интихоби дар боло додашударо дида мебароем:

Ҷадвали 1

X	–3	5	9	11
M	5	2	7	3

Ҷадвали 2

X	–3	9	11
M	5	7	3

Ҷадвали 3

X	–3	5	9	11
M	5	6	7	3

Интихоби тақсимоташ дар ҷадвали 1 додашуда интихоби репрезентатив мебошад,чунки дар он ҳам қиматҳои –3, 5, 9, 11 ва дар сармаҷмӯъ низ, инчунин нисбати басомадҳо дар сармаҷмӯъ ва дар интихоб низ як хел аст: 5 000 : 2 000 : 7 000 : 3 000 = 5 :2:7:3.

Интихоби тақсимоташ дар ҷадвали 2 додашуда интихоби репрезентатив намебошад,чунки дар он қимати ба 5 баробари миқдори тасодуфии X иштирок намекунад.

Интихоби тақсимоташ дар ҷадвали 3 додашуда низ интихоби репрезентатив намебошад,чунки дар нисбати басомадҳо нигоҳ дошта нашудааст: 5 000:2 000:7 000:3 000≠5:6:7:3.

Маълумотҳои додашударо,аз ҷумла,қиматҳои миқдори тасодуфиро баъзан бо як адад тавсиф ёки баҳо додан мумкин аст.Ин ададро ченаки тенденсияи марказии ададҳои дар таркиби маълумотҳо буда ёки қиматҳои миқдорҳои тасодуфӣ меноманд.Ба сифати ченакҳои тенденсияи марказӣ бо тариқи мисол мода,медиана ва қимати миёнаро овардан мумкин аст.

Қимати миқдори тасодуфии басомадаш калонтарин дар интихоби омӯхта шудаистода мода бо M_0 ишора карда мешавад.

Масалан, интихоб аз 8, 9, 2, 4, 8, 6, 3 иборат бошад,дар ин ҳол модаи он ба 8 баробар аст.

Модаи интихобӣ 5, 6, 11, 3, 3, 5 бошад, дуто мебошад – M_2= 3, M_2= 5.

Агар интихобӣ 1, 3, 7, 20, 6, 11-ро гирем ин мода надорад .

Агар қиматҳои интихобро бо тартиби афзуншавӣ навишта гирем, он гоҳ адади аз ҷиҳати шумора интихобро ба ду қисми баробар ҷудокунанда медиана номида мешавад ва бо M_e ишора карда мешавад.Агар дар интихобӣ ба тартиб даровардашуда шумораи додашудаҳо тоқ бошад, он гоҳ медианаи он ба адади дар мобайн истода баробар аст. Агар дар интихобӣ ба тартиб даровардашуда шумораи додашудаҳо ҷуфт бошад,он гоҳ медианаи он ба миёнаи арифметикии ду адади дар мобайн истода баробар аст.

Масъалаи 1. Медианаи интихобӣ қиматҳои миқдори тасодуфиро ёбед:

1) 8, 2, 0, 5, –5, 4, 8; 2) 8, 5, 3, 4, 7, 2.

△ 1) Элементҳои интихобро бо тартиби афзуншавӣ ҷойгир мекунем: – 5, 0, 2, 5, 4, 8, 8. Шумораи элементҳо тоқ.Аз адади 5 дар чап ва рост 3 тогӣ адад ҳаст,яъне 5 адади дар мобайн истода ,аз ҳамин сабаб M_e=5.

2) Элементҳои интихоб 8, 5, 3, 4, 7, 2-ро бо таври афзуншавӣ навишта мегирем: 2, 3, 4, 5, 7, 8. Шумораи элементҳо ҷуфт.Ададҳои дар мобайн ҷойгир шуда 4 ва 5,аз ҳамин сабаб $M_e = \frac{4+5}{2} = \mathbf{4,5.}$

Ҷавоб: 1) 5; 2) 4,5. ▲

Яке аз мафҳумҳое, ки барои омӯхтани интихоб аҳамияти калон дорад,ки мо дар синфи 8 шинос шуда будем, васеъгии интихоб мебошад. Васеъгии интихоб гуфта фарқи байни қиматҳои калонтарин ва хурдтарини миқдори тасодуфӣ номида мешавад ва бо ҳарфи R ишорат карда мешавад.

Васеъгии интихоб қиматҳои миқдори тасодуфӣ то чи андоза пароканда буданашро мефаҳмонад.

Мисол. Васеъгии интихобҳои 21, 27, 22, 8, 9, 15, 19, 21 ва 190, 187, 198, 189, 195, 190 -ро муқоиса кунед.Қимати калонтарини интихоби якум ба 27, хурдтаринаш ба 8 баробар аст. Пас васеъгии интихоби якум R_1=27–8=19.

Қимати калонтарини интихоби дуюм ба 198 ва хурдтаринаш ба 186 баробар аст. Дар натиҷа васеъгии интихоби дуюм R_2=198–186=12.

Пас,қиматҳои интихоби якум нисбат ба дуюм парокандатар ҷойгир шудааст.Қимати миёна (ёки миёнаи арифметикии) қиматҳои миқдори тасодуфӣ гуфта, нисбати ҳосили ҷамъи қиматҳоро ба шумораи онҳо буданашро ёдоварӣ мекунем. Қимати миёнаи ҳамаи қиматҳои миқдори тасодуфии X бо $\overline{X}$ ишора карда мешавад.

Масъалаи 2. Қимати миёнаи интихобӣ миқдори тасодуфиро аз рӯи тақсимоти басомадҳои дар ҷадвали зерин додашуда ёбед:

Ҷадвали 4

X	3	4	5	7	10
M	3	1	2	1	3

$$\overline{X}=\frac{3\cdot3+4\cdot1+5\cdot2+7\cdot1+3\cdot10}{3+1+2+1+3}=\frac{9+4+10+7+30}{10}=6.$$

Ҷавоб: 6.

Яке аз мафҳумҳое ,ки интихобӣ миқдори тасодуфиро аз рӯи тақсимоти эҳтимолиятҳо тавсиф мекунад ,ин мафҳуми интизории математикӣ аст. Агар барои қиматҳои X_1, X_2, ..., X_n миқдори тасодуфии X эҳтимолиятҳои қабулкарда мувофиқан P_1, P_1, ...P_n бошад он гоҳ адади

$$E=X_1P_1+X_2P_2+\ldots+X_nP_n \tag{1}$$

интизории математикии миқдори тасодуфии X номида мешавад.

Масалан:тақсимоти эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфии X бо таври зерин дода шуда бошад:

X	6	4	3	7	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

Дар ин ҳол интизории математики ин миқдори тасодуфӣ:

$$= 6\cdot\frac{1}{10} + 4\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\frac{2}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} + 5\cdot\frac{1}{10} = \frac{6+8+12+14+5}{10} = 4,5.$$

Фарқи байни қимати миқдори тасодуфӣ ва миёнаи интихоб аз миёна барканоршавӣ номида мешавад.Масалан,қимати миқдори тасодуфӣ $X_1 = 35$, қимати миёна $\overline{X} = 32$ бошад,он гоҳ барканоршавии X_2 аз миёна $X_1 - \overline{X} = 35 - 32 = 3$ мешавад.

Ҳосили ҷамъи ҳамаи қиматҳои аз миёна барканоршавӣ ба сифр баробар аст,инро нишон додан осон аст.

$$(X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + \ldots + (X_n - \overline{X}) = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - n\cdot\overline{X} =$$

$$= (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) - n\cdot\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = 0.$$

Аз ҳамин сабаб,барои тавсиф кардани қиматҳои миқдори тасодуфӣ ба ҷои ҳосили ҷамъи аз миёна барканоршавӣ миёнаи арифметикии квадратҳои аз миёнаи барканоршавӣ истифода мебаранд.Ин гуна бузургӣ дисперсия (аз калимаи лотинии dispersion – пошкунӣ,кушода) номида мешавад. Агар миқдори тасодуфии X *N-то қиматҳои гуногунро қабул кунад ва миёнаи он* $\overline{X}$ бошад, он гоҳ дисперсияи он бо ёрии формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$= \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2}{N}. \tag{2}$$

Пас, дисперсия ба миёнаи арифметикии квадратҳои қиматҳои миқдори тасодуфӣ аз миёна барканоршавӣ баробар аст.

Агар қиматҳои X_1, X_2,..., X_k миқдори тасодуфии X мувофиқан бо басомадҳои M_1, M_2,..., M_k такрор шавад,он гоҳ дисперсияи он бо ёрии формулаи

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + Mk}. \qquad (3)$$

ҳисоб кардан мумкин аст, дар ин ҷо

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + Mk}.$$

Масалан,дар ҷадвали 4 миёнаи миқдори тасодуфӣ $\overline{X} = 6$ буданашро муайян карда будем .Акнун дисперсияи ин миқдорро муайян мекунем:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_k - \bar{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \cdots + M_k} =$$

$$= \frac{(3-6)^2 \cdot 3 + (4-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (7-6)^2 \cdot 1 + (10-6)^2 \cdot 3}{3+1+2+1+3} =$$

$$= \frac{27+4+2+1+48}{10} = \frac{82}{10} = 8{,}2.$$

Агар миқдори тасодуфӣ ба ягон ченак (масалан,сантиметр) соҳиб бошад,дар ин ҳол миёнаи он $\overline{X}$ ва аз миёна барканоршавӣ $X - \overline{X}$ ҳам бо миқдори $\overline{X}$ ба як хел воҳид (см) соҳиб мешавад.Квадратҳои барканоршавӣ ва дисперсия бо квадрати ченаки миқдори X (сантиметри квадратӣ) муайян карда мешавад. Барои баҳо додан ба аз миёнаи барканоршавӣ ба бузургиҳои бо миқдори X *як хел ченак дошта истифода бурдан қулайтар аст. Аз ҳамин сабаб ,аз қимати решаи квадратӣ аз дисперсия, яъне* $\sqrt{\ }$ истифода мебаранд.Решаи квадратии аз дисперсия гирифташуда ,барканоршавии квадрати миёна номида мешавад ва бо ҳарфи σ ишора карда мешавад,яъне σ= $\sqrt{\ }$.

Масалан, дисперсияи миқдори тасодуфии ҷадвали 4 $D = 8{,}2$ ҳосил шуда буд.Акнун аз қимати дисперсия решаи квадратиро бо ёрии калкулятор ҳисоб кунем,барканоршавии миёна

σ= $\sqrt{\ } = \sqrt{8{,}2} \approx 2{,}86$.-ро ҳосил мекунем.

Дар статистика дисперсия ва барканоршавии квадратии миёнаро ченакҳои дар атрофи қимати миёни паҳншавии қиматҳои миқдори тасодуфӣ низ,мегӯянд.

Машқҳо

488. Тақсимоти қиматҳои миқдори тасодуфии *X дар сармаҷмӯъ бо ҷадвали зерин дода шудааст*:

X	8	9	11	15	16
M	21	49	70	35	14

Дар сармаҷмӯи додашуда кадоми аз интихобҳои зерин репрезентатив аст:

1)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	4

2)

X	8	9	15	16
M	3	7	5	2

3)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	10	5	2

4)

X	8	9	11	15	16
M	3	7	9	5	2

489. Модаи интихобро ёбед:
1) 6, 17, 8, 9, 5, 8, 10;
2) 20, 11, 7, 5, 9, 11, 3;
3) 4, 6, 8, 4, 7, 6, 5;
4) 5, 7, 4, 3, 7, 2, 5.

490. Медианаи интихобро ёбед:
1) 18, 13, 35, 19, 7;
2) 25, 16, 14, 21, 22;
3) 5, 2, 9, 14, 11;
4) 16, 7, 13, 9, 15.

491. Васеъгии интихобро ёбед:
1) 18, –4, 16, –3, 11, 5, 4, –5, 1, 3;
2) 26, 17, 4, 12, 2, 25, 19, 5, 6, 7.

492. Миёнаи интихобро ёбед:
1) 34, –10, 23, –18;
2) –3, 6, –19, –12, 1;
3) 0, 5, 0, 7, 0, 4, 0,7, 0,6, 0,4;
4) 2,2, 2,3, 2,2, 1,8, 1,8, 2,3.

493. Мода,медиана ва миёнаи интихобро ёбед:
1) 4, –3, 2, 0, 3, –2; 2) 6, 5, –2, 4, –5, 0.

494. Қиматҳои тақсимоти басомадҳои миқдори тасодуфии *X* дар чадвали зерин дода шудааст.Миёнаи арифметикии интихобро ёбед:

1)

X	–3	0	1	4
M	4	6	5	1

2)

X	–3	1	5
M	5	6	3

3)

X	–5	2	3
M	3	6	2

4)

X	–2	1	2	3
M	5	4	3	2

495. Тақсимоти оид ба эҳтимолиятҳои қиматҳои миқдори тасодуфии X дар чадвали зерин дода шудааст. Интизории математикиро ёбед:

1)

X	–4	–2	0	1	3
P	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

2)

X	–3	–2	0	1	2	4
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

496. Дисперсияи интихобро ёбед:
1) 9 см, 11 см, 8 см, 10 см; 2) 18 кг, 16 кг, 15 кг, 19 кг;
3) 8 сония, 11 сония, 8 сония, 9 сония, 9сония;
4) 1 м, 9 м, 4 м, 8 м, 8 м.

497. Қиматҳои тақсимоти басомадҳои миқдори тасодуфии X дар чадвали зерин дода шудааст.Дисперсияи интихобро ёбед.

1)

X	1	2	3	5
M	2	3	3	2

2)

X	–2	–1	1	2	3	4
M	1	3	2	1	2	1

498. Аз рӯи қимати миёнаи элементҳои интихоб барканоршавии квадратии миёнаро ёбед:

1) 4 гр, 5 гр, 8 гр, 3 гр, 5 гр;
2) 9 см, 12 см, 7 см, 10 см, 12 см.

499. Аз рӯи қиматҳои тақсимоти миқдори тасодуфии X барканоршавии квадратии миёнаро ёбед:

1)

X	–1	2	3	5
M	3	2	2	1

2)

X	–4	–2	1	4
M	1	4	3	2

Машқҳо доир ба боби V

500. (Шифоҳӣ) Ҳодисаҳои элементариро гӯед,ки дар натиҷаи таҷрибаи зерин рӯй доданаш мумкин аст: 1) бо тарзи тасодуфӣ моҳҳои сол гуфта мешавад; 2)ду танга партофта шуда,тарафҳои афтида истода мушоҳида карда мешавад;3) ягонто адади соддаи аз 50 хурд гуфта мешавад; 4) тасодуфан адади дурақамаи ба 3 каратӣ гуфта мешавад

501. Дар қуттӣ 4-то сиёҳ,5-то сурх ва 6-то кураи кабуд ҳаст.Тасодуфан аз қуттӣ якто кура гирифта шуд.Эҳтимолияти: 1) сиёҳ; 2) сурх; 3) кабуд; 4) сиёҳ нест; 5)сурх нест;6)кабуд нест;7)сабз 8)сиёҳ ёки сурх ёки кабуд буданашро ёбед:

502. Яке аз ададҳои натуралии аз 1 то 50 тасодуфан гуфта шуда эҳтимолияти ин адад: 1) 7; 2) 7 не; 3) ба 7 каратӣ ; 4) ба 10 каратӣ 5)адади содда нест; 6)аз 30 калон нест-ро муайян кунед.

503. Ба стол куби бозӣ ва танга партофта шуда истодааст.Эҳтимолияти дар ин ҳолат 1) дар куб 5,дар танга омадани тарафи рақамдор ;2) дар куб адади содда ,дар танга омадани тарафи герб-ро ёбед:

Васеъгӣ, мода, медиана ва миёнаи интихобро ёбед (**504–507**):

504. 1) 2, 6, 6, 9, 11;
2) 4, 10, 13, 13, 19.

505. 1) –7, –7, –4, –4, 1, 3;
2) –3, –3, 1, 3, 10, 10 .

506. 1) 0, 13, –5, –6, 14, –1, 11, –1, –8;
2) 5, –9, 14, 9, –5, –2, 0, 14, –5.

507. 1) –4, –14, 13, –6, 9, 14, 0, –6;
2) 15, –3, –9, 9, 13, –7, –3, 10.

508. Дисперсия ва барканоршавии кваратии миёнаро ёбед:
1) 6, 11, 8, 9; 2) 9, 12, 8, 14;
3) 6, 3, 5, 4, 4; 4) 4, 3, 2, 2, 6;
5) 1, –2, 2, –3, 4; 6) –3, 3, –4, –2, 5.

509. Аз рӯи тақсимоти басомадҳои додашудаи миқдори тасодуфии Z дисперсия ва барканоршавии квадратии миёнаро ёбед:

1)

Z	–1	0	2	4
M	2	1	3	1

2)

Z	–2	1	4	5
M	1	2	3	1

510. Дисперсияи интихобҳоро муқоиса кунед:1) 4, 5, 7, 5, 9 ва 6, 9, 7, 8; 2) –2, 2, 3 ва –3, –1, 1, 3, 4.

511. Аз рӯи тақсимоти эҳтимолиятҳои додашудаи миқдори тасодуфии X интизории математикиро ёбед

1)

X	–2	–1	2	3
P	0,2	0,3	0,4	0,1

2)

X	–3	–2	0	1	3
P	0,2	0,2	0,3	0,2	0,1

Машқҳои санҷишӣ (тест) доир ба боби V

1. Ба карточкаҳои якхела ададҳои аз 1 то 15 навишта шудааст.(ба ҳар як карточка якто адад навишта шудааст). Карточкаҳо ба стол чаппа карда гузошта шуда омехта карда шудааст. Эҳтимолияти адади содда будани адади дар карточкаи тасодуфан гирифташударо ёбед:

А) $\frac{2}{5}$; Б) $\frac{1}{5}$;

В) $\frac{7}{15}$; Г) $\frac{3}{5}$.

2. Дар қуттӣ 3-то сафед ва 7-то кураи сиёҳ ҳаст. Яке аз онҳо тасодуфан аз қуттӣ гирифта шуд. Эҳтимолияти кураи сафед будани кураи гирифташударо ёбед:

А) 0,5; Б) 0,7; В) 0,3 Г) 0,1.

3. Аз 27 нафар хонандагони синф 15 нафарашон писарон мебошад.Ба синф як нафар писарбача ва ду нафар духтарбача ҳамроҳ шуд. Дар ин ҳол адади писарони синф – басомади нисбии миқдори тасодуфии X чӣ қадар тағғир ёфт?

А)ба $\frac{1}{45}$ зиёд шуд; Б)ба $\frac{1}{45}$ кам шуд;

В)ба $\frac{2}{45}$ зиёд шуд; Г) $\frac{2}{45}$ кам шуд

4. Ҳосили ҷамъи мода ва медианаи интихоби қиматҳои микдори тасодуфиро ёбед: 10, 4, 2, 7, –3, 6, 10;

А) 14; Б) 17; В) 16; Г) 13 .

5. Ҳосили ҷамъи мода ва медианаи интихоби қиматҳои микдори тасодуфиро ёбед: 2, 0, 1, 4, –1, 2.

А) 2; Б) 3; В) 0; Г) 4.

6. Тақсимоти басомадҳои миқдори тасодуфии X дар ҷадвали зерин дода шудааст.Миёнаи $\overline{X}$ интихобро ёбед:

X	–1	0	1	3	5
M	2	1	3	1	2

А) $1\frac{5}{9}$; Б) $1\frac{4}{9}$; В) $1\frac{1}{9}$; Г) 1.

7. Аз рӯи тақсимоти эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфии X интизории математикиро ёбед:

X	–1	2	3	5	7
M	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

А) $\frac{25}{9}$; Б) $\frac{26}{9}$; В) $\frac{29}{9}$; Г) $\frac{30}{9}$.

8. *Аз рӯи тақсимоти басомадҳои миқдори тасодуфии X барканоршавии* квадратии миёнаро ёбед:

X	–1	2	3	5	6
M	1	3	2	2	1

А) 1; Б) 1,5; В) 2; Г) 2,5.

9. Аз рӯи тақсимоти эҳтимолиятҳои миқдори тасодуфии *X* дисперсияи онро ёбед:

X	2	3	5	7
P	0,1	0,5	0,3	0,1

А) 2,9; Б) 2,09; В) 2,99; Г) 0,29.

Масъалаҳои амалӣ -татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Масъалаи 1. Дар лотерея бурдҳои автомобили 5000 ч.п. (ченаки пул), 4-дона телевизори ҳар якаш 250 ч.п., 5-то телефони 200 ч.п. бозӣ мекунад.Ҳамагӣ 1000 дона билети ҳар якаш 7 ч.п. фурӯхта шуд.Ҷадвали тақсимоти бурди софи иштирокчии лотереяи як дона билет харид кардаро созед ва интизории математикиро ҳисоб кунед.

△ X–бурди софи ба як билет афтода бошад,он гоҳ қимати он:ягонто ҳам бурд набарояд, $0-7=-7$;

бурд телефони дастӣ бошад, $200-7=193$;

бурд телевизор бошад, $250-7=243$;

бурд автомобил бошад, $5\,000-7=4\,993$

ба ч.п. баробар мешавад. Аз 1000-дона чипта ба 990 донааш бурд набаромаданашро ва шумораи бурдҳо 5+4+1=10-ро ба ҳисоб гирифта, дар асоси таърифи классикии эҳтимолият ҳосил мекунем:

X– миқдори тасодуфӣ

– эҳтимолияти қабул кардани қимати -7 ба $\frac{990}{1\,000}=0{,}990;$

– эҳтимолияти қабул кардани қимати 193 бошад,ба $\frac{5}{1\,000}=0{,}005;$

– эҳтимолияти қабул кардани қимати 243 бошад ба $\frac{4}{1\,000}=0{,}004;$

– эҳтимолияти қабул кардани қимати 4 993 бошад ба $\frac{1}{1\,000}=0{,}001.$

баробар аст. Пас, ҷадвали эҳтимолиятҳои тақсимоти миқдори тасодуфии X чунин мешавад:

X	–7	193	243	4 993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

Дар асоси ҷадвал интизории математикиро ҳисоб кардан мумкин аст:

$$E = (-7) \cdot 0{,}990 + 193 \cdot 0{,}005 + 243 \cdot 0{,}004 + 4\,993 \cdot 0{,}001 = 0,$$

яъне бурди миёна ба сифр баробар аст.Натиҷаи ҳосилшуда аз билетҳои фурӯхташуда ҳамаи пулҳои ба бурд сарфшударо мефаҳмонад.

Ҷавоб: тақсимоти ҷадвал

X	–7	193	243	4993
P	0,990	0,005	0,004	0,001

ва интизории математикӣ $E = 0$.▲

Масъалаи 2. Дар як фирма ба кори тарҷимони ду номзод ҳаракат карда истодааст.Барои онҳо дар муддати ягонаи санҷишӣ тарҷимаи матни якхелаи 125 саҳифа дошта дода шуд.Дар як рӯз чанд саҳифаи матнро тарҷима кардаи онҳо дар ҷадвали зерин оварда шудааст:

Номи ҳафтаҳо	Шумораи саҳифаҳои дар як рӯз тарҷимашуда	
	Номзади 1 (X)	Номзади 2 (Y)
Душанбе	24	25
Сешанбе	26	31
Чоршанбе	25	27
Пайшанбе	23	22
Ҷумъа	27	20

Раҳбари фирма маълумотҳои ҷадвалро таҳлил карда, ба кор қабул кардани кадомро афзал медонад?

△ Ҳар яке аз номзодҳо дар 5 рӯз 125саҳифаро тарҷима карданд,пас ,самаранокии миёнаи ҳар ду номзод ҳам як хел аст:

$$X = Y = \frac{125}{5} = 25 \text{ (саҳифа/рӯз)}.$$

Ҳар ду миқдори тасодуфии X ва Y мода надорад ва медианаҳои як хел дорад (25 ва 25). Кадоми аз номзодҳоро ба кор қабул кардан ба мақсад мувофиқ аст. Дар ин ҳолат барқарории самаранокии меҳнати номзодҳоро муқоиса кардан лозим аст. Инро бошад, бо муқоисакунии ҳосили ҷамъи квадратҳои барканоршавӣ ёки дисперсияи онҳо ба амал ҷорӣ кардан мумкин аст.

Рӯзҳои ҳафта	Қиматҳои миқдорҳои тасодуфӣ		Барканоршавӣ аз миёна $\overline{X}=\overline{Y}=25$		Квадратҳои барканоршавӣ	
	X	Y	$X-\overline{X}$	$Y-\overline{Y}$	$(X-\overline{X})^2$	$(Y-\overline{Y})^2$
Душанбе	24	25	–1	0	1	0
Сешанбе	26	31	1	6	1	36
Чоршанбе	25	27	0	2	0	4
Пайшанбе	23	22	–2	–3	4	9
Ҷумъа	27	20	2	–5	4	25
Ҳамагӣ	125	125	0	0	10	74

Дида мешавад, ки ҳосили ҷамъи квадратҳои барканоршавӣ барои X ба 10,барои Y бошад, ба 74 баробар аст, ёки дисперсияро ҳисоб кунем:

$$D(X)=\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_5-\overline{X})^2}{5}=\frac{10}{5}=2.$$

$$D(Y)=\frac{(Y_1-\overline{Y})^2+(Y_2-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_5-\overline{Y})^2}{5}=\frac{74}{5}=14{,}8.$$

Пас, дисперсияи миқдори тасодуфии X *аз дисперсияи миқдори тасодуфии* Y хурд аст. Аз ҷиҳати амалӣ ин натиҷа самаранокии меҳнати номзоди дуюм барқарор набуданашро нишон медиҳад;дар баъзе рӯзҳо аз имкониятҳояш пурра истифода набурда меҳнат кард,рӯзҳои дигар бошад аз дараҷаи имконияташ бисёртар ҳаракат кард,ин бошад албатта ба сифати кори иҷрокарда истода таъсири манфӣ расонданаш мумкин аст. Аз ин ҷо дида мешавад,ки раҳбари фирма ба кор қабул кардани номзоди якумро афзал медонад.

Ҷавоб:раҳбари фирма ба кор қабул кардани номзоди якумро афзал медонад.▲

Масъалаи 3. Ҷадвали тақсимотӣ эҳтимолиятҳои миқдорҳои тасодуфии X ва Y*-и холҳои ду камончии ба нишон ҳангоми тирпарронӣ ҳосилшуда чунин аст:*

барои камончии 1:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

ва барои камончии 2:

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Аз камончиҳо кадомаш ба нишон нағзтар тир мепаронад?

△ Равшан аст, ки холи миёнаи кадом аз камончиҳо зиёдтар бошад,ҳаминаш беҳтар ба нишон тир мепаронад гуфтан мумкин.Аз ҳамин сабаб интизории математикии ,микдорҳои тасодуфии X ва Y -ро ҳисоб мекунем:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}10 + 2 \cdot 0{,}04 + \dots + 9 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}20 = 5{,}36,$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}03 + 2 \cdot 0{,}05 + \dots + 9 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}02 = 5{,}36,$$

яъне,холҳои миёнаи ҳар ду камончӣ ҳам як хел. X ва *Y-ро ҳисоб карда бинем:*

$$D(X) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}6,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 3{,}69;$$

$$D(Y) = (0 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \dots + (10 - 5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17,$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = 2{,}04.$$

Ҳамин тавр, қимати миёнаи холҳои ба нишон расида $E(X) = E(Y)$ бошад, ҳам барои камончии дуюм дисперсия нисбат ба якум хурдтар аст: $D(Y) < D(X)$, яъне паҳн ҷойгиршавии холҳои ба нишонрасӣ камончии дуюм дар атрофи "марказ" ($E(Y) = 5{,}36$) нисбат ба камончии якум хурдтар аст. Дигар хел карда гӯем, натиҷаи он нисбат ба камончии якум аз 5,36 зиёд дур нарафтааст. Пас, он нисбат ба камончии якум беҳтар ба натиҷа соҳиб шудан нағзтар ба нишон гирифта , $E(Y)$ -ро ба росттар (ба боло) ғеҷонидан ҳаракат карданаш лозим аст.

Ҷавоб: камончии якум ба нишон нағзтар тир мепаронад ▲

Масъалаи 4. Тақсимоти басомадҳои дар давраи мусобиқаи футбол тубҳои ба дарвозаи рақибзадаи X-и футболбозони ҷамоа дода шудааст:

X	0	1	2	3	4
Y	3	3	2	1	1

△ Аз қимати миёна ҳамаи тубҳои ба дарвоза задашуда барканоршавии квадратии миёнаро ҳисоб кунед.Аввал қимати миёнаро ҳисоб мекунем:

$$\bar{X} = \frac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_5 M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{3 + 3 + 2 + 1 + 1} = \frac{0 + 3 + 4 + 3 + 4}{10} = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Ҳисобкуниҳои минбаъда дар ҷадвали зерин оварда шудааст:

X	0	1	2	3	4
M	3	3	2	1	1
$X - \bar{X}$	–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6
$(X - \bar{X})^2$	1,96	0,16	0,36	2,56	6,76
$(X - \bar{X})^2 \cdot M$	5,88	0,48	0,72	2,56	6,76

Дар ин ҳол дисперсия ва барканоршавии квадратии миёна чунин чунин ҳисоб карда мешавад:

$$D = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 M_1 + (X_2 - \bar{X})^2 M_2 + \cdots + (X_5 - \bar{X})^2 M_5}{M_1 + M_2 + \cdots + M_5} =$$

$$= \frac{5,88 + 0,48 + 0,72 + 2,56 + 6,76}{10} = \frac{16,4}{10} = 1,64,$$

$$\sigma = \sqrt{} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$$

Ҷавоб: $\sigma \approx 128.$ ▲

Машқҳо

1. Дар асоси маълумотҳои бисёрсолаи дар оилаҳои 4 фарзанд дошта адади писарон X бо қонуни тақсимоти миқдори тасодуфӣ дар асоси ҷадвали зерин додашуда бошад,интизори математикӣ ва дисперсияро ҳисоб кунед:

X	0	1	2	3	4
P	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

2. Ҷадвали холҳои 9 -то ҳакам аз рӯи холдиҳии 10 -хол ба ду гимнастикачӣ гузошта дар мусобиқаи спортӣ дода шудааст

Рақами гимнастикачи	Рақами ҳакамҳо ва холҳои онҳо гузошта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8,7	8,8	8,9	8,9	8,7	9,2	8,9	9,6	8,8
2	9,0	9,1	9,0	8,8	8,5	8,9	9,0	9,0	9,1

Холҳои гирифтаи ҳар як гимнастикачиро мувофиқан бо микдорҳои тасодуфии X ва У ишора карда , интизории математикӣ,барканоршавии квадратии миёнаро ёбед ва онҳоро муқоиса кунед.

3. Талабае барои омӯхтани талаб ба пойафзол фурӯхти пойафзолҳоро дар дӯкон дар давоми 25 рӯз навишта рафт.Агар X_1 пойафзолҳои дар дӯкони якум, X_2 пойафзолҳои дар дӯкони дуюм фурӯхта бошад ,дар ин ҳолат дар асоси маълумотҳои овардашуда, интизори математикӣ, барканоршавии квадратии миёнаи, микдорҳои тасодуфии X_1 ва X_2-ро ҳисоб кунед.

X_1	1	2	3	4	5	6
Y	2	7	4	7	2	3

X_2	1	2	3	4	5	6
Y	3	5	4	7	5	1

Фурӯхти пойафзолҳоро дар дӯконҳо муқоиса кунед.

4. Аз даруни якчанд ғӯлачаҳои пӯлодин бист дона ҷудо карда шуда, диаметри асосҳои онҳо d бо ёрии ду асбоби ченкунӣ чен карда шуд. Натиҷаҳои бо ёрии асбоби ченкунии якум (то саҳеҳии 1мм) дар ҷадвали тарафи чап, натиҷаҳои бо дуюм гирифта дар ҷадвали тарафи рост оварда шудааст. Дисперсияи микдорҳои тасодуфии d_1 ва d_2-ро муқоиса кунед.

d_1	58	59	60	61	62
M_1	2	4	8	4	2

d_2	59	60	61	62
M_2	4	10	4	2

Дисперсияи микдорҳои тасодуфии d_1 ва d_2-ро муқоиса кунед.

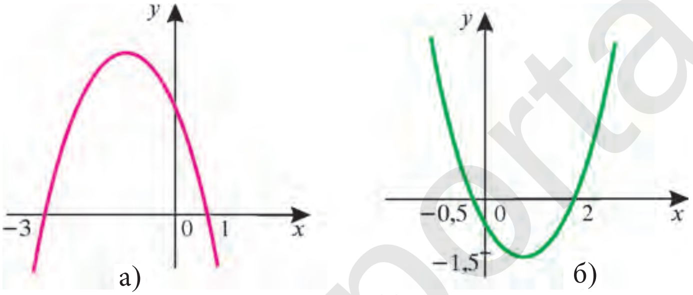
МАШҚҲО БАРОИ ТАКРОРИ КУРСИ „АЛГЕБРА“-И СИНФИ 9

512. Графики функсияро созед:

1) $y = x^2 + 6x - 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$; 3) $y = x^2 - 12x + 4$;

4) $y = x^2 + 3x - 1$; 5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$.

513. (Шифоҳӣ.) Аз графики функсияи $y = ax^2 + bx + c$ истифода бурда (расми 93), хосиятҳои онро муайян намоед:



а) б)

Расми 93.

514. Графики функсияро сохта хосиятҳои онро муайян кунед:

1) $y = -2x^2 - 8x - 8$; 2) $y = 3x^2 + 12x + 16$;

3) $y = 2x^2 - 12x + 19$; 4) $y = 3 + 2x - x^2$.

515. Графики функсияҳоро дар як ҳамвории координатӣ созед :

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ ва $y = -\frac{1}{3}x^2$; 2) $y = 3x^2$ ва $y = 3x^2 - 2$.

Нобаробариро ҳал кунед (**516–519**):

516. 1) $(x-5)(x+3) > 0$; 2) $(x+15)(x+4) < 0$.

517. 1) $x^2 + 3x > 0$; 2) $x^2 - x\sqrt{5} < 0$; 3) $x^2 - 16 \le 0$;

4) $x^2 - 3 > 0$; 5) $x^2 - 4x \le 0$; 6) $x^2 - 7 \ge 0$.

518. 1) $x^2 - 8x + 7 > 0$; 2) $x^2 + 3x - 54 < 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2 + 0,5x - 1 > 0$; 4) $5x^2 + 9,5x - 1 < 0$.

519. 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-24x+144\le 0$;

3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\ge 0$.

Нобаробариро бо усули интервалҳо ҳал кунед (**520–522**):

520. 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0,7)<0$;

3) $(x-2,3)(x+3,7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\le 0$.

521. 1) $(x+2)(x-1)\ge 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\le 0$;

3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x)^2\ge 0$.

522. 1) $\frac{3-x}{2+x}\ge 0$; 2) $\frac{0,5+x}{x-2}\le 0$; 3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$;

523. Масоҳати трапетсия аз 19,22 см^2 зиёд аст.Хати миёнаи он аз баландии он ду маротиба калон аст. Хати миёна ва баландии трапетсияро ёбед.

524. Тарафи параллелограмм аз баландии ба ин тараф фуровардашуда 2см дароз аст.Агар масоҳати параллелограм аз 15 см^2 Азиёд бошад,дарозии ҳамон тарафро ёбед.

525. Нобаробариро бо усули интервалҳо ҳал кунед:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$; 2) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\ge 2$.

526. Агар сеаъзогии квадратии x^2+px+ q ҳангоми $x=0$ будан, қимати ба – 14 баробар ва $x=-2$ будан, қимати баробар ба – 20-ро қабул кунад, коэффисиентҳои p ва q-и ин сеаъзогии квадратиро ёбед:

527. Агар параболаи $y=x^2+px+q$

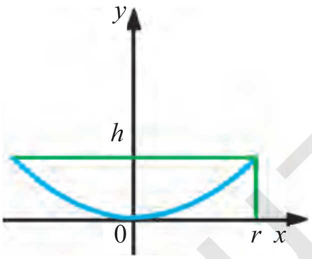
1) тири абсиссаро дар нуқтаи $x=-\frac{1}{2}$ ва $x=\frac{2}{3}$ бурад;

2) тири абсиссаро дар нуқтаи $x=-7$ расида гузарад;

3) тири абсиссаро дар нуқтаи $x=2$ *ва тири ординатаро дар нуқтаи* $y=-1$ бурида гузарад, *p–q-ро ёбед:*

528. Агар парабола тири абсиссаро дар нуқтаи 5 бурад ва қуллаи он нуқтаи $\left(2\frac{3}{4};10\frac{1}{8}\right)$ бошад, муодилаи ин параболаро нависед.

529. Оинаи инъикоскунандаи телескоп (рефлектор) аз рӯи тирӣ бурриш шакли параболаро дорост (расми 94). Муодилаи ҳамин параболаро нависед.



Расми 94.

530. Агар графики функцияи квадратии $y = ax^2 + bx + c$:

1) аз нуқтаҳои $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ ва $C(0;\ -6)$ гузарад;

2) аз нуқтаҳои $K(-2;0)$, $L(1;0)$, $M(0;\ 2)$ гузарад,коеффитсиентҳои онро ёбед:

531. Дуруст будани нобаробариҳои

1) $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$; 2) $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$-ро

барои ададҳои ғайриманфии a ва b исбот кунед:

532. Графики функсияро созед:

1) $y = \sqrt{x^2}$; 2) $y = |x-1|$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$; 4) $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$.

533. Решаҳои ҳақиқии муодиларо ёбед:

1) $x^2 - |x| - 2 = 0$; 2) $x^2 - 4|x| + 3 = 0$; 3) $|x^2 - x| = 2$;

4) $|x^2 + x| = 1$; 5) $|x^2 - 2| = 2$; 6) $|x^2 - 26| = 10$.

534. Аз реша бароред:

1) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; 3) $\sqrt[3]{\frac{8b^6}{343a^9}}$, $a \neq 0$; 4) $\sqrt[4]{\frac{16x^8}{81y^4}}$, $y > 0$.

535. Содда кунед:

1) $(3\sqrt{20} + 7\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$; 2) $(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{14} + \sqrt[3]{56}) : \sqrt[3]{7}$;

3) $2\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} - 3\sqrt{\frac{2}{3}}$; 4) $7\sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{7} + 0{,}5\sqrt{343}$.

536. Қимати ифодаҳоро муқоиса намоед:

1) $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/3}$ ва $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{-1/2}$; 2) $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}3}$ ва $(2\sqrt{0{,}5})^{0{,}37}$.

537. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sqrt[6]{a\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-\frac{2}{9}}}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}}{x^{\frac{1}{3}}}$; 3) $(16a^{-4})^{-\frac{3}{4}}$; 4) $(27b^{-6})^{\frac{2}{3}}$.

538. Аз зери реша зарбкунандаро бароред:

1) $\sqrt{9a^2b}$, дар ин $a<0,\ b>0$; 2) $\sqrt{25a^2b^3}$, дар ин $a>0, b>0$;

539. Зарбкунандаро ба зери реша дароред:

1) $x\sqrt{5}$, дар ин $x\geq 0$; 2) $x\sqrt{3}$, дар ин $x<0$;

3) $-a\sqrt{3}$, дар ин $a\geq 0$; 4) $-a\sqrt{5}$, дар ин $a<0$.

540. Ба графики функсияи $y=-\dfrac{25}{x}$ тааллуқ доштан ё надоштани нуқтаҳои зеринро муайян намоед:

1) $A(\sqrt{5};-5\sqrt{5})$; 2) $B(-5\sqrt{2};5\sqrt{2})$; 3) $C(0{,}1;\ 250)$

541. Ба графики функсияи $y=\sqrt{1-2x}$ тааллуқ доштан ё надоштани нуқтаи: 1) $C\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$; E (–4; 3)-ро муайян кунед

542. Графики функсияро ёбед:

1) $y=x^2+6x+10$; 2) $y=-x^2-7x-6$.

543. Якчанд кунҷҳои гардишро, ки нуқтаи P(1; 0)-ро ба нуқтаи :

1) A(0; 1); 2) B) (0; –1); 3) C(–1; 0); 4) D(1; 0) мегузаронад,нишон диҳед:

544. Ҳисоб кунед: 1) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}}$; 2) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}$.

545. Мусбат ё манфӣ будани ададро муайян кунед:

1) $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{4\pi}{5}\cos\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

546. Дода шудааст: $\sin\alpha=0{,}6,\ \sin\beta=-0{,}28,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

Ҳисоб кунед: 1) $\cos(\alpha-\beta)$; 2) $\sin(\alpha+\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)$.

547. Ба зарбкунандаҳо ҷудо кунед:

1) $\sin 2\alpha-2\sin\alpha$; 2) $\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}$;

3) $\cos\alpha-\sin 2\alpha$; 4) $1-\sin 2\alpha-\cos^2\alpha$.

548. Агар 1) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$ ва $\sin\frac{\alpha}{2}<0$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$ ва $\cos\frac{\alpha}{2}<0$ бошад, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ -ро ҳисоб кунед:

549. Агар

1) $a_1=10$, $d=6$, $n=23$; 2) $a_1=42$, $d=\frac{1}{2}$, $n=12$;
3) $a_1=0$, $d=-2$, $n=7$; 4) $a_1=\frac{1}{3}$, $d=\frac{2}{3}$, $n=18$

бошад, аъзои n- уми прогрессияи арифметикӣ ва суммаи n -то аъзои аввалаи онро ҳисоб кунед.

550. Agar $a_1 = 2$, $a_n = 120$, $n= 20$ бошад,суммаи n-то аъзои аввали прогрессияи арифметикиро ёбед.

551. Исбот кунед,ки пайдарпаии бо формулаи $a_n = \frac{1-2n}{3}$ додашуда аъзои n прогрессияи арифметикӣ мебошад.

552. Агар барои прогрессияи геометрӣ

1) $b_1 = 5$ ва $q = -10$ бошад, b_4 -ро ёбед;
2) $b_4 = -5000$ ва $q = -10$ бошад, b_1 -ро ёбед;

553. Агар:

1) $b_1=3$, $q=2$, $n=5$; 2) $b_1 = 1$, $q = 5$, $n = 4$ бошад,аъзои n- прогрессияи геометрӣ ва суммаи n-то аъзои аввалаи онро ҳисоб кунед.

554. Агар 1) $b_1=\frac{1}{4}$, $q=2$, $n=6$**;** 2) $b_1 = \frac{1}{5}$, $q = -5$, $n = 5$ бошад, суммаи нахустин *n-то аъзои n*прогрессияи геометриро ёбед.

555. Суммаи прогрессияи геометрии беохир камшавандаро ёбед

1) $6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \dots$; 2) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ \dots$; 3) $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{16}\ ,\ \dots$.

556. Аз зери реша зарбкунандаро бароред:

1) $\sqrt{20a^4b}$, дар ин ҷо $a<0$, $b>0$; 2) $\sqrt{(a-1)^2}$, дар ин ҷо $a<1$;

557. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, дар ин ҷо $a>b$; 2) $\frac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$, дар ин ҷо$b>a$.

558. Маҳраҷро аз ирратсионалӣ хориҷ кунед:

1) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$.

559. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\sqrt{ab}\,\sqrt[4]{a}}{(a+2)\,\sqrt[4]{a^{-1}b^{2}}} - \frac{a^{2}+4}{a^{2}-4}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{b+\sqrt{ab}} - \frac{\sqrt{a}}{b-\sqrt{ab}}\right)\cdot\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$.

560. Муодиларо ҳал кунед:

1) $\sqrt{x-2}=4$; 2) $\sqrt{x+3}=8$; 3) $\sqrt{2x+1}=\sqrt{x-1}$.

561. Ифодаро содда кунед:

1) $\frac{\mathrm{tg}^{2}\,\alpha}{1+\mathrm{ctg}^{2}\alpha}$; 2) $\frac{1+\mathrm{ctg}^{2}\alpha}{\mathrm{ctg}^{2}\alpha}$; 3) $\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$;

4) $(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha)^{2}-(\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha)^{2}$; 5) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^{2}+2\sin\alpha\cos\alpha$.

562. Муодиларо ҳал кунед

1) $1-\cos x-2\sin\frac{x}{2}=0$; 2)$1+\cos 2x+2\cos x=0$.

563. Айниятро исбот кунед

1) $\frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\mathrm{tg}\alpha$.

564. Айниятро исбот кунед

1) $1+\sin\alpha=2\cos^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

565. Дар прогрессияи арифметикӣ $a_1+a_5=\frac{5}{3}$; $a_3a_4=\frac{65}{72}$. Суммаи ҳабдаҳ аъзои аввалаи прогрессияро ёбед.

566. Дар прогрессияи геометрӣ $q=3$, $S_6=1\,820$ бошад, b_1 ва b_5 -ро ёбед:

567. Суммаи прогрессияи геометрии беҳад камшаванда ба $\frac{8}{5}$ ва аъзои дуюми он ба $-\frac{1}{2}$ баробар аст. Аъзои сеюмро ёбед:

568. Ифодаро содда кунед:

1) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$; 2) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$; 3) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; 4) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$.

569. Агар:1) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-2{,}4$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$ бошад, sinα ва cosα-ро ҳисоб кунед:

Ҷавобҳо

2. 2) $x_1 = 0$, $x_2=1$; 4) *қиматҳои ҳақиқии х-и қимати функсияро ба -5 бароабар кунанда мавҷуд нест* **3.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$, $x_2=-1$; 4) $x_1=0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **4.** 2) 0; 4) 1. **5.** 2)сифрҳо надорад; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) сифрҳо надорад **6.** 2) $p=3$, $q=-4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. **7.** $x_{1,2} = \pm 2$. **9.** *B* ва *C*. **12.** 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) (0; 0), (2; 4); 6) (1; 1). **13.** 2) Ҳа. **14.** 2) Ҳа; 4) Не. **16.** 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \leq x \leq 5$; 3) $x \leq -4$, $x \geq 4$; 4) $-6 < x < 6$. **20.** 2) (–3; –4,5), (2; –2). **21.** 2) Ҳа; 4) Не. **22.** 1) афзуншаванда; 2) камшаванда; 3) афзуншаванда; 4) афзуншаванда ҳам, камшаванда ҳам не. **23.** 3 м/с^2. **26.** 2) (0; –5); 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **27.** 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **28.** 2) Не; 4) Не;. **29.** 2) (1; 0), (0,5; 0), (0; –1); 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **30.** $y = x^2 - 2x + 3$. **32.** 2) $k = -10$. **34**. 1) $y = 2(x - 3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x + 2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1,5)^2 + 3,5$. **35.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **36.** 2) (1;0), (–5; 0), (0; 10); 4) (0; 14). **40.** 7,5+7,5. **41.** 5 ва 5. **42.** Дар девор тарафи паралел 6 м тарафҳои боқимонда 3 м **43.** Не. **44.** 2) $x = 1$ бошад $y = -5$қимати хурдтарин; 4) $x=1$ бошад $y=-2$ қимати хурдтарин; **45.** 1) $a>0$, $b>0$, $c>0$; 2) $a<0$, $b>0$, $c<0$. **46.** 1) баъд аз 5 сония баландии калонтарин 130 м; 2) $(5+\sqrt{26})$. **48.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **50.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x > -1$. **51.** 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **52.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **53.** 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. **56.** Қиматҳои мусбат дар $x < -3$, $x > 2$қиматҳои манфиӣ дар интервали $-3 < x < 2$. **58.** 2) $x \leq -1$, $x \geq 4$; 4) $-1 < x < 4$. **59.** 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \leq -0,25$; $x \geq 1$. **60**. 2) $x = 7$; 4) ҳал надорад. **61.** 2) ҳал надорад. 4) ҳал надорад.; 6) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ.**62.** 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$; $x > 0$. **64.**

2) $x< -\frac{5}{3}$, $x> \frac{5}{3}$; 4) $-1 <x < 4$; 6) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ.**65.** 2) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ; 4) $x\neq$; 6) $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$. **66.** 2) ҳал надорад; 4) $-0,5 < x < 3$. **67.** 2) $x = 1$; 4) x – қимати ҳақиқии дилхоҳ.. **69.** $-6 < r < 2$. **71.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x<-5$, $x> 3\frac{1}{2}$. **72.** 2) $x < 0$, $x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **73.** 2) $-\frac{1}{2} <x< 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **74.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4< < x < 4$, $x > 4$. **75.** $-3 < x < 4$; 4) $-3,5 \leq x < 7$; 6) $-2 \leq x < -1$, $x \geq 3$. **76.** 2) $x< <0,5$, $x > 1$; 4) $x<-\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$. **77.** 2) $-4 < x < -2$, $x > 3$; 4) $-3 \leq \leq x \leq -1$, $4 \leq x \leq 5$. **78.** 2) $x < -2$, $2 < x < 6$; 4) $x < -3$, $-1 \leq x < 2$, $x \geq 4$. **79.** 2) $-\sqrt{15} <x<-3$, $0<x< \sqrt{15}$. **80.** 1) $-8<x<-1$; 2) $x<-5$, $x>2$; 3) $-1<x \leq -\frac{2}{5}$. **81.** 2) Дар $x=2$ $y=1$; $x=0$ ва $x=4$ $y=5$;дар $x=-1$ ва $x=5$ $y=10$; дар $x=-2$ ва $x=6$ $y=17$. **82.** 1) $y(-2)=-1$, $y(0)=-5$, $y\left(\frac{1}{2}\right)=-11$, $y(3)=4$; 2)дар $x=-\frac{1}{2}$ $y=-3$;дар $x=-1$ $y=-2$; дар $x=\frac{3}{2}$ $y=13$;дар $x=\frac{4}{3}$ $y=19$. **84.** 2) $x \leq 2$, $x \geq 5$; 4) $-2 \leq x < 3$. **85.** 1) $y(-3) = 3$, $y(-1) = 1$, $y(1) = -1$, $y(3) = 1$; 2)дар $x =2$ $y=-2$; дар $x = 0$ ва $x=4$ $y = 0$;дар $x = -2$ ва $x = 6$ $y = 2$; дар $x = -4$ ва $x = 8$ $y = 4$. **86.** 2) $x \neq -1$; 5) $-1 \leq x \leq 1$, $x \geq 4$; 6) $-5\leq x \leq 1$, $x > 2$. **87.** 2) Ҳа; 4 Ҳа. **93.** 2) $x = 16$; 4) $x=\frac{1}{16}$; 6) $x=\frac{1}{243}$. **95.** 2) $x = 32$; 4) $x = 8$. **98.** 2) Тоқ; 4) ҷуфт ҳам, тоқ ҳам нест. **99.** 2) тоқ; 4) тоқ; . **108.** 2) $x = 0$. **109.** 2) $(-1; 0)$. **110.** 2) $x \leq 3$; 4) $y< < 5$; 6) $x < -5$, $x > 5$. **111.** 2)теғаи куб аз 7 зиёд. **114.** 2) $x = 10$; 4) $x = 5$. **115.** 2) $x= 2$; 4) $x = 2$; $x = -7$. **116.** 2) $x = 4$; 4) $x = 0,2$. **117.** $x=\frac{7}{3}$. **118.** 2) $x > -3$; 4) $x < 2$; 6) $x < 1$, $x > 7$. **120.** 2) $x = -2$; 4) $x_1 = 1$; $x_2= 3$. **121.** 2) $x = 2,25$. **122.** 2) $x = 1$; 4) $x = 5$. **123.** 2) $x =4$. **124.** 2) $2 \leq x \leq 3$; 4) $1 < x \leq 2$; 6) $x \geq 1$. **125.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0,5$; 4) *ин гуна қимати x мавҷуд нест x* **126.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **127.** 2) $(5; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; 10)$; 4) $(1; 0)$, $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **128.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. **130.** 150 м ва 150 m. **131.** 2) $p = 1$, $q = 0$.

132. 1) $x_1 = 1$, $x_2 = –5$; 2) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. **133.** 2) $x < 2, x > 4$; 4) $x < 3, x>4$. **134.** 2) $x < –6, x > 6$; 4) $-\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}$. **135.** 2) $x < \frac{1}{2}$, $x > 4$; 4) $–2<x< \frac{1}{2}$. **136.** 2) ҳал надорад; 4) ҳал надорад; 6) ҳал надорад. **137.** 2) $x < –1$, $1 < x < 4$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4< x \le 7$; 6) $x \ge 2$, $-\frac{1}{2} \le x < 1$. **138.** 2) $x \le -\frac{3}{2}$, $x \ge –1$; 4) $x = \frac{2}{3}$. **139.** 2) $–1 < < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} <x \le -\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} < x \le 2$. **140.** аз 12 км/с кам нест. **142.** 2) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}\right)$. **143.** 2) (–1; –1); (1; 1). **144**. 2) $x > 2$; 4) $x \le –2$. **145.** 2) $x = 16$. **146.** 2) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. **147.** 2) x – адади дилхоҳ; 4) $2 \le x \le 11$; 6) $x < –7$, $–3 \le x < –1$, $x \ge 3$. **148.** 2) кам мешавад; 4) кам мешавад. **149.** 2) тоқ; 4) ҷуфт ҳам, тоқ ҳам нест. .**150.** 2) $-2 \le x \le \frac{1}{3}$. **151.** 2) $x_1 = –1$, $x_2 = 7$; 4) $x = 81$. **152.** 1) $x < –1, x >9$; 2) $–1< x \le 0$, $3 \le x < 4$; 3) $\frac{2}{3} \le x < 6$; 4) $x \ge 4$. **153.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **154**. 2) (7; –5), (–4; 6); 4) (–1; –1), (7; 23). **155.** 2) (4; –3); (17;10); 4) (4; 1), (–1; –4). **156.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **157.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **158.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **159.** 5 ва 13. **160.** 4 ва 36. **161.** 2) (7; –1), (–1;7). **163.** 1) (4; 1) (–1; –4); 2) (2; 4), (4; 2); 3) (2; 2). **164.** 300 м , 200 м. **165.** 2) (4; 5) ва (5; 4). **166.** 2) (1; –2)ва (3; 0). **167.** 2) (9; 4). **168.** 2) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3). **169.** 2) (2; 5) ва (5; 2); 4) (1; 3) ва (19; –3). **170.** 2) (3; 5), (5; 3), (–3; –5), (–5; –3); 4) (1; 7), (7; 1), (–1; –7), (–7; –1). **171.** 2) (20; 4) ва (–20; –4); 4) (3; 6) ва (6; 3). **172.** 2) (–1; 1) (1; 1) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$, 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$; 4) (–5; –2), (–5; 2), (5; –2). **173.** 2) (5; 1). **174.** 2) (–5; –1), (–3; –5), (3; 5), (5; 3). **175.** (1; 9) ва (9; 1). **176.** 2)система ҳал надорад. **177.** 2) $–9 \le x \le 3$; 4) $–6 \le x \le 2$. **178.** 2. $–\infty < x < –3$ ва $2 < x < + \infty$. **179.** $–3 < x \le – 2$ ва $1 \le x \le 2$. **180.** $–7 < x < 0$. **181.** $–1 \le x \le 0$. **182.** 2) Ø. **194.** (–1; –4) ва (4; 4); 2) (2; –2) ва (9; 5). **195.** 2) (–5; 6) ва (6; –5); 4) (–1; 10) ва (10; –1). **196.** 2) (6; –2); 4) (3,5; –1,5). **197.** 2) (–2; –3) ва (2; 3);

4) (2; 6) ва (6; 2). **198.** 2) (–1; 3) ва (3; –1). **199.** 2) (–3; 1) ва (1; 5). **200.** 2) (–2; 1) ва (2; 1); 4) (–1; 4)ва (24; 0,6). **201.** 2) (4; $-\sqrt{3}$) ва (4; $\sqrt{3}$); 4) (–6; –2), (–6; 2), (6; –2), (6; 2). **202.** 2) (1; –2) ва (2; –1); 4) (2; 1). **203.** 2) $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$ ва $\left(-2\sqrt[4]{\frac{3}{5}}; \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$. **204.** 2) (4; 1); 4) (100; 4). **205.** 2) 24. **206.** 2) дарозиаш 1.2 см ва бараш 0.8 см. **207.** 2) $-5 < x < -3$; 4) $1 \le x \le 2$. **208.** 2) 8. **209.** 2) 27; 4) 1. **213.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{8\pi}{45}$; 8) $\frac{7\pi}{9}$. **214.** 2) 20°; 4) 135°; 6) $\left(\frac{720}{\pi}\right)^{\circ}$; 8) $\left(\frac{324}{4\pi}\right)^{\circ}$. **215.** 2) 4,71; 4) 2,09. **216.** 2) $2\pi < 6{,}7$; 4) $\frac{3\pi}{2} < 4{,}8$; 6) $-\frac{3\pi}{2} < -\sqrt{10}$. **218.** 0,4 м. **219.** 2 рад. **220.** $\frac{3\pi}{8}$ см^2. **221.** 2 рад. **222.** 2) (–1; 0); 4) (0; –1); 6) (1; 0). **224.** 2) чоряки дуюм; 4) чоряки чорум; 6) чоряки дуюм. **225.** 2) (0; 1); 4) (–1; 0); 6) (0; 1). **226.** 2) $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. **227.** 2) чоряки дуюм; 4) чоряки дуюм. **228.** 2) $x = 1{,}8\pi$, $k = 4$; 4) $x = \frac{4}{3}\pi$, $k = 3$; 6) $x = \frac{5}{3}\pi$ $k = 2$. **230.** 2) (0; 1); 4) (0; –1). **231.** 2) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 4) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **232.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) –1; 6) –1; 8) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **234.** 2) –1; 4) –1; 6) 1. **235.** 2) 0; 4) –1. **236.** 2) $\frac{-\sqrt{2}-9}{2}$; 4) $-\frac{1}{4}$. **237.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **239.** 2) $-\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **240.** 2) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 6) $x = \frac{2}{3}k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **241.** 2) $x = 2\pi k - 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 4) $x = k\pi - 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 6) $x = \frac{2\pi k}{3} + 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **242.** 2) чоряки дуюм; 4) чоряки дуюм; 6) чоряки дуюм. **243**. 2) мусбат; 4)мусбат; 6) мусбат. **244.** 2) манфӣ; 4) манфӣ; 6) мусбат; **245.** 2) мусбат.,мусбат.; 4) манфӣ, манфӣ; 6) манфӣ, манфӣ; 8) мусбат, мусбат. **246.** 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. **247.** 2) $\sin 3 > 0$, $\cos 3 < 0$, $\operatorname{tg} 3 < 0$; 4) $\sin(-1{,}3) < 0$, $\cos(-1{,}3) > 0$, $\operatorname{tg}(-1{,}3) < 0$. **248.** 2) манфӣ; 4) мусбат; 6) мусбат; 8) манфӣ. **249.** Агар $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ёки

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ бошад,аломатҳои sinα ва cosα якхела аст; агар $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ёки $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ бошад,аломатҳои sinα ва cosα муқобил аст. **250.** 2) манфӣ; 4) мусбат. **251.** 2) $\cos 1{,}3 > \cos 2{,}3$. **252.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **253.** 2) чоряки дуюм; **254.** $\frac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$. **255.** 2) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$; 6) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. **256.** 2)ичро мешавад; 4) ичро намешавад. **257.** 2)ичро намешавад. **258.** $\cos\alpha = \frac{9}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9}$. **259.** $\frac{1}{3}$. **260.** $\cos\alpha = \pm\frac{3}{4}$. **261.** $\sin\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. **262.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) 2. **263.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) $\frac{11}{16}$. **264.** 1) $x = \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 3) $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **266.** 1) 0; 4) 1 + sinα. **267.** 2) 3; 4) 4. **271.** 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **272.** $\frac{8}{25}$. **273.** $\frac{37}{125}$. **274.** 1) $x = \pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **275.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) −3. **276.** 2) 2cosα; 4) 2. **278.** 2) 2. **279.** 2) −2cosα. **280.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **281.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) −1. **282.** 2) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$. **283.** 2) cos3β; 4) −1. **284.** −sinα sinβ. **285.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 1. **286.** 2) $-\frac{2+\sqrt{14}}{6}$. **287.** 2) −sinα cosβ; 4) sinα cosβ. **288.** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{84}{85}$; $\cos(\alpha-\beta) = \frac{36}{85}$. **289.** 2) $-\frac{63}{65}$. **290.** 2) 0; 4) tgα tgβ. **293.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$. **294.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) −1. **295.** 2) $\frac{24}{25}$. **296.** 2) $\frac{7}{25}$. **297.** 2) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$; 4) 1. **298.** 2) 2ctgα; 4) $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **300.** 2) $\frac{8}{9}$. **302.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **303.** 2) cos6α; 4) $\frac{1}{2\sin\alpha}$. **305.** $\frac{15}{8}$. **306.** 2) $\sqrt{3}$. **307.** 2) 0; 4) 0; 6) −1. **308.** 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **309.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **310.** 2) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\sqrt{3}$. **311.** 2) $-\sqrt{2}$; 4) −1. **312.** 2) cos2α. **313.** 2) $-\frac{5\sqrt{3}}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5\text{-}3\sqrt{3}}{4}$. **314.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **317.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; 4) $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. **318.** 2) $\sqrt{2}\sin\beta$; 4) sin2α. **319.** 2) 0; 4) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **320.** 2) $4\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **322.** 2)

2sinα. **325.** 2) $2\sqrt{3}\sin\frac{5\pi}{24}\sin\frac{\pi}{8}$. **326.** 2) 0. **327.** 2) $2\cos\alpha(\cos\alpha-1)$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)$. **328.** 2) чоряки сеюм; 4) чоряки дуюм; 6) чоряки дуюм;. **329.** 2) 0; 1; 4) 1; 0; 6) 0; −1. **330.** 2) 2; 4) −1. **331.** 2) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **333.** 2) 3; 4) $\mathrm{tg}^2\alpha$. **334.** 2) $-\frac{1}{3}$. **335.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$. **336.** 2) sin2α; 4) tg2α. **337.** 2) 1; 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **338.** 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-1-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **339.** 2) cos0 > sin5. **340.** 2) мусбат; 4) манфӣ. **341.** 2) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **342.** 2) $\frac{1}{\sin\alpha}$. **343.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$; $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sin2\alpha=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$; $\cos2\alpha=-\frac{1}{9}$. **344.** 2) tgα. **345.** 2) $\frac{1}{\sin4\alpha}$; 4) $-\frac{1}{\cos2\alpha}$. **346.** 2) 1; 4) 1. **347.** 2) –7. **348.** 2) cos4α. **350.** 2) 5, 8, 11; 4) $-\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$ 6) –1, –8, –27. **352.** 2) мешавад; 4) мешавад **354.** 2) $n=9$. **360.** 2) −3, −1, 1, 3, 5. **362.** 2) 79; 4) −42. **363.** 2) $a_n = 29 - 4n$; 4) $a_n = 6 - 5n$. **364.** 12. **365.** Ҳа, $n = 11$. **366.** $n = 11$,НЕ. **367.** 2) 0,5. **368.** 2) −13. **369.** 2) −100. **370.** 2) $a_n = 5n - 17$. **371.** $n \geq 9$. **372.** $n < 25$. **373.** 2) $a_9=-57$, $d=7$; 4) $a_9=-1$, $d=-15$. **374.** 30. **375.** 60. **376.** 2) 10050; 4) 2550. **377.** 4850. **378.** 4480. **379.** 2) −192. **380.** 2) 204. **381.** 2) 240. **382.** 4905; 494550. **383.** 2) 2900. **384.** 10. **385.** 2) $a_{10}=15\frac{5}{6}$, $d=\frac{3}{2}$. **386.** 2) $a_1=-88$, $d=18$. **387.** 78 то чӯб. **388.** 44. **389.** $a_1=5$, $d = 4$. **392.** 2) −3, 12, −48, 192, −768. **394.** 2) $\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{81}$. **395.** 2) $b_n=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; 4) $b_n=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$. **396.** 2) 5; 4) 8. **397.** 2) 3; 4) $-\frac{1}{5}$. **398.** $b_8 = 2374$, $n = 5$. **399.** $b_7=3\sqrt{3}$, $q=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **400.** $b_5 = 6$, $b_1=30\frac{3}{8}$ ёки $b_5=-6$, $b_1=-30\frac{3}{8}$. **401.** 659100 сӯм. **402.** 0,25 см^2. **403.** 2) $-\frac{31}{8}$; 4) $-\frac{275}{81}$; 6) −400. **404.** 2) 2186. **405.** 2) $b =-1$, $b_8 = 128$. **406.** 2) $n = 7$; 4) $n = 5$. **407.** 2) $n = 9$, $b_9 = 2048$; 4) $n = 5$, $q=7$. **408.** 2) 364; 4) 305. **409.** 2) $b_5=4802$, $S_4 = 800$. **410.** 2) $-1\frac{31}{32}$. **412.** 2) $q= 5$, $b_3 = 300$ ёки $q =-6$, $b_3 = 432$. **413.** 2) $q = 2$ ёки $q =-2$; 4) $S_5 = 781$ ёки $S_5 = 521$. **415.** 2) ҳа; 4) ҳа. **416.** 2) 7,2; 4) $-8\frac{1}{6}$.

417. 2) $\frac{27}{4}$; 4) $\frac{2}{3}$. **418.** 2) не; 4) ҳа. **419.** 2) $90\frac{10}{11}$. **420.** 2) $6+4\sqrt{3}$. **421.** 2) $\frac{1}{2}$. **422.** 2a. **423.** $R_n = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot R_1$. **424.** 2) 1; 4) $\frac{7}{30}$. **425.** 2) $d=-\frac{1}{2}$, $a_4=2$, $a_5=1\frac{1}{2}$; 4) $d=-3$, $a_4=\sqrt{2}-9$, $a_5=\sqrt{2}-12$. **427.** $-5\frac{1}{3}$. **428.** 2) −1080. **429.** 143. **430.** 2) −22. **431.** 2) $q=-\frac{1}{2}$, $b_4=-\frac{1}{32}$, $b_5=\frac{1}{64}$; 4) $q=-\sqrt{2}$, $b_4=-10\sqrt{2}$, $b_5=20$. **432.** 2) $b_n=-0{,}5 \cdot (-2)^{n-1}$. **433.** 2) $b_n=\frac{125}{8}$. **434.** 2) $S_{10}=1\frac{85}{256}$; 4) $S_9=5$. **435.** 2) 242; 4) $\frac{65}{36}$. **436.** 2) $-\frac{4}{5}$. **437.** $24\frac{41}{74}$. **438.** 2) 14, 11, 8, 5, 2. **439.** $-\frac{5}{2}$. **440.** 2) $a_{19}=0$, $a_1=-108$. **441.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$; 4) $x_2=-4$. **443.** 14. **444.** 2) $a_{16}=-1\frac{2}{3}$, $d=-\frac{2}{15}$. **445.** 2) 27. **446.** 2) −27; 4) $\pm\frac{1}{25}$. **447.** 6. **448.** 2) не; 4) ҳа. **450.** рӯзи чоршанбе. **451.** $a_1=8$, $d=-3$ ёки $a_1=2$, $d=3$. **452.** $a_1=5$, $d=-5$ёки $a_1=-5$, $d=5$. **453.** 180 маротиба. **453.** 2) мумкин нест. **454.** 2) Тасодуфӣ; 4) муқаррарӣ. **457.** 2) якҷоя нест.. **462.** Баробар имконият нест.. **466.** 2) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{3}{4}$. **467.** 2) $\frac{5}{9}$; 4) 1. **468.** 2) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{7}{12}$. **469.** 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{5}{12}$. **470.** 0,01. **471.** 2) 0,97. **472.** $\frac{29}{30}$. **473.** $\frac{1}{2}$. **474.** 2) $\frac{1}{13}$; 2) $\frac{9}{52}$. **476.** 2) $\frac{21}{46}$; 4) $\frac{7}{92}$. **477.** 1,4%.

482. 2) мумкин 4 хол. **488.** 3 интихоб. **489.** 2) 11; 4) 5 ва 7. **490.** 2) 21; 4) 13. **491.** 2) 24. **492.** 2) –5,4; 4) 2,1. **494.** 2) $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{7}$. **495.** 2) 0,1. **496.** 2) 2,5 кг^2, 4) 6м^2. **502.** 2) 0,98; 4) 0,1; 6) 0,6. **503.** 2) 0,25. **505.** 2) 13, –3 ва 10, 2 3. **511.** 2) –0,5. **516.** 2) $-15<x<2$; 4) $x \le 12$, $x \ge 12$. **517.** 2) $0<x<\sqrt{5}$; 4) $x<-\sqrt{3}$; $x>\sqrt{3}$. **518.** 2) $-9<x<6$; 4) $-2<x<0{,}1$; 6) $x \le \frac{1}{8}$, $x \ge 2$. **519.** 2) $x=-12$; 4) *адади ҳақиқии дилхоҳ*; 6) ҳал надорад. **520.** 2) $-0{,}7<x<\frac{1}{2}$; 2) $-2 \le x \le 1$. **521.** 2) $x \le -2$, $x=1$; 4) $x \le -\frac{1}{3}$, $0 \le x \le 2$. **522.** 2) $-0{,}5 \le x < 2$. **523.** Баландиаш аз 3.1 см зиёд ,хати миёнааш аз 6.2 см зиёд.. **524.** аз 5см зиёд.. **525.** 2) $x<-7$, $-1 \le x \le 2$; 4) $-1 \le x < \frac{1}{3}$, $x>\frac{1}{3}$. **526**. $p=5$, $q=-14$. **527.** 2) $p=14$, $q=49$. **528.** $y=-2x^2+11x-5$. **529.** $y=\frac{n}{r^2}x^2$. **530.** 2) $a=-1$, $b=-1$, $c=2$. **531.** *Нишондод*. 1) $\frac{b}{c}=B^3$, $\frac{c}{a}=C^3$

ишора намуда ва $ABC = 1$-ро ба ҳисоб гирифта,нобаробарии додашударо ба намуди$A^3 + B^3 + C^3 \geq 3ABC$ нависед, онро ба намуди $(A + B + C)(A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geq 0$ иваз кунед. Нобаробарии $A^2 + B^2 + C^2 \geq AB+AC+BC$ дар натиҷаи ҷамъ кардани нобаробариҳои $A^2 + B^2 \geq 2AB$, $A^2 + C^2 \geq 2AC$, $B^2 + C^2 \geq 2BC$ ҳосил мешаваад; 2) нобаробариҳои миёнаи арифметикӣ ва миёнаи геометриро ҷамъ кунед. $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2b$; 3) Аз қисми чапи нобаробарӣ қисми росташро тарҳ кунед ва суръати касри ҳосил шударо ба намуди зерин нависед. $(a + b)(a - b)^2 + (b+c)(b - c)^2 + (a + c)(a - c)^2$; 1) $x_{1,2} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$; 3) $x_{3,4} = \pm 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 4) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 6) $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 6$. **534.** 2) $2\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2x^2}{3y}$. **535.** 2) $3 - \sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{7}$. **536.** 2) $(2\sqrt{0,5})^{0,3} < (2\sqrt{0,5})^{0,37}$. **537.** 2) $\sqrt{x}$; 4) $9b^{-4}$. **538.** 2) $5ab\sqrt{b}$. **539.** 2) $-\sqrt{3x^2}$; 4) $\sqrt{5a^2}$. **540.** 2) не. **541.** 2) не. **544.** –1. **545.** 2) манфӣ. **548.** 2) –0,8. **547.** 2) $2\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}$; 4) $\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$. **548.** $\sin\alpha = \frac{240}{289}$, $\cos\alpha = -\frac{161}{289}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{240}{161}$. **549.** 2) $a_{12} = 47,5$, $S_{12} = 537$; 4) $a_{18} = 11\frac{2}{3}$, $S_{18} = 108$. **550.** 1220. **552.** 2) $b_1 = 5$. **553.** 2) $b_4 = 125$, $S_4 = 156$; 4) $b_4 = 81$, $S_5 = 61$. **554.** $15\frac{3}{4}$. **555.** 2) $4\frac{1}{6}$; 4) 1; 6) $-\frac{5}{4}(1 + \sqrt{5})$. **557.** 2) –1; 4) $-\frac{1}{x}$. **558.** 2) $\frac{(a+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})}{a^2-b}$; 4) $0,1(5 - \sqrt{5})5 + \sqrt{5}$. **559.** 2) $-\frac{\sqrt{a}}{b}$; 4) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. **560.** 2) $x = 61$. **561.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **562.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi + 2n$, $n \in \mathbf{Z}$. **565.** $39\frac{2}{3}$. **566.** $b_1 = 5$, $b_5 = 405$. **567.** $\frac{1}{8}$. **568.** 1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. **569.** $\sin\alpha = -\frac{120}{169}$, $\cos\alpha = -\frac{119}{169}$.

„Ҷавобҳои супоришҳои "Худро бисанҷед !"

Боби I . **1.** $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. **2.** $-1 < x < 1$ бошад $y > 0$; $x < -1$ бошад $y < 0$; $x > 1$. **3.**дар1) $x > 0$ фуксия меафзояд;дар $x < 0$ функсия кам мешавад.

4. 1) $x \geq 1$; $-2 \leq x \leq 0$. **5.** 1) $x \neq 1$; 2) $-3 \leq x \leq 3$. **6.** 1) $x = 28$; 2) $x = 1$.

Боби III. **1.** 1) $\cos\pm = -\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\sin 2\alpha = -\frac{24}{25}$. **2.** 1) 1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\sqrt{3}$; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** 1) $\sin\alpha\cos\beta$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $2\sin\alpha$.

Боби IV. **1.** 1) $a_{10}=-25$, $S_{10}=-115$. **2.** 1) $b_6 = \frac{1}{8}$, $S_6 = 7\frac{7}{8}$. **3.** 1) $q = \frac{1}{3}$, $S=1,5$.

Ҷавобҳои масъалаҳои амалӣ -татбиқӣ ва алоқа бо фанҳо

Боби I. **1.** Суръаташ аз 60,01 км/с зиёд нашуданаш лозим. **2.** $n \leq 30$. **3.** 2 дақиқа. 10 м. **4.** 125 то. **5.** 1) 135 то; 2) 17739 то; 3) ≈ 4,9 моҳ.

Боби II. **1.** 2) 20 то қатор. **2.** Дар бригадаи якум 8 то, дар дуюмаш 12 то коргар **3.** 2) 16%. **4.** 2) 4 *л* ва 12 *л* **5.** Дар обу ҳавои бешамол.

Боби III. **1.** 4) ≈335,42км; 5) ≈2243,3 км. **2.** ≈11,3°. **3.** 1818 м. **4.** ≈12,8 м.

Боби IV. **1.** 420. **2.** 10 км. **3.** 3072. **4.** 39 300 000 сӯм. **5.** 27 метр.

Боби V. **1.** $E(X) = 26$, $D(X) = 0,9964$. 2. $E(X) \approx 8,94$, $E(Y) \approx 8,93$, $D(X) \approx 0,07$, $\mathrm{D}(Y) \approx 0,03$, $G(X) \approx 0,071$, $\sigma(Y) \approx 0,76$. 3. $E(X_1) = E(X_2) = 3,36$, $\sigma(X_1) \approx 1,47$, $\sigma(X_2) \approx 1,41$. 4. $E(d_1) = 60$, $D(d_1) = 1,2$, $E(d_2) = 60,02$, $D(d_2) = 0,76$.

Мундарича

Боби IV . Пайдарпаиҳои ададӣ. Прогрессияҳо

Боби V. Назарияи эҳтимолиятҳо ва элементҳои статистикаи математикӣ

Алимов Ш.А. ва дигарҳо.
А 47 Алгебра: Китоби дарсӣ барои донишомӯзони синфи 9-уми мактабҳои таълими миёнаи умумӣ /Ш.А. Алимов, О.Р. Холмуҳамедов, М.А. Мирзааҳмедов. – Нашри 4. – Тошканд: «O‘qituvchi» 2019. –240 с.
ISBN 978-9943-5750-9-7
УЎК: 512(075.3)=222.8
КБК 22.14я72

Shavkat Arifdjanovich Alimov, Alimdjan Raximovich Xalmuxamedov,
Mirfazil Abdilxakovich Mirzaxmedov

ALGEBRA

(Tojik tilida)

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 9-sinfi uchun darslik
Qayta ishlangan 4-nashri

«O‘QITUVCHI» nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2019

Original-maket «DAVR NASHRIYOTI» MCHJ da tayyorlandi.

Тарҷимон М. Норметов
Муҳаррир М. Норметов
Муҳаррири расмҳо Р. Запаров
Мусаҳҳеҳ Н. Ассоева
Саҳифабанди компютерӣ Х. Сафаралиев
Ҳарфчинӣ матн С.Ниязова

Литсензияи нашриёт AI № 012. 20.07.2018.
Аз оригинал-макет ба чоп иҷозат дода шуд. 27.07.2019. Андозаи 70×90$^{1}/_{16}$.
Гарнитураи Times .Чопи офсетӣ. Ҷузъи чопии шартӣ. 17,55. Ҷузъи нашрию ҳисобӣ 16,6.
Теъдоди нашр 887 нусха. Супориши № 19-191.

Оҷонсии иттилоот ва иртибототи оммавии назди Дастгоҳи Президенти Ҷумҳурии Ўзбекистон, Хонаи эҷодии табъу нашри «O‘qituvchi». Тошканд – 206, ноҳияи Юнусобод, кӯчаи Янгишаҳар, хонаи 1. Шартномаи № 78-19.

Дар матбааи хонаи эҷодии табъу нашри «O‘zbekiston»-и оҷонсии коммуникатсияҳои оммавии иттилооти назди маъмурияти Президенти Республикаи Ўзбекистон чоп карда шуд. 100011, Тошканд, кӯчаи Навоӣ, 30.

Ҷадвали нишондиҳандаи ҳолати китоби ба иҷора дода шуда

Р/т	Ному насаби хонанда	Соли хониш	Ҳолати китоб ҳангоми гирифтан	Имзои раҳбари синф	Ҳолати китоб ҳангоми супоридан	Имзои раҳбари синф
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Китоби дарсӣ ба иҷора дода шуда, дар охири соли хониш ҷадвали боло аз тарафи раҳбари синф дар асоси меъёрҳои зерини баҳо пур карда мешавад:

Нав	Ҳолати китоби дарси ҳангоми бори аввал супоридан.
Хуб	Муқовааш бутун, аз қисми асосии китоби дарсӣ ҷудо нашудааст. Ҳамаи варақҳояш ҳаст, нодарида, ҷудо нашуда, дар саҳифаҳо навингг ва хатҳо нест.
Қаноатбахш	Муқова каҷ шудааст, канорҳояш коҳида, якчанд хатҳо кашида шудаанд, ҳолати аз қисми асосӣ ҷудошавӣ дорад, аз тарафи истифодабаранда қаноатбахш таъмир шудааст. Варақҳои ҷудошудааш аз нав таъмир шудааст, дар баъзе саҳифаҳо хат кашида шудаанд.
Ғайри-қаноатбахш	Муқова хат кашида шудааст, даридааст, аз қисми асосй ҷудо шудааст ёки умуман нест, ғайриқаноатбахш таъмир шудааст. Саҳифаҳо дарида, варақҳо намерасанд, хат кашида, ранг карда шудааст, китоб барқарор карда намешавад