

Б. Хайдаров, Е. Сариков, **А. Қо‘чқоров**

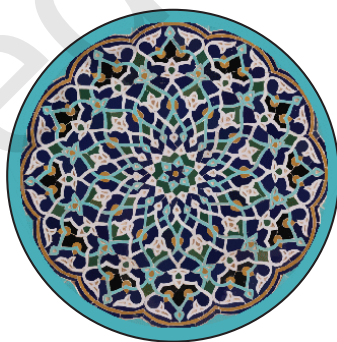
GEOMETRIYA

9

*Uluwma orta bilim beriw mektebleriniñ
9-klass ushın sabaqlıq*

*Ózbekston Respublikasi Xalıq bilimlendiriw
ministrliğı tárepinen baspaǵa usınıs etilgen*

Qayta islengen toltırılǵan hám tórtinshi basılıw



Tashkent — 2019

UDK 514.1(075)
BBK 22.151ya7
X-18

Пикир bildiriwshiler:

- Shaniyazova M.** — Sergeli rayonındaǵı 300-sanlı mekteptiń joqarı kategoriyalı matematika pání oqıtıwshısı
- Soibova I.** — Yunosabat rayonındaǵı 307-sanlı mekteptiń joqarı kategoriyalı matematika pání oqıtıwshısı
- Tajabbinova Sh.** — Sergeli rayonındaǵı 104-sanlı mekteptiń joqarı kategoriyalı matematika pání oqıtıwshısı

Ózbekstan Respublikası Pánler akademiyasınıń haqıyqıy aǵzası, fizika-matematika ilimleriniń doktorı, professor A. Azamovtıń redaktorlawında.

9-klasta geometriyanıń planimetriya bólimin—tegis geometriyalıq figuralardıń qásiyetlerin úyreniw dawam ettiriledi. Bunda siz geometriyalıq figuralardıń uqsaslıǵı, úshmúyeshliklerdiń tárepleri hám múyeshleri arasındǵı qatnaslar, sheńber uzınlıǵı hám dóńgelektiń maydanı, úshmúyeshlik hám sheńberdegi metrikalıq qatnaslar menen tanısasız.

Bul “Geometriya” sabaqlıǵınıń mazmunı qatań aksiomatikalıq sistema tiykarında qurılǵan. Bunda teoriyalıq materiallar múmkinshiligi bolǵansha ápiwayı hám anıq tilde bayan etilgen. Barlıq tema hám túsiniqlerdi hár túrli turmısta ushırasatuǵın mısallar arqalı ashıp beriwge háreket etilgen. Hár bir temadan soń berilgen sorawlar, dálillewler, esaplawlarǵa hám jasawlarńa tiyisli másele hám mısallar oqıwshını dóretiwshilik pikirlewge jeteleydi, oǵan ózlestirilgen bilimlerdi tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwıǵa járdem beredi. Sabaqlıq óziniń ózgeshe dizayn hám sabaq materialınıń kórgizbeli etip usınılıwı menen de ajralıp turadı. Sabaqlıqta keltirilgen súwret hám sızilma sabaqlıq materialın jaqsılap ózlestiriwge xızmet etedi.

Respublika maqsetli kitap qorı qarjıları esabınan ijara ushın basıp shıǵarıldı.

© «Huqıq hám Jámiyet» JSHJ formasındaǵı baspa, 2014, 2019.
© B. Q. Xaydarov

ISBN 978-9943-5875-1-9

MAZMUNI

7—8-klaslarda ótilgenlerdi tákirarlaw

1. Úshmúyeshlikler hám tórtmúyeshlikler	6
2. Pifagor teoreması hám onıń qollanıwları	8
3. Geometriyalıq figuralardıń perimetri hám maydanın esaplawǵa tiyisli máseleler	13
4. 3D-geometriya - keńislik denelerinde planimetriya máseleleri	18
5. Tapsırmanı orınlaw boyınsha berilgen máseleler	26

I bap. Uqsas geometriyalıq figuralar

6. Kópmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı	28
7. Uqsas úshmúyeshlikler hám olardıń qásiyetleri	30
8. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń birinshi belgisi	32
9. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń ekinshi belgisi	34
10. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń úshinshi belgisi	36
11. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdiń uqsaslıq belgileri	38
12. Uqsaslıq belgileriniń dálillewge baylanışlı máselelerge qollanıwları	40
13. Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw	42
14. Bilimińizdi sınap kóriń	44
15. Tegislikte geometriyalıq almasıwlar. Háreket hám parallel kóshiriw	48
16. Kósherge qarata simmetriya	50
17. Oraylıq simmetriya hám burıw	52
18. Geometriyalıq figuralardıń uqsaslıǵı	58
19. Uqsas kópmúyeshliklerdiń qásiyetleri	60
20. Gomotetiya hám uqsaslıq	62
21. Uqsas kópmúyeshliklerdi jasaw	64
22. Ámeliy shınıǵıw	66
23. Máseleler sheshiw	68
24. Bilimińizdi sınap kóriń	71

II bap. Úshmúyeshliktiń tárepleri hám múyeshleri arasındǵı qatnaslar

25. 0° tan 180° qa shekemgi bolǵan múyeshtiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi	76
26. Máselelerdi sheshiw	78
27. Úshmúyeshliktiń maydanın múyeshtiń sinusi járdeminde esaplaw	82
28. Sinuslar teoreması	84
29. Kosinuslar teoreması	86
30. Sinuslar hám kosinuslar teoremlarınıń ayırım qollanıwları	88
31. Eki vektor arasındǵı múyesh hám olardıń skalyar kóbeymesi	90
32. Úshmúyeshliklerdi sheshiw	94

33. Máseleler sheshiw	96
34. Ámeliy shınıǵıw hám máseleler	98
35. Bilimınızdi sınap kóriń	100

III bab. Sheńber uzınlıǵı hám dóńgelektiń maydanı

36. Sheńberge ishley sızılǵan kópmúyeshlik	104
37. Sheńberge sırtlay sızılǵan kópmúyeshlik	106
38. Durıs kópmúyeshlikler	108
39. Durıs kópmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberler	110
40. Durıs kópmúyeshliktiń tárepinen sırtlay hám ishley sızılǵan sheńberler radiusları arasındǵı baylanıs	112
41. Bilimınızdi sınap kóriń	114
42. Sheńberdiń uzınlıǵı	116
43. Sheńber doǵasınıń uzınlıǵı. Múyeshtiń radian ólshemi	118
44. Dóńgelektiń maydanı	120
45. Dóńgelektiń bólekleriniń maydanı	122
46. Ámeliy shınıǵıw hám máseleler	124
47. Bilimınızdi sınap kóriń	126

IV bab. Úshmúyeshlik hám sheńberdegi metrikalıq qatnasları

48. Kesindiler proekciyası hám proportcionallıq	130
49. Proporcional kesindilerdiń qásiyetleri	132
50. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktegi proporcional kesindiler	134
51. Berilgen eki kesindige orta proporcional kesindini jasaw	136
52. Sheńberdegi proporcional kesindiler	138
53. Ámeliy shınıǵıw hám qollanıw	140
54. Bilimınızdi sınap kóriń	142
55. Juqmaqlawshı baqlaw jumısı	145

Planimetriyaǵa tiyisli tiykarǵı túsinik hám maǵlıwmatlar 147

Juwaplar hám kórsetpeler 154

5-8- KLASLARDA ÓTILGENLERDI TÁKIRARLAW



Bul bólimdegi máseleler 5-8-klaslarda úyrenilgen geometriyalıq figuralar hám olardıń qásiyetlerin yadǵa alıw ushın berilmekte.

Bólimde PISA hám TIMSS - oqıwshılar bilimin bahalawdıń xalıqaralıq baǵdarlamaları máselelerinen hám keltirilmekte.

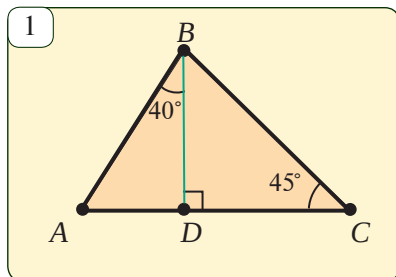
Bul bólimdegi materiallardı úyreniw nátiyjesinde tómendegi bilim hám kónlikpelerdi jańalaw imkaniyatına iye bolasız:

- ✓ 5-8-klaslarda geometriyadan ótilgen temalardı tákirarlap, alǵan bilimlerińizdi eske alasız hám erisken kónlikpelerińizdi bekkemleysız.
- ✓ PISA va TIMSS - oqıwshılar bilimin bahalawdıń xalıqaralıq baǵdarlamaları máseleleri menen tanısasız;
- ✓ Bul sizge 9-klasta geometriyanı úyreniwdi tabıslı dawam ettiriwińizge qolaylılıq jaratadı.

1

ÚSHMÚYESHLIKLER HÁM TÓRTMÚYESHLIKLER

Bul bólimdegı máselelerdı sheshiw ushın sabaqlıqtıń aqırında keltirilgen tiykarǵı geometriyalıq figuralarǵa tiyisli maǵlıwmatlar hámde olardıń qásiyetlerin ańlatıwshı formulalardan paydalanıwımız múmkin.



1.1. ABC úshmúyeshliktiń BD biyikligi júrgizilgen (*1-súwret*). Eger $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$ bolsa úshmúyeshliktiń A hám B tóbesindegi múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. 1) Tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshlikde $\angle ABD = 40^\circ$ hám úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° ge teń bolǵanı ushın

$$\angle A = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ.$$

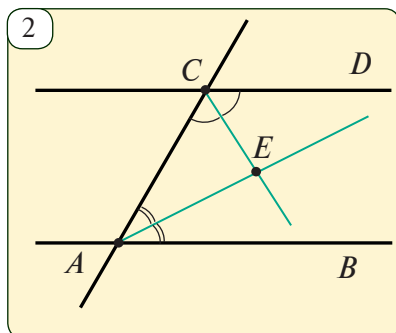
2) Tuwrı múyeshli BCD úshmúyeshlikde $\angle BCD = 45^\circ$ bolǵanı ushın

$$\angle DBC = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ.$$

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ bolǵanı ushın

$$\angle B = 40^\circ + 45^\circ = 85^\circ.$$

Juwabi: $50^\circ, 85^\circ$.



1.2. Eki parallel tuwrı sıziqtı kesiwshi menen keskende payda bolǵan ishki bir tárepleme múyeshlerdıń bissektrisaları arasındaǵı múyeshi tabıń.

Sheshiliwi. AC tuwrı sıziq AB hám CD - parallel tuwrı sıziqlardı 2-súwrette súwretlengendey kesip ótken bolsın. Ishki bir tárepi BAC hám ACD múyeshlerdıń bissektrisalari E noqatta kesiliskende bolıp $\angle EAC = x$, $\angle ECA = y$ bolsın onda múyesh bissektrisa anıqlaması boyınsha,

$$\angle BAC = x + x = 2x, \angle ACD = y + y = 2y.$$

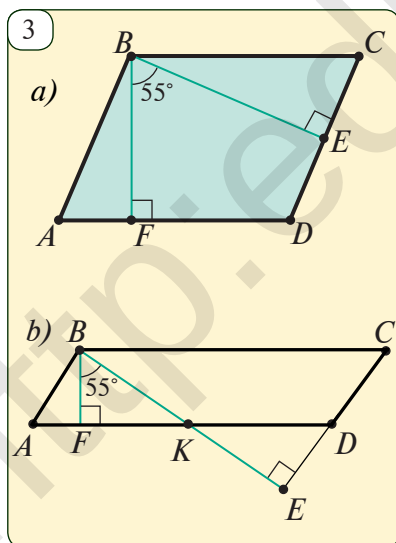
$AB \parallel CD$ bolǵanı ushın ishki táreplemeli múyeshlerdıń qásiyeti boyınsha,

$$2x + 2y = 180^\circ, \quad x + y = 90^\circ.$$

ACE úshmúyeshlik ishki múyeshleriniń qosındısı 180° ga teń bolǵanı ushın

$$\angle AEC = 180^\circ - (x + y) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Juwabi: 90° .



1.3. Eger parallelogrammnıń doǵal múyeshi bir tóbesinen onıń ekinshi tárepi túsirilgen biyiklikleriniń arasındaǵı múyesh 55° qa teń bolsa, parallelogrammnıń múyeshlerin tabıń.

Sheshiliwi. Parallelogrammnın BF hám BE biyiklikleriniń arasındaǵı múyesh 55° bolsın (*3-súwret*).

Súwrette súwretlengen eki jaǵday: a) BE biyikligi CD tárepine; b) BE biyikligi CD tárepiniń dawamına túsken bolıwı múmkin.

a) jaǵdayda $BEDF$ tórtmúyeshliktiń múyeshlikleriniń qosındısı 360° bolǵanı ushın,
 $55^\circ + 90^\circ + \angle D + 90^\circ = 360^\circ$. Bunnan, $\angle D = 125^\circ$.

b) jaǵdayda BE biyikligi AD tárepi menen kesiliskeń noqat K bolsın. Onda,
 $\angle DKE = \angle BKF = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

Úshmúyeshliktiń sırtqı múyeshleriniń qásiyetleri boyınsha,
 $\angle ADC = \angle DKE + \angle KED = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ$.

Demek, hár eki jaǵdayda da $\angle D = 125^\circ$.

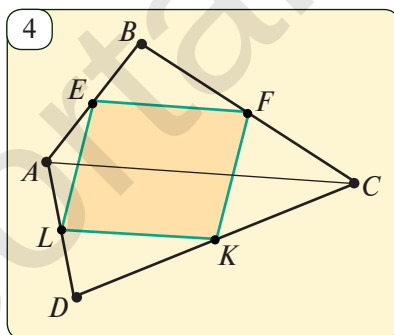
Onda, $\angle A = \angle C = 180^\circ - \angle D = 55^\circ$, $\angle B = \angle D = 125^\circ$. **Juwapı:** 55° , 125° , 55° , 125° .

1.4. Tórtmúyeshliktiń tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolatuǵının dálilleń.

Sheshiliwi. $ABCD$ tórtmúyeshliginiń AB, BC, CD hám DA tárepleriniń ortaları saykes túrde E, F, K hám L noqatları bolsın AS diagonalın ótkizemiz (*4-súwret*). $EFKL$ — parallelogramm ekenligin kórsetemiz.

EF kesindisi ABC úshmúyeshliginiń, KL kesindisi ACD úshmúyeshliginiń orta sızıǵı boladı. Úshmúyeshliktiń orta sızıǵınıń qásiyetlerinen,

$$EF \parallel AC, KL \parallel AC, EF = \frac{1}{2} AC, KL = \frac{1}{2} AC.$$



Bunnan $EF \parallel KL$ hám $EF = LK$. Sonıń ushın, parallelogrammnıń belgileri boyınsha $EFKL$ — parallelogramm boladı.

1.5. ABC úshmúyeshlikde $\angle A = 47^\circ$, $\angle C = 83^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiń úshinshi ishki múyeshin hám sırtqı múyeshlerin tabıń.

1.6. ABC úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel tuwrı sızıq AB hám BC táreplerin saykes túrde E hám F noqatlarına kesip otedi. Eger $\angle BEF = 65^\circ$ hám $\angle EFC = 135^\circ$ bolsa, ABC úshmúyeshliginiń tabıń.

1.7. ABC úshmúyeshlik bissektrisalardı I noqatta kesilisedi. Eger $\angle A = 80^\circ$ hám $\angle B = 70^\circ$ bolsa, AIB , BIC hám CIA múyeshlerin tabıń.

1.8. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń bir sırtqı múyeshi 70° qa teń. Úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

1.9. ABC úshmúyeshliktiń AK bissektrisası júrgizilgen. Eger $\angle BAK = 47^\circ$ hám $\angle AKC = 103^\circ$ bolsa, úshmúyeshlik múyeshlerin tabıń.

1.10*. ABC úshmúyeshlik biyiklikleri H noqatta kesilisedi. Eger $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ bolsa, AHB , BHC hám CHA múyeshlerin tabıń.

1.11. Úshmúyeshliktiń orta sızıqları onı teńdey tórt úshmúyeshliklerge ajıratuǵının dálıyllen.

1.12*. ABC úshmúyeshlikte CD mediana dawam ettirip bul medianaga teń DE kesindisi qoyıladı. AF mediananıń dawamına AF medianaga teń FH kesindisi qoyılǵan. B, H, E noqatları bir tuwrıda jatatuǵınlıǵın dálıyllen.

- 1.13.** ABC тең қыяллы үшмүйешликте ($AB=BC$) AN һәм CK биссектрисалар жүргизилген.
 а) KN кесиндиси AC тәрепке параллель екенлигін көрсетің.
 б) $AK=KN=NC$ теңлік орнлы болыўын дәлиллиң.

1.14. $ABCD$ туўры төртмүйешлигиниң A һәм D мүйешлериниң биссектрисалары BC тәрепинде кесилеседи. Егер $AB = 4$ см болса, туўры төртмүйешликтиң майданын табың.

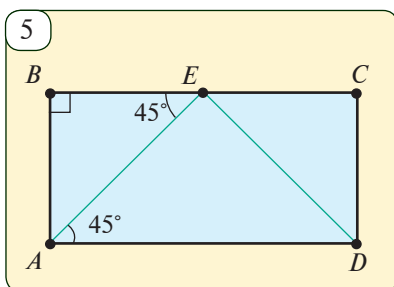
Sheshiliwi. Туўры төртмүйешликтиң A һәм D мүйешлериниң биссектрисалары кесилескен нокта E болсын (5-сүўрет). Онда, $\angle B=90^\circ$, $\angle BAE=45^\circ$ болған ушын, $\angle AEB=180^\circ-90^\circ-45^\circ=45^\circ$. Яғни, ABE — теңқыяллы үшмүйешлик.

Бунда, $AB = BE = 4$ (см). Дәл усыған уқсас $EC = CD = 4$ (см) екенлигін көрсетiw мүмкин. Буннан $BC = BE + EC = 8$ (см) һәм

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 8 = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Juwbı: 32 см^2 .

1.15. Төртмүйешликтиң үш мүйеші 47° , 83° һәм 120° ға теңлиги мәлим. Оның төртинши мүйешин табың.

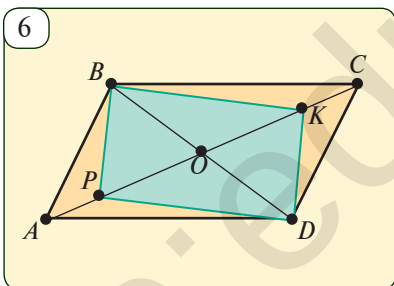


1.16. Параллелограммның еки мүйеші қосындысы 156° ға тең. Оның мүйешлерін табың.

1.17. Туўры төртмүйешлик диагоналлари арасындағы мүйеш 74° . Оның бир диагонали менен тәреплери арасындағы мүйешлерди табың.

1.18. Тең қыяллы трапетциянның еки мүйеші айырмасы 40° қатең. Оның мүйешлерін табың.

1.19. Ромб мүйешлеринен бири екіншісинен үш мәрте үлкен. Ромбның мүйешлерін табың.



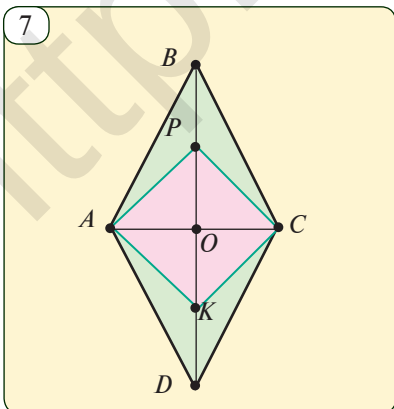
1.20. $ABCD$ туўры төртмүйешликтиң A мүйеші биссектрисасы BC тәрепин 2 см ва 6 см ге тең кесиндилерге ајратadı. Туўры төртмүйешликтиң периметрин табың.

1.21. Тәреплери 3 см һәм 6 см, үлкен тәреплери арасындағы аралық болса 2 см болған параллелограмм жасаң.

1.22. $ABCD$ параллелограммның AC диагоналинда P һәм K нокатлар таңланған (6-сүўрет). Егер $OP=OB=OK$ болса, $BKDP$ туўры төртмүйешлик болыўын дәлиллиң.

1.23*. $ABCD$ ромбның BD үлкен диагоналинда P һәм K нокатлар таңланған (7-сүўрет). Егер $OA=OP=OK$ болса, $APCK$ төртмүйешлик квадрат екенлигін дәлиллиң.

1.24*. $ABCD$ параллелограммның BD диагоналинда P һәм K нокатлар таңланған. Егер $BP=KD$ болса, $APCK$ төртмүйешлик параллелограмм екенлигін дәлиллиң.



2

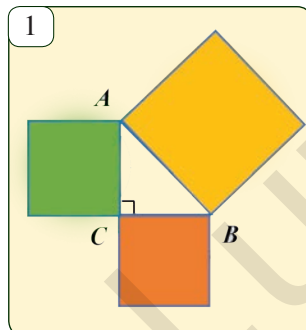
PIFAGOR TEOREMASÍ HÁM ONÍN QOLLANÍLÍWLARÍ

Bul belgili teoremanín 3 túrli anlatpasín keltirip, oní eske alamíz.

a) Tekstli anlatpasí: Tuwrí müyeshli úshmüyeshliktiñ gipotenuzası kvadratı katetleri kvadratlarınıñ qosındısına teñ.

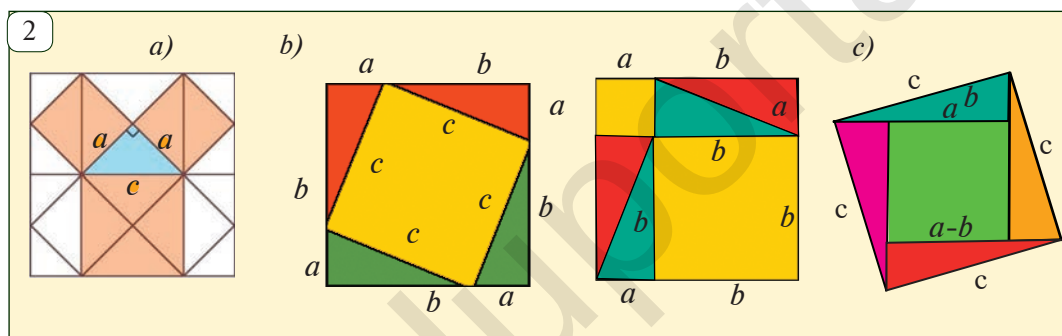
b) matematikalıq anlatpası: ABC úshmüyeshlikte: $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ bolsa, $c^2 = a^2 + b^2$ boladı.

d) Súwretli anlatpası: (1-súwret).

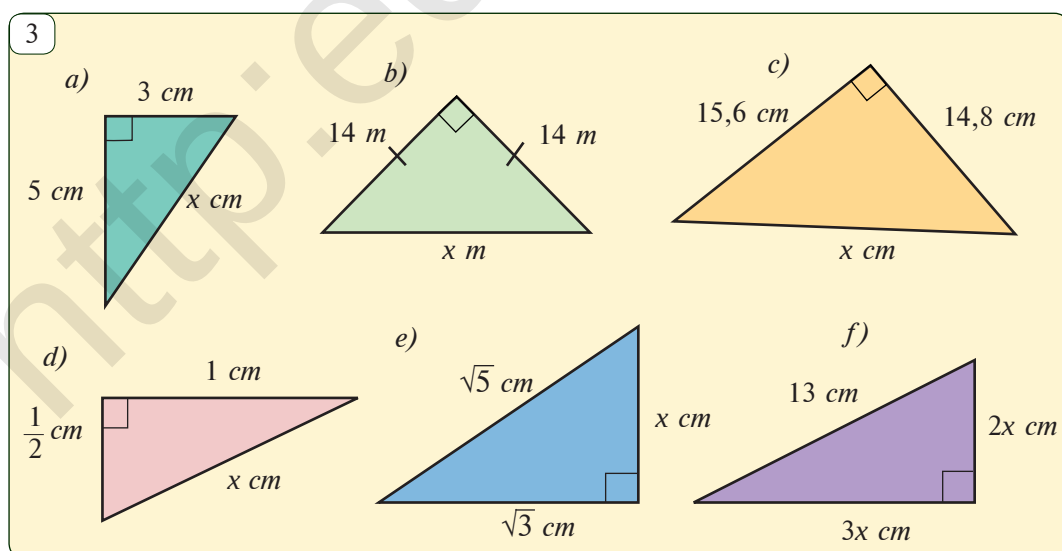


? Másele hám shıńıǵıwlar

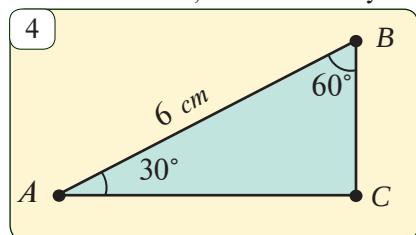
2.1. 2-súwrette keltirilgen sıızılmalar tiykarında Pifagor teoremasınıñ bir neshe dáliylin tikleñ.



2.2. 3-súwrette berilgenlerge kóre belgisizdi tabıñ.



2.3. ABC úshmúyeshliktiń AB tárepi 6 cm , A hám B múyeshleri, sáykes túrde, 30° hám 60° bolsa, ABC úshmúyeshlik maydanın tabıń.



Sheshiw. Úshmúyeshliktiń C múyeshin tabamız:

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ.$$

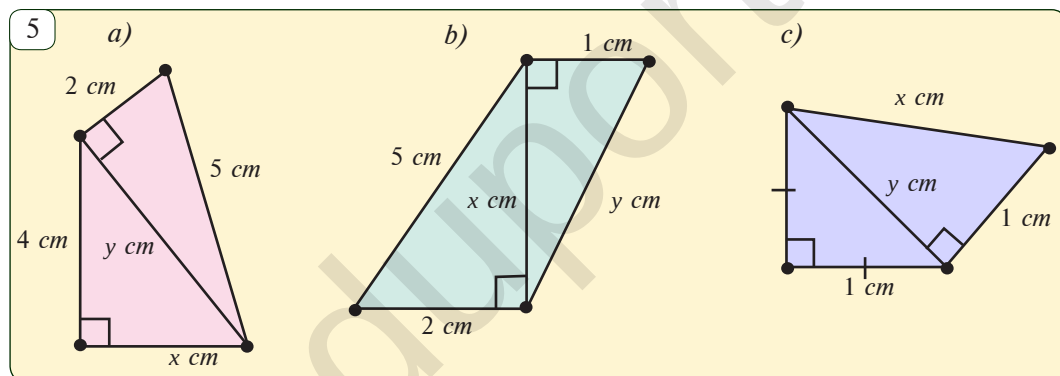
Demek, tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliktiń AB gipotenuzası 6 cm hám A múyeshi 30° eken. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° li múyesh qarsısındağı katet gipotenuzanıń yarımına teń bolǵanı ushın, $BC = 3\text{ cm}$ (4-súwret).

Pifagor teoremasınan paydalanıp AC katetti tabamız:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 6^2 - 3^2 = 27\text{ (cm)}, \quad AC = 3\sqrt{3}\text{ cm}.$$

Endi úshmúyeshlik maydanın tabamız:

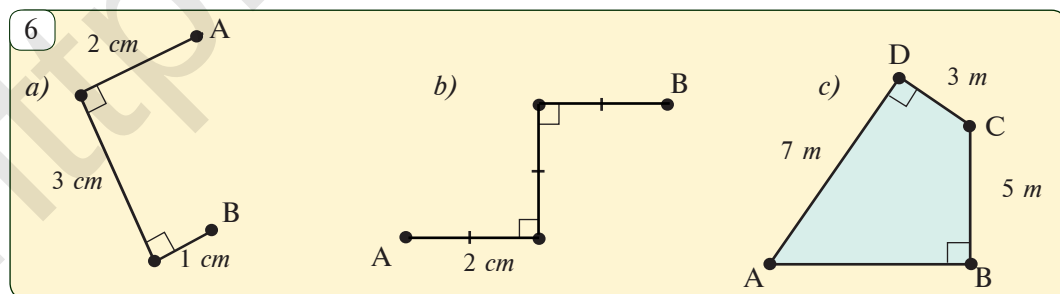
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ (cm}^2\text{)}. \quad \text{Juwabı: } \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2.$$



2.4. 5-súwrette berilgenlerge kóre belgisizdi tabıń.

2.5. Katetleri 15 cm hám 20 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik gipotenuzasına túsirilgen biyiklikti tabıń.

2.6. 6-súwrette tiyisli kesindilerdi jasadıp belgisiz AB kesindiniń uzınlıǵın tabıń.



2.7. 7-súwrette berilgenlerden paydalanıp tuwrı tórtmúyeshlik maydanın tabıń.

Sheshiliwi. Tuwrı tórtmúyeshliktiń kishi tárepin x penen belgilesek, onda Pifagor teoreması boyınsha:

$$x^2 + 12^2 = 13^2;$$

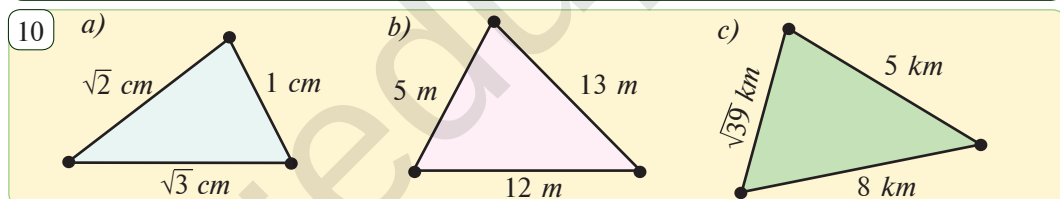
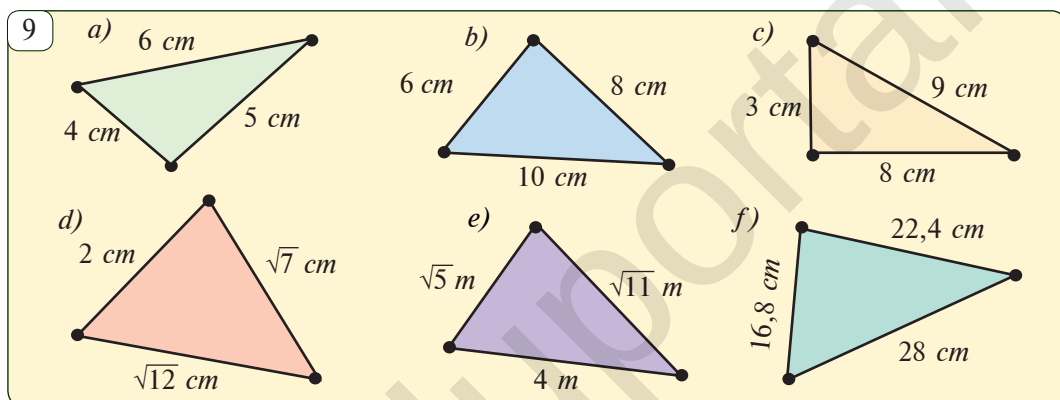
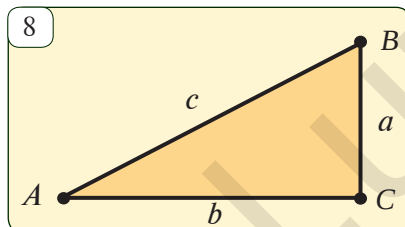
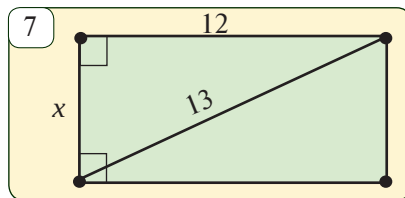
$x^2 + 144 = 169$; $x^2 = 169 - 144 = 25$;
 $x = \pm 5$. Uzunlıq o'ň shama bolgani ushın $x = 5$ cm.
 Onda tuwrı tórtmüyeshliktiń maydanı

$$S = a \cdot b = 5 \cdot 12 = 60 \text{ (cm}^2\text{)}. \quad \text{Jawab: } 60 \text{ cm}^2.$$

Teorema. Eger tárepleri a , b hám c bolgán úshmüyeshlikte $c^2 = a^2 + b^2$ bolsa, bul úshmüyeshlik tuwrı müyeshli úshmüyeshlik boladı. (8-súwret).

2.8. 9-súwrettegi úshmüyeshlikler anıq emes súwretlengen. Olardıń qaysı biri tuwrı müyeshli?

2.9. 10-súwrettegi úshmüyeshlikler anıq emes súwretlengen. Olardıń qaysı biri tuwrı müyeshli?



2.10. 11-súwrette súwretlengen belgisiz maydandı tabıń.

2.11. 12-súwrettegi rombınıń diagonalları 6 cm hám 8 cm bolsa, onıń tárepın tabıń.

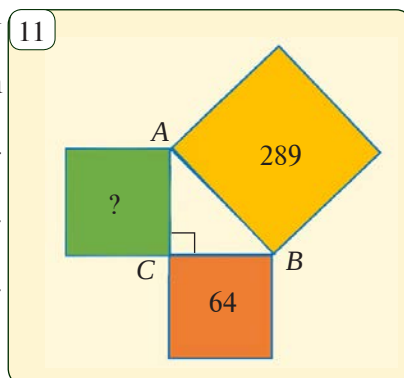
2.12. 13-súwrettegi teń tárepli úshmüyeshliktiń tárepı 6m bolsa, onıń biyikligin tabıń.

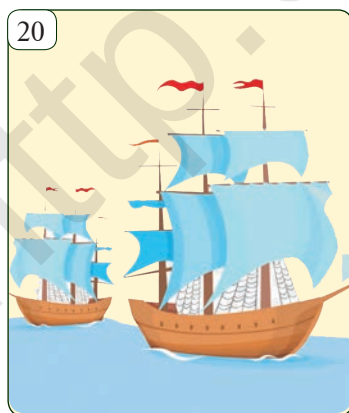
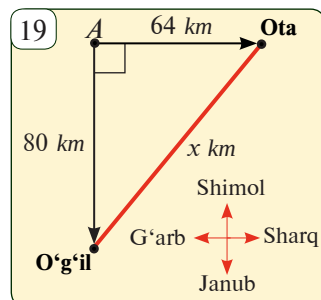
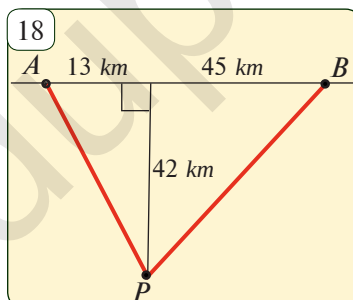
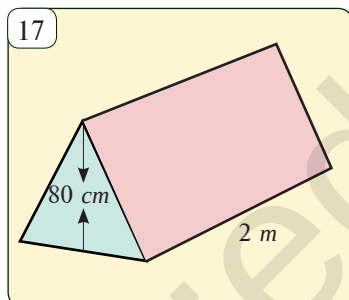
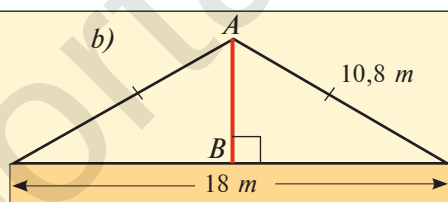
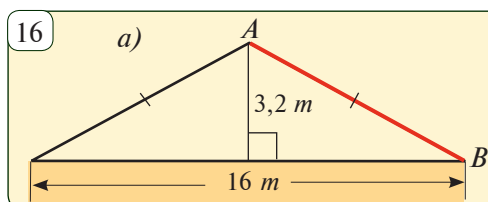
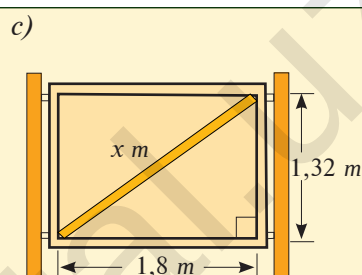
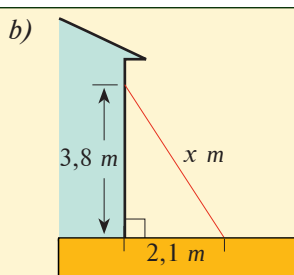
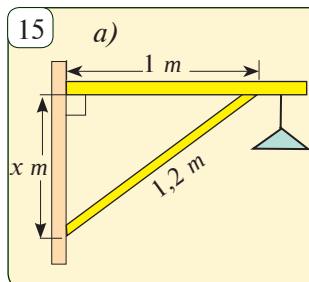
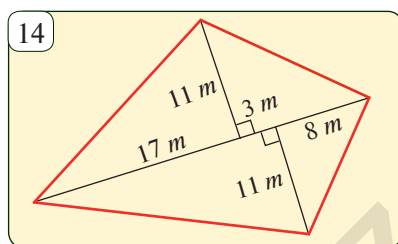
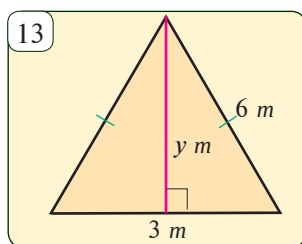
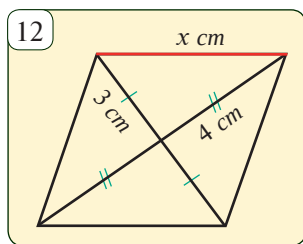
2.13. 14-súwrette sızılğan figuranıń perimetrin tabıń.

2.14. 15-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz uzunlıqtı tabıń.

2.15. 16-súwrette berilgenlerden paydalanıp, AB kesindi uzunlıgın tabıń.

2.16. 17-súwrette sızılğan sızılmanıń aldı tárepı teń tárepli úshmüyeshlik formasında. Berilgenlerden paydalanıp sızılma ultanıń maydanın tabıń.





2.17. 18-súwrette P elektr stanciyadan A hám B qalalarga shekem sım tartpaqshı. Bunıń ushın qansha sım kerek boladı?

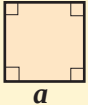
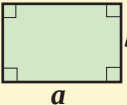
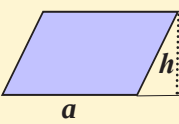
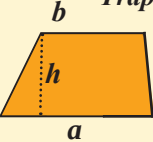
2.18. A noqattan ake 16 km/h tezlik penen shıǵısqa, ulı bolsa 20 km/h tezlik penen velosipedte arqaqa qarap háreketlenbekte (19-súwret). 4 saattan keyin olar arasıdaǵı aralıq qansha boladı?

2.19. Eki kapitan Jek hám Huk Jumabay aralıǵınan óz kemelerinde saparǵa shıqtı (20-súwret). Birinshisi 15 km/h tezlik penen qublǵa, ekinshisi bolsa 19 km/h tezlik penen batısqa júzip ketti. 2 saattan keyin olar arasıdaǵı aralıq qansha boladı?

3

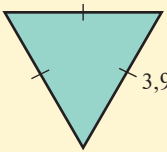
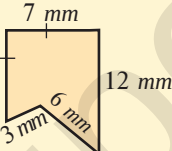
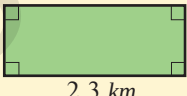
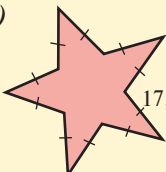
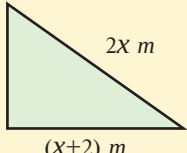
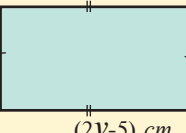
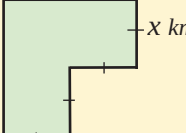
GEOMETRIYALÍQ FIGURALARDÍŃ PERIMETRI HÁM MAYDANÍN ESAPLAWĞA TIYISLI MÁSELELER

Tómende tegis geometriyalıq figuralardıń perimetri hám maydanın esaplawğa tiyisli túrli máselelerdi kórip shıǵamız.

Kvadrat  $P = 4a$ $S = a^2$	Tuwrı tórtmúyeshlik  $P = 2a + 2b$ $S = ab$	Úshmúyeshlik  $S = \frac{1}{2}ah$
Parallelogramm  $S = ah$	Trapetsiya  $S = \frac{a+b}{2}h$	Dóńgelek 

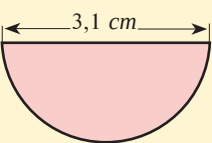
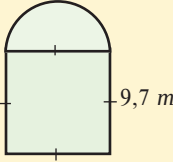
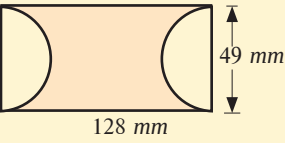
3.1. 1-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler perimetrin esaplań.

1

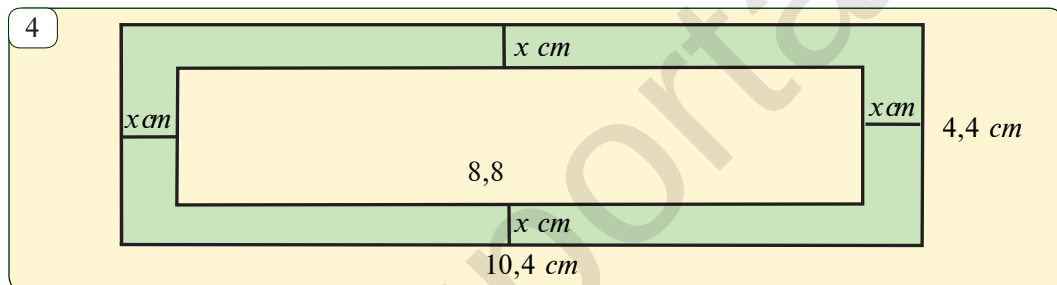
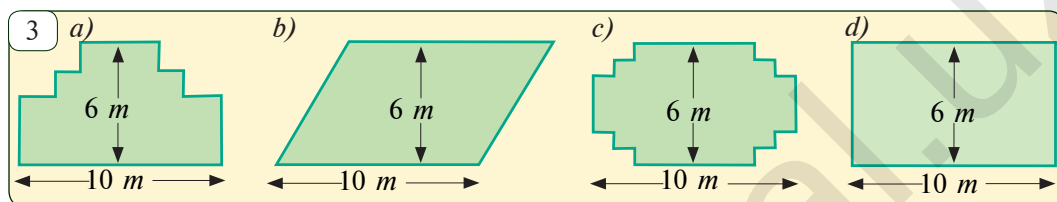
a) 	b) 	c) 
d) 	e) 	f) 
g) 	h) 	i) 

3.2. 2-súwrette súwretlengen geometriyalıq figuralardıń perimetrin (shegarasınıń uzınlıǵın) esaplań.

2

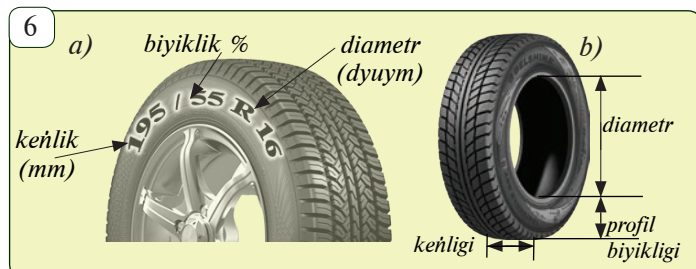
a) 	b) 	c) 
--	--	---

- 3.3. 3-súwrette súwretlengen gúlzarlardı 32 m sım menen orap bolama?
- 3.4. 4-súwrette xana tóbesi súwretlengen. Tóbeniń ishki bólegin aq, sırtqı bólegin bolsa jasıl reń menen boyaw gerek. 1. Súwrette belgilengen belgisiz kesindi úzınıńın tabıń. 2. Jasıl reńge boyalǵan tóbe bóleginiń maydanın tabıń. 3. Aq reńge boyalǵan tóbe bóleginiń maydanın tabıń.
- 3.5. Velosiped dóńgeleginiń diametri 64 cm. (5-súwret) Ashraf velosipedte 100 m aralıqtı basıp ótti. Bunda velosipedtiń hár bir dóńgelegi neshe márte tolıq aylandı? (Esletpe: sheńber uzınlıǵı $C=2\pi r$ formula menen esaplanadı).

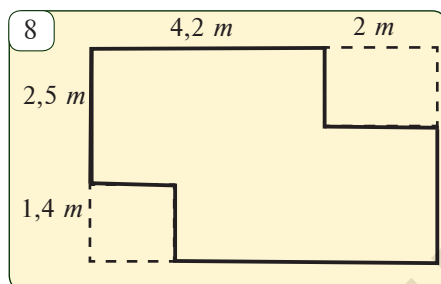
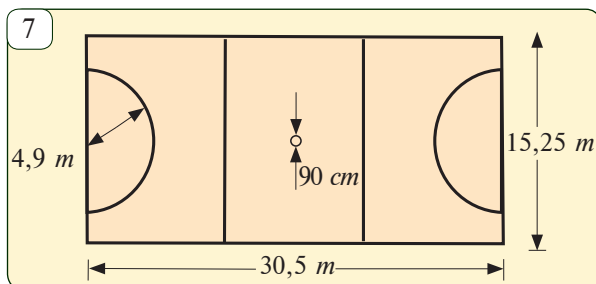


- 3.7. Avtomobil shinası sırtındaǵı jazıw belgili ólshemlerdi bildiredi (6.a-súwret). Mısalı, 195/55 R16 jazıwda 195 sanı shina keńligin mm lerde ańlatadı. (6.b-súwret). Ekinshi san 55 - shina profili biyikliginiń shina keńligine salıstırmalı payızın kórsetedi. Biziń jaǵdayda shina profili biyikligi $195 \cdot 55\% = 107 \text{ mm} = 10,7 \text{ cm}$. R16 jazıw bolsa shinanıń ishki diametriniń dyumlerdegi ańlatpası. 1 dyum shama menen 2,54 cm ekenligin esapqa alsaq, biziń shina ishki diametri $16 \cdot 2,54 = 40,64 \text{ cm}$ ge teń boladı.

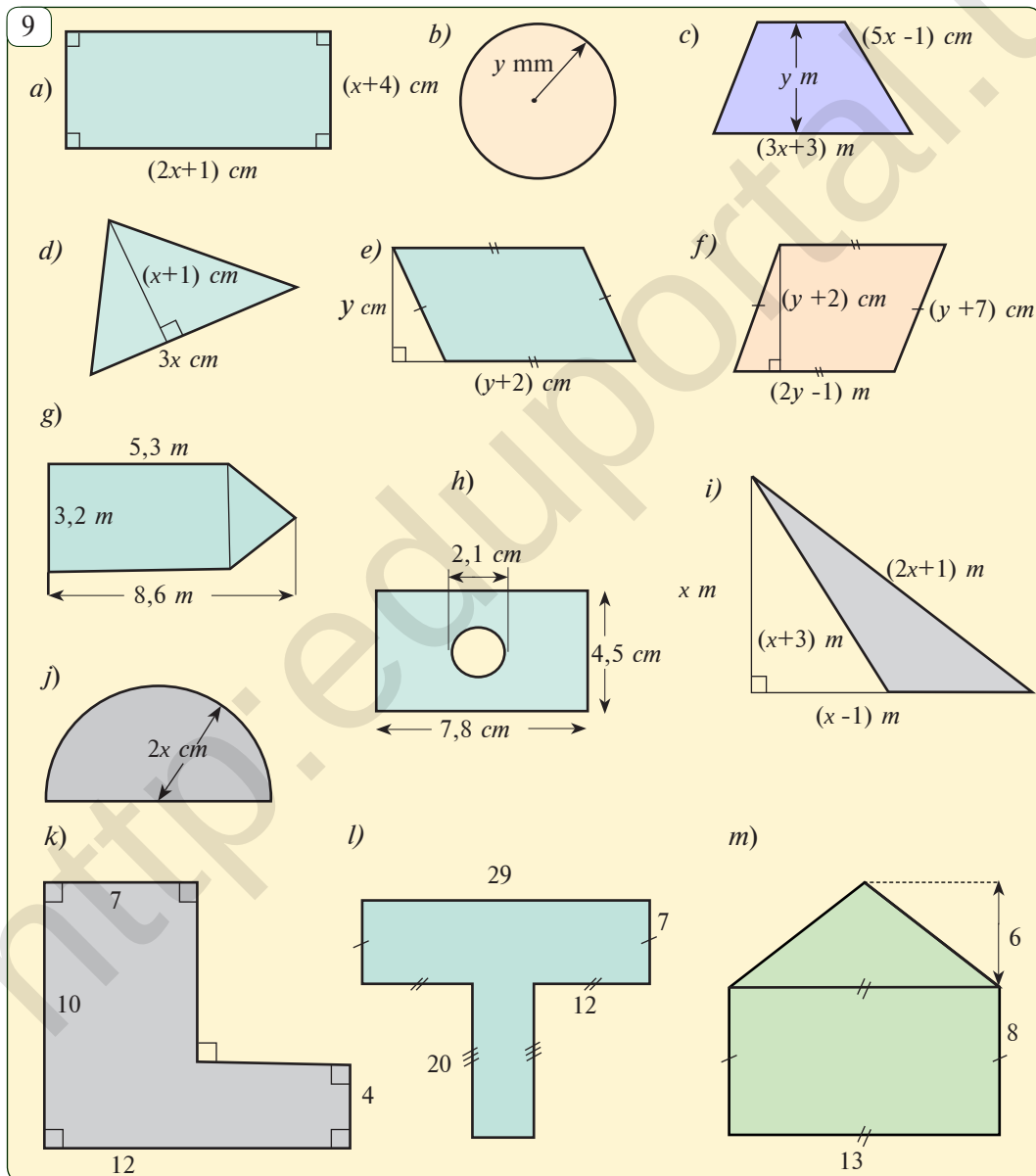
Ravon markadaǵı Neksiya avtomobili shinasında 175/60 R15 jazıw bar. Bul avtomobil shinasınıń keńligi, profil biyikligi, ishki diametri hám dóńgeleginiń biyikligi yaǵnıy sırtqı diametrin santimetrlerde anıqlań.

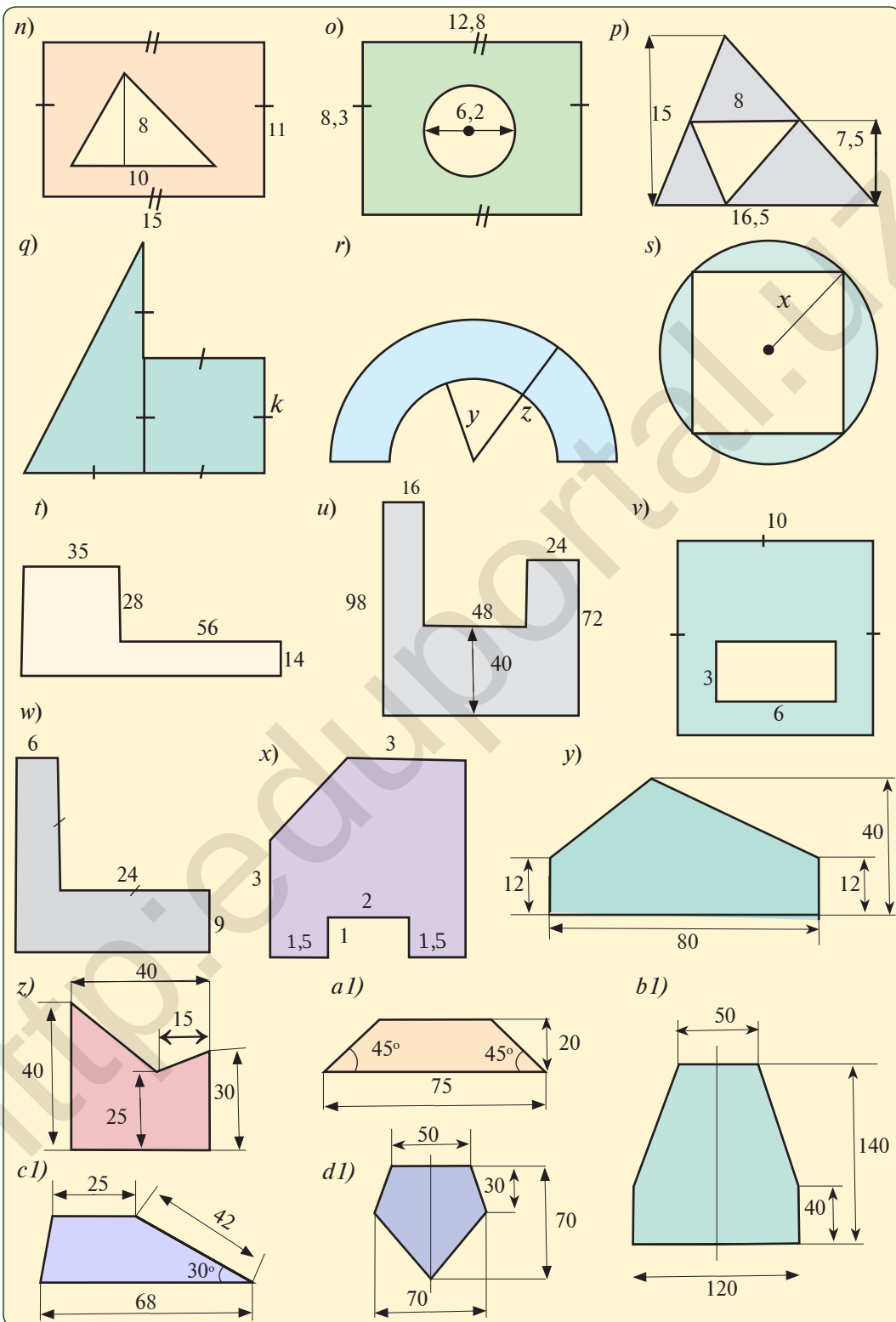


- 3.8. 7-súwrette berilgen amerikansha futbol stadionınıń perimetrin esaplań. Bul stadion maydanın belgilew ushın sıızlatúǵın sıızılardıń jámi uzınlıqların tabıń.
- 3.9. 8-súwrette súwretlengen jer maydanınıń perimetrin tabıń.

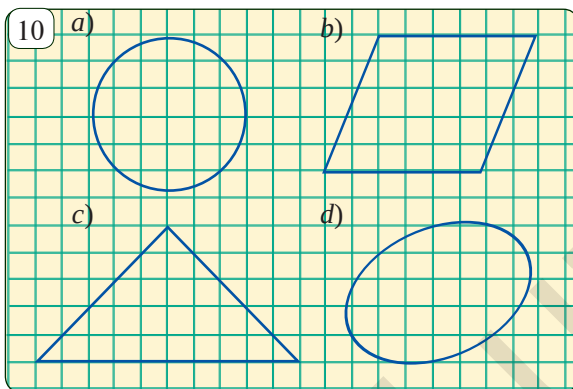


3.10. 9-súwrette súwretlengen túrli figuradağı betiniń maydanın tabırń.

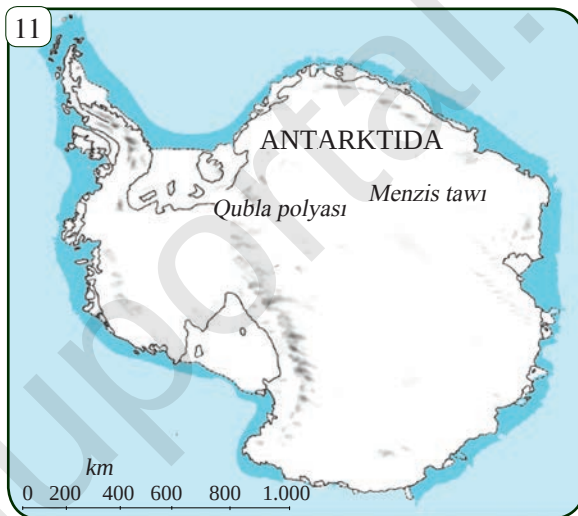




3.11. Ámeliy tapsırma. 10-súwrette keltirilgen figuralardı kletkalı dápterińizge sızıp alıń. Olardıń maydanın tabıw ushın qanday usıllardı usinasız? Dápterińiz kletkalerınan paydalangan halda olardıń maydanın shama menen qanday anıqlaw múmkin?

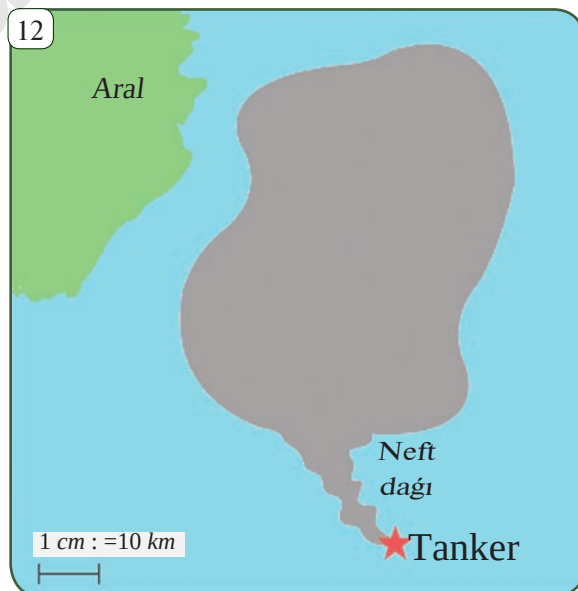


3.12. 11-súwrette Antraktida materiğiniń kartası keltirilgen. Berilgen masshtabtan paydalanıp hám tiyisli járdemshi jasawları orınlap, materiktiń maydanın shama menen anıqlań.



3.13. 12-súwrette neft tasıp kiyatırğan tanker avariyağa ushırıp, teńiz sırtında úlken neft dağı payda bólğan. Berilgen masshtabtan hám tiyisli ólshem islerin orınlap, neft dağıńnıń maydanın tabıń.

3.14. Tamarqa perimetri 48 m bólğan kvadrat túrinde. Onı 8 teńdey tuwrı tórtmúyeshlik figuradağı uchastkalarğa bólingen. Payda bolğan tórtmúyeshli uchastkalarğa a) táreplerin; b) maydanın anıqlań. Uchastkalarđnıń maydanı tamarqa maydanınan neshe payızğa kishi?



3.15. Perimetri 20 m, uzunlıgı eninen 1,5 márte uzun bólğan túwrıtórtmúyeshlik kórinisindegi tamarqa kishi uchastkalarğa bólingen. Eger uchastkalar a) kvadrat; b) tuwrı tórtmúyeshlik formasında bolsa, olar arasında maydanı eń úlken bolğanınıń ólshemlerin anıqlań.

4

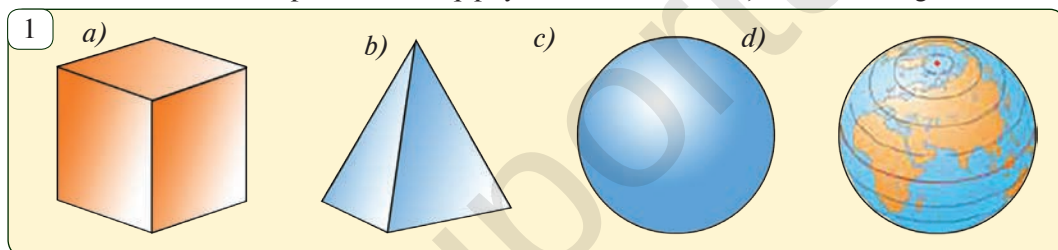
3D-GEOMETRIYA – KENISLIKTEGI DENELERDE PLANIMETRIYA MASELELARI

Málim bolıwınsha, tegis figuralardı geometriyanıń planimetriya bólimi, Kenislik denelerin stereometriya bólimi úyrenedi. Mısalı, túwrıtórtmúyeshlik - tegis figura bólıp, onıń uzınlıǵı hám eni, yaǵnıy eki ólshemi bar. Parallelepiped bolsa kenisliktegi figura bolıp, onıń boyı, eni hám biyikligi, yaǵnıy úsh ólshemi bar.

Kenislik deneleri haqqında aldınǵı klasslarda bilimge iye bolǵansız. Olardı 10—11-klasslarda stereometriya kursında tolıq, sistemalı túrde úyrenesiz. Sonday bolsada, stereometriyanıń qatar maseleleri bar, olardı tek planimetriya járdeminde hám sheshiw múmkin. Tómende planimetriyaǵa baylanıslı sonday 3D (3 demention - 3 ólshemli) geometrik maselelerdi keltiremiz. Kenisliktegi deneler haqqındaǵı tiykarǵı túsiniklerdi qısqaşa esletip ótiwdi lazım taptıq.

Kenisliktiń shegaralangan bólegi *kenislik denesi* deb ataladı. Kenislik denesiniń shegarasına (qabıǵına) onıń *beti* delinedi. Mısalı, Kenislik figurası - kubtıń beti 6 kvadrattan, shardıń beti sferadan ibarat boladı.

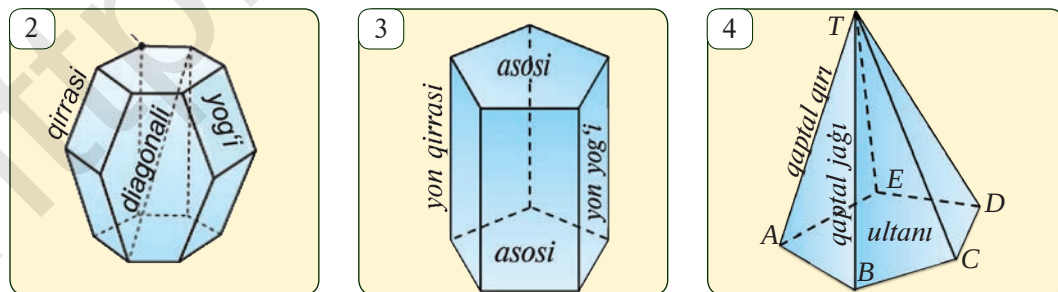
Eki bettiń kesilispesinen sıziq payda boladı. Mısalı, 1- súwrettegi kub hám



piramida qirları sonday tegisliklerdiń kesilispesinen payda bolǵan. Sfera hám tegisliktiń kesilispesinen bolsa sheńber payda boladı.

Eki sıziqtıń kesilispesinen noqat payda boladı. Mısalı, 1-súwrettegi kub hám piramidaniń qirlarınan noqatlar, yaǵnıy olardıń ushları payda boladı.

Kópjaqlılar deb tegis kópmúyeshlikler menen shegaralangan denegе aytiladı. Tegis kópmúyeshlikler bul *kópjaqlılar jaqları*, kópmúyeshliklerdiń ushları *kópjaqlılar ushları*, tárepleri bolsa *kópjaqlılar qirları* deb ataladı. Bir jaqqa tiyisli bólmaǵan ushların birlestiriwshi kesindi *kópjaqlılar diagonalı* dep ataladı (2-súwret).



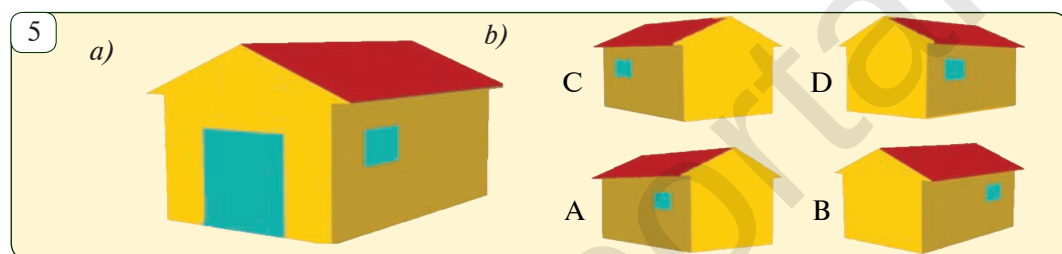
Prizma dep eki jaǵı teń kópmúyeshlikden, qalǵan jaqları bolsa parallelogrammlardan ibarat kópjaqlıǵa aytiladı (3-súwret). Teń jaqlar prizmanıń *ultanları*, parallelogrammlar bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. Ultanınıń tárepleri sanına

qarap prizmalar *úshmúyeshli, tórtmúyeshli hám basqa n-múyeshli prizmalar* dep júritiledi.

Piramida dep bir jaqlı kópmúyeshlikten, qalğan jaqları bolsa bir ushqa iye úshmúyeshliklerden ibarat kópjaqlıǵa aytıladı. Kópmúyeshlik piramidanın *ultanı*, úshmúyeshlikler bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. 4-súwrette *TABCDE* bes-múyeshlik piramida súwretlengen. *ABCDE* becmúyeshlik piramidanın ultanı, *ATB, BTC, CTD, DTE* hám *ETA* úshmúyeshlikler - onıń qaptal jaqları, *T* - bolsa onıń tóbesi.

4.1 5.a- súwrette garaj súwretlengen. 5.b- súwrette bolsa onıń túrli jaqtan kórinisleri berilgen. Olardan tek birewi joqarıdaǵı garajǵa tiyisli. Bul kórinis qaysı?

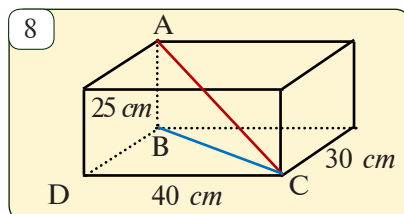
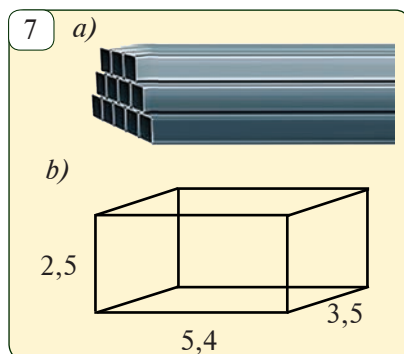
4.2. 6.a- hám 6.b- súwrette imarattıń qaptal tárepinen qaraǵanda kóringen súwretler keltirilgen. 6.c- súwrette bolsa imarat tóbesinen kórinisi hám oǵan qaraǵan tórt noqatlar orni belgilengen. Qaysı noqattan imaratqa qaraǵanda 1) 6.a- súwrettegi; 2) 6.b-súwrettegi súwretlerdi kóriw múmkin?

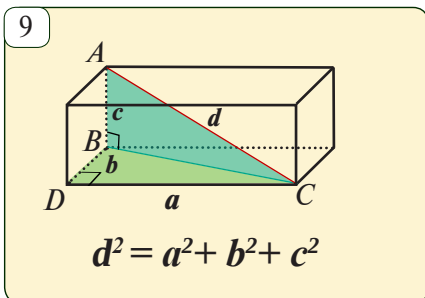


4.3. 12 dana 6 metrlik trubalar bar. (7.a-súwret). Olardan eni 3,5 m, boyı 5,4 m hám biyikligi 2,5 m bólgan túwrı múyeshli parallelepiped figuradaǵı garaj karkasın tayarlaw kerek. (7.b-súwret). Trubalar kerekli uzınlıqtaǵı bóleklerge kesilip, sóń paydalanadı.

Eń únemli variantta kesiwde bul karkas ushın neshe truba sarplanadı? Bunday kesiwde qansha truba shıǵındıǵa ketedi?

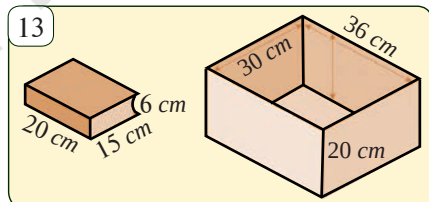
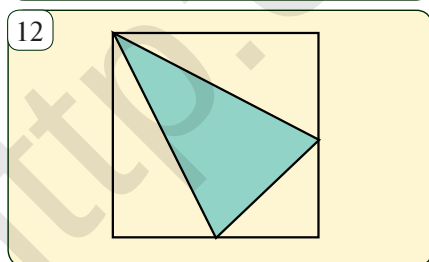
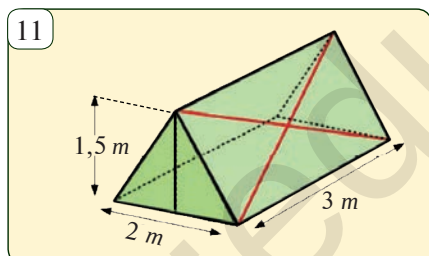
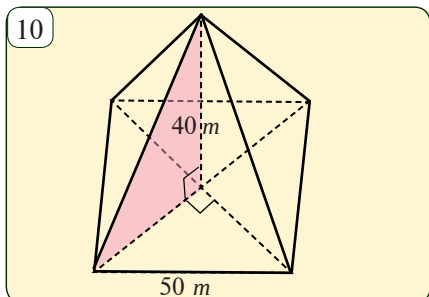
4.4. Bazı hawa jolları kompaniyaları samolyotlarına shıǵarılıp atırǵan jolawshılardıń chemodanı diagonalınıń uzınlıǵı 56 cm den úlken bolmawı kerek. 8-súwrette súwretlengen tuwrı múyeshli parallelepiped kórinisindegi, ólshemleri 40 cm x 30 cm x 25 cm bolǵan chemodandı samolyotqa alıp shıǵıw múmkinbe?





Joqarıdağı mäseleniñ sheshiminen ulıwma halda tómendegi ájayıp qásiyet kelip shıǵadı. Onı Pifagor teoremasınıñ keñisliktegi analogi (uqsaslıǵı) dep hám ataydı. Bul qásiyetti erkin orınlawǵa urınıp kóriñ. (9-súwret).

Teorema. *Tuwrı tórtmuyeshli parallelepiped diagonalınıñ kvadrati onıñ úsh ólshemleri (uzınlıǵı, eni hám biyikligi) kvadratlarınıñ qosındısına teñ.*



Sheshiliwi: Aldın chemodan ultanındağı BC kesindiniñ uzınlıǵın tabamız. Pifagor teoremasına kóre: $BC^2 = 40^2 + 30^2$.

ABC úshmuyeshlik tuwrımuyeshli úshmuyeshlik. Jáne Pifagor teoremasınan paydalanıp, chemodanıñ diagonalın tabamız:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

$$AC^2 = 25^2 + 40^2 + 30^2 = 3125. \quad AC = 55,9 \text{ cm.}$$

Juwabi: Múmkin, sebebi $AC < 56 \text{ cm}$.

4.5.10- súwrette súwretlengen túwrıtórtmuyeshli piramidanıñ biyikligi 40 m ge teñ, ultanı bolsa tárepi 50 m bolǵan kvadrattan ibarat. Piramidanıñ qaptal qırın tabıñ.

4.6.11- súwrette súwretlengen prizma kórinisidegi shertek tigiw ushın qansha material kerek boladı?

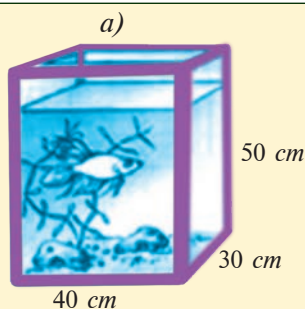
4.7. Tárepi 8 cm ge teñ bolǵan kvadrat kórinisidegi qaǵaz 12-súwrette kórsetilgende qılıp búklep piramida payda qılındı. Piramidanıñ kólemin tabıñ.

4.8. Túwrı tórtmuyeshli parallelepiped kórinisidegi ıdıstı hesh qanday ólshew ásbaplarınan paydalanbastan, hesh qanday esaplawlardı orınlamastan qanday qılıp jartısına shekem suw menen toltırıw múmkin? Eger ıdıstıñ bóyi 4 cm , eni bolsa biyikliginen $0,5 \text{ cm}$ uzın, biyikligi bolsa boyınıñ $37,7 \%$ in qurasa, ıdıstağı suw kólemin esaplañ.

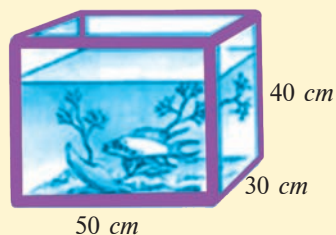
4.9. Birdey ólshemdegi kitaplardı sandıqqa salıw kerek (13-súwret). Bul sandıqqa neshe kitaptı jaylastırıwǵa boladı?

4.10. Eki akvariumge joqarı shetinen 10 cm tómén qılıp suw quyıldı (14-súwret). Qaysı akvariumde suw kóp?

14



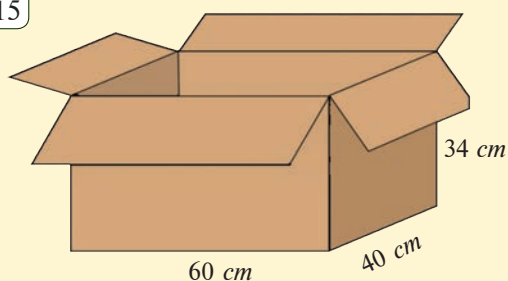
b)



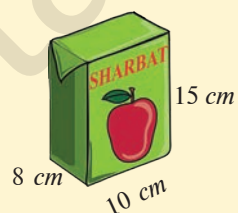
4.11. Qutığa neshe paket miywe sherbeti sıyadı (15-súwret)?

4.12. 1 litrli miywe sherbeti paketi túwrıtórtmuyeshli parallelepiped kóriniside (16-súwret). Bir qutı ushın qansha material kerek boladı?

15



16



4.13. 17.a-súwrette súwretleñen úydıń tóbesi piramida kóriniside. Tómente oqıwshılar tárepinen bul úydıń sızılması (matematik modeli) sızılğan. (17.b-súwret) hám bazı kesindilerdiń uzınlıqları kórsetilgen. Sızılmağa kóre úydıń ultanı $ABCD$ kvadrat kóriniside. Úydıń qırları $EFGHKL MN$ tuwrı tórtmúyeshli parallelepiped kórinisidegi beton blokka tirelgen: E - AT qırınıń, F - BT qırınıń, G - CT qırınıń hám H - DT qırınıń órtası. Piramidanıń hámme qırları uzınlıǵı 12 m .

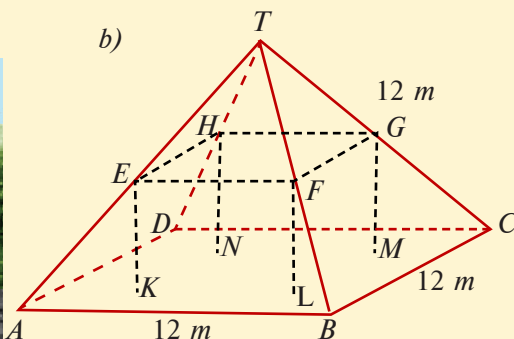
1. Úydıń ultanı $ABCD$ kvadrattıń maydanın tabıń.
2. Beton blogınıń tárepi - EF kesindi uzınlıǵın tabıń.

17

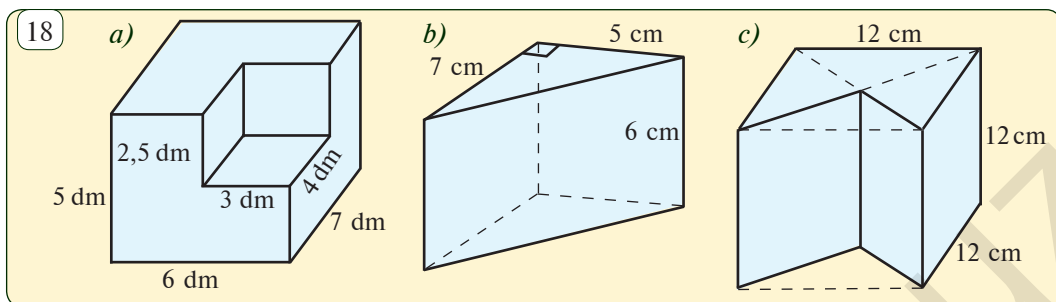
a)



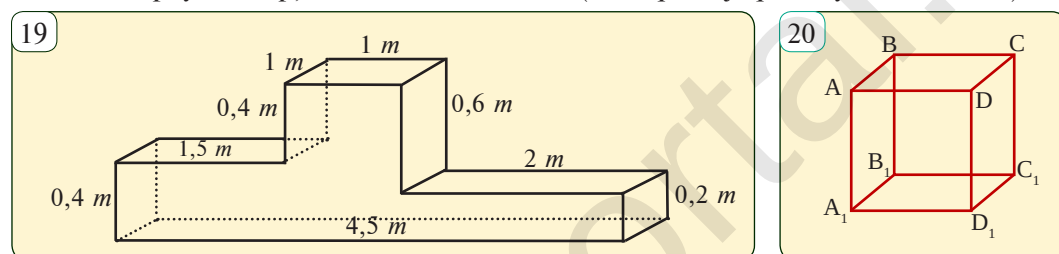
b)



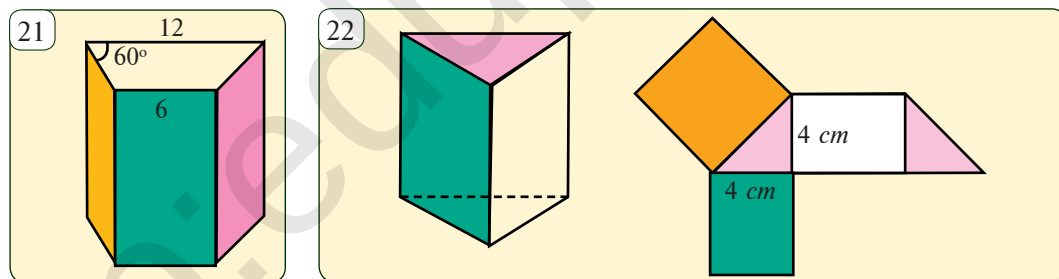
4.14*. 18-súwrette súwretlengen ağash bólekleriniń kólemin esaplań.



4.15. 19-súwrette sport arenasındaǵı jeńimpaz orınları súwretlengen. Berilgenlerden paydalanıp, onıń kólemin tabıń (barlıq eki jaqlı múyeshleri durıs).



4.16. 20-súwrette tuwrı tórtmúyeshli parallelepipedtiń AA_1D_1D jaqlarınıń perimetri 20 cm, $ABCD$ jaǵı - perimetri 16 cm bólgan kvadrattan ibarat. a) $ABCC_1D_1A_1$ sınıq sızıqtıń uzınıǵın; b) DD_1C_1C jaqtıń perimetrin hám maydanın; c) parallelepipedtiń kólemin tabıń.

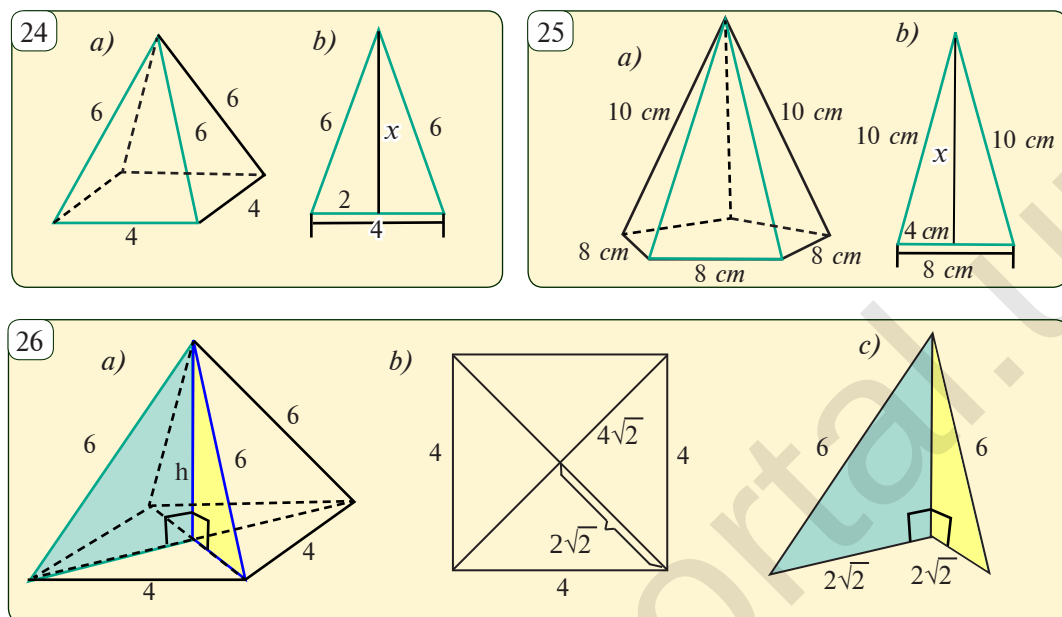


4.17. 21-súwrette súwretlengen durıs prizmanıń ultanı teń qaptallı trapetsiyadan ibarat. Trapetsiyanıń ultanları 12 cm hám 6 cm, ultanındaǵı súyir múyeshlerden biri 60° qa teń. Eger prizma úlken jaǵı kvadrattan ibarat bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

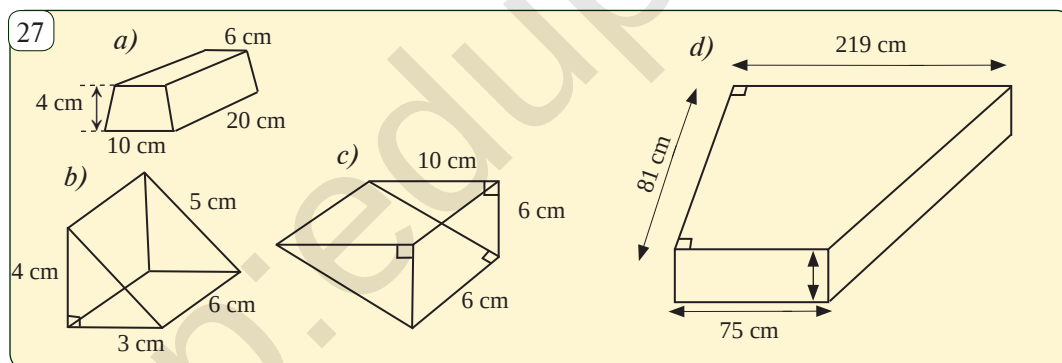
4.18. 22-súwrette prizma hám onıń jayılası súwretlengen. Eger prizma úlken jaǵı kvadrattan ibarat bolsa, onıń tolıq betiniń maydanın tabıń.

4.19. 23-súwrettegi durıs tórtmúyeshli piramida ultanına parallel bolǵan tegislik penen kesiliskende, kesik piramida payda boladı. Kesik piramida ultanlarınıń tárepi 20 cm hám 10 cm, qaptal qırı 13 cm bolsa, onıń tolıq betin tabıń.

4.20. 24-26-súwretlerde berilgan maǵlıwmatlar hám járdemshi sızılımlar tiykarında belgisiz aralıqlardı tabıń.



4.21. 27-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında kópjaqlılardıń tolıq betin hám kólemın tabıń.



Geometriya hám aǵash ustashılıǵı

Uzunlıǵı 2 m 20 cm, eni 12 cm hám qalınlıǵı 2 cm bolǵan reykalardan ata hám bala eni 1 m boyı 1 m 80 cm bolǵan ayna jasamaqshı.

1. Bul aynanı jasaw rejesin dúziń.
2. Jasalǵan aynanıń tuwrı tórtmúyeshlik figurada ekenligi a) Muyeshli sızǵısh; b) ruletka járdeminde qalay tekseriw múmkin.
3. 4 ta aynanı jasaw ushın neshe dana reyka talap qılınadı? (28-súwret).

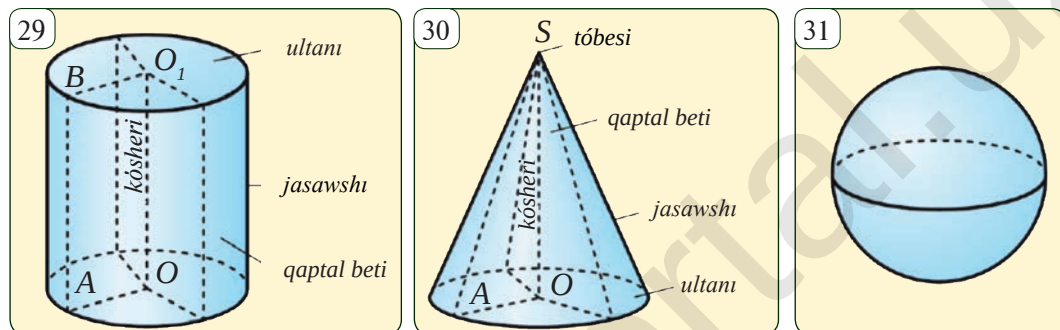


Keńislik figuralarınıń jáne áhmiyetli klaslarınan biri- bul aylanıw deneleri. Olarǵa cilindr, konus hám shar kiredi.

Tuwrı tórtmúyeshlik bir tárepi átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denegе *silindr* dep aytıladı. 29-súwrette cilindrdiń elementleri: ultanları, jasawshısı, kósheri hám qaptal beti súwretlengen.

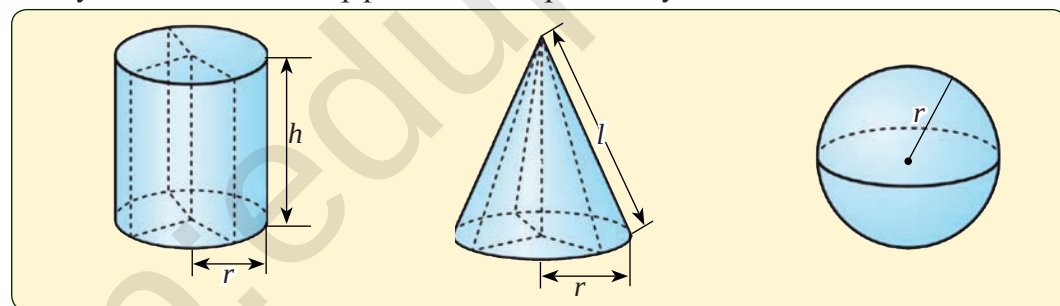
Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikti bir kateti átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denegе *konus* dep aytıladı. 30-súwrette konustıń tóbesi, qaptal beti, jasawshısı hám ultanı súwretlengen.

Dóńgelekti óz diametrik átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denegе *shar*



dep aytıladı. (31-súwret). Bul aylandırıwda sheńber payda qılǵan beti *sfera* dep ataladı. Bunnan belgili shardıń beti sferadan ibarat boladı. Sfera orayınan onıń qálegen noqatına shekem bolǵan aralıq onıń radiusin anıqlaydı.

Aylanıw deneleriniń qaptal hám tolıq beti maydanınıń formulaları:



Cilindr

$$\begin{aligned} S_{q.b} &= 2 \pi r h \\ S_{tolıq b} &= 2 S_{ult} + S_{q.b} = \\ &= 2 \pi r^2 + 2 \pi r h \end{aligned}$$

1- másele

$$\begin{aligned} h &= 5 \text{ cm}, r = 6 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S_{q.b} &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \approx \\ &\approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 6 = 565 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

Konus

$$\begin{aligned} S_{q.b} &= \pi r l \\ S_{tolıq b} &= S_{ult} + S_{q.b} = \\ &= \pi r^2 + \pi r l \end{aligned}$$

2- másele

$$\begin{aligned} r &= 5 \text{ cm}, l = 12 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S_{tolıq b} &= \pi r^2 + \pi r l \approx \\ &\approx 3,14 \cdot 5^2 + 3,14 \cdot 5 \cdot 12 = \\ &= 267 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

Shar

$$S = 4 \pi r^2$$

3- másele

$$\begin{aligned} r &= 8 \text{ cm} \text{ bolsa,} \\ S &= 4 \pi r^2 \approx \\ &\approx 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = \\ &= 803,84 (\text{cm}^2). \end{aligned}$$

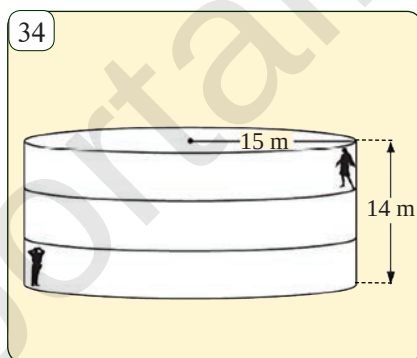
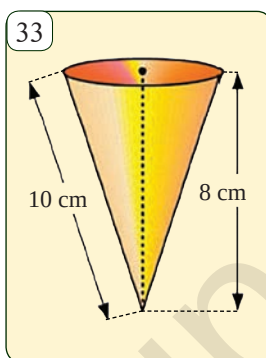
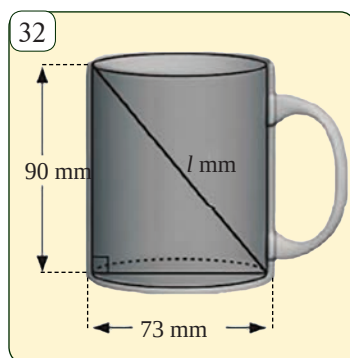
Tómende planimetriya járdeminde sheshiletuǵın aylanıw denelerge tiyisli máselelerdi qarap shıǵamız.

4.22. Shar orayınan onıń sırtında jatqan 4 noqatqa shekem bolǵan aralıqlar qosındısı 24 cm ge teń. Shar diametrin tabıń.

4.23. Ashraftıń finjani (kofe ishetuǵın ıdısı) biyikligi 90 mm , ultanınıń diametri 73 mm ge teń (32-súwret). Kofege salınǵan qumsheker yaki sútti aralastırıw waqtında Ashraftıń qolı kúymewi ushın qasıqtıń uzınlıǵı keminde qansha bolıwı kerek.

Sheshiw: Qasıqtıń uzınlıǵın 32-súwrettegidey l dep alsaq, onda Pifagor teoremasına kóre: $l^2 = 73^2 + 90^2 = 13429$ ga iye bolamız. Bundan $l = 115,9\text{ mm}$.

Juwabı: Qasıqtıń uzınlıǵı 116 mm den kem bolmawı lazım.

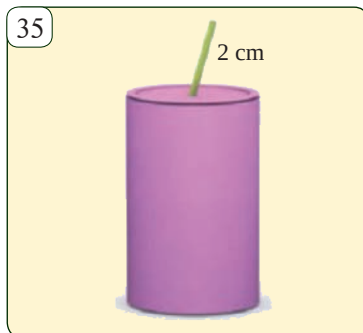


4.24. 33-súwrette berilgenlerden paydalanıp, konus formasındaǵı muzqaymaq ultanınıń radiusın tabıń. Onıń kólemin tabıń.

4.25. 34-súwrette súwretlengen London qalasındaǵı Shekspir Globus teatr silindr formasında. Súwrette berilgenlerden paydalanıp teatrdıń tómengi muyeshindegi aktyor dawısı joqarıda turǵan tamashagóyge jetip barıwı ushın qansha aralıqtı basıp ótiwin anıqlań?

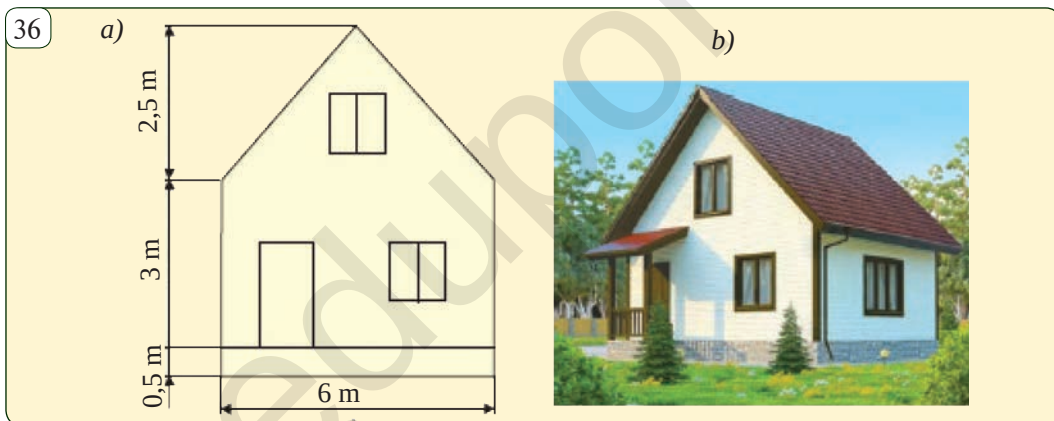
4.26. 35-súwrette súwretlengen cilindr formasında ıdıstıń biyikligi 12 cm , kenligi bolsa 8 cm . Joqarı ultanı qaq ortasında tesik bar. Bul ıdıstan ishimlik ishiw ushın mólsherlengen naysha uzınlıǵı qansha bolıw kerek? Nayshanıń kórinip turǵan bóleginiń uzınlıǵı 2 cm .

4.27. Mıstan islengen biyikligi 30 cm bolǵan konus eritilip, onnan cilindr jasaldı. Eger konus hám cilindr ultanları teń shenberlerden ibarat bolsa, payda bolǵan cilindr biyikligin tabıń.



Joybar jumısı teması ústinde oqıwshılar jeke-jeke yáki 3-4 kisilik topar bolıp islewleri mumkin. Joybar jumısı oqıw jılı aqırında ótkiziletuǵın qorgaw (kishi konferenciya) menen tamamlanadı. Joybar jumısı ustinde jumıs prosesi tómendegi oqıw iskerliklerin óz ishine alıwı múmkin: izleniw iskerligin rejelestiriw, wazıypalardı óz ara bólistiriw, oqıw maqsetlerin qoyıw, kerekli maǵlıwmatlardı izlep tabıw, temaǵa tiyisli mashqalalı sheshimlerin izlew, olardan eń kereklisin tańlaw hám onı tiykarlaw, zárur jaǵdaylarda sorawlar yaki tájiriybeler ótkiziw, joybar jumısı natiyjeleri boyınsha esabat tayarlaw, óz jumıs barısın analizlew hám bahalaw, joybar jumısı qorgawı ushın kórgizbe tayarlaw hám onı qorgaw. Oqıwshılar joybar jumısı boyınsha izleniwlerdi jıl dawamında ádette sabaqtan tısqarı óz betinshe shınıǵıwlarında alıp barıladı.

Joybar jumısı temaları ámeliy, teoriyalıq hám izertlew xarakterinde bolıwı múmkin. Ameliy jumısta geometriyadan ózlestirilgen bilim hám kónlikpeler turmıs jaǵdaylarındaǵı mashqalalardı sheshiwge qollanıladı. Teoriyalıq joybar jumıslarında bolsa geometriyanıń bazı bir teması tereńirek úyreniledi. Izertlew jumıslarında



bolsa bazı bir standart emes geometriyalıq másele yáki turmıslıq mashqalanı sheshiw ústinde kishi ilimiy izleniwler alıp barıladı.

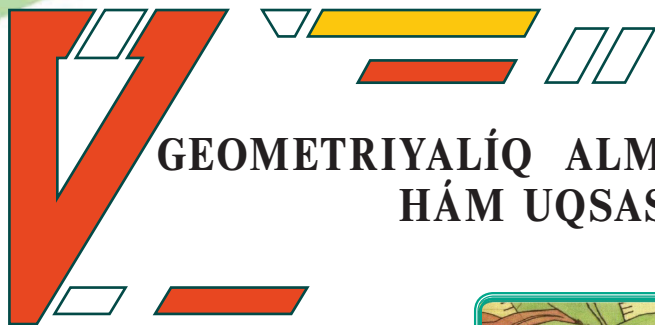
Ámeliy joybar jumısı úlgisi

Joybar tapsırması. 36-súwrette súwretlengen dala hawlisindegi úy diwalların boyaw kerek. Úydi qurıw rejesi (tapsırmaǵa qosımsha etiledi) tiykarında bul jumıstı orınlaw ushın eń tejemli (arzan) joybardı islep shıǵıń.

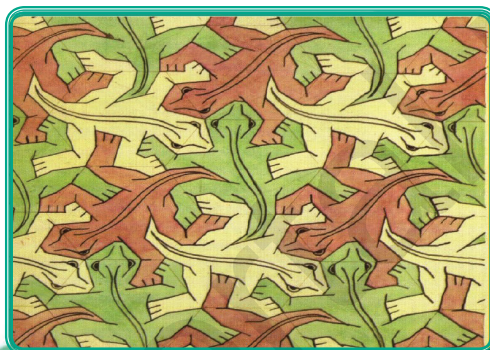
Joybar jumısın orınlaw prosesinde oqıwshılar úy rejesin óz úyrenip shıǵadı. Wazıypalardı anıqlap, reje dúzedi hám jumıslardı óz ara bólisip aladı. Dáslep boyalatıuǵın maydandı anıqlap alınadı. Boyaw ushın qansha boyaw kerekligi sorap anıqlanadı. Bir neshe boyaw túrleri boyınsha esap-kitap qılınadı. Qaysı boyaw isletilse, maqsetke muwapıq bolıwı anıqlanadı hám tiykarlanadı. Tańlangan boyaw boyınsha barlıq esap-kitap isleri orınlanadı ham joybar jumısın hámde ol boyınsha kórgizbe tayarlanadı.

Eskertiw: Súwrette úy rejesiniń hámmesi keltirilmegen.

I BAP



GEOMETRIYALÍQ ALMASÍWTÍRÍWLAR HÁM UQSASLÍGÍ



Bul bapni úyreniw barısında siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

Bilimler:

- ✓ uqsas figuralardıń táreplerin hám belgileniwini biliw;
- ✓ úshmüyeshliktiń uqsaslıq belgilerin biliw;
- ✓ gomotetiya túsiniğini biliw.

Ámeliy kónlikpeler:

- ✓ eki uqsas úshmüyeshliklerden óz ara sáykes elementlerin taba alıw;
- ✓ úshmüyeshliklerdiń uqsaslıq táreplerin dálillew hám esaplawğa baylanışlı máselelerdi sheshiwde qollay alıw;
- ✓ gomotetiyadan paydalanıp uqsas kóp müyeshliklerdi jasay alıw.

6

КОПМУYESHЛИКЛЕРДИН УQСАСЛІГІ



Кўнделикли турмиста тең фигуралардан басқа формаси (кўриниси) бир қыялы, лекин ўлшемлери тўрлише болған фигураларға да дус келемиз. Тарих ҳәм география пәнлеринде тўрли массштабта исленген карталардан пайдаланғанбыз. Класс тاختасына илдирилген ҳәм сабақлықта сўвретленген республикамыздың карталары тўрли ўлшемде, лекин олар бир қыялы формада (кўринисте). Сондай-ақ, бир фото-пльонкadan тўрли ўлшемдеги фотосўвретлер таярланadı. Бул сўвретлердин ўлшемлери тўрлише болса да, бир қыялы кўринисте, яғни олар бир-бирине ұқсайды (1-сўврет).

Шиниғиw. 2-сўвrette тўрт ромб сўвретленген. Олардан тек d) ҳәм e) ромблар бир қыялы кўринисте ие. Бул ромблар неси менен басқа ромблардан ажыралып турады? Келиң, биргеликте анықлайық.

Келиң, буни биргеликте анықлаемиз.

1. Сўвреттен кўринип турғанндай, $AD=3$, $A_1D_1=2$. Ромбның тәреплери тең болғаны ушын,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

теңлигин пайда етемиз. Бул жағдайда ромблардың сәйкес тәреплери пропорционал деп айтылады.

2. $ABCD$ ҳәм $A_1B_1C_1D_1$ ромбларда

$\angle A = \angle A_1 = 45^\circ$, $\angle B = \angle B_1 = 135^\circ$, $\angle C = \angle C_1 = 45^\circ$, $\angle D = \angle D_1 = 135^\circ$. Бул жағдайда ромблардың сәйкес мұйешлери өз ара тең деп жүритиледи.

Солaй етип, бул ромблардың бир-бирине ұқсаслығының себеби — сәйкес тәреплеринин пропорционалығы ҳәм сәйкес мұйешлеринин теңлиги деп айта аламыз. Қалеген көпмұйешликлердин ұқсаслығы түсиниги де усы тийкаринда кiritиледи.

Еки көпмұйешлик (бесмұйешлик) $ABCDE$ ҳәм $A_1B_1C_1D_1E_1$ көпмұйешликлеринин мұйешлери сәйкес түрде тең болсын: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$. Бундай мұйешлер сәйкес мұйешлер деп айтылады. Онда, AB ҳәм A_1B_1 , BC ҳәм B_1C_1 , CD ҳәм C_1D_1 , DE ва D_1E_1 , EA ҳәм E_1A_1 тәреплери көпмұйешликке **сәйкес тәреплери** деп айтылады.

✓ Анықлама. Бир қыялы атамалы көпмұйешликлердин биринин мұйешлери екіншисинин мұйешлерине сәйкес түрде тең, сәйкес тәреплери болса пропорционал болса, бундай көпмұйешликлер **ұқсас көпмұйешликлер** деп аталады (3-сўврет).

Kópmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı $\sim$ belgisi menen belgilenedi.

3 Sáykes múyeshlerge teń

$$F \sim F_1 \begin{cases} \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1, \\ \angle D = \angle D_1, \angle E = \angle E_1 \\ \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{E_1A_1}{EA} = k \end{cases}$$

Sáykes tárepler proporcional

Uqsas kópmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnasına teń bolǵan k sanı bul kópmúyeshliklerdiń *uqsashlıq koefficienti* delinedi.

1- Músele. 4-súwrettegi kópmúyeshliktiń uqsaslıǵı belgili bolsa, belgisiz uzınlıqtı tabıń.

Sheshiliwi: Bul kópmúyeshlik uqsaslıǵınan olardıń sáykes tárepleriniń proporcional ekenligi kelib shıǵadı.

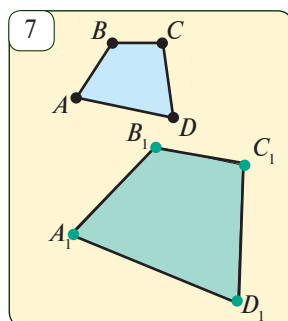
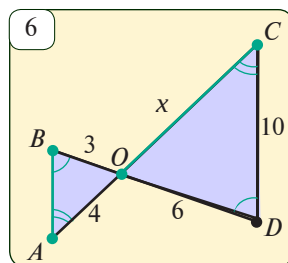
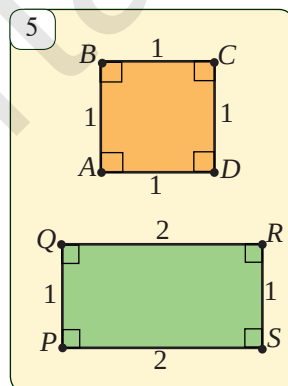
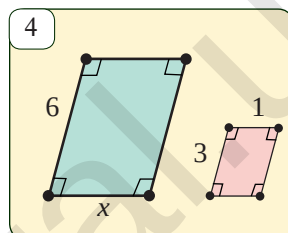
Demek, $\frac{x}{6} = \frac{1}{3}$. Bunnan $x = 6 : 3 = 2$ ekenligin tawamız.

Juwabı. $x = 2$.

2-músele. 5-súwrette súwretlengen tórtmúyeshlikler uqsaspa? Nege?

Sheshiliwi: Yaq sebebi, olardıń sáykes tárepleri teń (90°) bolsada, sáykes tárepleri proporcional emes:

$$\frac{AB}{PQ} = 1 \neq \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$$



? Músele hám shıǵıwlar

6.1. Uqsas koefficienti degen ne hám ol qanday anıqlanadı?

6.2. Eger ABC hám DEF úshmúyeshliklerinde $\angle A = 105^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle E = 105^\circ$, $\angle F = 40^\circ$, $AC = 4,4$ cm, $AB = 5,2$ cm, $BC = 7,6$ cm, $DE = 15,6$ cm, $DF = 22,8$ cm, $EF = 13,2$ cm bolsa, olar uqsas bola ma?

6.3. 2-súwrettegi súwretlengen a) hám b) romblar ne sebepten uqsas emes? b) hám d) romblar-she?

6.4. 6-súwrettegi ABO hám CDO úshmúyeshlikleri uqsas bolsa, AB , OC tárepleri uzınlıǵın hám uqsashlıq koefficientin tabıń.

6.5. 7-súwrette $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$. $AB = 24$, $BC = 18$, $CD = 30$, $AD = 54$, $B_1C_1 = 54$. A_1B_1 , D_1A_1 hám C_1D_1 lardı tabıń.

6.6*. ABC úshmúyeshliginiń AB hám AC tárepleriniń ortaları sáykes túrde P hám Q bolsın. $\triangle ABC \sim \triangle APQ$ ekenligin dáliyleń.

7

UQSAS ÚSHMÚYESHLIKLER HÁM OLARDÍN QÁSIYETLERI

Eñ ápiwayı kópmúyeshliklerden bolğan úshmúyeshliklerdín uqsaslıgın úyrenemiz.

Teorema. *Eki uqsas úshmúyeshlik perimetrlerinin qatnasına uqsaslıq koefficientiniñ teñ.*

Bul teoremanı óz betiñizshe dáliyllen.

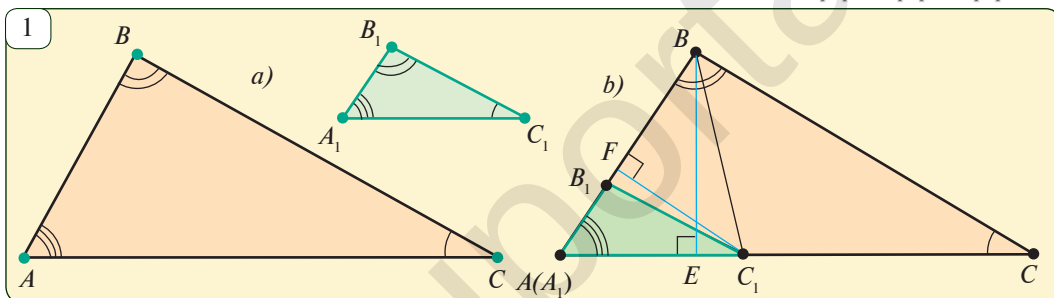
Teorema. *Eki uqsas úshmúyeshlik maydanlarının qatnası uqsaslıq koefficientiniñ kvadratına teñ.*

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (1-a súwret),
 k — uqsaslıq koefficienti



$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$

Dálillew: Teoremanıñ shártı boyınsha, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Demek, kópmúyeshliklerdín uqsaslıgınıñ anıqlaması boyınsha, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$



$\angle A = \angle A_1$ ekenliginen paydalanıp, olardı 1-b, súwrettegidey ústpe-úst qoyamız hám tiyisli jasaw hámde belgilewlerdi ámelge asıramız.

Tómendegı úshmúyeshliklerdín maydanların tabamız hám olardıñ qatnasların qaraymız:

$$\left. \begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{AC \cdot BE}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{A_1C_1 \cdot BE}{2}; \\ S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC_1}} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad (1),$$

$$\left. \begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= \frac{A_1B_1 \cdot C_1F}{2}; \\ S_{ABC_1} &= \frac{AB \cdot C_1F}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC_1}} = \frac{A_1B_1}{AB} \quad (2).$$

(1) teñlikti aǵzama-aǵza (2) teñlikke bólsek, teñ múyeshke iye bolğan úshmúyeshliklerdín maydanınıñ qatnası ushın (3) teñlikti payda etemiz.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad (3)$$

Bul jerde shárt boyınsha, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$ ekenligin esapqa alsaq,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

teñlik kelip shıǵadı. **Teorema dáliyllendi.**

1-másele. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnası usı táreplerge túsirilgen biyikliklerdiń qatnasına teń ekenligin dáliylleń (2-súwret).

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, BD, B_1D_1 — biyiklikleri

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$$

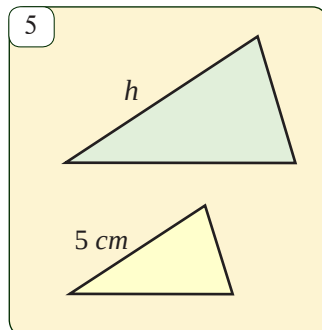
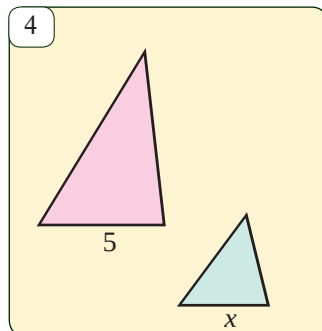
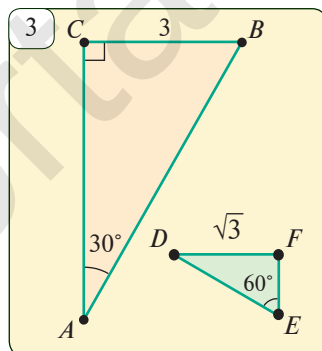
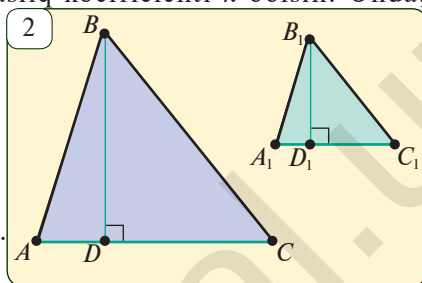
Sheshiliwi. Berilgen úshmúyeshliklerdiń uqsaslıq koefficienti k bolsın. Onda, $AC : A_1C_1 = k$; $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = k^2$ (1) boladı. Ekinshi tárepten,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BD}{\frac{1}{2} A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} \quad (2)$$

(1) hám (2) teńliklerden $k \cdot \frac{BD}{B_1D_1} = k^2$ yaqı $\frac{BD}{B_1D_1} = k$.

Solay etip, $\frac{BD}{B_1D_1}$ hám, $\frac{AC}{A_1C_1}$ qatnası da

k ga teng, yaǵnıy $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$.



? Másele hám shınıǵıwlar

7.1. Uqsas úshmúyeshliklerdiń maydanlariniń qatnası haqqındaǵı teoremanı aytıń hám dáliylleń.

7.2. Eki ABC hám $A_1B_1C_1$ uqsas úshmúyeshlikleri berilgen. Eger $S_{ABC} = 25 \text{ cm}^2$ hám $S_{A_1B_1C_1} = 81 \text{ cm}^2$ bolsa, uqsaslıq koefficientin tabıń.

7.3. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanları 65 m^2 hám 260 m^2 . Birinshi úshmúyeshliktiń bir tárepi 6 m bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń oǵan sáykes tárepin tabıń.

7.4. Berilgen úshmúyeshliktiń tárepleri 15 cm , 25 cm hám 30 cm . Eger perimetri 35 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen úshmúyeshlikke uqsas bolsa, onıń táreplerin tabıń.

7.5. Tárepleri 12 cm , 20 cm hám 13 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen. Eger kishi tárepi 9 cm bolǵan úshmúyeshlik berilgen úshmúyeshlikke uqsas bolsa, onıń qalǵan táreplerin tabıń.

7.6. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ hám bul úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń qatnası $7:5$ ke teń. Eger ABC úshmúyeshliginiń maydanı $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliginiń maydanınan 36 cm^2 ge artıq bolsa, bul úshmúyeshliklerdiń maydanların tabıń.

7.7. 3-súwrette berilgenlerden paydalanıp, úshmúyeshliklerdiń uqsas yaqı uqsas emesligin anıqlań.

7.8. 4-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas hám maydanlariniń qatnası $25:9$ qatnasta bolsa, belgisiz kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

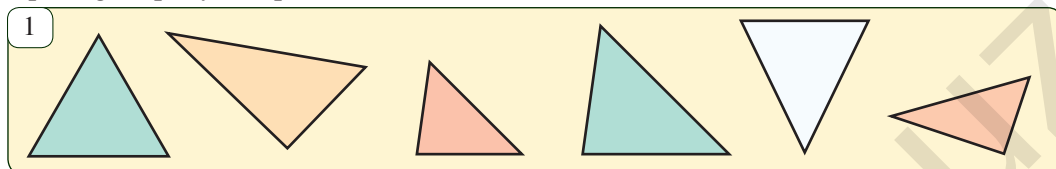
7.9. 5-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas hám $S_1:S_2=49:25$ bolsa belgisiz tárepin tabıń.

8

ÚSHMÚYESHLIKLERDİN UQSASLÍĞÍNÍN BIRINSHI BELGISI

Jedellestiriwshi shınıǵıw

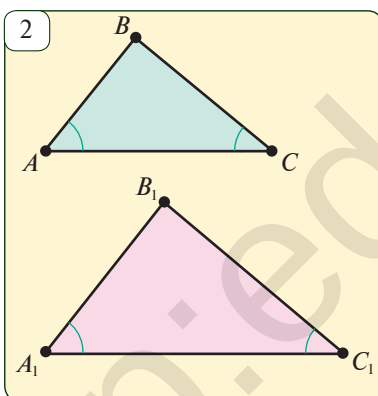
1-súwrette súwretlengen úshmúyeshliklerdın ishinen uqsasların anıqlań. Olardıń uqsaslıǵın qalay anıqladıńız?



Anıqlama boyınsha eki úshmúyeshliktiń uqsaslıǵın anıqlaw ushın olardıń múyeshleriniń teńligin hám sáykes tárepleriniń proporcional ekenligin tekseriw kerek boladı. Úshmúyeshlikler ushın bul is ansatlasadı eken. Tómende keltirilgen teoremlar usı tuwralı bolıp, olar “úshmúyeshliklerdın uqsaslıǵınıń belgileri” dep ataladı.

Teorema. (Úshmúyeshliklerdın uqsaslıǵınıń BB belgisi). Eger bir úshmúyeshliktiń eki múyeshi ekinshi úshmúyeshliktiń eki múyeshine sáykes túrde teń bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı (2-súwret).

$$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



Dáliyllew. 1. Úshmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındaǵı teorema boyınsha,

$$\left. \begin{aligned} \angle B &= 180^\circ - (\angle A + \angle C), \\ \angle B_1 &= 180^\circ - (\angle A_1 + \angle C_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle B = \angle B_1$$

Demek, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń múyeshleri sáykes túrde teń.

2. Shárt boyınsha, $\angle A = \angle A_1, \angle C = \angle C_1$. Teńdey múyeshke iye bolǵan úshmúyeshliklerdın maydanlarınń qatnası haqqındaǵı teorema bolsa,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \text{ hám } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}.$$

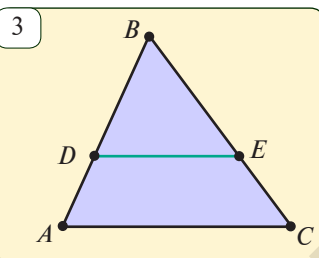
Bul teńliklerdın óń bólimlerin teńlestirip, bir qıylı aǵzalar qısqartılsa,

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ teńligi payda boladı. Sonday-aq, $\angle A = \angle A_1$ hám $\angle B = \angle B_1$ teńliklerinen paydalanıp, $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ teńliklerinen paydalanıp, teńligine iye bolamız. Solay etip, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń múyeshleri teń hám sáykes tárepleri proporcional, yaǵnıy bul úshmúyeshlikler uqsas boladı. **Teorema dáliyllendi.**

Másele. ABC úshmúyeshliginiń eki tárepini kesip ótiwshi hám úshinshi tárepine parallel bolǵan DE tuwrısı úshmúyeshlikten oǵan uqsas úshmúyeshlik ajratatuǵınıń dáliyllen (3-súwret).

Дэлийллев. ABC ҳам DBE ўшмўйешликларда $\angle B$ — улулма, $\angle CAB = \angle EDB$ (AC ҳам DE параллел тувларин AB кесилши менен кескенде пайда болган сáйкес мўйешлер болгану ушун) (3-сўврет).

Демек, ўшмўйешликлардин уқсаслигинин ММ белгиси бойинша, $ABC \sim \triangle DBE$.

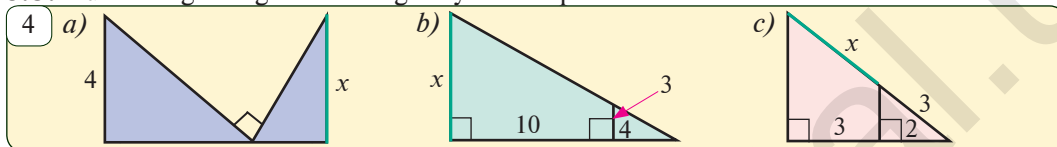


? Мáсеle ҳам тáпсирмáлар

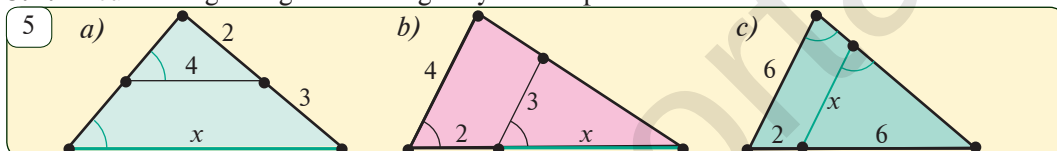
8.1. Ўшмўйешликлардин уқсаслиқ аниқламаси ҳам ММ белгисин óз ара салóстирин.

8.2. Ўшмўйешликлардин уқсаслигинин ММ белгисин дáлийллев.

8.3. Сўвреттеги мағлўматларгá тийкарланп x тi табин.



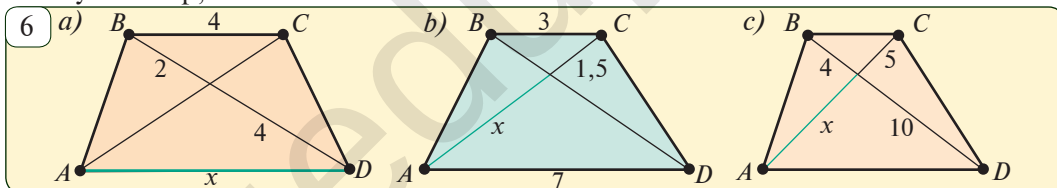
8.4. 5-сўвреттеги мағлўматларгá тийкарланп x тi табин.



8.5. $ABCD$ параллелограмминин CD тáрепинен E нoқáтi алинган. AE ҳам BC нurlарi F нoқáтinda кесилесиди.

- a) Eгер $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см болса, EF ҳам FC тi;
b) Eгер $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см болса, DE ҳам EC тi табин.

8.6. 6-сўвретте $ABCD$ — трапецияси берилген. Сўвреттеги мағлўматларгá тийкарланп, x тi табин.

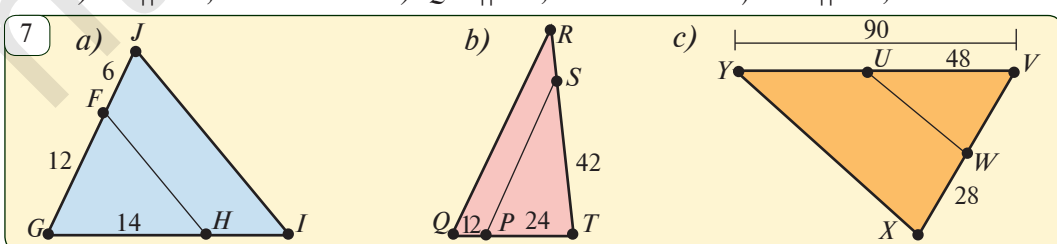


8.7*. Бир сўйир мўйешлери тең болган еки тувлу мўйешшли ўшмўйешликлер уқсас екенлигин дáлийллев.

8.8*. ABC ўшмўйешлигинин AC тáрепинде D нoқáтi алинган. Eгер $\angle ABC = \angle BDC$ болса, ABC ҳам BDC ўшмўйешликлеринин уқсас екенлигин дáлийллев. Eгер $3AB = 4BD$ ҳам $BC = 9$ см болса, AC кесиндисин табин.

8.9. 7-сўвретте берилгенлерге тийкарланп белгисиз кесиндини табин.

- a) $IJ \parallel FH$, HI - ? b) $QR \parallel PS$, RS - ? d) $XY \parallel UW$, VX - ?

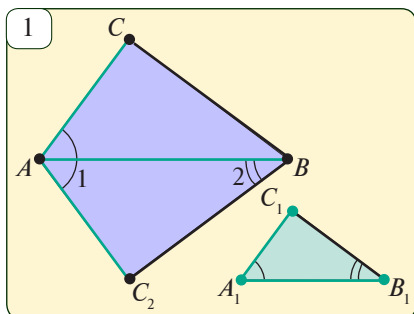


9

ÚSHMÚYESHLIKLERDÍN UQSASLÍGÍNÍN EKIHSI BELGISI

Teorema. (Úshmúyeshliklerdín uqsaslıgının TMT belgisi). Eger bir úshmúyeshliktiń eki tárepi ekinshi úshmúyeshliktiń eki tárepine proporcional hám bul tárepler payda etken múyeshler teń bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı (1-súwret).

$$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



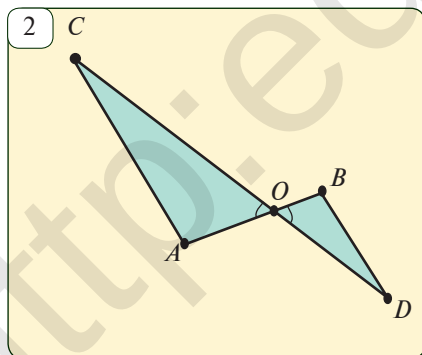
Dáliytlew. $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ bolatuǵında etip ABC_2 úshmúyeshligin jasaymız (1-súwret). Ol MM belgisi boyınsha $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligine uqsas boladı.

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC_2: \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$$

Shárt boyınsha: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

Bul eki teńlikten, $AC_2 = AC$ ekenligin anıqlaymız. Onda úshmúyeshliklerdín teńliginiń TMT belgisi boyınsha, $\triangle ABC = \triangle ABC_2$. Sonlıqtan, $\angle 2 = \angle B$. Lekin, jasaw boyınsha, $\angle 2 = \angle B_1$ edi. Demek, $\angle B = \angle B_1$. Onda, $\angle A = \angle A_1$ hám $\angle B = \angle B_1$ bolǵanı ushın, úshmúyeshliklerdín uqsaslıgının MM belgisi boyınsha, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. **Teorema dáliytlendi.**

Músele. AB hám CD kesindileri O noqatında kesilisedi, $AO = 12$ cm, $BO = 4$ cm, $CO = 30$ cm, $DO = 10$ cm bolsa, AOC , BOD úshmúyeshlikleriniń maydanlarınıń qatnasın tabıń.



Sheshiliwi: Shárt boyınsha,

$$\left. \begin{aligned} \frac{OA}{OB} &= \frac{12}{4} = 3 \\ \frac{OC}{OD} &= \frac{30}{10} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = 3.$$

Demek, AOC úshmúyeshliginiń eki tárepi BOD úshmúyeshliginiń eki tárepine proporcional hám bul táreplerdín arasıdaǵı sáykes múyeshler

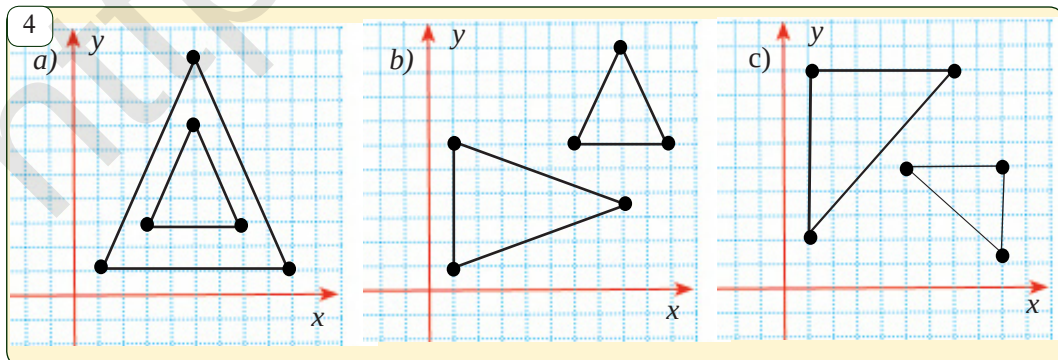
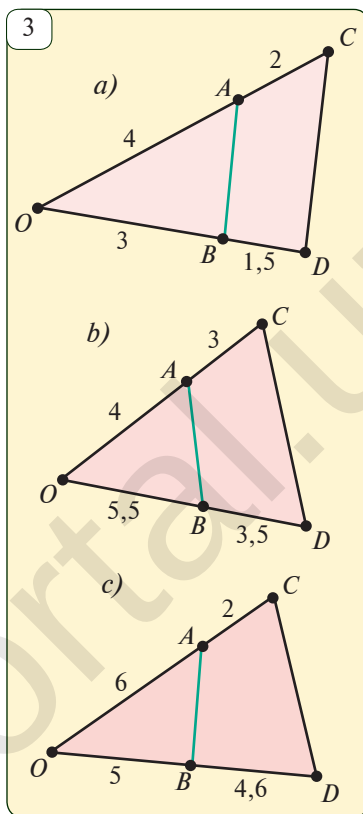
vertikal múyeshler bolǵanı ushın: $\angle AOC = \angle BOD$. Sonıń ushın, úshmúyeshliklerdín uqsaslıgının TMT belgisi boyınsha, $\triangle AOC \sim \triangle BOD$ hám uqsaslıq koefficienti $k = \frac{OA}{OB} = 3$. Endi uqsas úshmúyeshliklerdín maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı

teoremanı qollanamız: $\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = k^2 = 9$.

Juwabı: 9.

? Mäsele hám tapsırmalar

- 9.1. Úshmüyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń anıqlaması hám TMT belgilerin óz ara salıstırın.
- 9.2. Tóbesindegi müyeshleri teń bolǵan teń qaptalı úshmüyeshliklerdiń uqsaslıǵın a) MM, b) TMT belgisinen paydalanıp dáliyllen.
- 9.3.3-súwrette súwretlengen OAB hám OCD úshmüyeshlikleri uqsas pa? Eger uqsas bolsa, bul úshmüyeshlikler perimetriniń qatnasın tabıń.
- 9.4. AC hám BD nurları O noqatında kesilisedi. Eger $AO:CO=BO:DO=3$, $AB=7\text{ cm}$ bolsa, CD kesindisin hám de AOB hám COD úshmüyeshlikleriniń maydanınıń qatnasın tabıń.
- 9.5. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmüyeshliklerde $\angle A=\angle A_1$, $AB:A_1B_1=AC:A_1C_1=4:3$.
 a) Eger AB kesindisi A_1B_1 den 5 cm artıq bolsa, AB hám A_1B_1 táreplerin tabıń;
 b) Eger A_1B_1 kesindi AB dan 6 cm qısqa bolsa, AB hám A_1B_1 táreplerin tabıń;
 c) Eger berilgen úshmüyeshliklerdiń maydanları-
 nıń qosındısı 400 cm^2 bolsa, onda hár bir úshmüyeshliktiń maydanın tabıń.
- 9.6. Eger bir tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń katetleri ekinshi tuwrı müyeshli úshmüyeshliktiń sáykes katetlerine proporcional bolsa, onda úshmüyeshliklerdiń uqsas ekenligin dáliyllen.
- 9.7. Katetleri 3 dm hám 4 dm bolǵan tuwrımüyeshli úshmüyeshlik penen bir kateti 8 dm hám gipotenuzası 10 dm bolǵan tuwrımüyeshli úshmüyeshliktiń uqsas ekenligin dáliyllen.
- 9.8*. AB kesindi hám l tuwrı sıziq O noqatta kesilisedi. l tuwrı sıziqqa AA_1 hám BB_1 perpendikullar túsirilgen. Eger $AA_1=2\text{ cm}$, $OA_1=4\text{ cm}$ hám $OB_1=3\text{ cm}$ bolsa, BB_1 , OA hám AB kesindilerin tabıń.
- 9.9*. 4-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında úshmüyeshliktiń uqsaslıǵın anıqlań.



10

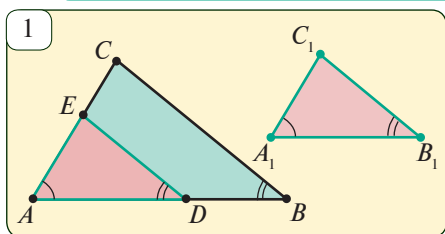
ÚSHMÚYESHLIKLERDÍN UQSASLÍGÍNÍN ÚSHINSHI BELGISI

Teorema. (Úshmúyeshliklerdín uqsaslıgının TTT belgisi). *Eger bir úshmúyeshliktiń úsh tárepi ekinshi úshmúyeshliktiń úsh tárepine proporcional bolsa, onda bunday úshmúyeshlikler uqsas boladı.*

$$\Delta ABC, \Delta A_1B_1C_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} \text{ (1-súwret)}$$



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



Dáliytleń. ABC úshmúyeshliginiń AB tárepinde $AD=A_1B_1$ bolatuǵınday etip D noqatın belgileybiz. D noqatınan BC tárepine parallel etip júrgizilgen tuwrı sızıq AC tárepin E noqatında kesip ótsin. Onda úshmúyeshliklerdín uqsaslıgının MM belgisi boyınsha, ΔADE hám ΔABC uqsas boladı. Ol jaǵdayda bul uqsaslıq

teorema shártı boyınsha tómendegi teńlikler juplıǵına iye bolamız:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ hám } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \quad (1) \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \text{ hám } \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}. \quad (2)$$

Ol jaǵdayda $A_1B_1=AD$ ekenligin esapqa alsaq, olardıń birinshisinen, $B_1C_1=DE$ ekinshisinen bolsa $A_1C_1=AE$ ekenligi payda boladı. Solay etip, úshmúyeshliklerdín teńliginiń TTT belgisi boyınsha, $\Delta ADE = \Delta A_1B_1C_1$. Onda $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

Másele. Eger eki teń qaptallı úshmúyeshliktiń birewiniń ultanı hám qaptal tárepi ekinshisiniń ultanı hám qaptal tárepine proporcional bolsa, onda bul úshmúyeshliklerdín uqsas ekenligin dáliytleń.

$$\Delta ABC, \quad AB = BC, \quad \left| \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \right.$$



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

Dáilyllew. Berilgen $AB=BC$, $A_1B_1= B_1C_1$ teńlikler hám $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ qatnastan $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ teńliklerin payda etemiz. Demek, úshmúyeshliklerdín uqsaslıgınıń TTT belgisi boyınsha, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

? Másele hám tapsırmalar

10.1. Úshmúyeshliklerdín uqsaslıgınıń TTT belgisin aytıń hám dáilyllewin túsindirip beriń.

10.2. $AC=14$ cm, $AB=11$ cm, $BC=13$ cm, $A_1C_1=28$ cm, $A_1B_1=22$ cm, $B_1C_1=26$ cm ekenligi belgili. ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleri uqsas bolama?

10.3. 2-súwrettegi uqsas úshmúyeshlikler juplıqların kórsetiń.

10.4. $ABCD$ trapeciyaniń AB hám CD qaptal tárepleri dawam ettirilse, E noqatında kesilisedi. Eger $AB=5$ cm, $BC=10$ cm, $CD=6$ cm, $AD=15$ cm bolsa, AED úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.

10.5. Trapeciyanıń ultanları 6 cm hám 9 cm, biyikligi 10 cm. Trapeciyanıń diagonalı kesiliskeń noqatınan ultanlarına shekemgi aralıqların tabıń.

10.6. Qálegen eki teń tárepli úshmúyeshliktiń uqsas ekenligin dáilylleń.

10.7. Ultani 12 *cm*, biyikligi 8 *cm* bolgan teñ qaptallı úshmúyeshliktiń ishine kvadrat sonday etip ishley sızılğan, kvadrattıń eki tóbesi úshmúyeshliktiń ultanında, al qalğan eki tóbesi bolsa qaptal tárep-lerde jatadı. Kvadrattıń tárepin tabıń.

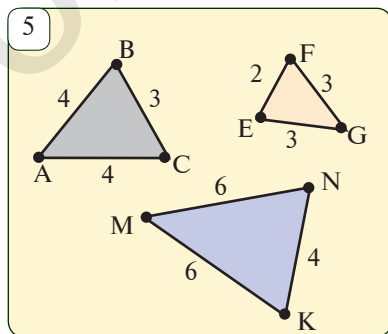
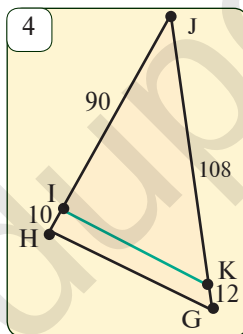
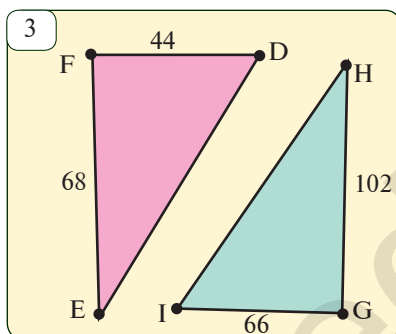
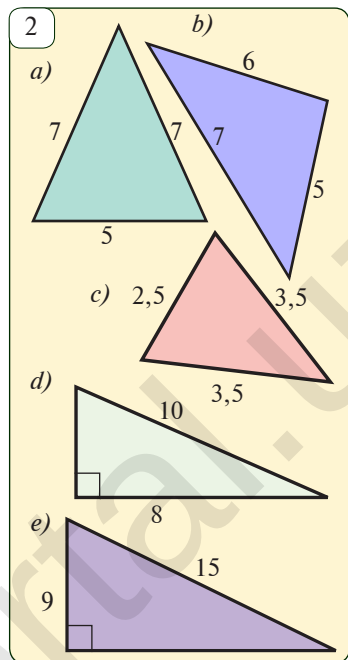
10.8*. Súyir múyeshli ABC úshmúyeshliginiń AA_1 hám BB_1 biyiklikleri júrgizilgen. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$ eken-ligin dáliylleń.

10.9. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanları 6 hám 24 ge teñ. Olardıń birewiniń perimetri ekinshisinen 6 ға artıq. Úlken úshmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

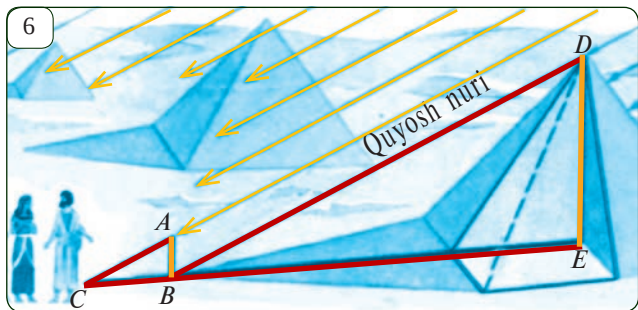
10.10.3-súwrettegi úshmúyeshlikler qaysı belgi boyınsha uqsas?

10.11.4-súwrettegi JKL hám JGH úshmúyeshlikler qaysı belgi boyınsha uqsas?

10.12.5-súwrettegi úshmúyeshliklerdiń qaysıları bir-birine uqsas?



Tariyxiy waqiyalar. Bul waqıya eramızdan aldınǵı VI ásirde bolǵan edi. Bul waqıtta grekler geometriya menen derlik shuǵıllanbaytuǵın edi. Grek filosofi Fales mısır pání menen tanısıw ushın ol jerge bargan. Mısrlılar oǵan qıyın másele bergen eken: úlken piramidalardan biriniń biyikligin qalay tabıw múmkin? Fales bul máseleniń ápiwayı hám jeńil sheshimin taptı. Ol tayaqshanı jerge qaqtı hám sonday dedi: “Qashan bul tayaqsha sayasınıń uzınlıǵı tayaqshanıń uzınlıǵı menen teń bolsa, piramida sayasınıń uzınlıǵı piramida biyikligi me-nen teń boladı” 6-súwret. Falestiń pikirın tiykarlawǵa háreket etiń!



11

TUWRÍ MÚYESHLI ÚSHMÚYESHLIKLERDÍN UQSASLIQ BELGILERI

Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdín bir-birden múyeshleri tuwrı múyeshten ibarat boladı. Sonın ushın bunday úshmúyeshlikler ushın uqsaslıq belgileri ápiwayılastırıladı.

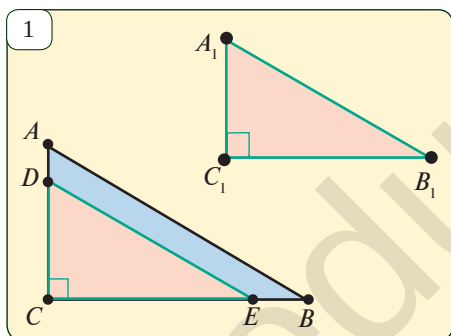
1-teorema. *Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdín bir-birden súyir múyeshi saykes türde teń bolsa, onda olar uqsas boladı.*

2-teorema. *Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdín katetleri saykes türde proporcional bolsa, onda olar uqsas boladı.*

3-teorema. *Tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdín birinín gipotenuzası hám kateti, ekinshisinín gipotenuzası hám katetine saykes türde proporcional bolsa, onda olar uqsas boladı.*

Bul belgilerdín birinshi ekewinín durıs ekenligi óz-ózinen ayqın. Úshinshi belgisin bolsa dáliyllewimiz kerek.

$$\triangle ABC, \triangle A_1B_1C_1, \angle C = 90^\circ, \angle C_1 = 90^\circ, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$



Dáliyllew. ABC úshmúyeshliginiń BC tárepinde $CE = C_1B_1$ bolatuǵınday etip C_1B_1 kesindisin qoyamız hám $DE \parallel AB$ nı júrgizemiz (1-súwret). Onda úshmúyeshliklerdín uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, $\triangle DEC$ hám $\triangle ABC$ uqsas boladı. Uqsas úshmúyeshliklerdín saykes tárepleriniń proporcionallıǵınan: $\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{CE}$

Jasalıwı boyınsha, $CE = C_1B_1$. Demek,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CB}{C_1B_1} \quad (1)$$

teńligi orınlı boladı. Basqa tárepten, teorema shártı boyınsha, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1}$ (2)

(1) hám (2) teńliklerden $DE = A_1B_1$ ekenligin anıqlaymız.

$A_1B_1C_1$ hám DEC úshmúyeshliklerdi qaraymız. Olarda;

2. $DE = A_1B_1$ (dálillengen teńlik boyınsha).

Demek, tuwrı múyeshli úshmúyeshliklerdín bir-birden kateti hám de gipotenuzasınıń teńlik belgisi boyınsha, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle DEC$.

Ekinshi tárepten bolsa $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Onda, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ boladı.

Teorema dáliyllendi.

Másele. Eger eki teń qaptalı úshmúyeshlikten birewinin qaptal tárepi hám biyikligi ekinshisinin qaptal tárepi hám biyikligine proporcional bolsa, onda bul úshmúyeshliklerdín uqsas ekenligin dáliylleń (2-súwret).

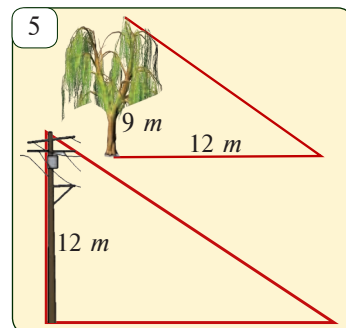
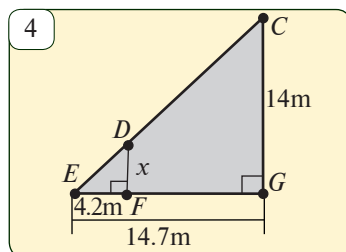
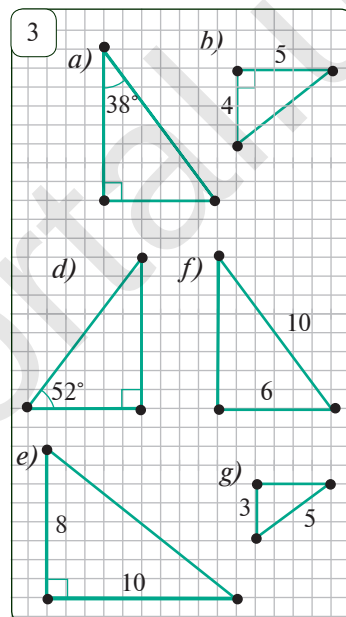
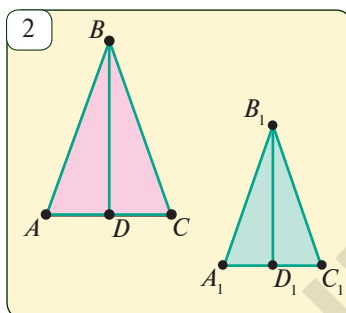
Dáliyllew. Tuwrı múyeshli ABD hám $A_1B_1D_1$ úshmúyeshliklerin qaraymız. Shárt boyınsha olardıń birewden kateti hám gipotenuzası óz ara proporcional. Demek,

3-Teoremağa tiykarlanıp $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$. Onda $\angle DBA = \angle D_1B_1A_1$. Teñ qaptallı úshmúyeshliktiń ultanına túsirilgen biyikliktiń bissektrisasi da bolıwın esapqa alsaq, $\angle B = 2\angle DBA = 2\angle D_1B_1A_1 = \angle B_1$ boladı.

Nátıyjede, ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliklerde

$$\angle B = \angle B_1 \text{ hám } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ teńliklerine iye bolamız.}$$

Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń TTT belgisi boyınsha, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Soralǵan tasdıq dáliyllendi.



? Másele hám tapsırmalar

11.1. 3-Súwrettegi uqsas úshmúyeshliklerdi tabıń.

11.2. Katetleri 3 m hám 4 m bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke uqsas úshmúyeshliktiń bir kateti 27 m bolsa, ekinshi kateti neshe m boladı?

11.3. Maydanları 21 m² hám 84 m² bolǵan eki tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler óz ara uqsas. Eger birinshi úshmúyeshliktiń bir kateti 6 m bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń katetlerin tabıń.

11.4. Bir sheńberge eki uqsas tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ishley sızılǵan. Bul úshmúyeshliklerdiń teńligin dáliyllen.

11.5*. Katetleri 10 cm hám 12 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke bir múyeshi ulıwma bolǵan kvadrat ishley sızılǵan. Eger kvadrattıń bir tóbesi gipotenuzada ekenligi belgili bolsa, kvadrattıń tárepin tabıń.

11.6*. ABC úshmúyeshlik berilgen. Oǵan $ADEF$ sonday etip ishley sızılǵan D, E hám F noqatlar sáykes tárizde úshmúyeshliktiń AB, BC hám CA tareplerinde jatadı? Eger $AB=c$, $AC=b$, bolsa, rombnıń tárepin tabıń.

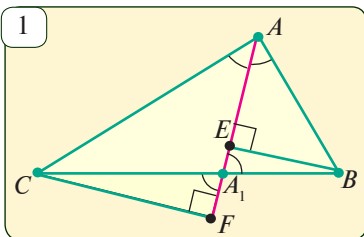
11.7. 4-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında belgisiz kesindi uzınlıǵın tabıń.

11.8. Tal tereǵınıń biyikligi 9 m, sım aǵashtıń biyikligi bolsa 12 m (5-súwret). Eger taldıń sayası 12 m di qurasa, sım aǵashtıń sayasınıń uzınlıǵın tabıń.

11.9. Anar tereǵınıń biyikligi 3 m bolıp onıń sayası keshke qaray 6 m di payda etti. Biyikligi 4,2 m bolǵan alma aǵashınıń sayası bul waqıtta qanshanı payda etedi?

12

UQSASLIQ BELGILERININ DALIYLLLEWGE BAYLANISLI MASELELERGE QOLLANIWLARI



1-másele. Úshmúyeshliktiń bissektrisası ózi túsken tárepti qalğan eki tárepke proporcional bolğan kesindilerge ajratatugının dáliyllen.

$$\triangle ABC, AA_1 - \text{bissektrisa (1-súwret)} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B} = \frac{AC}{A_1C}$$

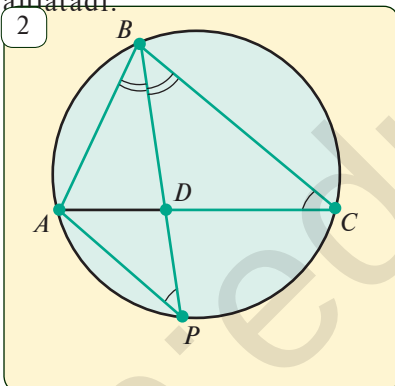
Dáliyllew. AA_1 tuwrısına BE hám CF perpendikulyarın túsiremiz. Onda $\angle CAF = \angle BAE$ bolğanı ushın tuwrı múyeshli CAF hám BAE úshmúyeshlikler uqsas boladı. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleriniń proporcionallıǵınan

$$\triangle CAF \sim \triangle BAE \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BE} \quad (1)$$

Buǵan uqsas,
$$\triangle CA_1F \sim \triangle BA_1E \Rightarrow \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CF}{BE} \quad (2)$$

(1) hám (2) teńliklerdi salıstırsa, $\frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$ yaki $\frac{AC}{AB} = \frac{CA_1}{BA_1}$ boladı. Bul

A_1B hám A_1C kesindileri AB hám AC kesindilerge proporcional ekenligin ańlatadı.



2-másele. ABC úshmúyeshliginiń BD bissektrisası úshmúyeshlikke sırtlay sızilğan sheńberdi B hám P noqatında kesip ótedi. $\triangle ABP \sim \triangle BDC$ ligin dáliyllen (2-súwret).

Sheshiliwi. $\triangle ABP$ hám $\angle BDC$ da:

- $\angle DBC = \angle ABP \Leftarrow$ shárt boyınsha;
 - $\angle DCB = \angle APB \Leftarrow$ sebebi olar bir doǵaǵa tirelgen.
- Demek, úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵınıń MM belgisi boyınsha, $\triangle ABP \sim \triangle BDC$.

? Másele hám tapsırmalar

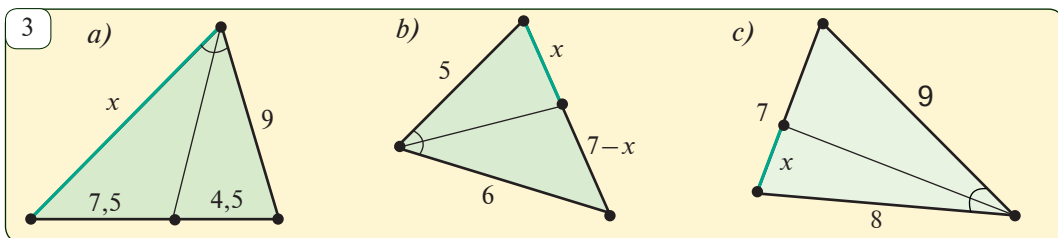
12.1. Úshmúyeshliktiń bissektrisası ózi túsken tárepte ajratqan kesindileri hám úshmúyeshliktiń qalğan tárepleri arasındaǵı proporcionallıqtı jazıp kórsetiń.

12.2. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshliginiń C tuwrı múyeshinen CD biyikligi júrgizilgen. $\angle ACD = \angle CBD$ ekenligin dáliyllen. Payda bolğan figurada neshe óz ara uqsas úshmúyeshliklerdi kórsete alasız?

12.3. 3-súwrettegi maǵlıwmatlarǵa tiykarlanıp x tı tabıń.

12.4. ABC úshmúyeshliginiń AD bissektrisası júrgizilgen. Eger $CD = 4,5$ m; $BD = 13,5$ m hám ABC úshmúyeshliktiń perimetri 42 m bolsa, AB hám AC táreplerin tabıń.

12.5. ABC úshmúyeshliginiń medianaları N noqatında kesilisedi. Eger ABC úshmúyeshliginiń maydanı 87 dm^2 bolsa, ANB úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.



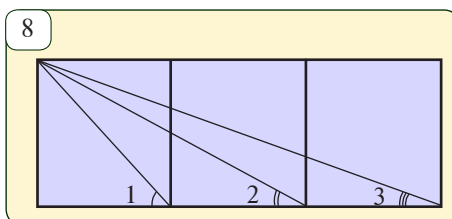
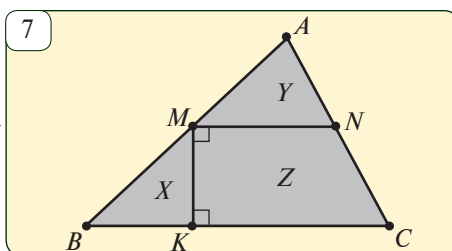
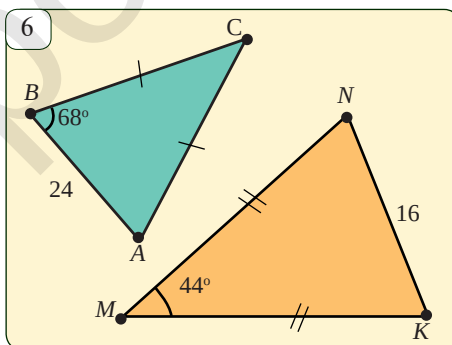
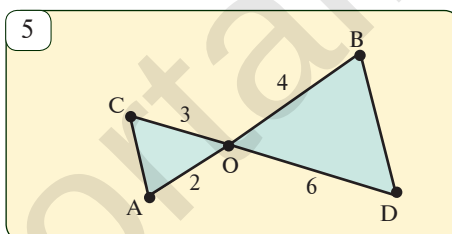
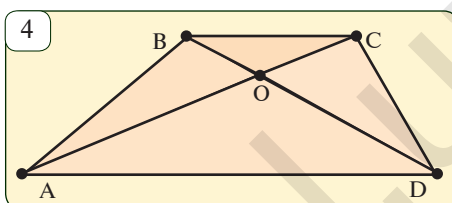
12.6. ABC úshmúyeshliginiń medianaları kesiliske N noqatınan AB hám BC táreplerine shekem bolǵan aralıqlar sáykes túrde 3 dm hám 4 dm ge teń. Eger $AB = 8\text{ dm}$ bolsa, BC tárepiniń tabıń.

12.7*. Trapeciyaniń ultanına parallel tuwrı sıziq qaptal tárepleriniń birewin m:n qatnasta bolıwı múmkin. Bul tuwrı sıziq onıń ekinshi qaptal tárepini qanday qatnasta bóledi?

12.8. 4-súwrette trapeciya súwretlengen. AOD hám COB úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın dáliylleń.

12.9. 5-súwrette AOC hám DOB úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵın kórsetiń.

12.10. 6-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsaspa?



Qızıqlı máseleler

Geometriya hám ingliz tili. Tómenдеgi ingliz tilinde berilgen geometriyalıq máseleni sheship kóriń! Bunıń menen hám ingliz, hám geometriyadan biliminizdi bilip alasız.

1) *Dissection Puzzle:* Let M be the midpoint of the side AB of a given triangle ABC . The triangle has been dissected into parts X, Y, Z along the lines MN and MK passing through M such that MN is parallel while MK is perpendicular to the base BC (picture 7). Show how the three pieces can be fitted together to make a rectangle, respectively to different parallelograms.

2) Look at the picture 5 and proof
 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$.

13

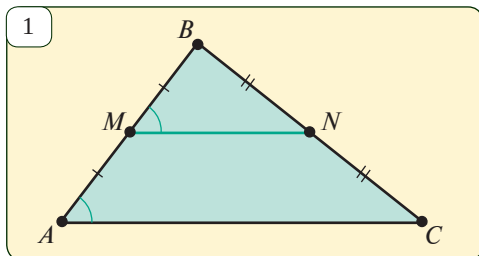
AMELIY MÁSELELER HÁM OLARDÍN QOLLANÍWLARÍ

1-másele. Úshmúyeshliktiń úqsaslıǵınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń orta sızıǵı úshmúyeshliktiń bir tárepine parallel hám usı táreptiń yarımına teń ekenligin dáliyllen.

$\triangle ABC, MN$ — orta sızıq (1-súwret):
 $MA = MB, NC = NB$



$MN \parallel AC, MN = \frac{1}{2} AC$



Sheshiliwi. $\triangle ABC$ hám $\triangle MBN$ ushın:

$$\angle B - \text{ulıwma}, \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Sonıń ushın, úshmúyeshliklar úqsaslıǵına TMT ámeliyat boyınsha, bul eki úshmúyeshlik úqsas. Bul pikirdi tómendegidey dawam ettiremiz:

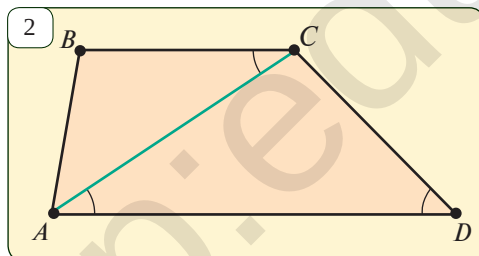
$$\triangle MBN \sim \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} \angle BMN = \angle A, \\ \frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AC, \\ MN = \frac{1}{2} AC. \end{cases}$$

2-másele. Eger tiykarǵı BC hám AD bolǵan $ABCD$ trapeciyanıń AC diagonalı onıń eki úqsas úshmúyeshlikke ajratısa, $AC^2 = BC \cdot AD$ bolıwın dáliyllen.

$ABCD$ — trapeciya, $BC \parallel AD$,
 $\triangle ABC \sim \triangle DCA$ (2-súwret)



$AC^2 = BC \cdot AD$



Sheshiliwi. 1-qádem. ABC hám ACD úshmúyeshlikleriniń múyeshlerin salıstıramız. $\angle ACB = \angle CAD$, sebebi bul múyeshler — ishki ayqısh múyeshler. $\angle B \neq \angle D$, sebebi $ABCD$ — trapeciya (keri jaǵdayda,

$$\angle D + \angle A = \angle B + \angle A = 180^\circ,$$

yaǵnıy $AB \parallel CD$ bolıp, $ABCD$ trapeciya bolmay qalar edi). Solay etip, $\angle D = \angle BAC$

hám $\angle ACD = \angle B$.

2-qádem. Endi ABC hám DCA úshmúyeshliktiń sáykes tárepleriniń qatnasın jazamız: $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{AC}$ bunnan $AC^2 = BC \cdot AD$.

? Másele hám tapsırmalar

13.1.a) Boyı 170 cm bolǵan adam sayasınıń uzınlıǵı 1 m bolsa, biyikligi 5,4 m bolǵan terek sayasınıń uzınlıǵın tabıń.

b) Eki teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshleri teń. Birinshi úshmúyeshliktiń qaptal tárepi 17 cm, ultanı 10 cm ge, ekinshi úshmúyeshliktiń ultanı 8 cm ge teń. Ekinshi úshmúyeshliktiń qaptal tárepiniń tabıń.

13.2.3-súwrettegi hár bir sızılmadan uqsas úshmúyeshliklerdi kórsetiń.

13.3. ABC úshmúyeshliginiń AP medianası BC tárepine parallel hám tóbeleri AB hám AC táreplerinde jatqan qálegen kesindini teń ekige bóletuǵının dáliyllen.

13.4. Úshmúyeshliktiń tóbeleri onıń orta sızıǵın óz ishine alǵan tuwrı sızıqtan teńdey aralıqta jata-tuǵının dáliyllen.

13.5. Sheńberge ishley sızılǵan $ABCD$ tórtmúyeshliktiń diagonalları O noqatda kesilisedi.

$\triangle AOB \sim \triangle COD$ ekenligin dáliyllen.

13.6. ABC úshmúyeshliktiń ishinen O noqatı hám OA , OB , OC nurlarında saykes túrde E, F, K noqatları alıǵan (4-súwret). Eger $AB \parallel EF$ hám $BC \parallel FK$ bolsa, ABC hám EFK úshmúyeshlikleriniń uqsas ekenligin dáliyllen.

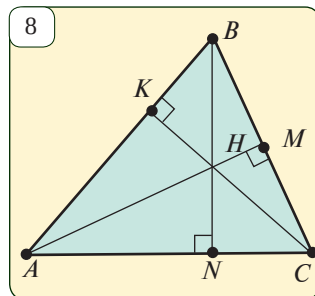
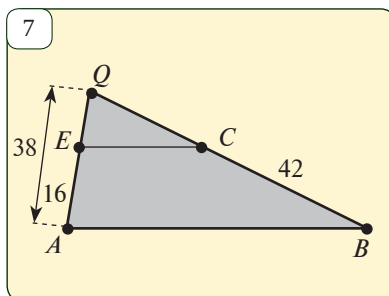
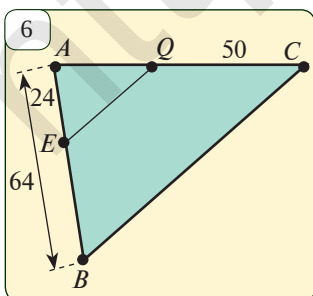
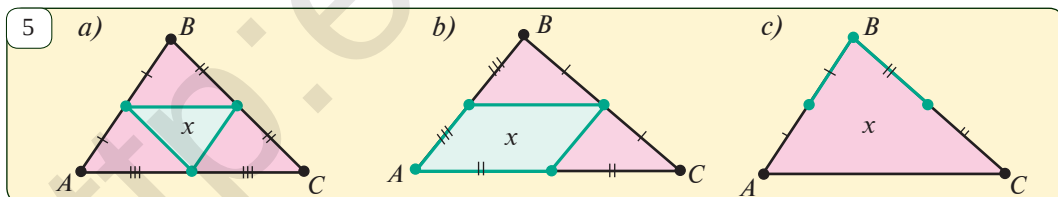
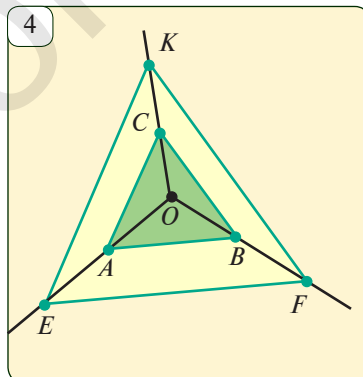
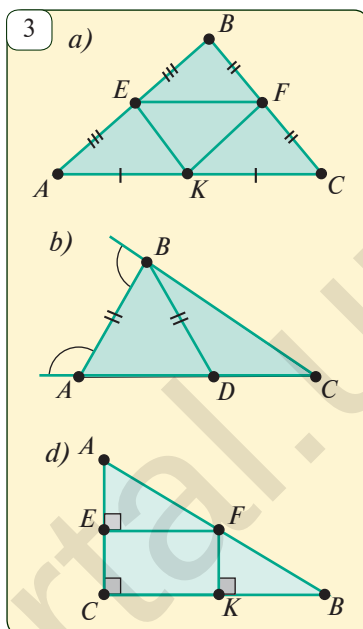
13.7*. Trapeciyanıń diagonalları kesilisiw noqatınan ótiwshi tuwrı sızıq trapeciya ultanlarınan birin $m:n$ qatnasta bóledi. Bul tuwrı sızıq ekinshi ultanın qanday qatnasta bóledi?

13.8. Eger ABC úshmúyeshliklerdiń maydanı S ǵa teń bolsa, 5-súwrettegi x penen belgilengen maydandı tabıń.

13.9. 6-súwrette $EQ \parallel BC$. AQ nı tabıń.

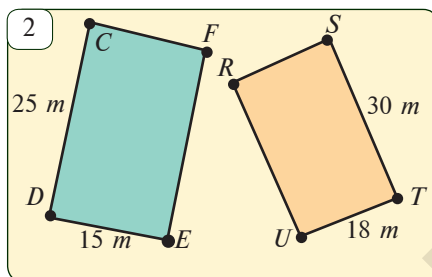
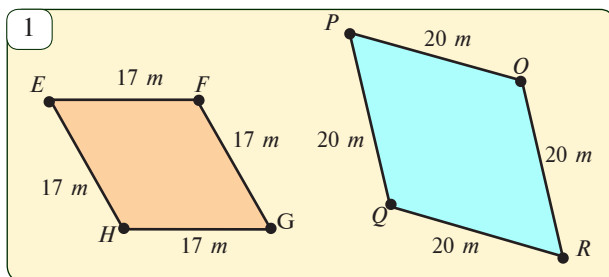
13.10. 7-súwrette $AB \parallel EC$. QC nı tabıń.

13.11. 8-súwrette ABC úshmúyeshliginiń biyiklikler júrgizilgen. Nátiyjede neshe uqsas úshmúyeshlikler payda boldı?



I. Testler

1. Tóمندegi tastıyıqlawlardan qaysı biri durıs?
 - A) Eki úshmúyeshliktiń múyeshleri sáykes túrde teń bolsa, olar uqsas delinedi;
 - B) Eki úshmúyeshliktiń tárepleri sáykes túrde teń bolsa, olar uqsas delinedi;
 - D) Eki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleri proporcional hám sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas delinedi;
 - E) Eki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleri hám sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas delinedi.
2. Eki uqsas úshmúyeshliktiń maydanlarınń qatnası nege teń?
 - A) Uqsaslıq coefficientine;
 - B) Olardıń sáykes tárepleriniń qatnasına;
 - D) Olardıń perimetrleriniń qatnasına;
 - E) Uqsaslıq coefficientiniń kvadratına.
3. Tóمندegi tastıyıqlawdan qaysı biri durıs?
 - A) Úshmúyeshliklerdiń biriniń eki múyeshi ekinshisiniń eki múyeshine teń bolsa, olar uqsas boladı;
 - B) Úshmúyeshliklerdiń biriniń eki tárepi ekinshisiniń eki tárepine teń bolsa, olar uqsas boladı;
 - D) Eki úshmúyeshliktiń bir-birden múyeshleri teń hám eki tárepleri proporcional bolsa, olar uqsas boladı;
 - E) Eki úshmúyeshliktiń bir-birden múyeshleri teń hám bir-birden tárepleri proporcional bolsa, olar uqsas boladı.
4. Durısın tabıń. Eger eki úshmúyeshlik uqsas bolsa, olardıń ...
 - A) Biyiklikleri teń boladı;
 - B) Tárepleri proporcional boladı;
 - D) Tárepleri teń boladı;
 - E) Maydanları teń boladı.
5. Uqsas úshmúyeshliklerdiń perimetrleriniń qatnası nege teń?
 - A) Sáykes tárepleri qatnasınıń kvadratına;
 - B) Uqsaslıq coefficientine;
 - D) Uqsaslıq coefficientiniń kvadratına;
 - E) Maydanlarınń qatnasına.
6. Qaysı bandte 1-súwrette súwretlengen romblar uqsaslıǵı durıs jazılǵan?
 - A) $EHGF \sim PQRO$;
 - B) $HGFE \sim PQRO$;
 - D) $GFEH \sim QROP$;
 - E) $EHGF \sim QROP$.
7. 2-súwrettegi kópmúyeshlikler uqsaspa? Nege?
 - A) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri teń hám sáykes tárepleri proporsional;
 - B) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri proporcional hám sáykes tárepleri teń;
 - D) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes múyeshleri teń;
 - E) Awa, sebebi bul kópmúyeshliktiń sáykes tárepleri proporcional;



8. 3-súwrettegi SRQT hám VWXU trapeciyalar uqsaspa? Eger uqsas bolsa, olardıń uqsaslıq koefficienti nege teń?

- A. Awa, $k = 0,4$; B. Awa, $k = 0,5$;
D. Awa, $k = 0,8$; E. Yaq.

9. Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes tárepleri 4 cm hám 13 cm. Eger birinshi úshmúyeshlik maydanı 16 cm^2 qa teń bolsa, ekinshi úshmúyeshlik maydanın tabıń.

- A. 169 cm^2 ; B. 16 cm^2 ;
D. 52 cm^2 ; E. 189 cm^2 ;

10. Eki uqsas úshmúyeshlik maydanları qatnası 144 ge teń. Olardıń sáykes tárepleriniń qatnası nege teń?

- A. 13 ge; B. 12 ge;
D. 14 ge; E. 16 ğa;

11. 4-súwrettegi úshmúyeshlikler uqsas. Súwrette berilgen keteklerge kóre úlken úshmúyeshlik maydanınıń kishi úshmúyeshlik maydanına qatnasın tabıń.

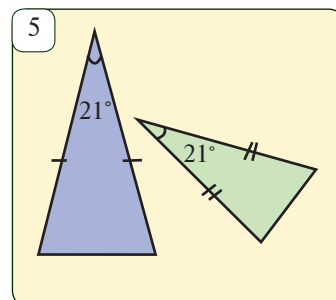
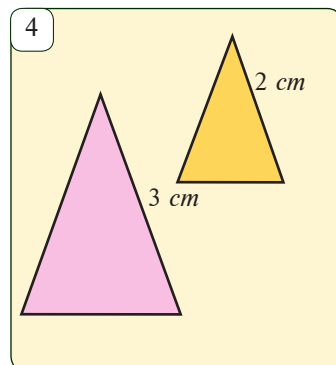
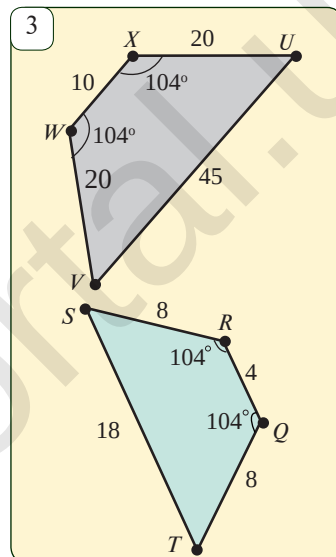
- A. 9:4; B. 3:2;
D. 4:9; E. 2:3;

12. Eki uqsas úshmúyeshlik maydanlarınıń qatnası a ğa teń bolsa, bul úshmúyeshlikler uqsaslıq koefficienti nege teń boladı?

- A. $1:a^2$; B. a^2 ; D. $\sqrt{a}$; E. $1:a$;

13. 5-súwrette keltirilgen teń qaptalı úshmúyeshlikler uqsaspa? Nege?

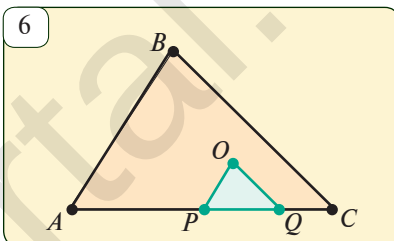
- A. Awa, sebebi olardıń eki tárepleri proporcional hám olar arasındagı múyeshler teń;
B. Yaq, sebebi olardıń eki múyeshler óz ara teń emes;
D. Yaq, sebebi olardıń sáykes múyeshleri teń emes;
E. Yaq, sebebi olardıń tárepleri proporcional emes;



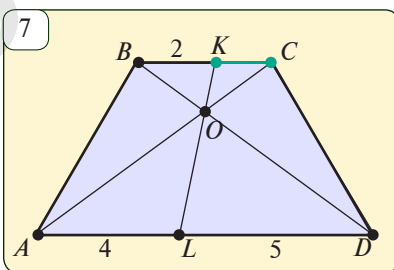
II. Máseleler

1. ABC úshmúyeshliginiń AB hám AC tárepleriniń ortalari sáykes túrde E hám F noqatları bolsın. Eger AEF úshmúyeshliginiń maydanı 3 cm^2 bolsa, ABC úshmúyeshliginiń maydanın tabıń.
2. ABC úshmúyeshliginiń AC tárepine parallel tuwrı sıızıq AB hám BC táreplerin sáykes túrde N hám P noqatlarda kesip ótedi. Eger $AN=4$, $NB=3$, $BP=3,6$ bolsa, BC tárepin tabıń.
3. Súyir múyeshli ABC úshmúyeshliginiń AB tárepinde K noqatı alınan. Eger $AK=3$, $BK=2$ hám úshmúyeshliktiń BD biyikligi 4 ke teń bolsa, K noqatınan AC kesindisine shekem bolğan aralıqtı tabıń.

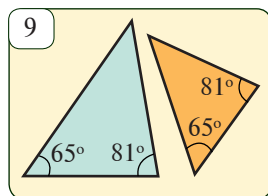
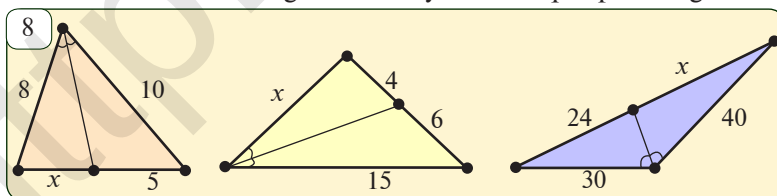
4. $ABCD$ parallelogrammnıń BC tárepiniń ortasındaǵı K noqatınan júrgizilgen DK nurı menen AB nurı F noqatında kesilisedi. Eger $AD=4$, $DK=5$ hám $DC=5$ bolsa, AFD úshmúyeshliginiń perimetrin esaplań.



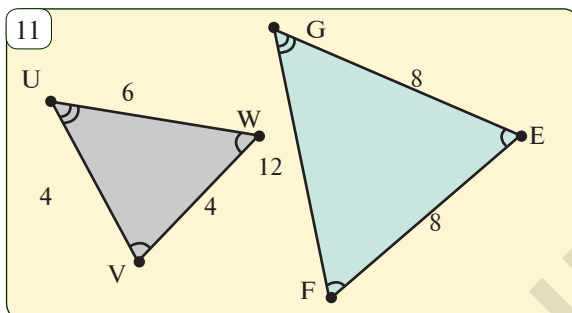
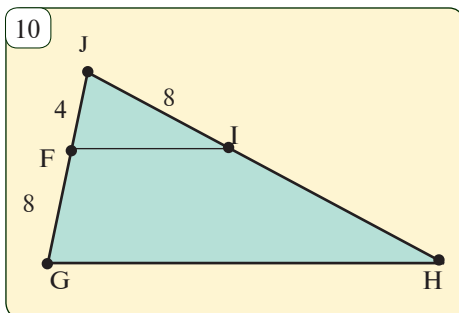
5. ABC úshmúyeshligi ishinde alınan O noqatınan úshmúyeshliktiń AB hám BC táreplerine parallel tuwrı sıızıqlar júrgizilgen. Bul tuwrı sıızıqlar AC tárepin sáykes túrde P hám Q noqatlarda kesip ótedi. Eger $PQ=2$, $AC=7$ hám ABC úshmúyeshliginiń maydanı 98 ge teń bolsa, POQ úshmúyeshliginiń maydanın anıqlań. (6-súwret).



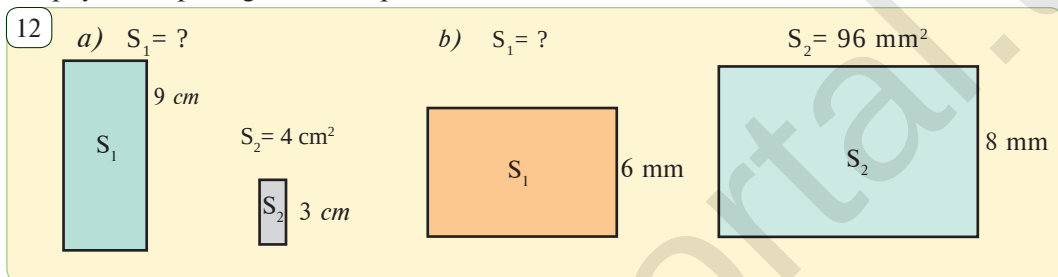
6. $ABCD$ trapeciyasınıń BC hám AD ultanlarında K hám L noqatları sáykes túrde alınan. KL kesindisi trapeciyanıń diagonalları kesiskeń noqattan ótedi. Eger $AL=4$, $LD=5$ hám $BK=2$ bolsa, KC kesindisin tabıń (7-súwret).
7. Eki uqsas úshmúyeshliktiń birinshisiniń maydanı 15 mm^2 , ekinshisiniń maydanı bolsa 135 mm^2 . Birinshi úshmúyeshliktiń bir tárepı 6 mm bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń oǵan sáykes tárepin tabıń?
8. 8-súwrette berilgenlerge kóre belgisiz kesindini tabıń.
9. 9-súwrette keltirilgen úshmúyeshlik uqsaspa? Nege?



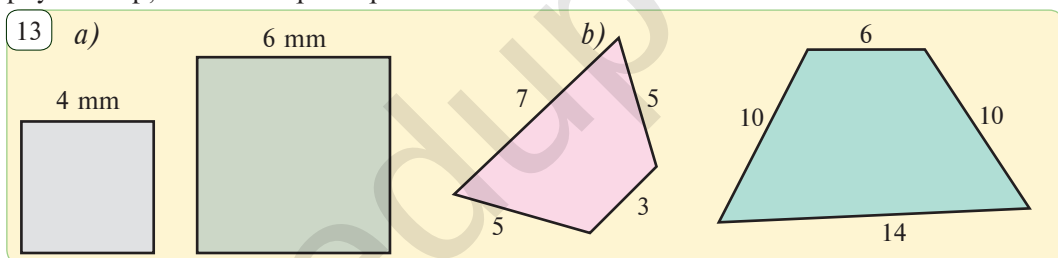
10. 10-súwrette $JIF \sim HJG$. IH kesindı uzunlıǵın tabıń.
11. 11-súwretlengen ushmúyeshlik uqsaspa? Eger uqsas bolsa, olardıń uqsaslıq koefficientin tabıń.
12. Eki uqsas ushmúyeshliklerden birewiniń maydanı 24 mm^2 , ekinshisiniń maydanı bolsa 216 mm^2 . Birinshi úshmúyeshliktiń biyikliklerinen biri 8 mm bolsa, ekinshi úshmúyeshliktiń biyikligin tabıń.



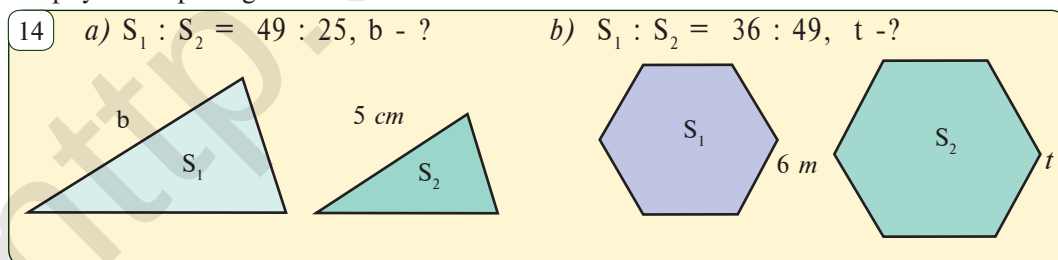
13. 12-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp belgisiz aralıqtı tabıń.



14. 13-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp, olardıń uqsaslıq koefficientin tabıń



15. 14-súwrette súwretlengen kópmúyeshlikler uqsas. Berilgen maǵlıwmatlardan paydalanıp belgisizini tabıń

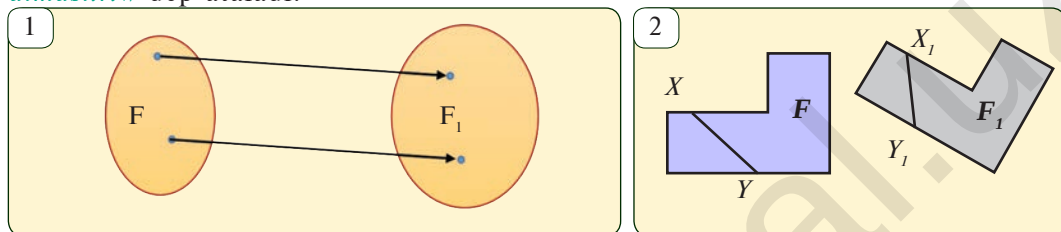


16. Shınar tereǵiniń sayası 12 m. Onıń janındaǵı kóp qabatlı úydiń sayası bolsa 6 m. Eger shınar tereǵi úyden 16 m biyik bolsa, úydiń biyikligi qanshanı payda etedi?

17. Háykeldiń biyikligi 9 m bolıp, onıń sayası 12 m. Háykel janında ósip atırǵan Terektiń sayası bolsa 16 m. Terektiń biyikligi qansha?

TEGISLIKTE GEOMETRIYALÍQ ALMASHTÍRÍWLAR. HÁRAKET HÁM PARALLEL KÓSHIRIW

Tegislikde berilgan F figuranıń hár bir noqatında qaysı bir usılda kóshirilse, jańa F_1 figura payda boladı (1-súwret). Eger bul kóshiriwde (sáwleleniwdi) birinshi figuranıń hár túrli noqatları ekinshi figuranıń hár túrli noqatlarına kóshedi (sáwlelenediriw óz ara bir mánisli bolsa), bul kóshiriwde *geometrikalıq figuranı almastırıw* dep ataladı.



Eger figuranı túrlendiriwde tegisliktiń barlıq noqatları kóshse onda tegislikti ózin-ózińe sáwlelendiriw haqqında da aytıw múmkin. Tómende tegisliktegi bázi bir geometriyalıq almastırıwlarǵa toqtalamız.

Noqatlar arasındagı aralıqtı saqlaytuǵın figura almastırıw *háreket* dep ataladı.

Anıqlamaǵa muwapıq, figura almastırıwda F figuranıń qálegen X hám Y noqatları F_1 figuranıń qanday da bir X_1 hám Y_1 noqatlarına ótker bolıp, $XY = X_1Y_1$ teńlik orınlansa (yaǵnıy aralıq saqlansa), bunday figura almastırıw háreket boladı (2-súwret).

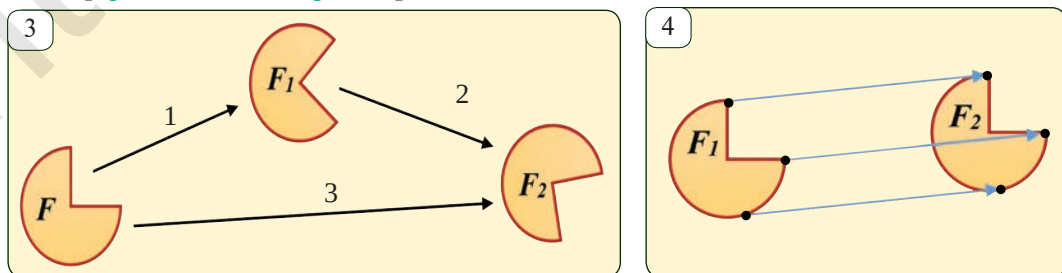
Háreketiń tómendegi qásiyetlerin keltiriw múmkin.

Hárekette tuwrı sızıq — tuwrı sızıqqa, nur — nurǵa, kesindi - oǵan teń kesindige, múyesh - oǵań teń múyeshke, úshmúyeshlik oǵan teń úshmúyeshlikke kóshedi (sáwlelenedi).

Aytayıq, F figura birinshi háreket nátiyjesinde F_1 figuraǵa, F_1 figuraǵa ekinshi háreket járdeminde F_2 figuraǵa ótker bolsın. Nátiyjede, F figura bul eki háreket járdeminde F_2 figuraǵa ózgeredi hám bul ózgeriw óz nábewinde jáne háreket boladı (3-súwret).

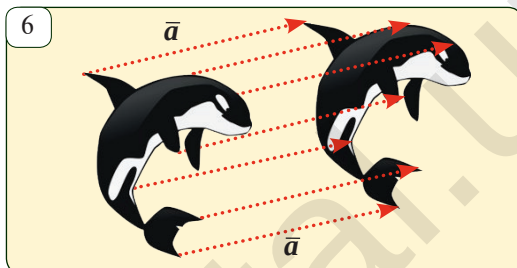
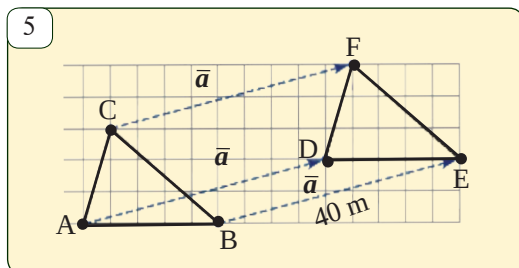
Tegislikte qandayda bir háreket járdeminde birewin ekinshisine kóshiriw múmkin bolǵan figuralar teń dep ataladı.

Tegislikte qandayda bir $\overline{AB}$ vektor hám qálegen X noqatı berilgen bolsın. Eger X_1 noqatı ushın $XX_1 = \overline{AB}$ shárt orınlansa, X noqatı X_1 noqatına $\overline{AB}$ vektor boy-lap *parallel kóshirilgen* dep ataladı.



Eger tegislikte berilgen F figuraniñ hár bir noqatı $\overline{AB}$ vektor boylap kóshirilse (5-súwret), jaña F_1 figura payda boladı. Bul jaǵdayda F figura F_1 figuraǵa parallel kóshirilgen dep ataladı. Parallel kóshiriwde F figuraniñ har bir noqatı birdey jóneliste birdey aralıqqa kóshirilgen boladı.

5-súwrette súwretlengen úshmúyeshliktiñ hár bir noqatı baslanǵısh jaǵdayına qaraǵanda 40 m ge parallel kóshirilgen. 6-súwrettegi delfin hám $\vec{a}$ vektor boylap parallel kóshirilgen.



Kórinip turǵanıday parallel kóshiriw háreket bolıp esaplanadı. Sonıñ ushın parallel kóshiriwde tuwrı sıziq tuwrı sıziqqa, nur-nurǵa kesindi - oǵan teñ kesindige kóshiriledi hám t.b

Aytayıq, $\overline{AB} = (a; b)$ vektor boylap parallel kóshiriwde F figuraniñ noqatı $X(x; y)$ hám F_1 figuraniñ noqatı $X_1(x_1; y_1)$ ge ótsin. Onda anıqlamaǵa muwapıq tómendegilerge iye bolamız:

$$x_1 - x = a, \quad y_1 - y = b \quad \text{yaki} \quad x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b.$$

Bul teñlikler parallel kóshiriw formulaları dep ataladı.

1-mısal. $\vec{p} = (3; 2)$ vektor boylap parallel kóshiriwde $P(-2; 4)$ noqatı qaysı noqatqa kóshedi?

Sheshiliwi: Joqarıdaǵı parallel kóshiriw formulasınan paydalanamız:

$$x_1 = -2 + 3 = 1, \quad y_1 = 4 + 2 = 6.$$

Juwabı: $P_1(1; 6)$.

? Másele hám tapsırmalar

15.1. $\vec{p} = (-2; 1)$ vektor boylap parallel kóshiriwde a) $(3; -2)$; b) $(0; 2)$; c) $(2; -5)$ noqatı qaysı noqatqa kóshedi?

15.2. Parallel kóshiriwde $A(4; 2)$ noqat $B(3; 7)$ noqatına kóshedi. Parallel kóshiriw qaysı vektor boylap ámelge asırılǵan?

15.3. Parallel kóshiriwde a) tuwrı sıziq – tuwrı sıziqqa; b) nur – nurǵa; c) kesindi- oǵan teñ kesindige kóbiwin dáliyllen.

15.4. Parallel kóshiriwde $(1; 2)$ noqatı $(1; -1)$ noqatına ótedi. Koordinata bası bul almasıwda qaysı noqatqa ótedi?

15.5. Parallel kóshiriwde $(3; 4)$ noqatı $(2; -4)$ noqatına ótedi. Bul almasıwda koordinata bası qaysı noqatqa óredi?

15.6. $A(2; 1)$ noqatı $B(1; 0)$ noqatına, $C(3; -2)$ noqatı $D(2; -3)$ noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw múmkinbe?

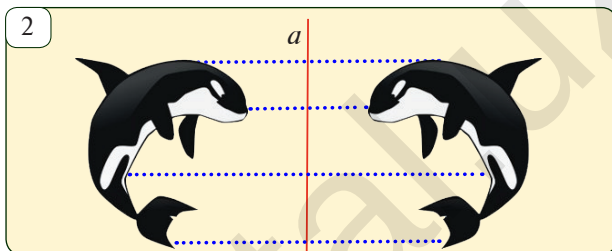
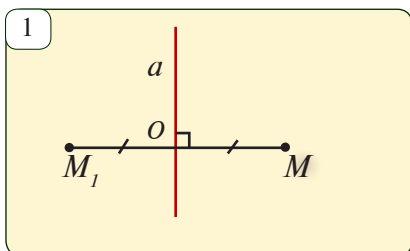
15.7. $A(-2; 3)$ noqatı $B(1; 2)$ noqatına, $C(4; -3)$ noqatı $D(7; -2)$ noqatına ótetuǵın parallel kóshiriw múmkinbe?

15.8. $ABCD$ $A_1B_1C_1D_1$ kub berilgen. Parallel kóshiriwde A_1D kesindi B_1C kesindige ótedi. Bul kóshiriwde AA_1 kesindi qaysı kesindige ótedi?

16

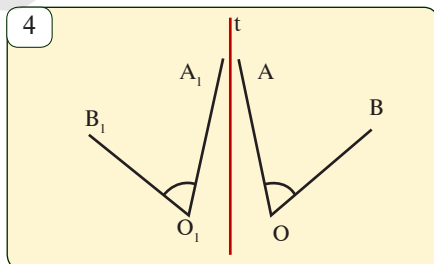
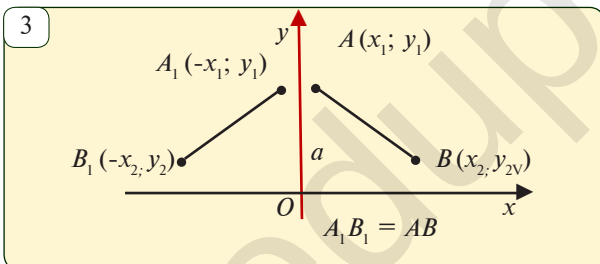
KÓSHERGE QARATA SIMMETRIYA

Tegislikte qandayda bir a tuwrı sıızıq hám onda jatpaytuǵın qálegen M noqatı berilgen bolsın. M noqatınan a tuwrı sıızıqqa perpendikulyar túsiremiz hám onıń ultanın O menen belgileymiz (1-súwret). Perpendikulyarda jatqan M_1 noqat ushın $MO = M_1O$ bolsa, M hám M_1 noqatlarga a tuwrı sıızıq yaqı *kósherge qarata simmetriyalı* noqatlar dep ataladı.



Tegisliktiń qálegen M noqatına a tuwrı sıızıq (kósherge) qaraǵanda onıń simmetriyalıq bolǵan M_1 noqatı saýkes qoyamız. Tegislikti bunday óz-ózine sáwlelendiriwge *kósherge qarata simmetriyalı* deymiz. Tuwrı sıızıqtı bolsa *simmetriya kósheri* dep jurgizemiz.

2-súwrette súwretlengen delfinler óz ara a kósherine qaraǵanda simmetriyalı boladı.



Kósherge qarata simmetriya háreket boladı yaǵnıy ol noqatlar arasındaqı aralıqtı saqlaydı.

Keliń bul tasdıyıqlawdı dáliylleyik 3- súwrette qálegen $A(x_1; y_1)$ hám $B(x_2; y_2)$ noqatlar bolıp, $A_1(-x_1; y_1)$ hám $B_1(-x_2; y_2)$ noqatları bolsa a tuwrı sıızıqqa (Oy kósherge) qarata saýkes túrde simmetriyalı sáwleleniwi bolsın. $AB = A_1B_1$ ekenligin kórsetemiz.

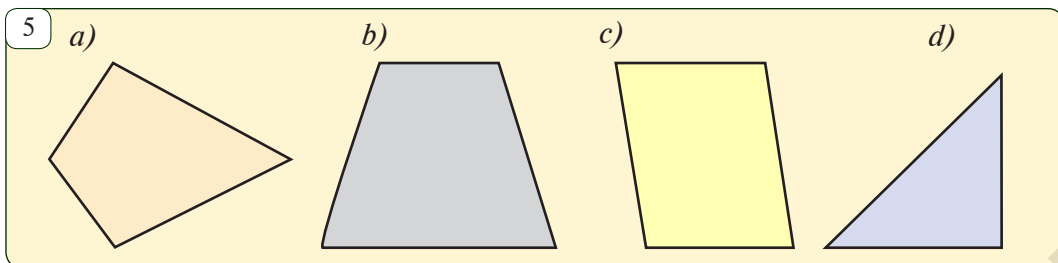
Haqıqatanda da, eki noqat arasındaqı aralıqtı esaplaw formulası boyınsha

$$AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$A_1B_1 = (-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

yaǵnıy bul aralıqlar óz ara teń. Bunnan kósherge qarata simmetriyada hár bir kesindi ózine teń kesindige ótiwi de kelip shıǵadı.

Tap soǵan uqsas, kósherge qarata simmetriyada múyesh — ózine teń múyeshke ótiwin de kórsetiw múmkin. Bunda tek múyeshtiń jónelisi ózgerip qaladı (4-súwret).



Koordinatalar tegisliginde berilgen $A(x; y)$ noqatı Ox kósherine qarata simmetriyada $A_1(x; -y)$ noqatqa, Oy kósherine qarata simmetriyada bolsa $A_2(-x; y)$ noqatına ótedi.

? Másele hám tapsırmalar

16.1. $(1; 2)$, $(0; 2)$, $(2; 2)$ noqatlar koordinata kósherine qarata simmetriyalarda qaysı noqatlarga ótedi? a) Ox kósherine qarata; b) Oy kósherine qarata.

16.2. $(2; 4)$ noqatı koordinata kósherine qarata simmetriyalı sawlelendiriwde $(2; -4)$ noqatqa ótedi. Sawlelendiriw qaysı koordinata kósherine qarata ámelge asırılğan?

16.3. 5- súwrette súwretlengen figuralardıń qaysıları simmetriya kósherine iye? Bul figuralardı dápтеріńizge kóshirip sızın hám olardıń simmetriya kósherlerin jasań.

16.4. Tuwrı tórtmüyeshlik, kvadrat, romb, teń qaptallı trapeciya hám teń qaptallı úshmüyeshliktiń neshe simmetriya kósheri bar?

16.5. Qálegen ABC úshmüyeshlik sızın. Onıń C ushınan ótiwshi tuwrı sızıqqa qarata oǵan simmetriyalı bolǵan úshmüyeshlikti súwretleń.

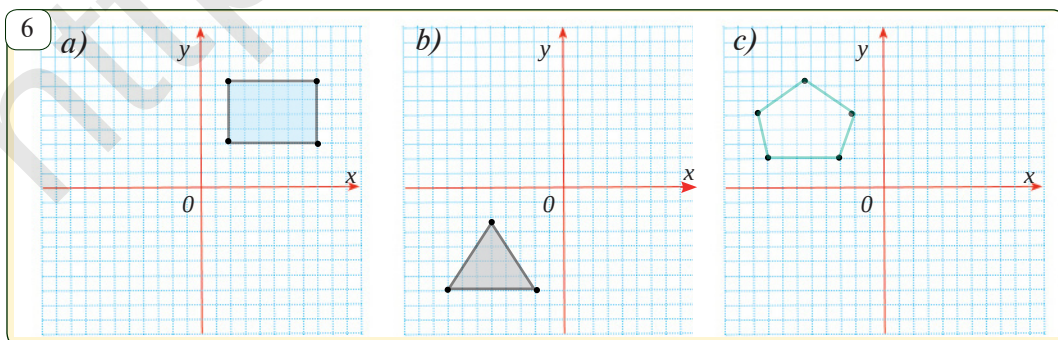
16.6. Koordinata tegisliginde ushları $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$ hám $D(7; 2)$ noqatlarda bolǵan $ABCD$ parallelogrammǵa Oy kósherine qarata simmetriyalıq bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammdı súwretleń.

16.7. Koordinata tegisliginde $y = x + 4$ funkciya grafigin sızın. Bul grafikke Ox kósherine qarata simmetriyalıq bolǵan tuwrı sızıqtı súwretleń hám ol qaysı funkciya grafigi ekenligin anıqlań.

16.8. Shepten ońa da, ońnan shepkede oqısa bolatuǵın sózlerge polindromlar delinedi. Tómenдеgi polindrom sózlerdiń qaysılarınıń simmetriya kósheri bar?

КИЙИК QABAQ NAN SOS KETEK BAB MUM RADAR

16.9. 6- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápтеріńizge kóshirip sızın. Usı koordinatalar tegisliginde bul figuralarǵa Ox hám de Oy kósherine qarata simmetriyalı bolǵan figuralardı dúziń.



17

ORAYLIQ SIMMETRIYA HÂM BURIW

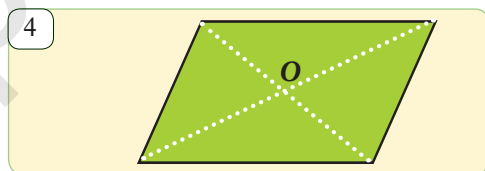
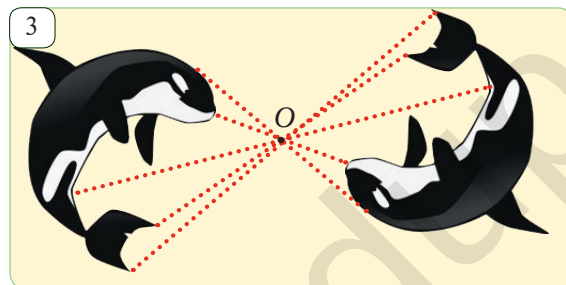
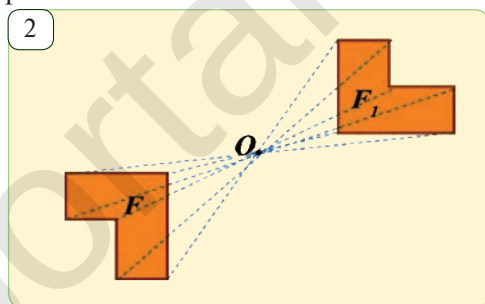
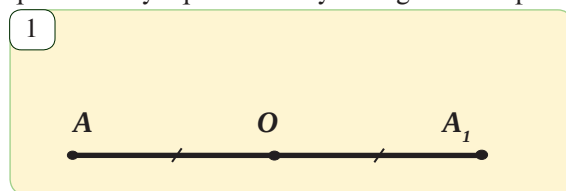
Tegislikte berilgen A hâmi A_1 noqatlar O noqatqa qarata simmetriyalı dep ataladı. Eger $AO = OA_1$ yağniy O noqat AA_1 kesindisiniñ ortası bolsa (1- súwret).

Eger tegislikde berilgen F figurasınıñ hâr bir noqatı O noqatına qarata simmetriyalı noqatqa kôshse (2- súwret), taza F_1 figura payda boladı. Bunday almasırwda F hâmi F_1 figuralar *O noqatqa qarata simmetriyalı* delinedi. 3-súwrettegi delfinler súwreti O noqatqa qarata simmetriyalı figuralar boladı.

Noqatqa qarata simmetriya — hâreket bolıp tabıladı.

Eger F figura O noqatqa qarata simmetriyalı almasırwda ózine kôshse, ol *oraylıq simmetriyalı figura* dep ataladı.

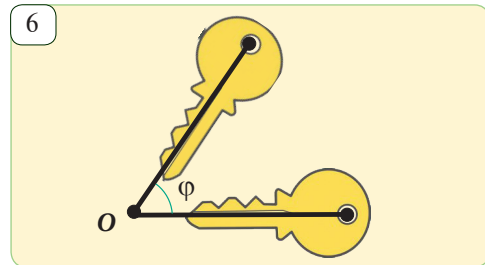
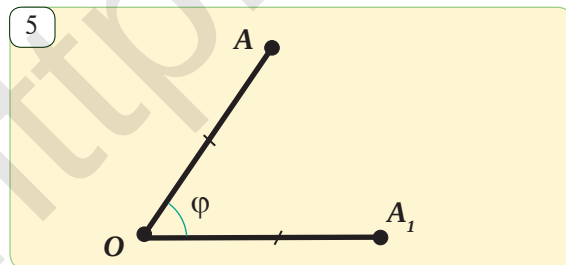
Mâselen, parallelogramm (4-súwret) diagonallarınıñ kesilisiw noqatı O ğa qarata oraylıq simmetriyalı figura bolıp esaplanadı.



1-mâsele. O (2; 4) noqatqa qarata simmetriyada A (1; 2) noqat qaysı noqatqa ótedi?

Sheshiliwi. $A_1(x; y)$ izlenip atırğan noqat bolsın. Anıqlamağa muwapıq, O noqatta AA_1 kesindisiniñ ortası. Demek, $2 = (x+1)/2$, $4 = (y+2)/2$.

Bul teñliklerden $x = 4 - 1 = 3$, $y = 8 - 2 = 6$. **Juwapı:** A_1 (3; 6).



Aytatın bolsaq, tegislikte O noqatı hâmi φ múyesh berilgen bolıp, figura almasırwda tegisliktiñ qálegen A noqatı sonday A_1 noqatqa kôshirilsin, $OA = OA_1$ hâmi $\angle AOA_1 = \varphi$ bolsın. Bunday figura almasırw tegislikti O noqatı átirapında φ múyeshke *burıw* dep ataladı. (5-súwret).

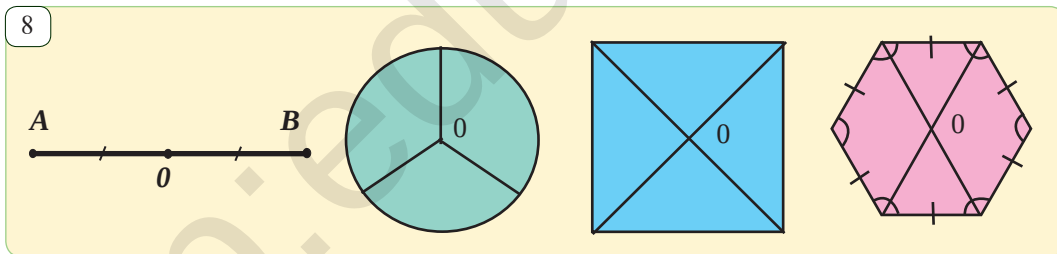
Eger tegislikte berilgen F figuraniñ hár bir noqatın O noqatına qarata φ mýeshke bursaq, taza F_1 figura payda boladı. Bunda F figura O noqatqa qarata φ mýeshke buriwda F_1 figurağa ótiw delinedi. 6-súwrette gilttiñ súwretti hám onı qandayda bir mýeshke buriwda payda bolğan figura keltirilgen.

Noqatqa qarata buriw da háreket boladı.

O noqatqa qarata 180° mýeshke buriw O noqatqa qarata oraylıq simmetriyadan ibarat boladı.

Koordinataları menen berilgen $A(x; y)$ noqatı koordinata basına qarata simmetriyada $A_1(-x; -y)$ noqatqa ótedi: $A(x; y) \rightarrow A_1(-x; -y)$.

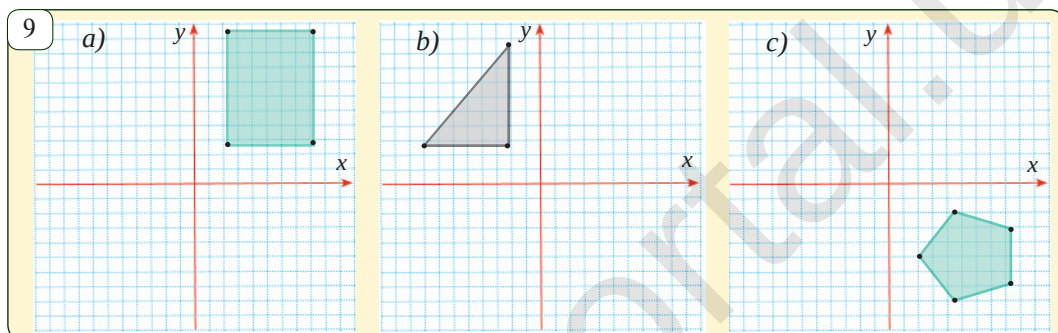
Tabiyatta simmetriyani hár qádemde ushıratıw mýmkin. Máselen, janlı tirishiliktiñ kópshiligi, atap aytqanda, insan hám haywanlar denesi, ósimliklerdiñ japıraqları hám gülleri simmetriyalı dúzilgen (7- súwret). Sonday-aq jansız tábiyat unsurları da bar, máselen qar ushqınları, duz kristalları, zatlardıñ molekulyar dúziliwi de ájayıp simmetriyalı figuralalardan ibarat. Tábiyattağı bul gózzallıq hám quramallıqtan úlgi alğan qurıwshı, injener hám arxitektor sıyaqlı qurıwshılar jaratqan kóplep imaratlar, qurılma hám mexanizmler, texnika hám transport qurılmaları da simmetriyalı jaratılğan.



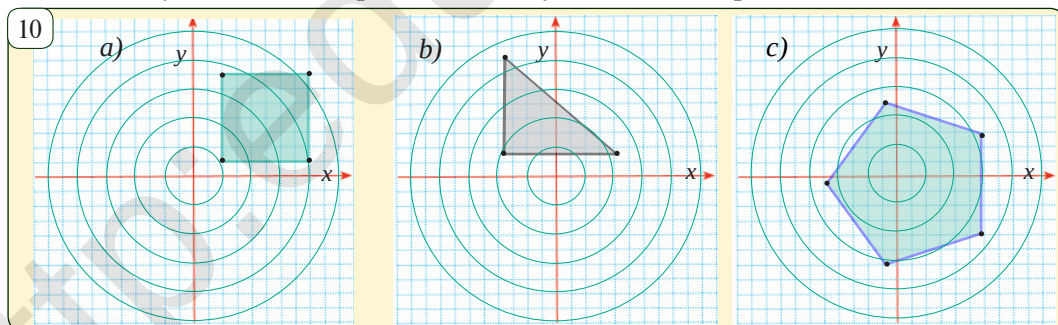
? Másele hám tapsırmalar

- 17.1. $O(-2; 3)$ noqatqa qarata oraylıq simmetriyada $A(4; 2)$ noqat qaysı noqatqa ótedi?
- 17.2. 8-súwrette súwretlengen figuralarda O noqatı simmetriya orayı ekenligin tiykarlañ.
- 17.3. $(-2; 5)$, $(2; 2)$, $(-6; 12)$ noqatlar koordinata basına qarata oraylıq simmetriyada qaysı noqatqa ótedi?
- 17.4. Oraylıq simmetriyanıñ háreket ekenligin dáliylleñ.
- 17.5. Parallelogrammniñ (4-súwret) diagonalları kesilisen noqatı O ğa qarata oraylıq simmetriyalı figura ekenligin dáliylleñ.

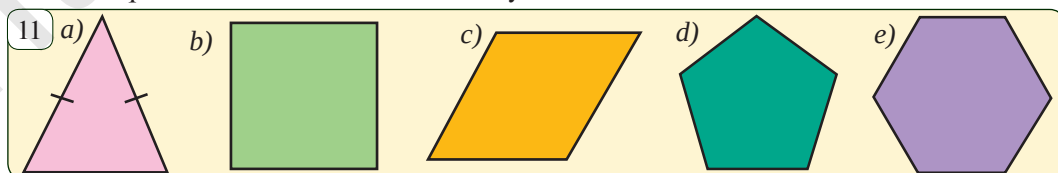
- 17.6.** Tuwrı tórtmüyeshlik, kvadrat, parallelogramm, müyesh, tuwrı sızıq hám teń qaptallı úshmüyeshliklerdiń qaysı birewi óraylıq simmetriyalı figuradan ibarat boladı? Olardıń simmetriya orayı qáy jerde jaylasqan?
- 17.7.** Qálegen AB kesindi hám onda jatpaytuǵın M noqatın sızıń. AB kesindige M noqatına qarata simmetriyalı bolǵan A_1B_1 kesindini súwretleń.
- 17.8.** Qálegen ABC úshmüyeshlik sızıń. a) C ushına qarata; b) medianaları kesilisiw noqatına qarata simmetriyalı bolǵan úshmüyeshlikti súwretleń.
- 17.9.** Koordinata tegisliginde ushları $A(3; 2)$, $B(2; 7)$, $C(6; 7)$ hám $D(6; 2)$ noqatlarda bolǵan $ABCD$ parallelogrammǵa koordinata bası $O(0, 0)$ noqatqa qarata simmetriyalı bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammdı súwretleń.



- 17.10.** 9- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń. Usı koordinatalar tegisliginde bul figuralarǵa koordinata basına qarata simmetriyalı bolǵan figuralardı jasań.
- 17.11.** 10- súwrettegi koordinatalar tegisliginde súwretlengen figuralardı dápterińizge kóshirip sızıń. Usı koordinatalar tegisliginde kvadrattı 90° qa, úshmüyeshlikti 180° qa hám becmüyeshlikti 120° qa burıń.

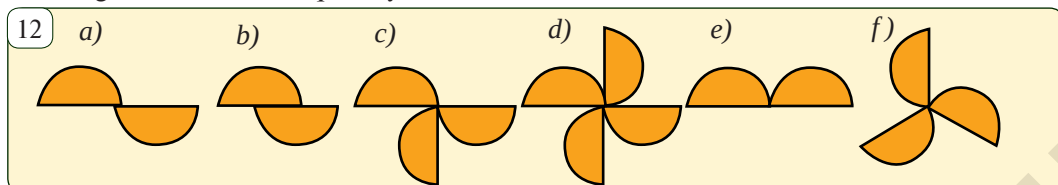


- 17.12.** 11- súrettegi kópmüyeshlikler qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań. Olardıń neshe simmetriya kósheri bar?

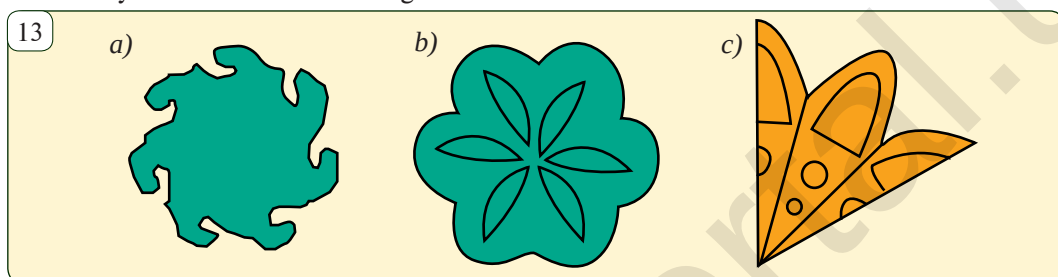


- 17.13.** $M, N, S, X, Z, V, T, Y, U, W, D, B, H, K, C, I, E, A$ háripleri qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań.

- 17.14.** 12- súwrettegi figuralar bir neshe bir qıylı yarım dóngeleklerden dúzilgen. Bul figuralardı óz-ózone ótkizetuğın burıw bar yaki joq ekenligin anıqlań. Eger bar bolsa ol qanday burıw boladı?



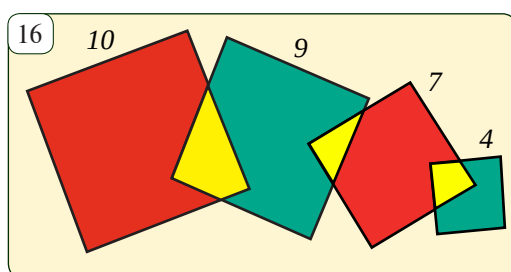
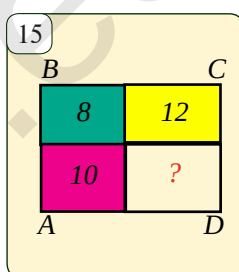
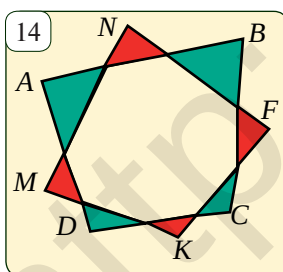
- 17.15.** 13-súwrettegi figuralardıń qaysıları simmetriya orayına iye. Qanday múyeshke burıwda bul figuralar óz-ózone ótedi?



- 17.16.** Eki $ABCD$ hám $MNPK$ teń yağnıy teń maydanğa ie bolğan tórtmúyeshlikler bir-biriniń ústine 14-súwrette kórsetilgendeı etip qoyılğan. Qızıl reńdegi úshmúyeshlik maydanları qosındısı jasıl reńge boyalğan úshmúyeshlikler maydanı qosındısına teńligin kórsetiń.

- 17.17.** $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik tárepleri parallel tuwrı sızıqlar menen tórt tuwrı tórtmúyeshlikke bólingen. 15-súwrette berilgenlerden paydalanıp, boyalmağan tuwrı tórtmúyeshlik maydanın tabıń.

- 17.18.** 16-súwrettegi kvadratlardıń tárepleri 10 cm , 9 cm , 7 cm hám 4 cm . Qızıl reńdegi kvadratlar maydanı qosındısı 112 cm^2 qa teń. Kók reńdegi kvadratlar maydanınıń qosındısın tabıń.

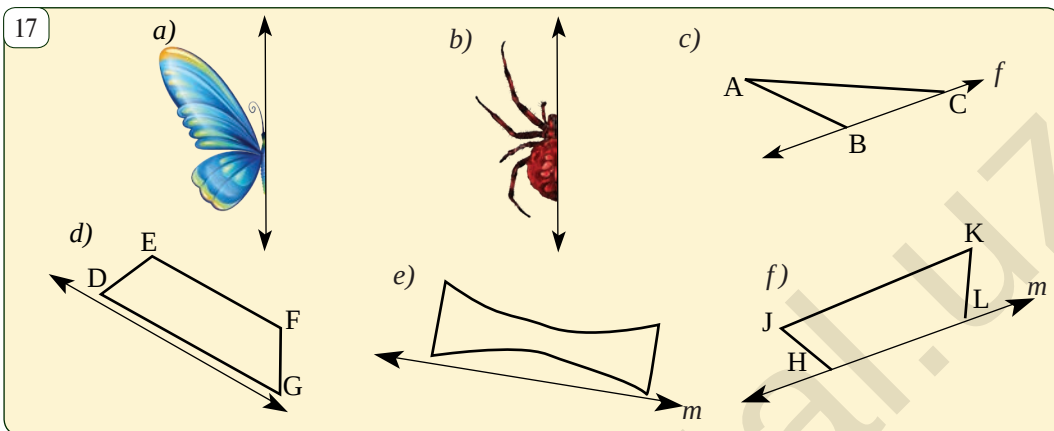


"Qar ushqınları" joybarlaw jumısı

Tábiyatta barlıq qar ushqınları simmetriyalı formağa iye boladı hám bir birine uqsamaydı. Hár bir qar ushqını orayğa qarata 60° qa burıwda óz-ózone ótetuğın figuralardı qağazdan qanday qırqıp alıw múmkin? Bir neshe túrli formadağı qar ushqınlardıń qağazdan qırqıp alıń.



17.19. 17-súwrette súwretlengen figuralardı dápterinińge sıızıp alıń hám berilgen kósherge qarata simmetriyalı sáwleleniwın jasań.

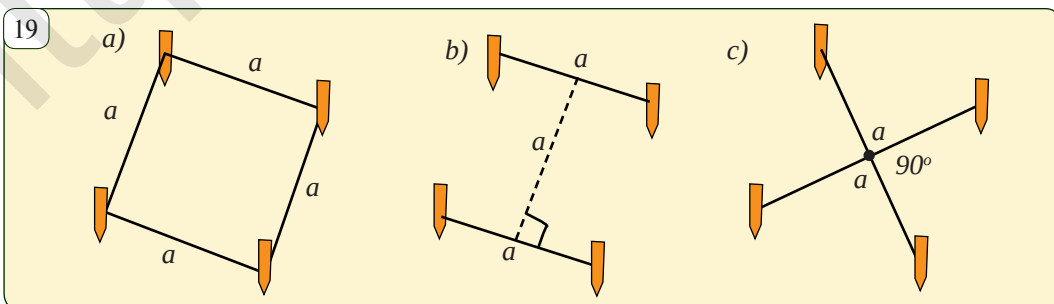


17.20. 18-súwrette súwretlengen avtomobil kompaniyalarınń logotipleri qanday simmetriyaǵa iye ekenligin anıqlań.



"Gulzardagi geometriyalıq" joybarlaw jumısı.

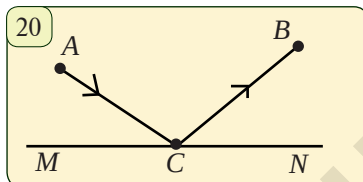
Úsh dos Ali, Váli hám Soli kvadrat formasındaǵı gúlzar jaratpaqshı. Ali kvadrat formadaǵı gúlzardı 4 qazıqqa 4 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdi tartıp ajratpaqshı (19.a-súwret). Váli kvadrat formadaǵı gúlzardı 2 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdi qazıqqa tartıp, olardı parallel halda aralarındaǵı aralıq jip uzınlıǵına teń qılıp ornalıp ajratpaqshı (19.b-súwret). Soli 2 bir qıylı uzınlıqtaǵı jiplerdiń ortaların túyip, olardıń ortaları ústpe-úst túsetuǵın hám bir-birine perpendikulyar qılıp tartıp qazıqlarǵa baylap ajratpaqshı (19.c-súwret). Aytıńshı, olardıń qaysı biri qoyılǵan másele ni tuwrı sheshken? Nege?



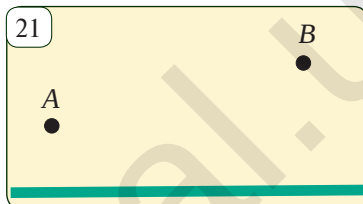
"Geometriyalıq hám optikalıq" joybarlaw jumısı.

XVII ásirde ullı fransuz matematik alımı Per Ferma tómendegi nızamlıqtı payda etti: jaqtılıq nurı bir noqattan ekinshi noqatqa eń qısqa waqt dawamında jetip baradı.

1. Aynanıń bir tárepindegi A hám B noqatlar berilgen. Jaqtılıq nurı A noqattan shıǵıp, aynaǵa urılıp B noqattan ótedi (20-súwret). Ferma principinen paydalanıp, ACM (túsiw múyeshi) hám BCN (qaytıw múyeshi) arasındaǵı qatnastı tabıń.

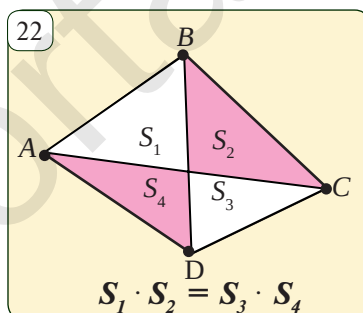


2. Dáryanıń jaǵasındaǵı A noqattı fermerdiń úyi hám B noqatta onıń ferması jaylasqan (21-súwret). Fermer hár kúni dáryaǵa barıp, ıdıslarǵa suw toltırıp fermasına alıp baradı. Ol jumıstı eń qısqa jol menen ámelge asırıw ushın qanday joldan júrgeni maqul?



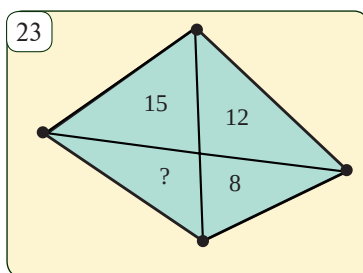
Qızıqlı geometriya

a) 22-súwrette qálegen dóńis tórtmúyeshlik súwretlengen. Tórtmúyeshliktiń diagonalı onı tórtmúyeshlikke ajratadı. Bul úshmúyeshlikler maydanı ushın $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ bolıwın dáliylleń.



Kórsetpe: Uqsas figuralardıń qásiyetlerinen paydalanıń.

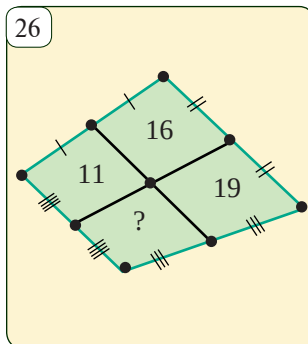
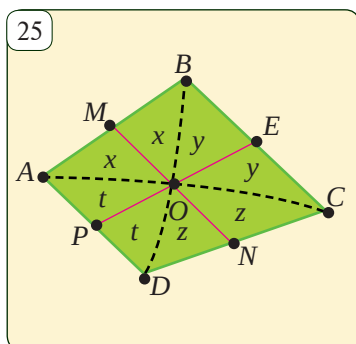
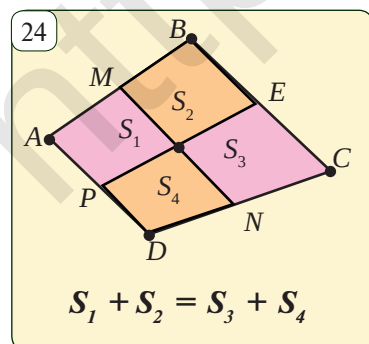
b) 23-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz maydandı tabıń.

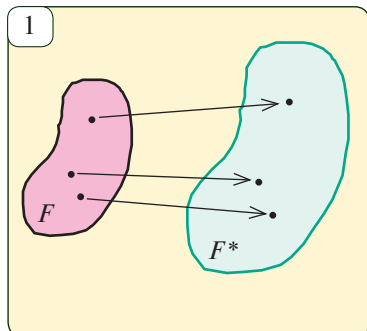


c) 24-súwrette qálegen durıs tórtmúyeshlik súwretlengen. Tórtmúyeshlik qarama qarsı tárepleriniń ortaları tutastırılǵan. Nátiyjede tórtmúyeshlik tórt tórtmúyeshlikke ajıraldı. Bul tórtmúyeshlikler maydanı ushın $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ ekenligin dálilleń.

Kórsetpe: dáliyllew ushın 25-súwrettegi járdemshi figuralardan paydalanıń.

d) 26-súwrette berilgenlerden paydalanıp, belgisiz maydandı tabıń.

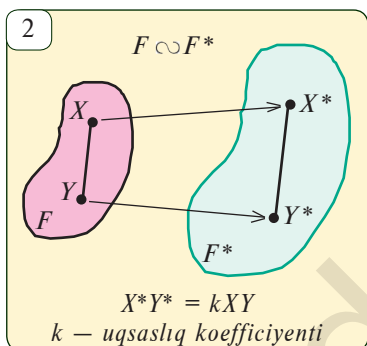




Ótken sabaqlarda kóp-múyeshliklerdiŇ uqsaslıǵı túsiniǵı menen tanıstıq. Uqsaslıq túsiniǵın tek kóp-múyeshlikler ushın emes, bálki qálegen geometriyalıq figuralar ushın da kiritiw múmkin.

Eger F hám F^* figuraları berilgen bolıp, F figurasınıń hár bir noqatına F^* figurasınıń qaysı bir noqatı sáykes qoyılǵan bolsa hám bunda F^* figurasınıń hár bir noqatı F figurasınıń tek bir noqatı sáykes kelse, (1-súwret). F figurası F^* figurasına *túrlendiriw* delinedi.

✓ **Anıqlama.** Eger F figurasın F^* figurasına túrlendiriwde noqatlar arasındadıǵı aralıqlar 0 den ózgeshe anıq bir sanǵa kóbeyse, bunday túrlendiriw *uqsaslıq túrlendiriw* delinedi (2-súwret).

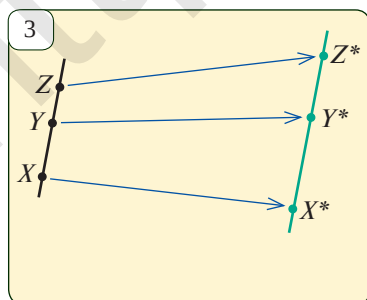


Bul anıqlamanı tómendegishe talqılaw múmkin: Aytayıq, qandayda bir túrlendiriw nátiyjesinde F figurasınıń qálegen X, Y noqatlarına F^* figurasınıń X^*, Y^* noqatları sáykes qoyılǵan bolsın. Eger $X^*Y^* = k \cdot XY$, $k > 0$ bolsa, bunday túrlendiriwge *uqsaslıq túrlendiriw* delinedi. Bunda k — barlıq X hám Y noqatları ushın bir qıylı san bolıp, ol uqsaslıq koefficienti delinedi.

Eger F hám F^* figuraları berilgen bolıp, bul figuralardıń birin ekinshisine ótkeretuǵın uqsaslıq túrlendiriwı bar bolsa, F hám F^* figuraları óz ara uqsas delinedi. Figuralardıń uqsaslıǵı $F \sim F^*$ sıyaqlı jazıladı. Eger uqsaslıq koefficienti k nı da kórsetiw lazım bolsa, $F \sim F^*$ túrinde belgilenedi.

Eger uqsaslıq túrlendiriwinde X noqatına X^* noqatı sáykes qoyılǵan bolsa, X noqatı X^* noqatına *túrlendi* yaki *ótti* delinedi.

📐 **Teorema.** *Uqsaslıq túrlendiriwı a) tuwrı sıziqtı tuwrı sıziqqa; b) nurdı nurǵa; d) múyeshhti (onıń úlkenligin saqlaǵan halda) múyeshke; e) kesindini (uzınılıǵı bul kesindiden k márte uzın bolǵan) kesindige ótkeredi.*



Dáliyllew. a) Uqsaslıq koefficienti k bolǵan uqsas túrlendiriwde bir tuwrı sıziqtı jatqan túrli X, Y hám Z noqatlarına sáykes túrde X^*, Y^* hám Z^* noqatlardıǵa túrlendirsın (3-súwret).

X, Y, Z noqatlarınan biri, aytayıq, Y qalǵan ekewiniń ortasında jatsın. Onda $XZ = XY + YZ$. Uqsaslıq túrlendiriwdiń anıqlaması boyınsha:

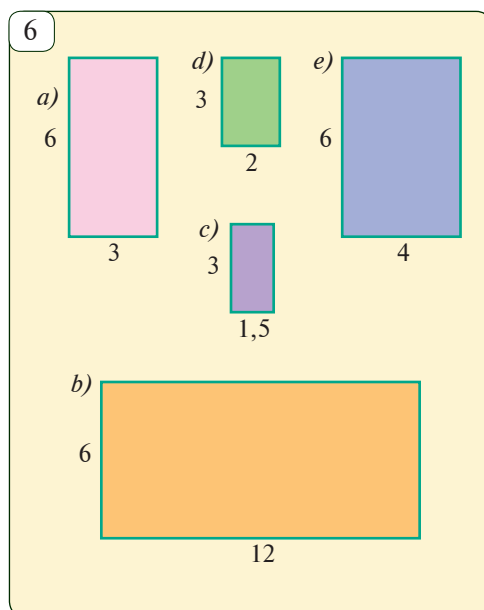
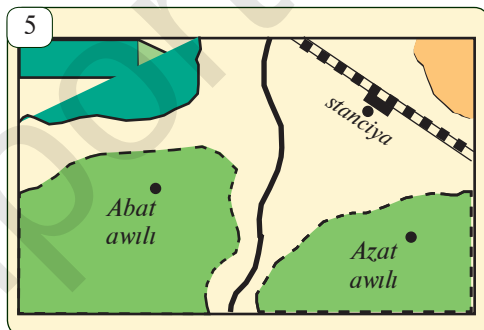
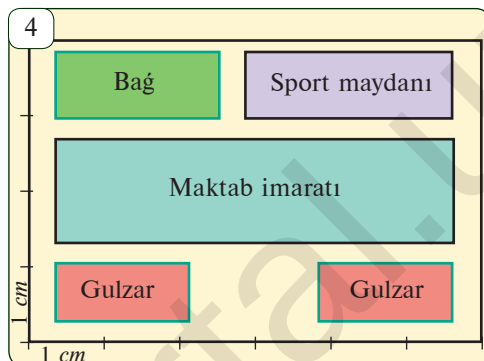
$$X^*Z^*=k \cdot XZ=k \cdot (XY+YZ)=k \cdot XY+k \cdot YZ=X^*Y^*+Y^*Z^*.$$

Bul teñlikten X^* , Y^* hám Z^* noqatları bir tuwrı sıızıqta jatatuǵını kelip shıǵadı.

Bul teoremanıń dáliyllewın tek: a) tastıyıqlaw ushın keltirdik. Qalǵan jaǵdayların óz betıńızshe dáliylleń.

? Másele hám tapsırmalar

- 18.1.** Uqsaslıq túrlendiriw degen ne?
- 18.2.** Qanday figuralar uqsas figuralar delinedi?
- 18.3.** Eni 3 *cm*, biyikligi 4 *cm* bolǵan tuwrı tórtmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 2 ge teń bolǵan tórtmúyeshlik jasań.
- 18.4.** 4-súwrette mektep átirapınıń sxeması 1:1000 masshtabta súwretlengen. Ólshew islerin orınlañ.
- a) háwliniń; b) mektep imaratiniń; d) gúlzarlardiń; e) sport maydaniniń; f) baǵdıń haqıyqıy ólshemlerin tabıń.
- 18.5.** Eger karta 1:50000 masshtabta súwretlengen bolsa, Abat hám Azat awılları arasındaǵı aralıqtı tabıń.
- 18.6.** Uqsaslıq túrlendiriwde nurlar arasındagı múyesh saqlanatuǵınıń dáliylleń.
- 18.7.*** Uqsaslıq túrlendiriwde a) parallelogramm parallelogrammǵa; b) kvadrat kvadratǵa; d) tuwrı tórtmúyeshlikke; e) trapeciya trapeciyaǵa túrlendiriwın dáliylleń.
- 18.8.*** ABC úshmúyeshliginiń uqsaslıq túrlendiriwinde $A^*B^*C^*$ úshmúyeshligine túrlendiriledi. Eger uqsaslıq koefficienti 0,6 ǵa hám ABC úshmúyeshliginiń perimetri 12 *cm* ge teń bolsa, $A^*B^*C^*$ úshmúyeshliginiń perimetrin tabıń.
- 18.9.** 6-súwretten uqsas tuwrı múyeshliklerdiń juplıqların tabıń hám uqsaslıq koefficientlerin anıqlañ.

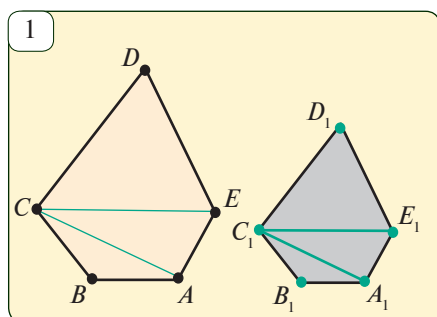


1-teorema. *Uqsas kópmúyeshliklerdín perimetrleriniñ qatnası uqsaslıq koefficientine teñ.*

Dáliytlew. Haqıyqattan da, $A_1A_2...A_n$ hám $B_1B_2...B_n$ kópmúyeshlikleri uqsas hám uqsaslıq koefficienti k bolsa, $B_1B_2=k \cdot A_1A_2$, $B_2B_3=k \cdot A_2A_3$, ..., $B_nB_1=k \cdot A_nA_1$ boladı. Bunnan

$P=B_1B_2+B_2B_3+...+B_nB_1=k \cdot A_1A_2+k \cdot A_2A_3+...+k \cdot A_nA_1=k \cdot (A_1A_2+A_2A_3+...+A_nA_1)=kP_1$ teñlikti payda etemiz. *Teorema dáliytlendi.*

2-teorema. *Uqsas kópmúyeshliklerdi bir qıylı sandağı uqsas úshmúyeshliklerge ajratıw múmkin.*



Dáliytlew. Aytayıq, $ABCDE$ hám $A_1B_1C_1D_1E_1$ kópmúyeshlikler uqsas bolıp, uqsaslıq koefficienti k bolsın.

Óz ara sáykes C hám C_1 tóbelerinen CA , CE hám C_1A_1 , C_1E_1 diagonalların júrgizemiz (1-súwret). Nátiyjede kópmúyeshlikler bir qıylı sandağı úshmúyeshliklerge ajratıldı. Payda bolğan úsh jup sáykes úshmúyeshliklerdín uqsaslıgın kórsetemiz.

1. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Sebebi bul úshmúyeshliklerde, shártı boyısha, $\angle B = \angle B_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$. Úshmúyeshliklerdín uqsaslıgınıñ TMT belgisi boyınsha,

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1.$$

2. $\triangle CDE \sim \triangle C_1D_1E_1$. Bul uqsaslıq 1-bántindegi sıyaqlı dáliytlendi.

3. $\triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1$. Haqıyqatında, $\angle CAE$ hám $\angle C_1A_1E_1$ múyeshlerin qaraymız:

$$\angle CAE = \angle BAE - \angle CAB, \angle C_1A_1E_1 = \angle B_1A_1E_1 - \angle C_1A_1B_1.$$

Bul jerde, $\angle BAE = \angle B_1A_1E_1$ (berilgen uqsas becmúyeshliklerdín sáykes múyeshleri). $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ (uqsas ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniñ sáykes múyeshleri).

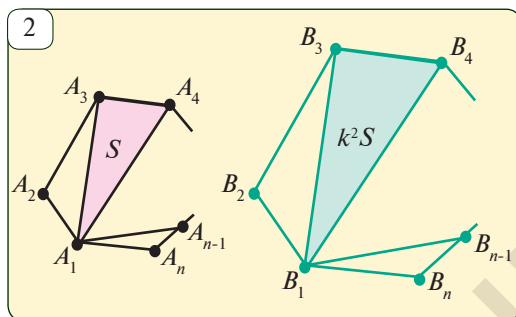
Demek, $\angle CAE = \angle C_1A_1E_1$.

AC hám AE hámde A_1C_1 hám A_1E_1 táreplerin qaraymız: $AC=kA_1C_1$, sebebi olar óz ara uqsas ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniñ sáykes tárepleri, $AE=kA_1E_1$, sebebi olar da berilgen uqsas becmúyeshlikleriniñ sáykes tárepleri. Demek, úshmúyeshliklerdín uqsaslıgınıñ TMT belgisi boyınsha, $\triangle ACE \sim \triangle A_1C_1E_1$. Qálegen uqsas kópmúyeshlikler ushın da usı sıyaqlı talqılawlar paydalı bolıwı anıq.

Teorema dáliytlendi.

3-Teorema. *Uqsas kópmúyeshliklerdín maydanlariniñ qatnası uqsaslıq koefficientiniñ kvadratına teñ.*

Dáliyilew. Aytayıq, $A_1A_2\dots A_n$ hám $B_1B_2\dots B_n$ kópmúyeshlikler uqsas hám k — uqsaslıq koefficienti bolsın. Onda $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$ úshmúyeshlikleri sáykes túrde, $B_1B_2B_3$, $B_1B_3B_4$, ..., $B_1B_{n-1}B_n$ úshmúyeshliklerine uqsas bolıp, uqsas úshmúyeshlikleriniń maydanlarınıń qatnası k^2 qa teń boladı (2-súwret):



$$S_{A_1A_2A_3} = k^2 S_{B_1B_2B_3}, S_{A_1A_3A_4} = k^2 S_{B_1B_3B_4}, \dots, S_{A_1A_{n-1}A_n} = k^2 S_{B_1B_{n-1}B_n}.$$

Bul teńliklerdiń sáykes bólimlerin qossaқ,

$$S_{A_1A_2\dots A_n} = k^2 S_{B_1B_2\dots B_n} \text{ boladı.}$$

Teorema dáliyillendi.

Másele. Perimetrleri 18 cm hám 24 cm bolǵan eki uqsas kópmúyeshlik maydanlarınıń qatnasın tabıń.

Sheshiliwi. 1) Uqsas kópmúyeshlikler perimetrleriniń qatnası uqsaslıq koefficientine teń ekenliginen paydalanıp, $k=24:18=4:3$ ekenligin tabamız.

2) Uqsas kópmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası uqsaslıq koefficientiniń kvadratına teń bolǵanı ushın izlengen qatnas $k^2 = \frac{16}{9}$ ǵa teń. **Juwabı:** $\frac{16}{9}$.

? Másele hám tapsırmalar

19.1. Uqsas kópmúyeshlik perimetrleriniń qatnası nege teń?

19.2. Uqsas kópmúyeshliklerdiń maydanlarınıń qatnası haqqındaǵı teoremanı túsindir.

19.3. Úshmúyeshlik penen tórtmúyeshlik uqsas bolıwı múmkin be?

19.4. Maydanları 6 m² hám 24 m² bolǵan eki tórtmúyeshlik uqsas. Uqsaslıq koefficientin tabıń.

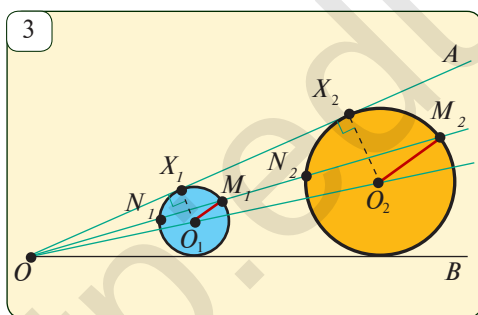
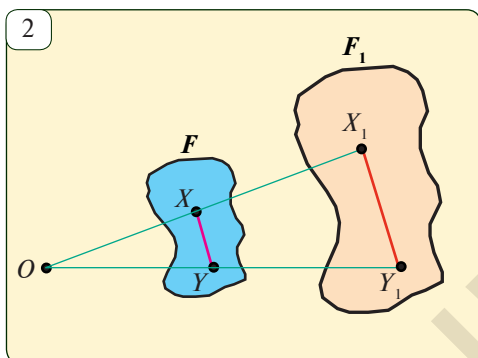
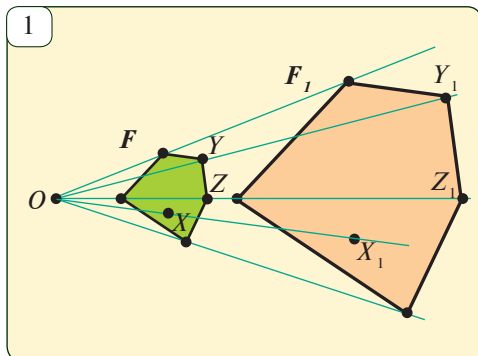
19.5. Eki kópmúyeshliktiń perimetrleri 18 cm hám 36 cm ge, maydanlarınıń qosındısı bolsa 30 cm² qa teń. Kópmúyeshliklerdiń maydanların tabıń.

19.6. Perimetri 84 cm bolǵan úshmúyeshliktiń bir tárepine parallel etip júrgizilgen tuwrı, onnan perimetri 42 cm ge hám maydanı 26 cm² qa teń úshmúyeshlik ajratadı. Berilgen úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

19.7. O noqatına salıstırǵanda simmetriyalı figuralar uqsas bola ma? Kósherge salıstırǵanda simmetriyalı figuralarna? Olardıń uqsaslıq koefficienti nege teń?

19.8. Tórtmúyeshlik formasındaǵı paxta atızı kartada maydanı 12 cm² bolǵan tórtmúyeshlik penen kórsetiledi. Eger karta masshtabı 1:1000 bolsa, atızdıń maydanın esaplań.

19.9*. Maydanları 8 cm² hám 32 cm² bolǵan eki uqsas úshmúyeshlik perimetrleriniń qosındısı 48 cm ge teń. Úshmúyeshliklerdiń perimetrlerin tabıń.



Ен ápiwayı uqsas túrlendiriwlerden biri gomotetiya boladı. Aytayıq, F — figura, O — noqat hám k — oń sanı berilgen bolsın. F figurasınıń qálegen X noqatı arqalı OX nurın júrgizemiz hám bul nurda uzınlıǵı $k \cdot OX$ bolǵan OX^* kesindisin qoyamız (1-súwret). Bul usıl menen F figurasınıń hár bir X noqatına X_1 noqatın sáykes qoyatuǵın túrlendiriw *gomotetiya* delinedi. Bunda, O noqatı gomotetiya orayı, k sanı gomotetiya koefficienti, F hám gomotetiya nátiyjesinde F figura almasatuǵın F_1 figuralar bolsa *gomotetiyalıq figuralar* delinedi.

Teorema. Gomotetiya uqsashlıq túrlendiriwi boladı.

Dáliyllew. Erkli O orayına iye, k koefficientli gomotetiyada F figuranıń X hám Y noqatları X_1 hám Y_1 noqatlarına ótsin (2-súwret). Onda, gomotetiya anıqlaması boyınsha, XOY hám X_1OY_1 úshmúyeshliklerinde $\angle O$ — ulıwma hám $\frac{OX_1}{OX} = \frac{OY_1}{OY} = k$ boladı.

Demek, XOY hám X_1OY_1 úshmúyeshlikleri eki tárepi hám olar arasındagı múyeshi boyınsha uqsas.

Sonıń ushın $\frac{X_1Y_1}{XY} = \frac{OX_1}{OX}$, sonlıqtan, $X_1Y_1 = k \cdot XY$.

Másele. AOB múyeshiniń táreplerine urınıwshı qálegen eki sheńber gomotetiya bolıwın hám O noqatı bul gomotetiya ushın oray ekenligin dáliylleń.

Sheshiliwi. Orayları O_1 hám O_2 bolǵan sheńberler AOB múyeshiniń táreplerine urınsın (3-súwret). Bul sheńberlerdiń gomotetikalıq ekenligin dálilleymiz.

Sheńberler OA nurına sáykes túrde X_1 hám X_2 noqatlarında urınǵan bolsın (3-súwret).

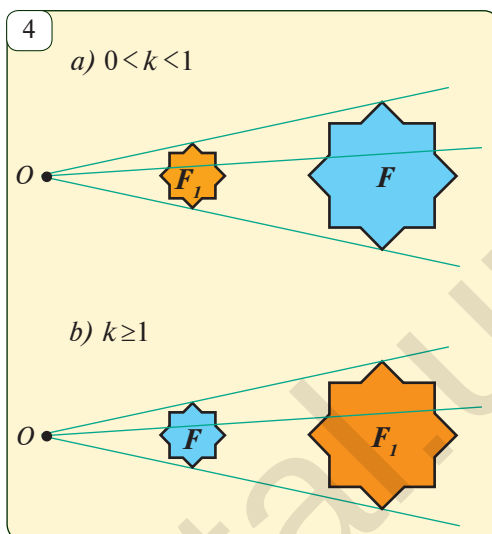
Onda, $\triangle OX_1O_1 \sim \triangle OX_2O_2$, sebebi

$$\angle X_1OO_1 = \angle X_2OO_2 \quad \text{hám} \quad \angle OX_1O_1 = \angle OX_2O_2 = 90^\circ.$$

$$\text{Bunnan, } \frac{O_2X_2}{O_1X_1} = \frac{OO_2}{OO_1}.$$

Оñ тәрептеги қатнас k менен белгилеймиз ҳам коэффициенти $k = \frac{O_2 X_2}{O_1 X_1}$, орайы O болған гомотетианы қараймыз. Айтайық, бул гомотетияда O_1 орайына ие шеңбердің қалеген M нопаты M^* нопатына түрлендірилген болсын онда $O_2 M^* = k \cdot O_1 M$ яки $O_2 M_2 = \frac{O_2 X_2}{O_1 X_1} \cdot O_1 M_1$.

Буннан, $O_1 X_1 = O_1 M_1$ болған ушін, $O_2 M_2 = O_2 X_2$ теңлигин пайда етемиз. Бул M_2 нопаты орайы O_2 нопатында болған радиуси $O_2 X_2$ ге тең болған шеңберде жататуғынын билдиреди. Демек, қаралып атырған шеңберлер өз ара гомотетикалық екен.

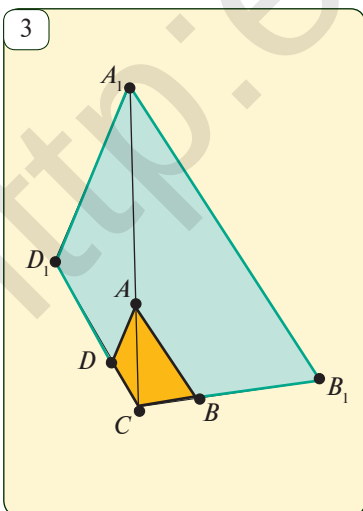
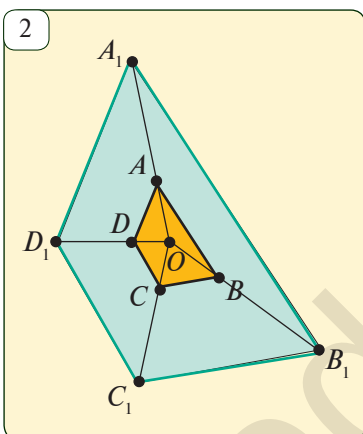
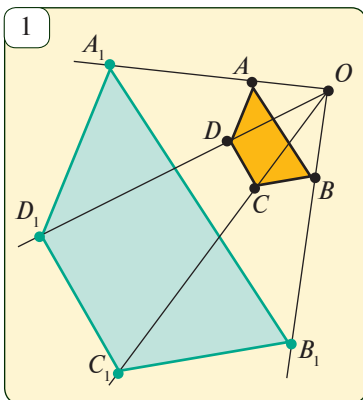


Једеллестирiwshi тәпсирма

4-сүwrette гомотетия коэффициенти а) $0 < k < 1$; б) $k \geq 1$ болған гомотетиялық фигуралар сүwretленген. Гомотетия коэффициентиниң шамасына қарап гомотетиялық фигуралардың “қисылығы” яки “созылығы” хаққында қандай жуwмақ шығарыw мүмкин?

Мәселе һәм тәпсирмалар

- 20.1.** Гомотетия деген не? Гомотетия орайы, коэффициенти ше?
- 20.2.** Гомотетия уқсаслық түрлендіриw екенлигин дәлиyllең.
- 20.3.** Ёшмұyeshлик сизың: а) Ёшмұyeshликтің ишинде; б) Ёшмұyeshликтің сыртнан O нопатын белгилең һәм коэффициенти 2 ге тең болған O орайына ие гомотетияны қарап шығып, берилген ёшмұyeshликке гомотетиялы ёшмұyeshлик жасаң.
- 20.4.** Периметрleri 18 cm һәм 27 cm болған еки ромб өз ара гомотетикалық болadı. Бул ромблардың тәреplerиниң һәм майданларынның қатнасларын табың.
- 20.5.** Гомотетияда X нопаты X_1 нопатына, Y нопаты Y_1 нопатына өтеди. Егер X , X_1 , Y , Y_1 нопатлары бир туwры сизықта жатпаса, бул гомотетияның орайын табың.
- 20.6.** Коэффициенти 2 ге тең болған гомотетияда X нопаты X_1 нопатына өтуғуғын белгили. Бул гомотетияның орайын жасаң.
- 20.7.** Шеңберге гомотетикалық фигура шеңбер болатуғынын дәлиyllең.
- 20.8.** Шеңбер сизың. Орайы шеңбер орайында һәм коэффициенти а) $\frac{1}{2}$; б) 2; д) 3; е) $\frac{1}{3}$ ге тең болған гомотетияда сизылған шеңберде гомотетикалық болған фигураларды жасаң.
- 20.9.** Мұyesh һәм оның ишинде A нопаты берилген. Мұyesh тәреplerine урынwшы, A нопатынан өтиwшы шеңбер жасаң.



Usı waqıtqa shekem teoremlardı dálıyllewde hám máselelerdi sheshiwde túrli uqsas úshmúyeshliklerdi jasap keldik. Uqsas kópmúyeshlikler qanday jasaladı? Tómente sonıń menen tanısamız.

Másele. Berilgen $ABCD$ tórtmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshligin jasań (*1-súwret*).

Jasaliwı. Tegislikte qálegen O noqatın alamız. Onnan hám tórtmúyeshliktiń tóbelerinen ótiwshi OA , OB , OC hám OD nurların júrgizemiz. Bul nurlarda O noqattan $OA_1=3OA$, $OB_1=3OB$, $OC_1=3OC$ hám $OD_1=3OD$ kesindilerin qoyamız. Payda bolǵan $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshligi izlenip atırǵan tórtmúyeshlik boladı.

Tiykarlaw. $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ ekenligin dálilleymiz.

1. Sáykes tárepleriniń proporcionallıǵı.

$$\begin{aligned} \text{a) } \triangle AOD &\sim \triangle A_1OD_1 \Rightarrow \frac{AD}{OD} = \frac{A_1D_1}{OD_1} = \frac{OA}{OA_1} = \frac{1}{3}; \\ \text{b) } \triangle DOC &\sim \triangle D_1OC_1 \Rightarrow \frac{DC}{OC} = \frac{D_1C_1}{OC_1} = \frac{OD}{OD_1} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

(1) hám (2) teńlikten $\frac{AD}{DC} = \frac{A_1D_1}{D_1C_1}$ ekenligi kelip shıǵaramız.

Dál usıǵan uqsas tórtmúyeshliklerdiń basqa sáykes tárepleriniń proporcionallıǵın dálıyllew múmkin.

2. Sáykes múyeshlerdiń teńligi.

Uqsas úshmúyeshliklerdiń sáykes múyeshleri teń bolǵanı ushın, $\angle A_1D_1O = \angle ADO$, $\angle C_1D_1O = \angle CDO$. Onda,

$$\begin{aligned} \angle A_1D_1C_1 &= \angle A_1D_1O + \angle C_1D_1O = \\ &= \angle ADO + \angle CDO = \angle ADC, \end{aligned}$$

yaǵniy tórtmúyeshliklerdiń sáykes $A_1D_1C_1$ hám ADC múyeshleri óz ara teń.

Dál usıǵan uqsas tórtmúyeshliklerdiń basqa sáykes múyeshleriniń teń ekenligi dálıyllenedi.

Demek, $ABCD$ hám $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshlikleri uqsas eken. Tárepleri qálegen sanda bolǵan kópmúyeshlikke uqsas kópmúyeshlikte dál usı sıyaqlı jasaladı.

Gomotetiya orayın bul máselede tórtmúyeshliktiń sırtınan tańlap aldıq. Ulıwma alganda gomotetiya orayın tórtmúyeshliktiń ishki oblastında (2, a - súwret), qaysı bir tóbesinde (3- súwret) yaki qaysı bir tárepinde (4- súwret) jatatuǵınday etip tańlap alıwımızǵa da bolatuǵın edi. Gomotetiya orayın qay jerden almayıq, berilgen ABCD tórtmúyeshlikke uqsas hám uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan tórtmúyeshlikler óz ara teń boladı.

? Másele hám tapsırmalar

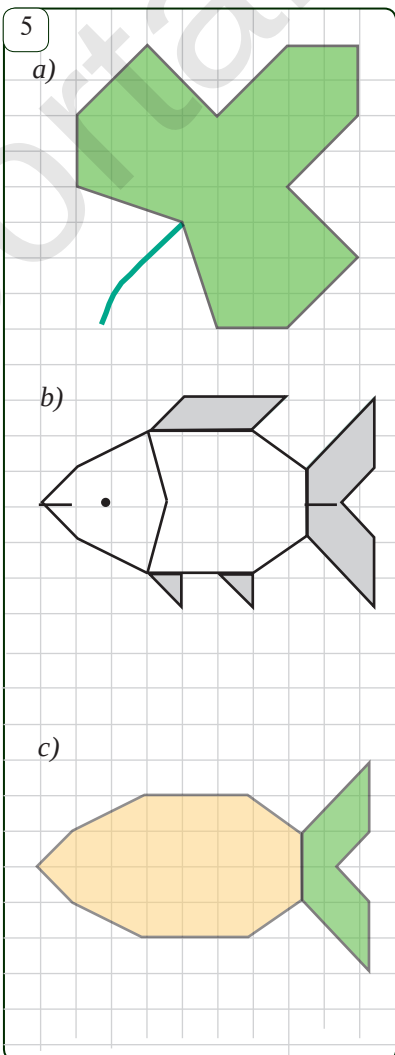
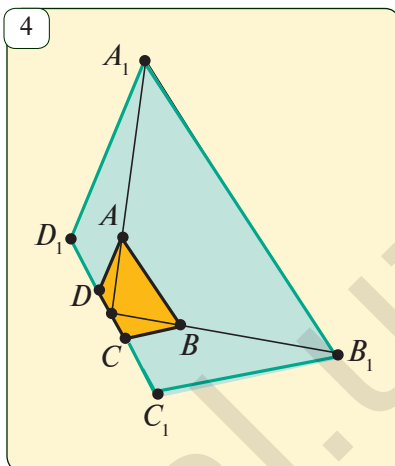
21.1. Berilgen kópmúyeshlikke uqsas kópmúyeshlikti jasaw izbe-izligin aytıp berin.

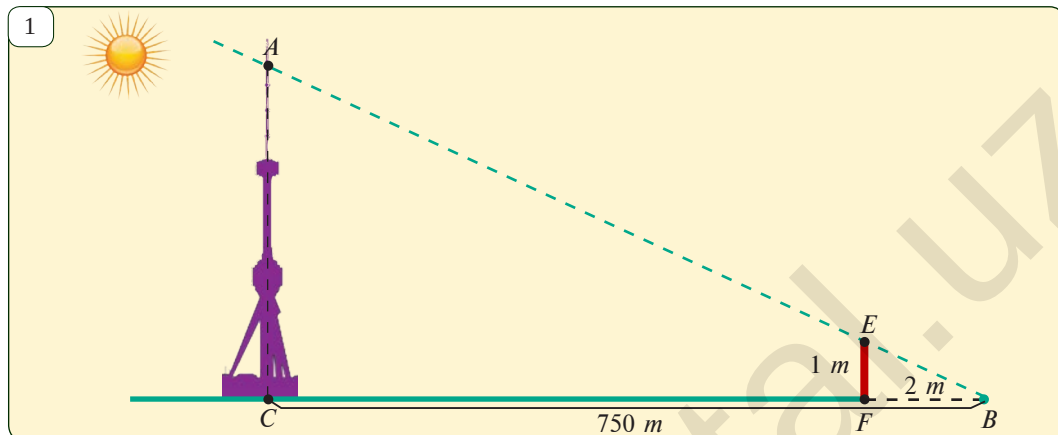
21.2. Dápterinińge qanday da bir $ABCDE$ besmúyeshligin sizin. Gomotetiya járdeminde bul becmúyeshlikke uqsas, uqsaslıq koefficienti 0,5 ke teń bolǵan becmúyeshlik jasań. Gomotetiya orayı a) C noqatında; b) becmúyeshliktiń ishinde; d) AB tárepinde bolǵan jaǵdaylardı óz aldına kórip shıǵın.

21.3. Keteklerdi esapqa alǵan halda 5-súwrette berilgen figuralardı dápterinińge sızın: a) japıraqqa uqsaslıq koefficienti 3 ke teń bolǵan japıraq; b) balıqshaǵa uqsaslıq koefficienti 0,8 ge teń bolǵan balıqshanı; c) geshirge uqsaslıq koefficienti 1,8 ge teń bolǵan geshirdi gomotetiya járdeminde sızın.

21.4. F_1 kópmúyeshligi F_2 kópmúyeshligine uqsas, k — uqsaslıq koefficienti. P_1, P_2, S_1, S_2 háripleri menen saykes túrde bul kópmúyeshliklerdiń perimetrleri hám maydanları belgilengen. Tómenдеgi kesteni dápterinińge kóshirin hám onı toltırın.

	P_1	P_2	S_1	S_2	k
a)	84		100	25	
b)	14	28		48	
d)		150	200	100	
e)		30	24		3

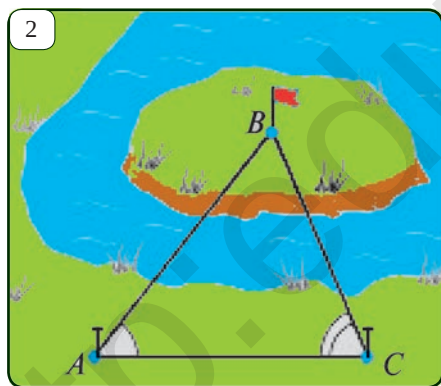




1. Biyiklikni aniqlaw.

Jerde turıp, Tashkent teleminarasınıń biyikligin tabayıq. Minaranıń ushı— A noqatınıń sayası B noqatında bolsın. EF tayaqın vertikal halında sonday etip jaylastıramız (1-súwret), bunda tayaqtıń E ushınıń sayası da B noqatında bolsın. A noqatınıń jerdegi proekciyasın C menen belgileymiz. Onda, tuwrı múyeshli ABC hám EBF úshmúyeshlikleri óz ara uqsas boladı. Sonıń ushın,

$$\frac{AC}{EF} = \frac{BC}{BF} \quad \text{yaki} \quad AC = \frac{AC \cdot EF}{BF}$$

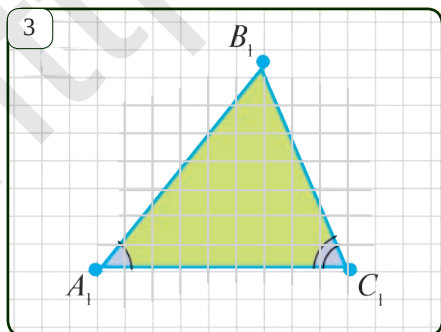


BC , BF aralıqların hám EF tayaqtıń uzınlıgın ólshep, payda bolğan formuladan teleminara biyikligi — AC kesindisiniń uzınlıgın tabamız. Mısalı, eger $EF=1$ m, $BC=750$ m, $FB=2$ m bolsa, onda $AC=375$ m boladı.

2. Barıp bolmaytuğın jerge shekemgi bolğan aralıqtı ólshew.

Aytayıq, A noqatınan barıw múmkin bolmağan B noqatına shekemgi bolğan aralıqtı aniqlaw kerek bolsın (2-súwret). A noqatınan barıwğa bolatuğın jerge C noqatın belgileymiz. Bunda C noqatınan qarağanda A hám B noqatları kórinip tursın jáne AC aralıqtı ólshep alıw múmkin bolsın.

Ásbaplar járdeminde BAC hám ACB múyeshlerin ólsheymiz. Aytayıq, $\angle BAC = \alpha$ hám $\angle ACB = \beta$ bolsın. Qağazğa $\angle A_1 = \alpha$, $\angle C_1 = \beta$ bolğan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligin jasaymız. Bunda



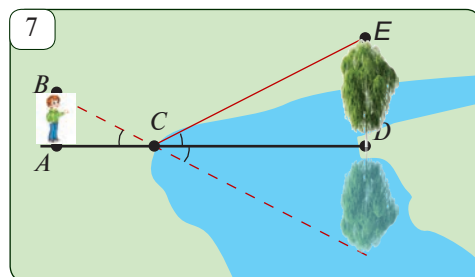
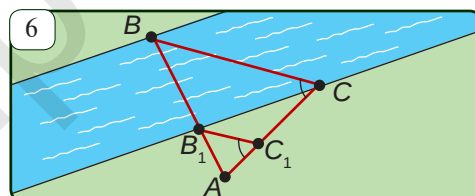
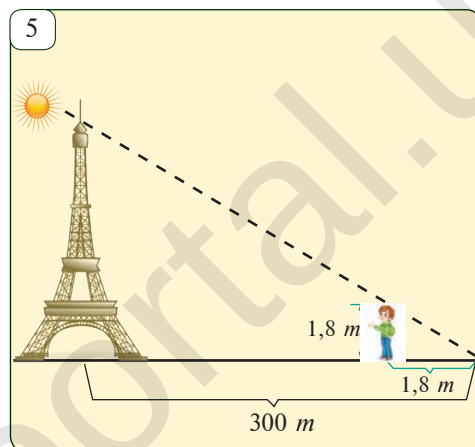
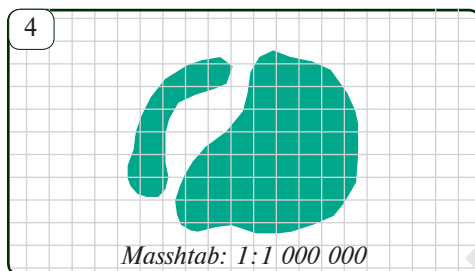
ABC hám $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikleriniń eki múyeshi boyınsha uqsas boladı (2-hám 3-súwretler). Bunnan,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \quad \text{yaki} \quad AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

AC aralıǵın hám A_1B_1 , A_1C_1 kesindilerin ólshep, nátiyjede payda bolǵan formula járdeminde AB kesindisi esaplanadı. Esaplaw jolların ańsatlastırıw ushın $AC:A_1C_1$ qatnasın $100:1$, $1000:1$ sıyaqlı qatnasta alıw múmkin. Máselen, $AC=130$ m, $\angle A=73^\circ$, $\angle C=58^\circ$ bolsa, qagazda $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligin $\angle A_1=73^\circ$, $\angle C_1=58^\circ$, $A_1C_1=130$ mm etip sızamız. A_1B_1 kesindisin ólshep, onı 153 mm ekenligin tabamız. Demek, izlenip atırǵan aralıq 153 m boladı.

3. Aral teńizi haqqında ámeliy jumıs.

4-súwrette Aral teńiziniń kocmik kemesinen alınǵan súwreti kórsetilgen. Ol tiykarında ólshew hám esaplawlardı orınlap, suw saqlanıp qalǵan maydanınıń juwıq mánisin tabıń.



? Másele hám tapsırmalar

22.1. Eger boyı 1,7 m bolǵan adam sayasınıń uzınlıǵı 2,5 m bolsa, sayasınıń uzınlıǵı 10,2 m bolǵan terektiń biyıklıǵı qansha boladı?

22.2. 5-súwrette súwretlengen minaralardıń biyıklıǵın anıqlań.

22.3. 6-súwrettegi eki uqsas $A_1B_1C_1$ hám ABC úshmúyeshliklerdiń járdeminde dáryanıń Masshtab: 1:1 000 000 keńligin (enin) anıqlaw kerek. Eger $AC=100$ m, $AC_1=32$ m hám $AB_1=34$ m bolsa, dáryanıń eni (BB_1) tabıń.

22.4. Jap jaǵasındaǵı DE tereǵiniń suwdaǵı sáwleleniwı A noqatındaǵı adamǵa kórinip tur. Eger $AB=165$ cm, $AC=120$ cm, $CD=4,8$ m bolsa, terektiń biyıklıǵın tabıń (7-súwret).

22.5. Úyińizdiń janındaǵı bir terekti tańlań hám onıń biyıklıǵın anıqlań. Bul jumıstı qalay orınlaǵanıńız haqqında esabat tayarlan.

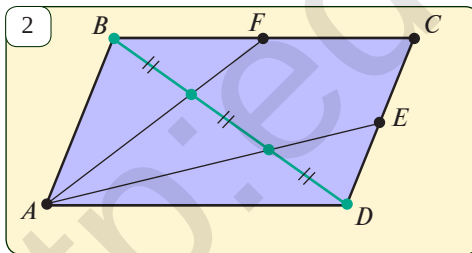
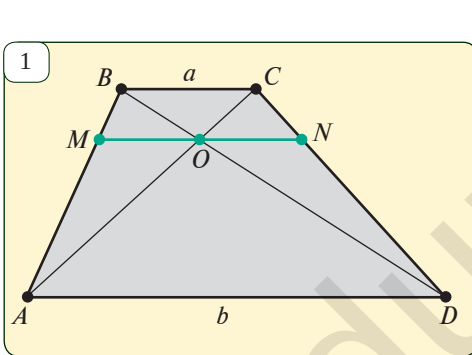
1-másele. $ABCD$ trapeciyanıń AB hám CD qaptal táreplerinde M hám N noqatlar alıńan. Bunda MN kesipe trapeciya ultanlarında parallel hám trapeciya diagonalı kesiliskeń O noqattan ótedi. Eger $BC=a$, $AD=b$ bolsa, a) MO ; b) ON ; d) MN kesilispeni tabıń (*1-súwret*).

Sheshiliwi. 1) AOD hám BOC úshmúyeshlik MM qásiyeti boyınsha uqsas, sebebi $\angle BOC = \angle AOD$, $\angle OBC = \angle ODO$. Bunnan,

$$\frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \quad \text{yaki} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

2) ABC hám AOM úshmúyeshlik hám BB alomatga boyınsha uqsas, sebebi $\angle AMO = \angle ABC$, $\angle ACB = \angle AOM$. Bunnan,

$$\frac{AC}{OA} = \frac{BC}{MO} \quad \text{yaki} \quad \frac{OA+OC}{OA} = \frac{a}{MO} \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} - 1 + \frac{OC}{OA} = \frac{a}{MO} \quad ,$$



3) (1) hám (2) teńliklerdiń óń bólimlerine teńlestirip,

$$\frac{a}{MO} - 1 = \frac{a}{b}$$

$$MO = \frac{ab}{a+b}$$

teńlikti hám onnan

$$ON = \frac{ab}{a+b} \quad (3)$$

ekenligin tabamız. Joqarıdağıday jol tutup

$$MN = \frac{2ab}{a+b} \quad (4)$$

teńligin, keyin bolsa (3) hám (4) teńlikleriniń sáykes bólimlerin qosıp teńligin payda etemiz

teńligin paydaqılamız.

$$\text{Juwabı: a) } \frac{ab}{a+b} ; \quad \text{b) } \frac{ab}{a+b} ; \quad \text{d) } \frac{2ab}{a+b} .$$

Esletpe. Bul máseleń sheshiminen $MO = ON$ ekenligi kelip shıǵadı.

? Másele hám tapsırmalar

23.1. ABC úshmúyeshliginiń AB hám BC qaptal táreplerinde D hám E noqatlari belgilengen. Eger $AC \parallel DE$, $AC=6$, $DB=3$ hám $DE=2$ bolsa, AB tárepini tabıń.

23.2. Eki uqsas kópmúyeshliktin maydanları 8 dm^2 hám 72 dm^2 teń, olardan biriniń perimetri ekinshisinen 26 dm ge kem. Úlken kópmúyeshliginiń perimetrin tabıń.

23.3. Perimetri 1 m bolǵan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshligi $A_2B_2C_2$ úshmúyeshliginiń tárepleriniń ortaların, $A_2B_2C_2$ úshmúyeshlik $A_3B_3C_3$ úshmúyeshlik ortaların,

$A_3B_3C_3$ úshmúyeshligi bolsa, $A_4B_4C_4$ úshmúyeshliginiń tárepleriniń ortalariń tutas-tırıwdan payda bolǵan bolsa, $A_4B_4C_4$ úshmúyeshliginiń perimetri qansha boladı?

23.4. Eki uqsas úshmúyeshliktiń perimetrleri 18 dm hám 36 dm ge, maydanlariniń qosındısı 30 dm^2 qa teń. Úlken úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

23.5. Rombiniń tárepleriniń ortalari tuwrı-múyeshliktiń tóbeleri bolatuǵınıń dáliyllen.

23.6. ABC úshmúyeshligin jasań. Bul úshmúyeshlikke uqsas hám maydanı ABC úshmúyeshliginiń maydanınan 9 márte kishi bolǵan $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikti jasań.

23.7*. E hám F noqatlari sáykes túrde $ABCD$ parallelogramnıń CD hám BC tárepleriniń ortalari. AF hám AE tuwrı sızıqlar BD diagonalın teńdey úsh bólimge bóletuǵınıń dáliyllen (2-súwret).

23.8. 3-súwrette Tashkent qalasındaǵı Xalıqlar doslıǵı sarayı aldında ornatiłǵan eń úlken Ózbekstan bayraǵı súwretlengen. Bayraqtıń ólshemleri 20 $m \times 30 m$ ekeni málim bolsa, sızılmadan tiyisli kesispeler uzınlıǵını ólshep anıqlap, bayraq üstiniń haqıqıy biyikligin tabıń.

23.9. Teń qaptalı úshmúyeshliktiń ultanındaǵı múyesh-tiń bissektrisasi bul úshmúyeshlikten ózine uqsas úshmúyeshlik ajratadı. Úshmúyeshliktiń múyeshlerin anıqlań (4-súwret, $AB = BC$, $\triangle ABC \sim \triangle CAD$).

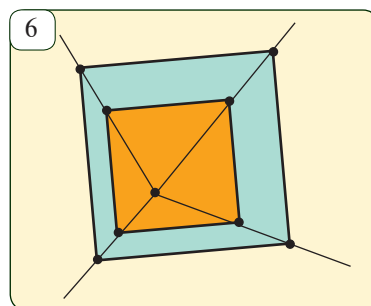
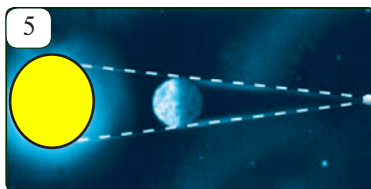
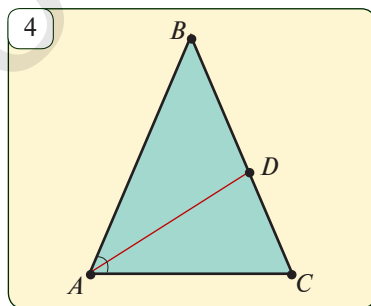
23.10. Sheńber jasań hám onnan O noqatın belgileń. Orayı O noqatında hám koefficienti 2 ge teń bolǵan gomotetiyada berilgen sheńberge gomotetikalıq bolǵan sheńber jasań.

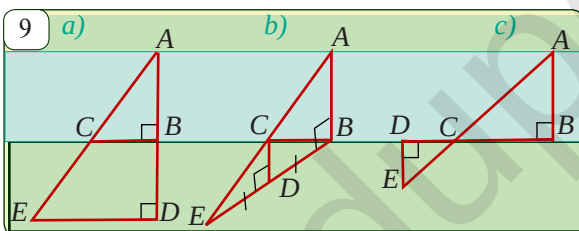
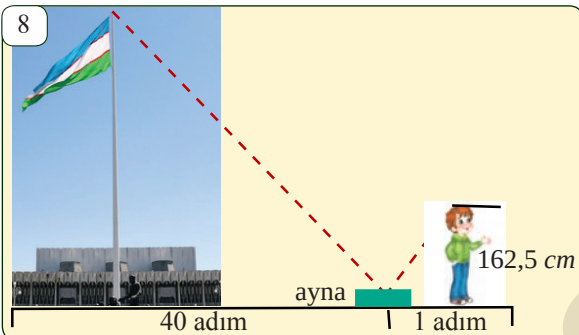
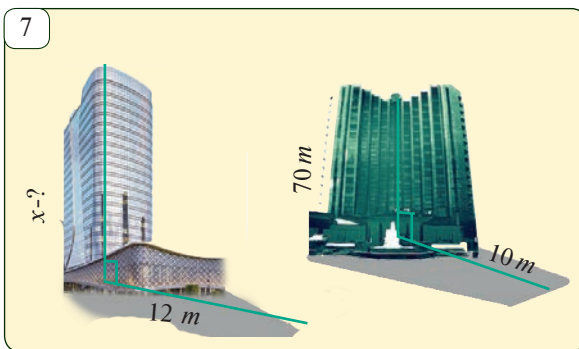
23.11. Eki uqsas kópmúyeshliktiń perimetrleriniń qatnası 2:3 sıyaqlı bolsin. Úlken kópmúyeshliktiń maydanı 27, kishi kópmúyeshliktiń maydanın tabıń.

23.12. 5-súwrette Quyashtıń tolıq tutilǵan jaǵdayı súwretlengen. Eger Quyash radiusı 686 784 km , Ay radiusı 1760 km hám Jerden Ayǵa shekem bolǵan aralıq 384 400 km bolsa, Jerden Quyashqa shekem bolǵan aralıqtı tabıń.

23.13. a) Bir sheńberge eki uqsas kópmúyeshlik ishley sızılǵan. Bul kópmúyeshlikler óz ara teń bolama?
b) Bir sheńberge eki uqsas kópmúyeshlik sırtlay sızılǵan. Bul kópmúyeshlikler óz ara teń bolama?

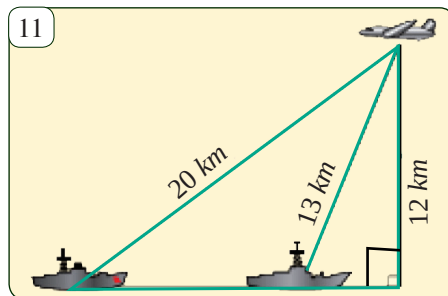
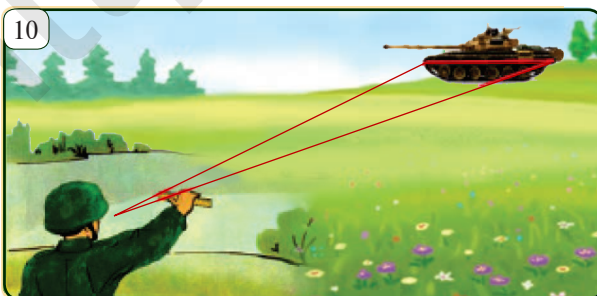
23.14*. Bir kvadrattıń tárepleri ekinshi kvadrattıń táreplerine parallel. Eger kvadratlar bir-birine teń bolmasa, onda olar gomotetikalıq bolatuǵınıń dáliyllen (6-súwret).





Geometriya hám áskeriy jumıs

1. Áskerler sızgısh hám sozılğısh qol járdeminde gózlengen aralıqtı anıqlay aladı. Eger 10-súwrettegi sızgıshtıń tanktı qaplaytuǵın uzınlıǵı 5 cm, jelkeden sızgıshqa shekemgi bolǵan aralıq 50 cm hám tanktıń uzınlıǵı 6,86 m bolsa, tankǵa shekemgi bolǵan aralıqtı tabıń.
2. 12 km biyiklikte ushıp baratırǵan samolyot ushıwshısı onnan 13 km uzaqlıqta júzip baratırǵan kemeni hám onnan 20 km uzaqlıqta júzip baratırǵan birinshi kemeni kórdı. (11-súwret). Bul kemeler arasındadıǵı aralıqtı anıqlań.



23.15. ABC úshmúyeshliginiń AB hám BC tárepleri tórt teńdey kesindilerge bólini hám bóliniw noqatları AC tárepine parallel bolǵan kesindiler menen tutastırıldı. Eger $AC=24$ cm bolsa, payda bolǵan kesindilerdiń uzınlıqların tabıń.

23.16. Eger súwretler dál bir waqıtıń ózinde súwretke alıńan bolsa, berilgen maǵlıwmatlar boyınsha ekinshi imarattıń biyikligin tabıń (7-súwret).

23.17. 8-súwrette berilgenlerden paydalanıp bir obyekt biyikligin tabıw jolın túsindirıń. "Xalıqlar doslıǵı" sarayı aldında kótarılgen watanımız bayraǵı ústiniń biyikligin tabıń.

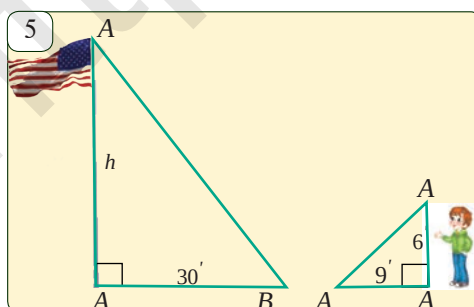
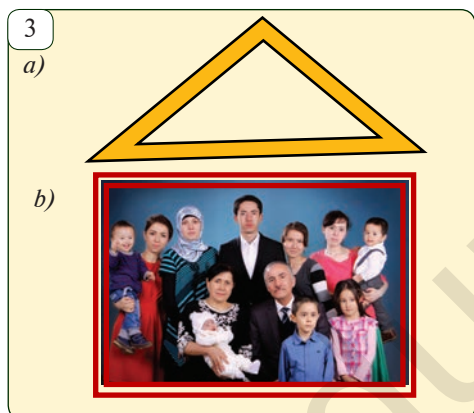
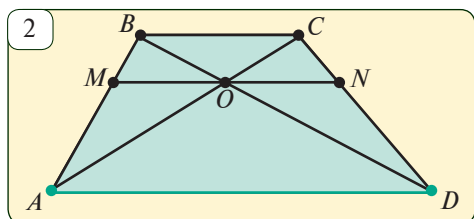
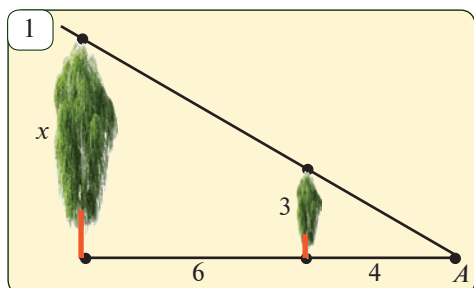
23.18. 9-súwrette berilgenlerden paydalanıp darya keńligini anıqlawnıń 3 túrli jolın túsindirıń. Olardan geometriyanıń qaysı teoremlarında paydalanıp atırǵanı anıqlań. Úyrengen usıllarınızdı ámelde basqa jaǵdaylarda qollanıp kórinı.

I. Testlar

1. **Eki uqsas úshmúyeshlikler ushin naduris tastıyqlawdı tabın:**
 - A. Maydanlarının qatnasının uqsaslıq koefficientine teń;
 - B. Sáykes medianalarının qatnası uqsaslıq koefficientine teń;
 - D. Sáykes bissektrisalarının qatnası uqsaslıq koefficientine teń;
 - E. Sáykes biyikliklerinin qatnası uqsaslıq koefficientine teń.
2. **Eki gomotetikalıq kópmúyeshlik ushin durıs tastıyqlawdı tabın:**
 - A. Olar teń; B. Olar uqsas;
 - D. Olar teń ólshemli; E. Durıs juwap joq.
3. **Úshmúyeshliktiń medianaları ushin naduris tastıyqlawdı kórsetin:**
 - A. Bir noqatta kesilisedi; B. Kesilisiw noqatında 2:1 qatnasta bólinedi;
 - D. Bir-birine teń; E. Hár biri úshmúyeshlikti eki teńdey bólekke bóledi.
4. **Úshmúyeshliktiń bissektrisaları ushin naduris tastıyqlawdı kórsetin:**
 - A. Bir noqatta kesilisedi; B. Kesilisiw noqatında 2:1 qatnasta bólinedi;
 - D. Ózi túsken tárepti qalğan eki tárepke proporcional kesindilerge ajratadı;
 - E. Ózi shıqqan tóbedegi múyeshti teń ekige bóledi.
5. **Eki uqsas kópmúyeshlik ushin naduris tastıyqlawdı tabın:**
 - A. Olardıń táreplerinin sanı teń; B. Olardıń múyeshlerinin sanı teń;
 - D. Sáykes tárepleri proporcional; E. Maydanlarının qatnası uqsaslıq koefficientine teń.

II. Máseleler

- 24.1. Ultanları 6 m hám 12 m bolğan trapeciyanın diagonalları kesilisen noqattan ultanlarğa parallel tuwrı júrgizilgen. Tuwrının trapeciya ishindegi bóleginin uzunlıgın tabın.
- 24.2. ABC úshmúyeshliginde $BC = BA = 10$, $AC = 8$. Eger AA_1 hám CC_1 úshmúyeshliktiń bissektrisaları bolsa, A_1C_1 kesindisin tabın.
- 24.3. A noqatınan barıp bolmaytuğın B noqatına shekemgi bolğan aralıqtı anıqlaw ushın tegis jerde C noqatı tańlap alındı. Keyin AC aralıq, BAC hám ACB múyeshler ólshendi hám ABC úshmúyeshlikke uqsas $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikke uqsas $AC = 42$ m, $A_1C_1 = 6,3$ cm, $A_1B_1 = 7,2$ cm bolsa, AB aralıqtı tabın.
- 24.4. Koefficienti $k=3$ bolğan gomotetiyada F kópmúyeshligi F_1 kópmúyeshligine túrlendiriledi. Eger F_1 kópmúyeshliginin perimetri 12 cm hám maydanı 4,5 cm^2 bolsa, F kópmúyeshliginin perimetrin hám maydanın tabın.
- 24.5. Boyı 180 cm bolğan adam sayasının uzunlıǵı 2,4 m bolğan waqıtta uzunlıǵı 4 m bolğan sim aǵashtın uzunlıǵı neshe metr boladı?
- 24.6. Kartada Tashkent hám Úrgenish qalalarının kórinisleri arasındaǵı aralıq 8,67 cm. Eger karta masshtabı 1:10 000 000 bolsa, Tashkent hám Úrganch qalaları arasındaǵı aralıqtı tabın.



III. Ózińizdi sınap kórin (Baqlaw jumısı úlgisi)

24.7. 1-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiy-karında terektiń biyikligin tabıń.

24.8. ABC úshmúyeshliktiń tárepleri $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 6 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$. Bul úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel tuwrı sızıq AB tárepin P noqatta, BC tárepin bolsa K noqatta kesip ótedi. Eger $PK = 2 \text{ cm}$ bolsa, PBK úshmúyeshlik perimetrin tabıń.

24.9. 2-súwrette $AD \parallel BC \parallel MN$. Eger $BC = 6 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$ bolsa, MN kesindini tabıń.

24.10. (Qosımsha). Romb tárepleriniń ortaları tuwrı tórtmúyeshliktiń ushları bolıwın dáliyllen.



Qızıqlı máseleler

1. 4 márte úlkeytirilip kórsetilgen lupa menen qaralganda 2° lı múyesh úlkenligi qanshaǵa ózgeredi?

2. a) Úshmúyeshli sızǵısh súwrette kórsetilgendeı ishki hám sırtqı úshmúyeshlikler uqsaspa (3-a súwret)?

b) 3-b súwrettegi rombnıń ishki hám sırtqı qırların jasawshı tórtmúyeshlikler uqsaspa?

3. Tómendegi shet tilinde berilgen máseleni sheship kórin. Bunıń menen rus hám ingliz tilinen, hám geometriyadan óz biliminizdiń qay dárejede ekenligin bilip alasız.

a) На 4-рисунке изображена русская игрушка “матрёшка”. Выполн- нив соответствующие измерения, найти коэффициент подобия игру- шек:

a) A и B ; b) A и D ; d) C и F ; e) B и E .

b) Darnell is curious about the height of a flagpole that stands in front of his school. (pic.5) Darnell, who is 6 ft tall, casts a shadow that he paces off at 9 ft. He walks the length of the shadow of the flagpole, a distance of 30 ft. How tall is the flagpole?

c) The distance across a pond is to be measured indirectly by using similar triangles. (pic.6) If $XY=160$ ft, $YW=40$ ft, $TY=120$ ft, and $WZ=50$ ft, find XT .

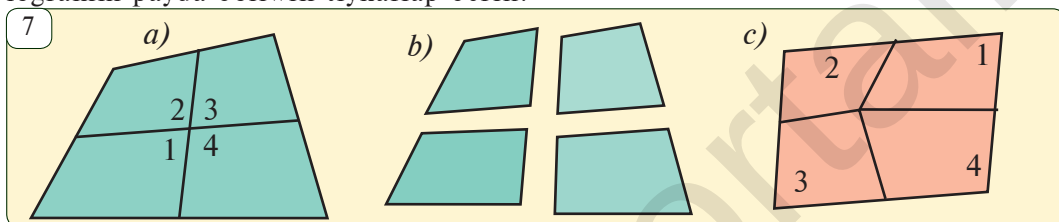
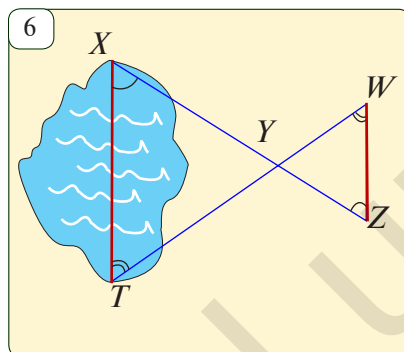
Geometriyalıq modellestiriw

1. Qálegen tórtmúyeshlik sızın hám qayshı menen qırqıp alıń.

2. Onıń qarama-qarsı tárepleri ortaların belgileń hám kesindiler menen tutastırın (7-a súwret) hámde usı kesindiler boylap tórtmúyeshlikti kesin (7-b súwret).

3. Payda bolǵan bóleklerden 7-c súwrette kórsetilgende etip parallelogramm jasań.

4. Bul isti orınlaǵanda durısında da parallelogramm payda bolıwın tiykarlap berin.

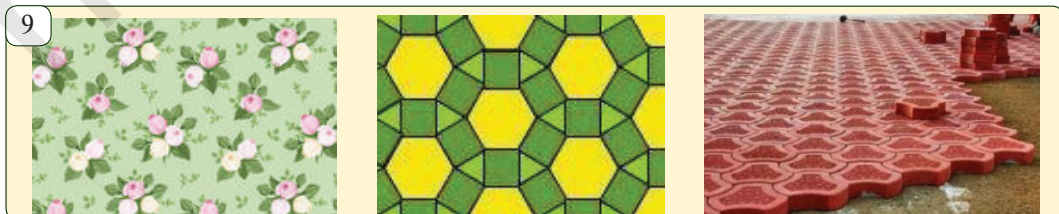


Naǵıslar, reshotkalar (bardyurlar) hám parketler

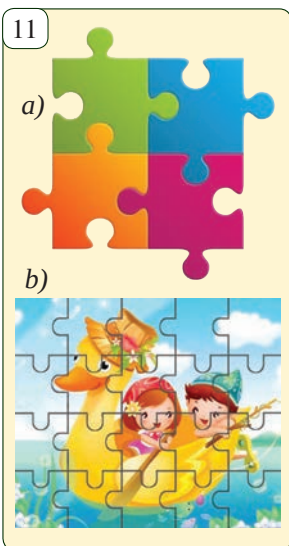
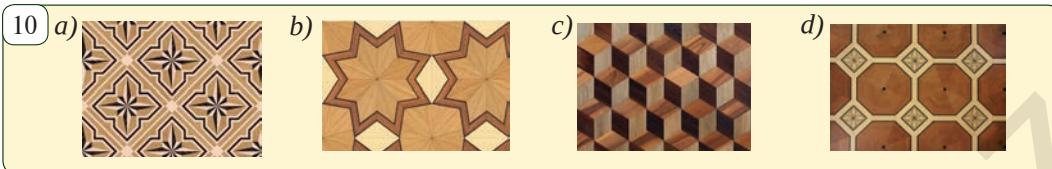
Úyimizdiń diywallarında gúlqaǵazlarǵa itibar berip qarasañız, olarda birdey kórinisler qayta-qayta tákírarlanıp pütün diywaldı toltırıp turǵanlıǵın kóriw múmkin. Birdey kórinis qayta-qayta tákírarlanıp pütün diywaldı toltırsa, bunday jıynalma kórinislerdi naǵıs deymiz. Belgili golland súwretshisi Moris Esher qálemine tiyisli támendegi ájayıp súwretler naǵıslarǵa mısál boladı (8-súwret). Bul naǵıslarda qaysı kórinis qaytalanıp atırǵanlıǵın anıqlań.



Eger birdey kórinis qayta-qayta tákírarlanıp eki parallel tuwrı sızıqlar arasında lentanı toltırsa, bunday jıynalma lenta kórinislerge reshotka yaqı bardyur deymiz. Gúlqaǵaz oramı, súwret salınǵan gezlemeler hám parklerdegi reshotkalar shekli uzınlıqtaǵı bardyurlarǵa mısál boladı (9-súwret).



Duris kópmúyeshlikler menen qaplangan nağıslardı parket dep ataymız. Parketler menen úyimiz polları bezetiledi. Eń ápiwayı parketler 10-súwrette keltirilgan. Bizge belgili olar parallel kóshiriwde óz-óziine ótedi.



Geometriyalıq modellestiriw.

Pazl kórinisleri qanday dúzilgen?

Pazl oynashıqların jaqsı bilesiz? (11-súwret) Keliń, olardı qanday jasaw múmkinligin kórip shıǵayıq.

1. Ólshemleri $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ bolǵan kvadrat sızıń.

2. Onıń tómengi ultanı ortasınan sheńber kórinisindegi bólektikesip alıń (12-a súwret).

3. Kesip alıńǵan bólekti kvadrattıń joqarı ultanı ortasına birlestiriń (12-b súwret).

4. Endi kvadrattıń qaptal tárepi ortasınan jáne sonday úlkenliktegi sheńber kórinisindegi bólekti kesip alıń. (12-c súwret).

3. Kesip alıńǵan bólekti kvadrattıń ekinshi qaptal tárepi ortasına birlestiriń. (12-d súwret).

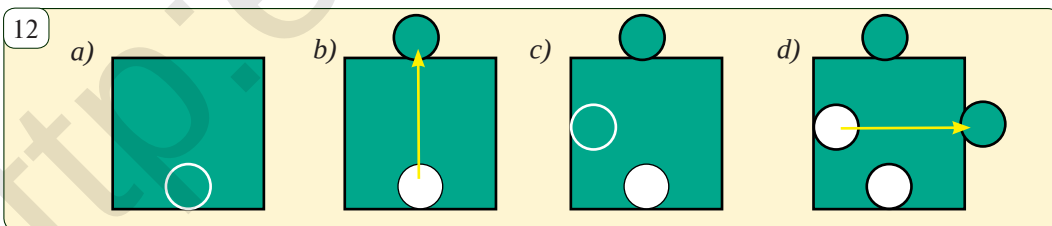
4. Nátiyjede pazl oynashıǵınıń bir danası tayar boladı.

5. Bulk pazl danaları menen tegislikti qaplaw múmkin-

ligin tiykarlap berıń.

6. Kvadrat táreplerinen sheńber kórinisinen basqa kórinistegi bóleklerdi qırqıp, birlestiriw arqalıbasqa kórinistegi pazl danaların dapayda etiw múmkin.

7. Keliń, bazı bir pazl danasınıń sızılmasın jaratıń. Bir neshe reńli pazl danashaların qırqıp alıp, olardan túrli nağıslar dúziń.



Geometriyalıq izertlew.

c) 73-bettegi "Geometriyalıq modellestiriw" temasında keltirilgen maǵlıwmatlar tiykarında qálegen dóńes kópmúyeshlik penen qaplaw múmkinligin dáliyllen.

II BOB

ÚSHMÚYESHLIK TÁREPLERI HÁM MÚYESHLERI ARASINDAĞI QATNASLAR



Bul bapni úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

Bilimler:

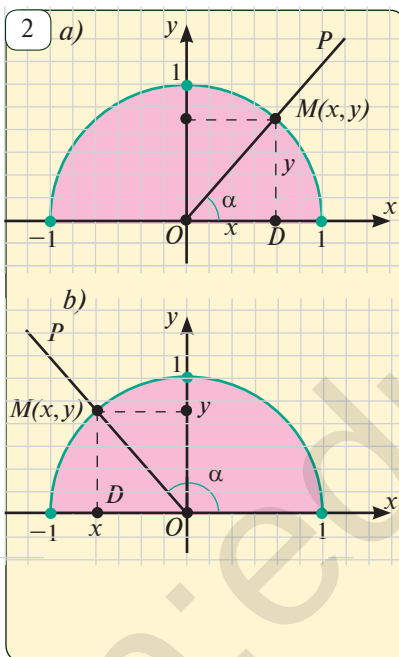
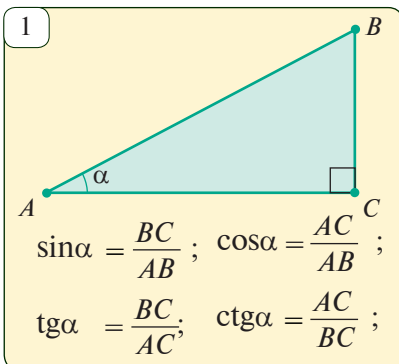
- ✓ qálegen múyeshtiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi táriyplerin biliw;
- ✓ múyeshtiń radian ólshemin biliw;
- ✓ tiykarǵı trigonometriyalıq birdeyliklerdi biliw;
- ✓ úshmıyeshliktiń maydanın múyesh sinusi járdeminde esaplaw formulasın biliw;
- ✓ sinuslar hám kosinuslar teoremasın biliw.

Ámeliy kónlikpeler:

- ✓ bazı múyeshlerdiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensin esaplay alıw;
- ✓ tiykarǵı trigonometriyalıq birdeyliklerdi mısallar sheshiwde qollay alıw;
- ✓ úshmıyeshliktiń maydanın onıń eki tárepi hám olar arasındadı múyeshi boyınsha esaplay alıw;
- ✓ sinuslar, kosinuslar teoremasınan paydalanıp esaplawǵa hám dálillewge tiyisli máselelerdi sheshiw.

25

0° DAN 180° ĞASHA SHEKEMGI BOLĖAN MÚYESHTIŇ SINUSI, KOSINUSI, TANGENSI HÁM KOTANGENSI



Tuwrı múyeshtı ABC úshmúyeshtlikte $\angle C=90^\circ$ bolsın. Bizge belgili, onda A súyır múyeshtıń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi 1-súwrettegidey anıqlanar edi. Endi 0° dan 180° ğa shekem bolĖan múyeshtıń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensini anıqlaymız.

Radiusi birlik kesindige teń, orayı koordinatalar basında bolĖan yarım sheńberdi qaraymız (2-súwret). Sheńberdi $M(x,y)$ noqatında kesip ótiwshi OP nurın júrgizemiz. Bul nurdıń Ox nurı menen payda etken múyeshtin α menen belgileyemiz. OP nurınıń Ox nurı menen ústpe-úst túsken haldağı múyeshtin 0° lı múyesht sıpatında qabıl etemiz.

Bizge belgili, α súyır múyesht bolĖanda (2-a súwret), bul múyeshtıń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensi tuwrı múyeshtli ODM úshmúyeshtlikten $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}; \cos \alpha = \frac{OD}{MO}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{DM}{OD}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{OD}{DM}$ teńlikler járdeminde anıqlanadı. Eger $MO=1$, $DM=y$, $OD=x$ ekenligin esapqa alsaq,

$$\sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (1)$$

teńliklerge iye bolamız.

Ulıwma jaǵdayda, 0° dan 180° ğa shekemgi bolĖan barlıq mánisleriniń sinusi, tangensi hám kotangenslerin de (1) formula arqalı anıqlaymız (2-b súwret):

ODM úshmúyeshtlik $OD^2 + DM^2 = MO^2$ yaki $x^2 + y^2 = 1$. $\sin \alpha = y$ hám $\cos \alpha = x$ ekenligin esapqa alsaq, qálegen α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) múyesht ushın

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2) \quad \text{tiykargı trigonometrikalıq birdeylikti} \text{ payda etemiz.}$$

Anıqlamaǵa kóre, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ bolĖanı ushın,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

($\alpha \neq 90^\circ$)

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

($\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ$),

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

($\alpha \neq 0, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ$)

birdeylikleri orınlı boladı.

(2) teńliktiń eki tárepın aldın $\cos^2 \alpha$ ğa, keyin bolsa $\sin^2 \alpha$ ğa bólip,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ),$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 180^\circ) \quad (3)$$

birdeyliklerdi payda etemiz.

Joqaridağı (1) teńlikler tiykarında hár bir α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) múyeshke bul múyesh sinusınıń (cosinusı, tangensi, kotangensiniń) bir mánisi sáykes qoyılıp atır. Bul sáykeslik múyeshtiń "sinus", "kosinus", "tangens" hám "kotangens" dep atalıwshı funkiyaların anıqlaydı. Olar trigonometriyalıq funkiyalar dep ataladı.

"Trigonometriya" sózi — grekshe "úshmúyeshliklerdi sheshiw" degen mánisti anlatadı.

Hár qanday súyir α múyesh ushın:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha. \quad (2)$$

Hár qanday α ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$) múyesh ushın:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad (3)$$

(2) hám (3) formulalargá *keltiriw formulaları* delinedi. Olar algebra kursında dáliyllenedi.

❓ Másele hám tapsırmalar

25.1. Eger $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ bolsa, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ hám $\operatorname{ctg} \alpha$ mánisleriniń belgilerin anıqlań.

25.2. 4-súwrette α múyeshin ólsheń hám onıń sinusı, kosinusı, tangensi hám kotangensin tiyisli ólshewler járdeminde anıqlań.

25.3. $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) hám $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$) birdeyliklerin dáliyllen.

25.4. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ ($\alpha \neq 90^\circ$) hám $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ ($\alpha \neq 0^\circ$ hám $\alpha \neq 180^\circ$) birdeyliklerin dáliyllen.

25.5. Ápiwayılastırın:

a) $\cos^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(90^\circ - \alpha)$;

b) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \sin^2(90^\circ - \alpha)$;

d) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; e) $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

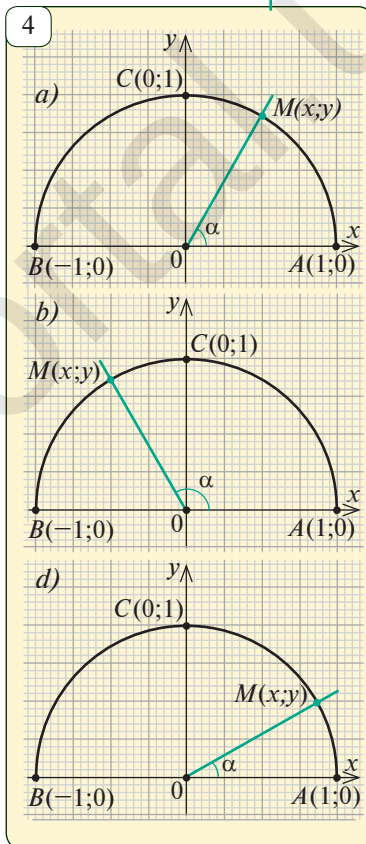
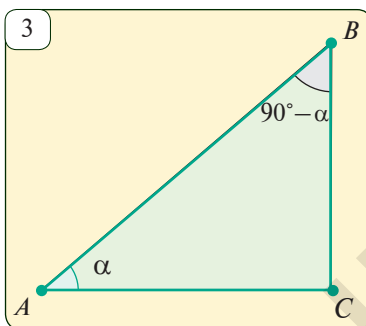
25.6. ABC úshmúyeshlikte $\angle A = 150^\circ$ hám $AC = 7$ cm bolsa, úshmúyeshliktiń C ushınan túsirilgen biyikligin tabıń.

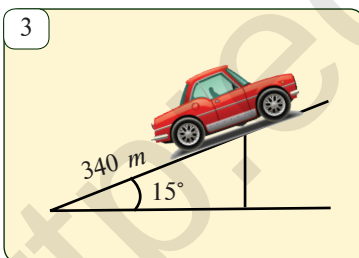
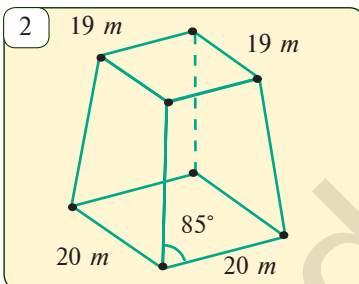
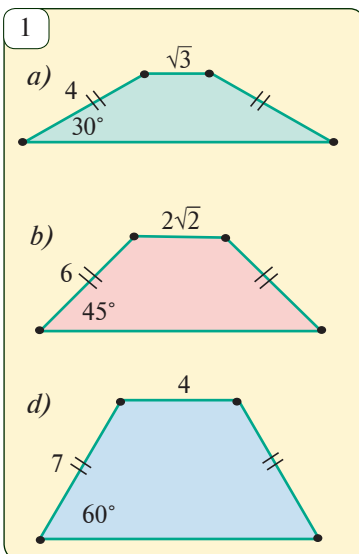
25.7. Eger a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$; d) $\sin \alpha = 1$ bo'lsa, $\cos \alpha$ nı tabıń.

25.8*. Eger a) $\sin \alpha = \frac{1}{2}$; b) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; d) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bolsa, α nı tabıń.

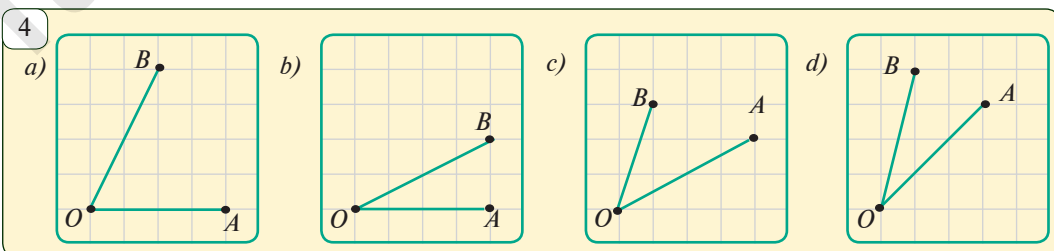
25.9. Kesteni toltırın.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$									
$\cos \alpha$									
$\operatorname{tg} \alpha$									
$\operatorname{ctg} \alpha$									





26.11. 4-súwrette súwretlengen múyeshlerdiń sinusi, kosinusi, tangensi hám kotangensin tabıń.



26.1. Biyikligi 3 cm hám súyir múyeshi 30° bolǵan rombınıń perimetrin hám maydanın esaplań.

26.2. Teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 12 cm. Onıń maydanın esaplań.

26.3. Biyikligi $4\sqrt{3}$ cm bolǵan teń tárepli úshmúyeshlik perimetrin tabıń.

26.4. 1-súwrette berilgenlerden paydalanıp teń qaptallı trepeciýalar maydanların tabıń.

26.5. Tuwrı múyeshli trapeciyanıń súyir múyeshi 30° qa biyikligi 4 cm ge hám kishi ultanı 6 cm ge teń. Trapeciyanıń perimetri hám maydanın tabıń.

26.6. Sheńber xordası 120 graduslı doǵanı tartıp turadı. Eger sheńber radiusı 10 cm bolsa xorda uzınlıǵın tabıń.

26.7*. Teń qaptallı úshmúyeshliktiń tóbesindegi múyeshi a) 120° ; b) 90° ; d) 60° . Úshmúyeshlik biyikliginiń ultanına qatnasın esaplań.

26.8*. 2-súwrette súwretlengen paxta qırmanınıń qaptal jaqları teń qaptallı trapeciya, ústi bolsa kvadrat kórinisinde. Súwrette berilgenlerden paydalanıp, qırmandı tolıq jabıw ushın qansha gezleme zárúrligin anıqlań.

26.9. Jeńil mashinaqıyalıqtıń joqarıǵa kóteriliw bóliminde 340 m jol bastı. Eger joldıń gorizontqa qarata kóteriliw múyeshi 15° bolsa jeńil mashina neshe metr biyiklikke kóterilgen (3-súwret)?

26.10. Shaxnazar úyinen shıǵıs tárepke qarap 800 m, soń arqa tárepke qarap 600 m jol júrdi. Ol úyinen neshe metr uzaqlıqqa keldi? Endi ol úyine tuwrı sıziq boylap jetip alıwı ushın batısqa qarata qanday múyesh astında júriw kerek?

- 26.12.** Poyezd hár 30 m jol júrgende 1 m joqaríğa kóteriledi. Temir joldıń gorizontqa qarata kóteriliw múyeshin tabıń.
- 26.13.** Eger biyikligi 30 m bolǵan jaydıń sayasınıń uzınlıǵı 45 m bolsa quyash nurınıń usı jay jaylasqan maydanǵa túsiw múyeshin tabıń.
- 26.14.** Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir múyeshi 60° qa, úlken kateti olsa 6 ǵa teń. Onıń kishi kateti hám gipotenuzasın tabıń.
- 26.15.** O orayǵa iye sheńberdiń A noqatınan ótkizilgen urınbada B noqat alıńǵan. Eger $AB=9$ cm, $\angle ABO=30^\circ$ bolsa, sheńber radiusın hám BO kesindisiniń uzınlıǵın tabıń.
- 26.16.** m tuwrı sıziq hám onı kesip ótpeytuǵın AB kesindi berilgen. Bunda $AB=10$, AB hám m tuwrı sıziqlar arasındǵı múyesh 60° . AB kesindi ushlarınan m tuwrı sıziqqa AC hám BD perpendikulyarlar túsirilgen. CD kesindini tabıń.
- 26.17.** Rombınıń súyir múyeshi 60° qa, biyikligi bolsa 6 ǵa teń. Rombınıń úlken diagonalı uzınlıǵın hám maydanın tabıń.
- 26.18.** Radiusı 5 cm bolǵan sheńberge teńqaptallı trapeciya sırtlay sızilǵan. Eger trapeciyanıń súyir múyeshi 30° bolsa, onıń qaptal tárepın hám maydanın tabıń.
- 26.19.** Eger ABCD tuwrı tórtmúyeshlikte $AB=4$, $\angle CAD=30^\circ$ bolsa, oǵan sırtlay sızilǵan sheńber radiusın hám tuwrı tórtmúyeshlik maydanın esaplań.
- 26.20.** Tórtmúyeshliktiń tárepleri 3 cm hám $\sqrt{3}$ cm. Onıń bir diagonalı menen tárepleri payda etken múyeshlerin tabıń.
- 26.21.** Eger a) $\sin A = \frac{4}{7}$; b) $\cos A = \frac{4}{7}$; d) $\cos A = -\frac{4}{7}$ bolsa, A múyeshi jasań.
- 26.22.** Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń bir múyeshi 30° , gipotenuzasına túsirilgen biyikligi 6 cm. Úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.
- 26.23.** Súyir múyeshi 30° qa, biyikligi bolsa 4 cm ge teń bolǵan Rombınıń maydanın esaplań.

Tariyx betlerinen. “Altın” úshmúyeshlik

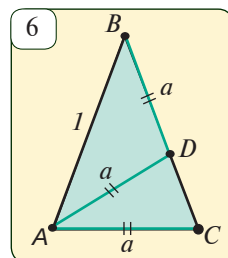
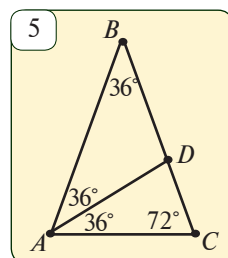
Áyyemgi grekler, múyeshleri 36° , 72° hám 72° bolǵan teń qaptallı úshmúyeshlikti — “altın úshmúyeshlik” dep ataǵan. Sebebi ol mınaday ájayıp qásiyetke iye eken: *ultanındaǵı múyesh bissektirisası AD onı eki teńqaptallı úshmúyeshlikke bóledi (5-súwret).*

Haqıyqattan da, AD bissektirisası bolǵanı ushın, BAD hám DAC múyeshleri de 36° tan. Demek, ABD úshmúyeshligi teńqaptallı. ADC úshmúyeshliginde ADC múyeshi $180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$ bolıp, ACD múyeshine teń. Demek, ADC úshmúyeshligi de teńqaptallı.

Nátiyeje. ABC úshmúyeshligi ACD úshmúyeshligine uqsas hám

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}. \quad (1)$$

Eger ABC úshmúyeshliginiń qaptal tárepleri $AB=BC=1$ dep alsaq, onıń ultanı tómendegishe tabıladı (6-súwret): $AC=a$ bolsın.



- Onda,
1. $AD=a$ boladı, sebebi $\triangle ACD$ teń qaptalı.
 2. $BD=a$ boladı, sebebi $\triangle ABD$ teń qaptalı.
 3. $CD=BC-BD=1-a$.

(1) teńlik boyınsha: $\frac{a}{1} = \frac{1-a}{a}$

Bunnan $a^2+a-1=0$. Bul kvadrat teńlemenı sheship, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ekenligin tabamız.

Másele. $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$ mánislerin esaplań.

Sheshiliwi: Qaptal tárepi $AB=BC=1$ hám ultanı $AC=a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ge teń bolğan. ABC “altın úshmúyeshlik”ti qaraymız (7-súwret). Onıń BE biyikligin júrgizemiz. Tuwrı múyeshli ABE úshmúyeshlikte:

$$\sin 18^\circ = \frac{AE}{AB} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

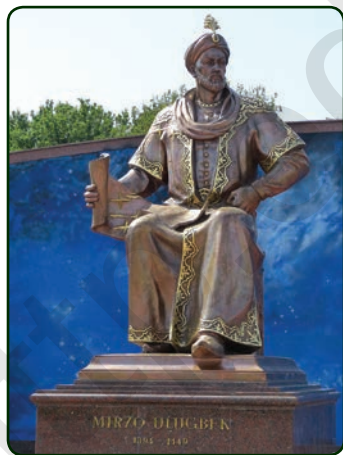
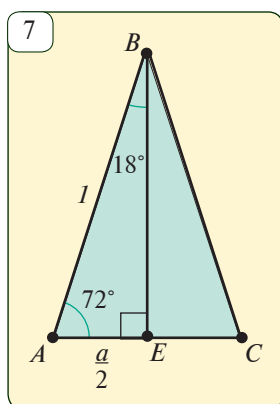
Bunnan paydalanıp, tabılıwı talap etilgen basqa mánislerdi esaplaymız:

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{5}+1}{4};$$

$$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ-18^\circ) = \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

$$\cos 72^\circ = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Juwabı: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \cos 18^\circ = \sin 72^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$



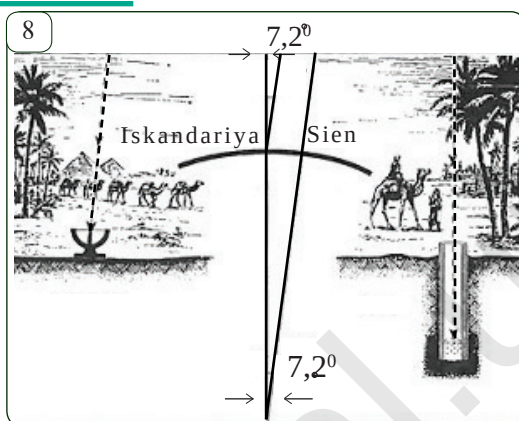
Tariyx betlerinen

Mırza Ulúgbek (1394–1449) — ullı ózbek alımı hám mámleket oyshılı. Negizgi atı Muxammed Taraǵay. Ol sahıbqıran Amir Temurdıń aqlıǵı. Ulúgbektiń atası Shaxruxta mámleket oyshılı bolǵan. Ulúgbek shama menen 1425–1428-jılları Samarqandtıń átirapındaǵı Obi Rahmat tóbeshiginde óziniń dúnyaǵa belgili observatoriyasın quradı. Observatoriyanıń imaratı úsh qabatlı bolıp, onıń tiykarǵı ásbabı — kvadrattıń biyikligi 50 metr edi. Ulúgbektiń eń dúnyaǵa belgili miyneti “Zijiy kuragoniy” dep atalıwshı astronomiyalıq keste boladı. Ol 1018 juldızdı óz ishine alǵan.

Sonıń menen bir qatarda ulıgbektiń trigonometriyalıq kesteleri de dıqqatqa ılayıqlı. Ulúgbektiń trigonometriyalıq kesteleri 10 dana onlıq xana anıqlıǵında esaplangan. Esaplangan qurılımları derlik bolmaǵan bir dáwirge bul islerdi orınlaw ushın tereń pikirlew tiykarlangan teoriyalıq bilim hám anıq formulalar hámde kópǵana esaplawlar talap etilgen bolsa kerek. Zijde Ulúgbek 1 gradustıń sinusın esaplaw ushın óz aldına túsindirme jazǵanlıǵın jazıp qaldırǵan.

Geometriya h m astronomiya a tiyisli joybar isi

Q dimgi grek alimi Eratosfen (eramizdan aldinqi 276—194-jillar) jer she berin birinshi bolip  lshegen. Ol Sien (h zirgi Assuan) qalasinda eramizdan aldinqi 240-jil 19-iyun k ni, jazgi te  k nlikti  t s waqtında quyash tik (zenitte) bolıwı h m shuqır qudıqtı  t bin jarıtwıwın baqla an. Biraq, sonı  menen birge, ol jıldı  bul k ni h m waqtında Iskandariyada Quyash tik (zenitten) she ber do asını  1/50 b legine shekem qiyalawın da anıqla an.



Bunnan Eratosfen qanday juwmaqqa kelgen? Onı  pikirin dawam ettiri  h m t mendegi 8-súwrette berilgenler tiykarında jer radius uzınlı ın tabı .

Z r r bolıwı m mkın bol an ba ı ma lıwmatlar h m esaplawlar:

Sien h m Iskandariya qalaları arasındaqı aralıq 787,5 km. She ber do asını  1/50 bólegi - $\alpha = 7,2^\circ$.

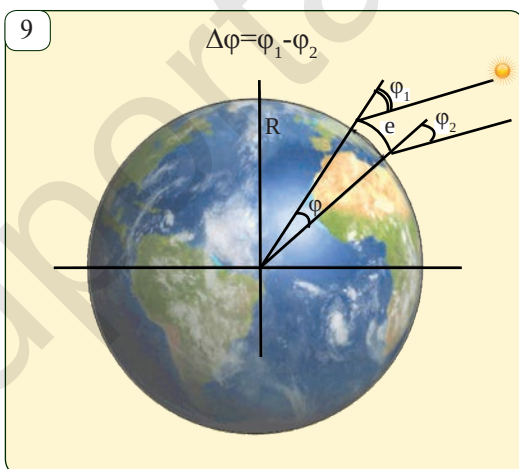
C - Jer she berini  uzınlı ı.

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{787,5}{C}$$

Bunnan $C = 360 \cdot 787,5 : 7,2 = 39\,375 \text{ km}$.

B gingi k ngi esaplawlar a qara anda, jerdi  ekvator boylap alı an she berini  uzınlı ı 40 075,017 km, nolinshi metri boylap alı an she ber uzınlı ı bolsa - 40 007,86 km di quraydı. K rip tur anı ızday, q dimgi alım az ana adasqan.

Tapsırma. 9-súwretten paydalanıp, jer she berini  uzınlı ın tabıwdı  qálegen waqıtta qollaw m mkın bol an Ámeliy usıln islep shı ı  h m tiykarlap beri .



1-teorema. *Úshmúyeshliktiń maydanı onıń eki tárepi hám usı eki múyeshtiń sinusınıń kóbeymesiniń yarımına teń.*



$\triangle ABC$, $BC=a$, $AC=b$, $\angle C$ (1-súwret)



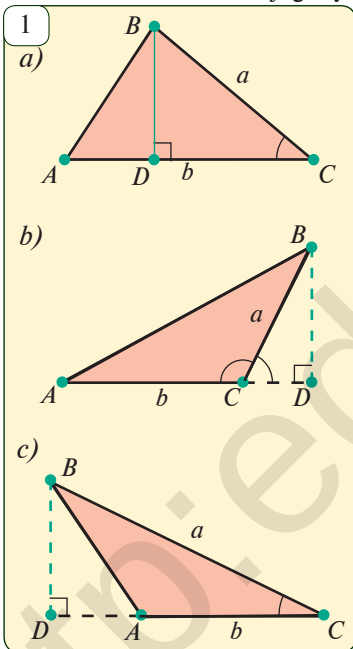
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Dáliyilew. ABC úshmúyeshliginiń BD biyikligin túsiremiz. Onda 1-súwrette kórsetilgen úsh jaǵday bolıwı múmkin.

Birinshi jaǵdaydı qaraymız (1-a súwret). BCD úshmúyeshliginde $\sin C = \frac{BD}{BC}$. Bunnan $BD = BC \cdot \sin C = a \cdot \sin C$. Solay etip,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin C = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ekinshi hám úshinshi jaǵdaylardıń dáliyilewiniń ózbetinińizshe orınlań. **Teorema dáliyillendi.**



1-teorema boyınsha, úshmúyeshliktiń maydanı ushın

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ hám } S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B$$

formulaları da orınlı boladı.

1-másele. ABC úshmúyeshliginiń maydanı 24 cm^2 . Eger $AC=8 \text{ cm}$ hám $\angle A=30^\circ$ bolsa, AB tárepiniń tabıń.

Sheshiliwi. Úshmúyeshliktiń maydanın múyeshtiń sinusı arqalı tabıw formulası boyınsha,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

Bunnan,

$$AB = \frac{2S_{ABC}}{AC \cdot \sin A} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot \sin 30^\circ} = \frac{2 \cdot 24}{8 \cdot 0,5} = 12 \text{ (cm)}.$$

Juwabı: 12 cm.

2-másele. Parallelogrammnıń maydanı onıń eki qońsılás tárepi hám bul tárepler arasındaqı múyeshtiń sinusınıń kóbeymesine teń ekenligin dáliyileń.



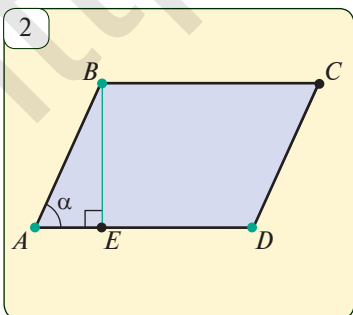
$ABCD$ parallelogramm,
 $AB=a$, $AD=b$, $\angle A=\alpha$
(2-súwret)



$$S_{ABCD} = ab \sin \alpha$$

Sheshiliwi. BE biyikligin túsiremiz. ABE úshmúyeshlikte $\sin A = \frac{BE}{AB}$ yaqı $BE = AB \sin A = a \sin \alpha$.

$$\text{Onda, } S_{ABCD} = AD \cdot BE = ab \sin \alpha.$$



2-teorema. *Törtmüyeshliktiñ maydanı onıñ diagonalı menen diagonaları arasındağı müyeshtiñ sinusı köbeymesiniñ yarımına teñ.*

Dáliytlew. Diagonallardıñ kesilisiwinen payda bolğan müyeshtlerdi qaraymız (3-súwret):
shárt boyınsha $\angle AOB = \alpha$

$\angle AOB$ ға vertikal bolğanı ushın $\angle COD = \alpha$,
 $\angle AOB$ ға qońsılas bolğanı ushın $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$,
 $\angle BOC$ ға vertikal bolğanı ushın $\angle DOA = 180^\circ - \alpha$

Üshmüyeshliktiñ maydanıñ müyeshtiñ sinusı járdeminde esaplaw formulası boyınsha:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha;$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha; \quad S_{DOA} = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha.$$

Maydanniñ qásiyeti boyınsha:

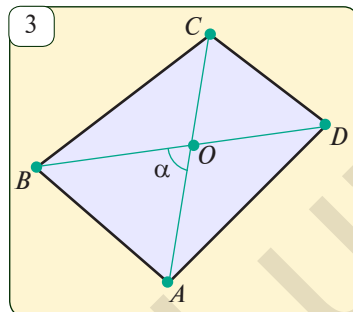
$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$

$$= \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin \alpha + \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin \alpha + \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin \alpha + \frac{1}{2} DO \cdot OA \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (AO \cdot OB + BO \cdot OC + CO \cdot OD + DO \cdot OA) \sin \alpha = \frac{1}{2} \{ (OB \cdot (AO + OC) +$$

$$+ OD \cdot (CO + OA)) \sin \alpha = \frac{1}{2} (OB \cdot AC + OD \cdot AC) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha.$$

Teorema dáliyllendi.



? Másele hám tapsırmalar

27.1. 1-teoremanı 1-b hám 1-c súwrette súwretlengen jaǵdayda dáliyllen.

27.2. Agar a) $AB=6$ cm, $AC=4$ cm, $\angle A=30^\circ$; b) $AC=14$ cm, $BC=7\sqrt{3}$ cm, $\angle C=60^\circ$;
d) $BC=3$ cm, $AB=4\sqrt{2}$ cm, $\angle B=45^\circ$ bolsa, ABC üshmüyeshliginiñ maydanıñ tabıń.

27.3. Diagonalı 12 cm hám diagonaları arasındağı müyeshi 30° bolğan tuwrımüyeshliktiñ maydanıñ tabıń.

27.4. Tárepı $7\sqrt{2}$ cm hám doǵal müyeshi 135° bolğan romb maydanıñ tabıń.

27.5. Rombınıñ úlken diagonalı 18 cm hám doǵal müyeshi 120° . Rombınıñ maydanıñ tabıń.

27.6. Maydanı $6\sqrt{2}$ cm² qa teń bolğan ABC üshmüyeshliginde $AB=9$ cm, $\angle A=45^\circ$. Üshmüyeshliktiñ AC tárepın hám usı tárepke túsirilgen biyikligin tabıń.

27.7*. ABC üshmüyeshliginde $\angle A=\alpha$, onıñ B hám C tóbelerinen túsirilgen biyiklikleri bolsa sáykes türde h_b hám h_c bolsa, üshmüyeshliktiñ maydanıñ tabıń.

27.8*. ABC üshmüyeshliginde $AB=8$ cm, $AC=12$ cm hám $\angle A=60^\circ$ bolsa, onıñ AD bissektrisasın tabıń (*kórsetpe*: $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}$).

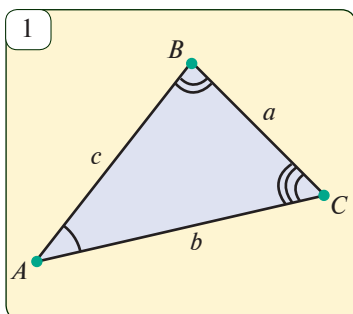
Teorema. (Sinuslar teoremasi). *Üshmüyeshliktiñ tárepleri qarsısındaǵı müyeshlerdiñ sinuslarına proporcional.*



$\triangle ABC$, $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ (1-súwret)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Dáliytlew. Üshmüyeshliktiñ maydanın müyeshitiñ sinusı arqalı tabıw formulası boyınsha,

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, \quad S = \frac{1}{2}bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2}ac \sin B. \quad (\diamond)$$

Bul teńliklerdiñ birinshi ekewi boyınsha,

$$\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A, \text{ demek } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

Sonday-aq, $(\diamond)$ teńlikleriniñ birinshi hám úshinshisinen $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ teńligin payda etemiz.

Solay etip,
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema dáliytlendi.

1-másele. ABC úshmüyeshliginde $AB=14$ dm, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=65^\circ$ (1-súwret). BC tárepiniñ tabıwı.

Sheshiliwi: Sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \quad \text{Onnan,}$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 65^\circ} \approx \frac{14 \cdot 0,5}{0,9} \approx 7,78 \text{ (dm)}.$$

Eskertpe: Trigonometriyalıq funkciyalardıñ mánisleri arnawlı kalkulyator yaki kesteler járdeminde tabıladı. Bul jerde $\sin 65^\circ \approx 0,9$ ekenligin sabaqlıqtıñ 153-betindegi kesteden anıqladıq.

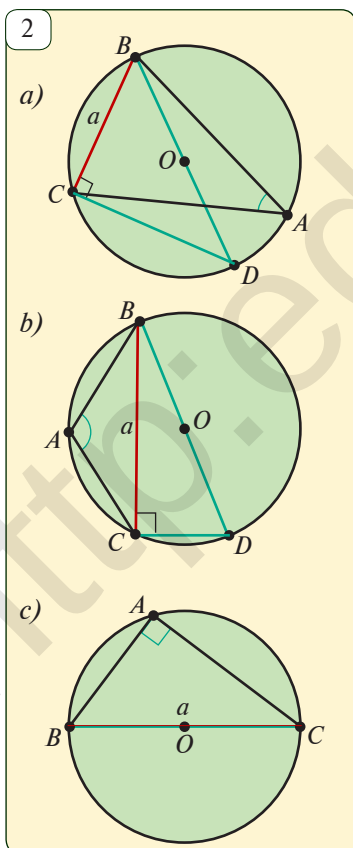
Juwbabı: 7,78 dm.



2-másele. Üshmüyeshliktiñ tárepiniñ usı tárepitiñ qarsısındaǵı müyeshiniñ sinusına qatnası, úshmüyeshlikke sırtlay sızilǵan sheńber diametrine yaǵnıy

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ekenligin dáliytleñ (2-súwret).



Sheshiliwi. Bizge belgili, sinuslar teoremasi boyinsha, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ teñligin dâliyllew jetkilikli ekenligi kórinip tur. Bunda úsh jaǵday bolıwı múmkin:

1-jaǵday: $\angle A$ — súyir múyesh (2-*a súwret*); 2-jaǵday: $\angle A$ — doǵal múyesh (2-*b súwret*); 3-jaǵday: $\angle A$ — tuwrı múyesh (2-*c súwret*).

1-jaǵdaydı qaraymız: C hám D noqatların tutastıramız. BCD — tuwrı múyeshli úshmúyeshlik, sebebi $\angle BCD$ múyeshi BD diametrine urınadı.

$\triangle BCD$ da: $BC = BD \cdot \sin D = 2R \sin D$. Bıraq, $\angle D = \angle A$, sebebi olar bir BC doǵaǵa tirelgen ishley sızilǵan múyeshler. Onda,

$$BC = 2R \sin A \quad \text{yaki} \quad \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Qalǵan jaǵdaylardı óz erkinizshe dâliylleñ. (*kórsetpe*: 2-jaǵdayda $\angle D = 180^\circ - \angle A$ ekenliginen, 3-jaǵdayda $a = 2R$ ekenliginen paydalanıñ).

? *Másele hám tapsırmalar*

28.1. Úshmúyeshliktiñ bir qálegen tárepiniñ usı táreptiñ qarama-qarsısındaǵı múyeshitiñ sinusına qatnası úshmúyeshlikke sırtlay sızilǵan sheñber diametrine teñ ekenligin 2-máselede keltirilgen 2-hám 3-jaǵdaylar ushın dâliylleñ.

28.2. 3-súwrette berilgenler boyınsha, sorılǵan kesindilerdi tabıñ.

28.3. Eger ABC úshmúyeshliginde:

a) $\sin A = 0,4$; $BC = 6$ cm hám $AB = 5$ cm bolsa, $\sin C$ nı;

b) $\sin B = \frac{1}{2}$; $AC = 8$ dm hám $BC = 7$ dm bolsa, $\sin A$ nı;

dı $\sin C = \frac{1}{2}$; $AB = 6$ m hám $AC = 8$ m bolsa, $\sin B$ nı tabıñ.

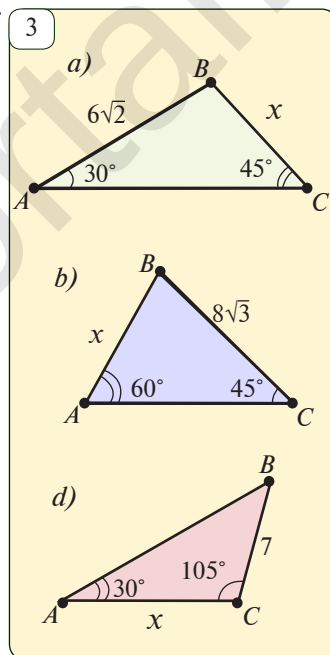
28.4. Úshmúyeshliktiñ múyeshi 30° qa teñ. Onıñ qarama-qarsısında ǵı tárep $4,8$ dm. Úshmúyeshlikke sırtlay sızilǵan sheñber radiusın esaplañ.

28.5. Úshmúyeshliktiñ bir tárepi úshmúyeshlikke sırtlay sızilǵan sheñber radiusına teñ. Úshmúyeshliktiñ usı tárepiniñ qarama-qarsısında ǵı múyeshin tabıñ. Bunda eki jaǵdaydı qarawǵa tuwra keliwine itibar berıñ.

28.6. ABC úshmúyeshligi ushın $AB:BC:CA = \sin C:\sin A:\sin B$ teñligi orınlı bolatuǵının tiykarlap berıñ. $\sin A:\sin B:\sin C = 3:5:7$ teñligi durıs bolıwı múmkin be?

28.7. Eger ABC úshmúyeshliginde $BC = 20$ m, $AC = 13$ m hám $\angle A = 67^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiñ AB tárepin, B hám C múyeshlerin tabıñ.

28.8*. Eger ABC úshmúyeshliginde $BC = 18$ dm, $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 62^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiñ C múyeshin, AB hám AC táreplerin tabıñ.

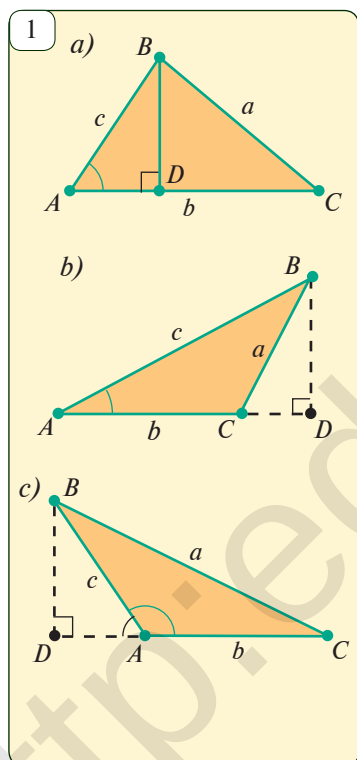


Tuwrı müyeshli üshmüyeshlikte tuwrı müyeshtiñ qarsısında ğı tárep (gipotenuza)tiñ kvadratı qalğan tárepler (katet) diñ kvadratlarınıñ qosındısına teñ.

Al, tuwrı bolmağan müyesh ushın-she? Tómendegi teorema usı tuwralı.

Teorema. (Kosinuslar teoreması). *üshmüyeshliktiñ qálegen tárepiniñ kvadrati, qalğan eki tárepiniñ kvadratlarınıñ qosındısı usı eki tárep penen olar arasındadı müyeshtiñ kosinusi kóbeymesiniñ eki eselengen ayırmasına teñ.*

$\triangle ABC, AB=c, BC=a, CA=b$ (1-súwret) $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



Dáliyilew. ABC üshmüyeshliginiñ BD biyikligin jürgizemiz. D noqatı AC tárepte (1-a súwret) yaki onıñ dawamında (1-b hám 1-d súwretler) bolıwı mümkin. Birinshi jaǵdaydı qaraymız. Tuwrı müyeshli BCD üshmüyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha,

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

$DC = AC - AD$ bolǵanı ushın:

$$BC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 = BD^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AD + AD^2.$$

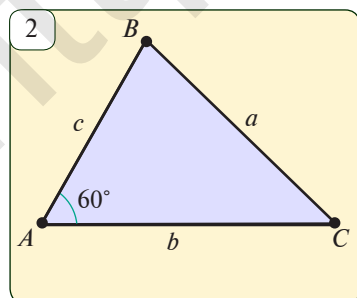
Tuwrı müyeshli ABD üshmüyeshliginde $BD^2 + AD^2 = AB^2$ hám $AD = AB \cos A$ ekenligin esapqa alıp, keyingi teńlikten

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

yaǵnıy $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ teńligine iye bolamız.

Teorema dáliyillendi.

1-b súwrette súwretlengen jaǵdayda $DC = AD - AC$, 1-d súwrette súwretlengen jaǵdayda $DC = AD + AC$ hám $\cos(180^\circ - A) = -\cos A$ teńliklerinen paydalanıp, kosinuslar teoremasın óz betiñizshe dáliyilleñ.



Esletpe. Kosinuslar teoreması Pifagor teoremasınıñ ulıwmalasqan túri boladı. $\angle A = 90^\circ$ bolǵanda ($\cos 90^\circ = 0$ bolǵanı ushın) kosinuslar teoremasınan Pifagor teoreması kelip shıǵadı.

1-másele. ABC üshmüyeshliginde $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm, $\angle A = 60^\circ$ (2-súwret). BC tárepiniñ tabıñ.

Sheshiliwi. Kosinuslar teoreması boyınsha, $a^2=b^2+c^2-2bccosA$ yaki $BC^2=AC^2+AB^2-2AC \cdot AB \cdot cosA$ bolğanı ushın

$$BC^2=7^2+6^2-2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot cos60^\circ=49+36-84 \cdot \frac{1}{2}=43,$$

yağniy $BC=\sqrt{43}$ cm. **Juwabı:** $\sqrt{43}$ cm.

Kosinuslar teoremasınan paydalanıp, tárepleri belgili bolğan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıw múmkin:

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (1)$$

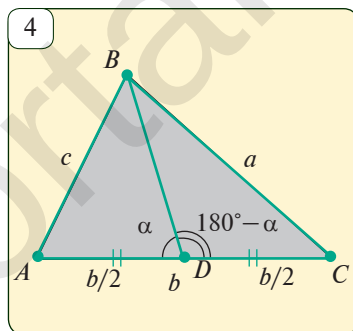
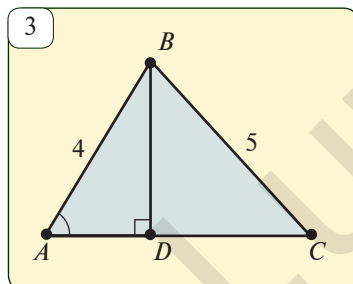
2-másele. ABC úshmúyeshliginiń tárepleri $a=5$ m, $b=6$ m hám $c=4$ m. Kishi táreptiń úlken táreptegi proekciyasın tabıń (3-súwret).

Sheshiliwi. (1) formula tiykarında $cosA$ nı tabamız:

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{9}{16}.$$

Tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshliginde $AD=AB \cdot cosA$ bolğanı ushın $AD=4 \cdot \frac{9}{16} = 2,25$ (m).

Juwabı: 2,25 m.



Мәселе hám tapsırmalar

29.1. Kosinuslar teoremasın 1-b hám 1-d súwrette súwretlengen jaǵdaylarda dáliylleń.

29.2. ABC úshmúyeshliginde

- $AC=3$ cm, $BC=4$ cm hám $\angle C=60^\circ$ bolsa, AB nı;
- $AB=4$ m, $BC=4\sqrt{2}$ m hám $\angle B=45^\circ$ bolsa, AC nı;
- $AB=7$ dm, $AC=6\sqrt{3}$ dm hám $\angle A=150^\circ$ bolsa, BC nı tabıń.

29.3. Tárepleri 5 cm, 6 cm, 7 cm bolğan úshmúyeshliktiń múyeshleriniń kosinusların tabıń.

29.4. ABC úshmúyeshliginde $AB=10$ cm, $BC=12$ m hám $\sin B=0,6$ bolsa, AC tárepın tabıń.

29.5. Parallelogrammniń diagonalları 10 cm hám 12 cm, hám olar arasındagı múyesh 60° qa teń. Parallelogrammniń táreplerin tabıń.

29.6. Tárepleri 5 cm hám 7 cm bolğan parallelogrammniń bir múyeshi 120° qa teń. Onıń diagonalların tabıń.

29.7*. Tárepleri a , b , c bolğan ABC úshmúyeshliginiń BD medianası $BD = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ formulası menen esaplanatugının dáliylleń (4-súwret).

29.8*. Tárepleri 6 m, 7 m hám 8 m bolğan úshmúyeshliktiń medianaların tabıń.

29.9. Tárepleri 5 cm, 6 cm, 7 cm bolğan úshmúyeshlik bissektrisaların tabıń.

29.10. Tárepleri 5 cm, 6 cm, 7 cm bolğan úshmúyeshliktiń biyikliklerin tabıń.

Aldıńǵı sabaqlarda dáliyllengen sinuslar hám kosinuslar teoremlarınan úshmúyeshliklerge tiyisli hár qıylı máselelerdi sheshiwde nátiyjeli paydalanıw múmkin. Bul sabaqta bul teoremlardıń ayırım qollanıwlarına toqtap ótemiz.

1. Kosinuslar teoreması úshmúyeshliktiń múyeshlerin tappastan, onıń múyeshleri boyınsha túrin (súyir, doǵal yaki tuwrı múyeshli ekenligin) anıqlawǵa imkaniyat beredi. Haqıyqattan da,

formulada
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

- 1) eger $b^2 + c^2 > a^2$ bolsa, $\cos A > 0$. Demek, A — súyir múyesh;;
- 2) aeger $b^2 + c^2 = a^2$ bolsa, $\cos A = 0$. Demek, A — tuwrı múyesh;;
- 3) eger $b^2 + c^2 < a^2$ bolsa, $\cos A < 0$. Demek, A — doǵal múyesh;.

$b^2 + c^2 = a^2$ teńligi yaki $b^2 + c^2 < a^2$ teńsizlik a — úshmúyeshliktiń eń úlken tárepi bolǵan jaǵdayda ǵana orınlanadı. Demek, úshmúyeshliktiń tuwrı yaki doǵal múyeshi onıń eń úlken tárepiniń qarama-qarsısında jatadı.

Úshmúyeshliktiń eń úlken tárepiniń shamasına qarap, bul úshmúyeshliktiń qanday (súyir, doǵal, tuwrı múyeshli) úshmúyeshlik ekenligi haqqındaǵı juwmaqqa keliwi múmkin.

 **1-másele.** Tárepleri 5 m, 6 m hám 7 m bolǵan úshmúyeshliktiń múyeshlerin tappastan, onıń túrin anıqlań.

Sheshiliwi. Eń úlken múyesh qarsısında eń úlken tárep jatadı. Sonıń ushın, eger $a=7$, $b=6$, $c=5$ bolsa, $\angle A$ eń úlken múyesh boladı.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 25 - 49}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} > 0.$$

Demek, A — súyir múyesh, berilgen úshmúyeshlik bolsa súyir múyeshli boladı.

2. Úshmúyeshliktiń maydanın onıń eki tárepi hám olar arasındaǵı múyeshi arqalı esaplaw formulası

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

hám $\sin A = \frac{a}{2R}$ formulalardan úshmúyeshlik maydanın esaplaw ushın

$$S = \frac{abc}{4R}$$

formulanı hám úshmúyeshlikke sırtlay sızilǵan sheńberdiń radiusın esaplaw ushın

$$R = \frac{abc}{4S}$$

formulasın payda etemiz.

2-mäsele. Tärepleri $a=5$, $b=6$, $c=10$ bolğan üshmüyeshlikke sırtlay sızılğan sheñber radiusın tabıñ.

Sheshiliwi. Geron formulasınan paydalanıp, üshmüyeshliktiñ maydanın tabamız:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+6+10}{2} = 11,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{11(11-5)(11-6)(11-10)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{264} \approx 16,3.$$

Onda, $R = \frac{abc}{4S} \approx \frac{5 \cdot 6 \cdot 10}{4 \cdot 16,3} \approx 5,4.$

Juwabı: $\approx 5,4.$

? **Mäsele hám tapsırmalar**

30.1. Eger $AB=7$ cm, $BC=8$ cm, $CA=9$ cm bolsa, ABC üshmüyeshliginiñ eñ úlken hám eñ kishi müyeshin tabıñ.

30.2. Eger ABC üshmüyeshliginde $\angle A=47^\circ$, $\angle B=58^\circ$ bolsa, üshmüyeshliktiñ eñ úlken hám eñ kishi täreplerin anıqlañ.

30.3. Üshmüyeshliktiñ üsh tärepi berilgen:

a) $a=5$, $b=4$, $c=4$; b) $a=17$, $b=8$, $c=15$; d) $a=9$, $b=5$, $c=6$.

Üshmüyeshliktiñ süyir müyeshli, tuwrı müyeshli yaki doǵal müyeshli ekenligin anıqlañ.

30.4. Tärepleri a) 13, 14, 15; b) 15, 13, 4; d) 35, 29, 8; e) 4, 5, 7 bolğan üshmüyeshlikke sırtlay sızılğan sheñberdiñ radiusın tabıñ.

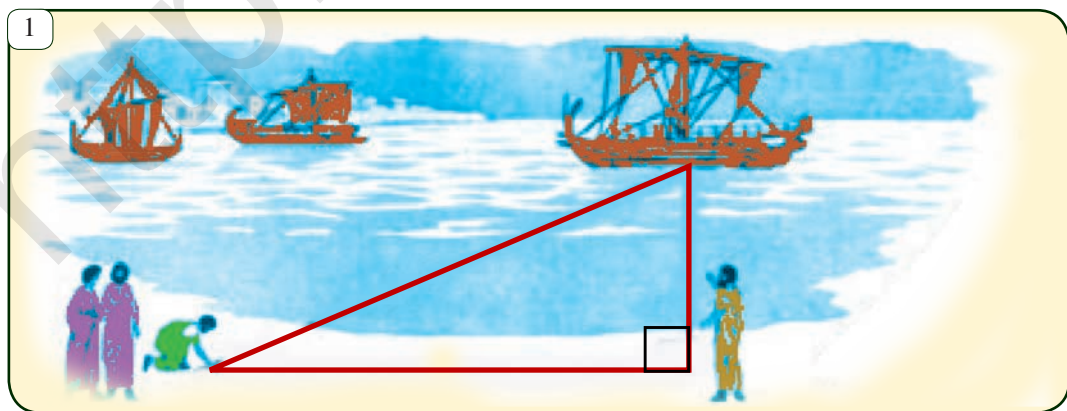
30.5. ABC üshmüyeshliginiñ AB tärepinde D noqatı belgilengen. CD kesindi AC hám BC kesindileriniñ keminde birewinen kishi ekenligin dáliylleñ.

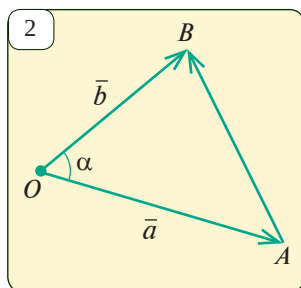
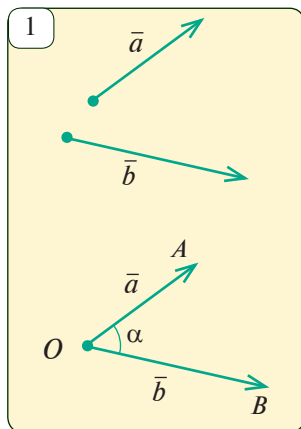
30.6. Üshmüyeshliktiñ úlken müyeshi qarsısında úlken tärepi jatatuǵının dáliylleñ.

30.7. Üshmüyeshliktiñ úlken tärepi qarsısında úlken müyeshi jatatuǵının dälilleñ.

30.8*. ABC üshmüyeshliginiñ CD medianası júrgizilgen. Eger $AC > BC$ bolsa, ACD müyeshi BCD müyeshinen kishi bolatuǵının dáliylleñ.

30.9*. 1-súwrette berilgenlerge tiykarlanıp, qádimgi grekler qurǵaqlıqtan kemege shekemgi bolğan aralıqtı qanday ólshegenlerin anıqlañ.





Нол вектordan ўзгеша $\vec{a}$ Һам $\vec{b}$ векторлар арасидағи мўйеш деп O ноқаттан шўғиўшў $\vec{OA} = \vec{a}$ Һам

$\vec{OB} = \vec{b}$ векторларини бағитлаўшў кесиндileri арасидағи AOB мўйешке айтылади (1-сўўрет).

Бир қиўлы бағитланған векторлар арасидағи мўйеш 0° қа тең деп есапланади. Егер еки вектор арасидағи мўйеш 90° қа тең болса, олар перпендикуляр делinedi.

$\vec{a}$ Һам $\vec{b}$ векторлардин скаляр кўбеймеси бул вектор узинлиқларини олар арасидағи мўйешини косинусина кўбеймесине айтылади.

Егер векторлардин бири нол вектор болса, олардин скаляр кўбеймеси нол болады.

Скаляр кўбейме $\vec{a} \cdot \vec{b}$ яки $(\vec{a}, \vec{b})$ кўринисте белгилениди. Аниқламаға тийкарланп

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1)$$

Аниқламадан белгили, $\vec{a}$ Һам $\vec{b}$ векторлардин скаляр кўбеймеси нолге тең болса, олар перпендикуляр болады Һам керисинше.

Физикада денени $\vec{F}$ кўш тасиринде $\vec{s}$ аралыққа јўлјитыўда орынланған A јумис $\vec{F}$ Һам $\vec{s}$ векторлардин скаляр кўбеймесине тең болады:

$$A = (\vec{F}, \vec{s}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos \varphi.$$

Қасиетleri. $\vec{a}(a_1; a_2)$ Һам $\vec{b}(b_1; b_2)$ векторлар ушўн $(\vec{a}; \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Далийлле. $\vec{a}$ Һам $\vec{b}$ векторларди координаталар басы O ноқатқа қоямыз (2-сўўрет). Онда $\vec{OA} = (a_1; a_2)$ Һам $\vec{OB} = (b_1; b_2)$ болады. Егер берилген векторлар коллинеар болмаса, ABO ўшмўйешликten ибарат болады Һам онин ушўн косинуслар теоремасы орынли болады: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \varphi$.

$$\text{Онда } OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2) \text{ болады.}$$

$$\text{Бирақ, } OA^2 = a_1^2 + a_2^2, OB^2 = b_1^2 + b_2^2 \text{ Һам } AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Демек, } (\vec{a}, \vec{b}) &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = \frac{1}{2} (OA^2 + OB^2 - AB^2) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2) = a_1 b_1 + a_2 b_2. \end{aligned}$$

Берилген векторлар коллинеар болған ($\varphi = 0^\circ$, $\varphi = 180^\circ$) јағдайда да бул теңлик орынли болиўн ўз бетинизше ислеј кўрsetiн.

Vektorlarning skalyar kóbeymesinin qásiyetleri

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ orin almashtiruv qásiyeti.
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ bólistiruv qásiyeti.
3. $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b})$ gruppalar qásiyeti.
4. Eger a hám b vektorlar birdey bağıttağı kollinear vektorlar bolsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ boladı, sebebi $\cos 0^\circ = 1$.
5. Eger qarama-qarsı bağıtlangan bolsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$, sebebi $\cos 180^\circ = -1$.
6. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.
7. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar óz ara perpendikular bolsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ boladı.

Nátijeler:

- a) $\vec{a} = (a_1; a_2)$ vektordın uzınlığı: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$; (1)
- b) $\vec{a} = (a_1; a_2)$ hám $\vec{b} = (b_1; b_2)$ vektorlar arasındagı múyeshtin kosinusi:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{yaki} \quad \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

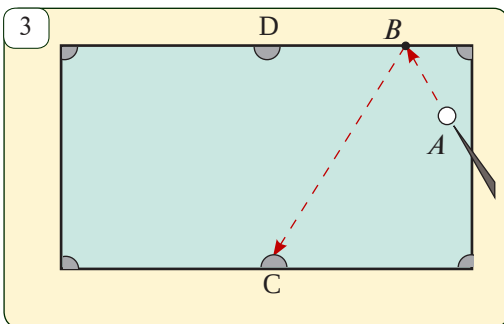
 **Másele.** $\vec{a}(1;2)$ hám $\vec{b}(4;-2)$ vektorlar arasındagı múyeshti tabın.

Sheshiliwi. Berilgen vektorlar arasındagı múyeshti α dep belgilesek, formulağa tiykarlanıp,

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{4 - 4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = 0. \quad \text{Demek, } \alpha = 90^\circ. \quad \text{Juwabi: } 90^\circ.$$

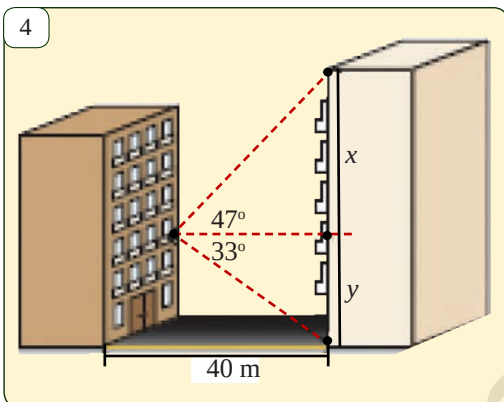
? Másele hám tapsırmalar

- 31.1. Eger $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar ushın a) $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=5, \alpha=30^\circ$; b) $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=7, \alpha=45^\circ$; d) $|\vec{a}|=2.4, |\vec{b}|=10, \alpha=60^\circ$; e) $|\vec{a}|=0.8, |\vec{b}|=\frac{1}{2}, \alpha=40^\circ$ bolsa, bul vektorlarning skalyar kóbeymesin tabın (bul jerde $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlar arasındagı múyeshi).
- 31.2. a) $\vec{a}(\frac{1}{2}; -1)$ hám $\vec{b}(2;3)$; b) $\vec{a}(-5;6)$ hám $\vec{b}(6;5)$; d) $\vec{a}(1,5;2)$ hám $\vec{b}(4;-2)$ vektorlarning skalyar kóbeymesin esaplań hám olar arasındagı múyeshti tabın.
- 31.3. $ABCD$ rombinin diagonalı O noqatında kesilisedi hám bunda $\vec{BD} = \vec{AB} = 4$ cm. a) $\vec{AB}$ hám $\vec{AD}$; b) $\vec{AB}$ hám $\vec{AC}$; d) $\vec{AD}$ hám $\vec{DC}$; e) $\vec{OC}$ hám $\vec{OD}$ vektorlarning skalyar kóbeymesin hám bul vektorlarning arasındagı múyeshti tabın.
- 31.4. Nol vektordan ózgeshe $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları berilgen bolsın. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bolganda bul vektorlar perpendikulyar bolatuğının hám kerisinshe, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorları perpendikulyar bolsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bolatuğının dáliyllen.
- 31.5*. x tiń qanday mánisinde a) $\vec{a}(4;5)$ hám $\vec{b}(x;6)$; b) $\vec{a}(x;1)$ hám $\vec{b}(3;2)$; d) $\vec{a}(0;-3)$ hám $\vec{b}(5;x)$ vektorları óz ara perpendikulyar boladı?
- 31.6. $\vec{a}(3;3)$, $\vec{b}(2;-2)$, $\vec{c}(-1;-4)$ hám $\vec{d}(-4;1)$ vektorları arasınan óz ara perpendikulyar juplıqların tabın.



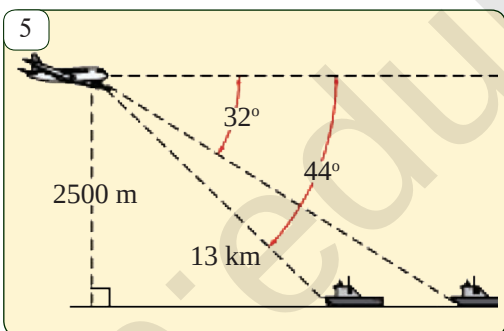
31.7*. Bilyard oyunida A noqatta turgan shar soqqidan keyin bilyard stolı jaqlawına B noqatta urıldı hám baǵdarın ózǵertip C noqattaǵı sebetshhege tústi (3-súwret).

Eger $AB=40$ cm, $BC=150$ cm hám $\angle ABD=120^\circ$ bolsa, $AB \cdot BC$ skalyar kóbeymeni tabıń.



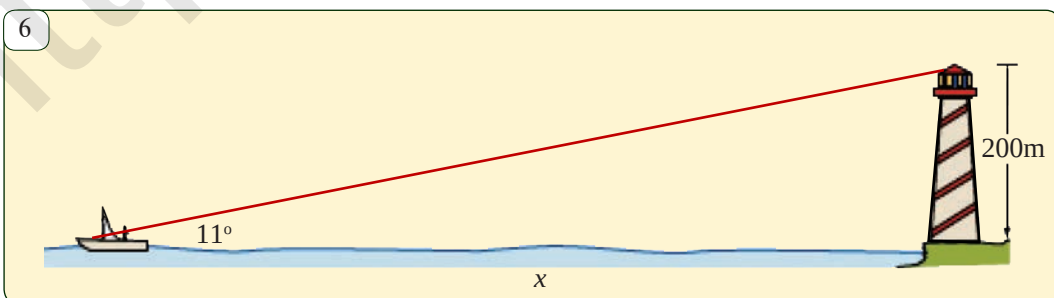
31.8. F(-3, 4) kúsh tásiiri astında noqat $A(5, -1)$ jaǵdaydan $B(2, 1)$ jaǵdayǵa ótti. Bunda qanday jumıs orındandı?

31.9. Lala kóp qabatlı úydiń 3-qabatında jasaydı. Onıń aynasınan úyinen 40 m aralıqta turgan basqa bir úy kórinip turadı (4-súwret). Eger qarsısındaǵı úydiń tóbesi Lalaǵa 47° múyesh astında, tómengi ultanı bolsa 33° múyesh astında kórinse, qarsısındaǵı úydiń biyikligin tabıń.



31.10. 2500 m biyiklikte uship baratırǵan samolyottan birinshi keme gorizontqa qarata 44° múyesh astında, ekinshi keme bolsa 32° múyesh astında kórinedi (5-súwret). Kemeler arasındǵı aralıqtı tabıń.

31.11. Balıqshılar qayıǵınan biyikligi 200 m bolǵan eskertki 11° múyesh astında kórinedi (6-súwret). Qayıqtan qurǵalıqqa shekemgi aralıqtı tabıń.



Geometriya hám geografiyadan joybar isi

Geografiya páninen belgili, jer sharı sırtındaǵı orınlar geografiyalıq koordinatalar járdeminde anıqlanadı. 7-súwrette bul koordinatalar keltirilgen. Onda

- 1- nolinshi (Grinwich) meridianı;
- 2- nolinshi meridiannan ońda (shıǵısta) jaylasqan meridianlar;
- 3- ekvatorдан tómenде (qublada) joylashqan parallelar;
- 4 - ekvator.

Nolinchi (Grinwich) meridianı (1) dıń ekvator (4) penen kesilisiw noqatı geografiyalıq koordinatalardıń sanaq bası esaplanadı.

Ekvatorдан arqaǵa qaray meridian boylap sherek sheńber doǵası 90° arqa keńlikti, ekvatorдан qublaǵa qaray 90° qubla keńlikti óz ishine aladı.

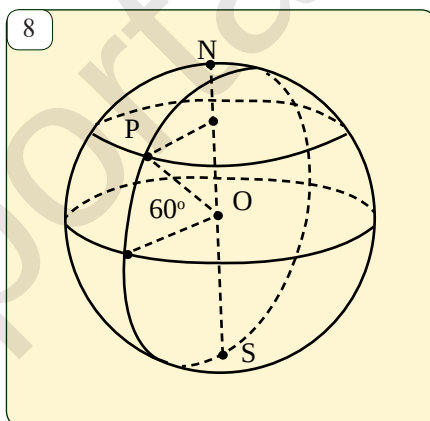
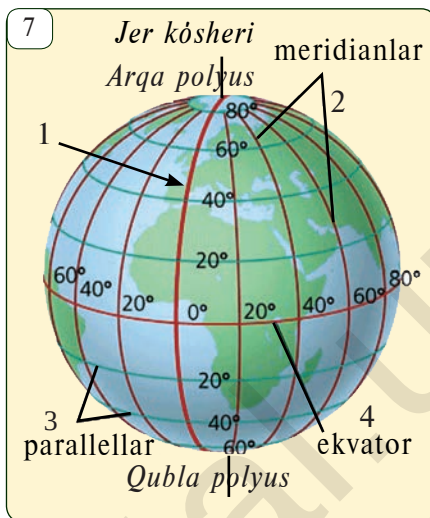
Nolinshi meridiannan shıǵısqa qaray ekvator boylap sherek sheńber doǵası 180° shıǵıs uzaqlıqtı, nolinshi meridiannan batısqa qaray 180° batıs uzaqlıqtı óz ishine aladı.

1. Tashkent qalasınıń geografiyalıq koordinataların tabıń.

2. Mámleketimiz paytaxtı menen jáne qaysı úlken qalalar shama menen birdey meridianda jaylasqan.

3. Tashkent qalasınan Tokio, Pekin, Seul, Vashington hám Nyu-York qalalarına shekem (meridian boylap) bolǵan aralıqlardı anıqlań (jetispey atırǵan maǵlıwmatlardı ózińiz qıdırıp tabıń).

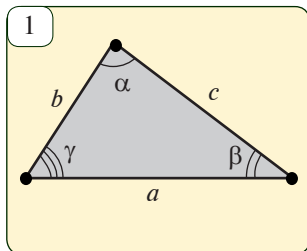
4. Qala 60° arqa keńlikte jaylasqan. Eger jerdiń radiusı 6400 km bolsa, bul qala jaylasqan parallel radiusın tabıń.



Qızıqarlı geometriya

Ańshı ańǵa shıqtı. Dáslep ol qublaǵa qaray 1 km júrdi. Soń shıǵısqa qaray 1 km, soń bolsa arqaǵa qaray 1 km jol júrdi hám baslangısh jaǵdayına kelip qaldı. Qarasa, ayıw turıptı. Onı attı.

1. Atılǵan ayıwdıń reńi qanday?
2. Jer sharınıń jáne qaysı orınlarınan shıǵıp, joqarıda kórsetilgendey 3 tárepke júrip jáne baslangısh noqatqa kelip qalıw múmkin? Ol jerlerde ayıw jasayma?



Ўшмүйешликтиң тәреплерин a, b, c менен, ал бул тәреплердиң қарама-қарсысындағы мүйешлерди сәйкес түрде a, b, γ менен белгілеймиз (*1-сүврет*). Ўшмүйешликтиң тәреплерин һәм мүйешлерин бир атама менен оңи *elementleri* деп аталади.

Ўшмүйешликти аниқлағшһ берилген элементһ бойынша, оңиң қалған элементһн табиғ *ўшмүйешликти sheshiw* деп айтылади.

1-мәсеle. (*Ўшмүйешликти берилген бир тәрепи һәм оған иргеles jatqan мүйешleri бойынша sheshiw*). Eger ўшмүйешликте $a=6, \beta=60^\circ$ һәм $\gamma=45^\circ$ bolsa, оңиң ўшинshi мүйешин һәм қалған еки тәрепин табиғ.

Sheshiliwi. 1. Ўшмүйешликтиң мүйешлериниң қосиндһ 180° болғанһ ushһн $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$.

Sinuslar teoremasinan paydalanıp, қалған еки тәрепин табамһз:

$$2. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad \text{teńlikten} \quad b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,8660}{0,9659} \approx 5,3794 \approx 5,4.$$

($\sin 60^\circ$ һәм $\sin 75^\circ$ мәнисleri mikroalkulyatorda yaki sabaqlıqtıń 153-betindegі kesteden тауһп qoyıldı).

$$3. \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{teńlikten} \quad c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,7071}{0,9659} \approx 4,3924 \approx 4,4.$$

Juwabı: $\alpha = 75^\circ$; $\beta \approx 5,4$; $c \approx 4,4$.

2-мәсеle. (*Ўшмүйешликти берилген еки тәрепи һәм олар arasındaғы мүйешi бойынша sheshiw*). Eger ўшмүйешликте $a=6, b=4$ һәм $\gamma=120^\circ$ bolsa, оңиң ўшинshi c тәрепин һәм қалған мүйешlerin табиғ.

Sheshiliwi. 1. Kosinuslar teoremasinan paydalanıp, ўшмүйешликтиң ўшинshi c тәрепин табамһз.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma} = \sqrt{36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot (-0,5)} = \sqrt{76} \approx 8,7.$$

2. Endi, ўшмүйешликтиң ўш тәрепин билген halda, kosinuslar teoremasinan paydalanıp, ўшмүйешликтиң қалған мүйешlerin табамһз:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 76 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{76}} \approx 0,8046.$$

$\cos \alpha \approx 0,8046$ teńligi tiykarında α мүйешиниң мәнисin 153-bettegi kesteden aniqlaymһz (α — сүйir мүйеш): $\alpha \approx 36^\circ$.

$$3. \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 180^\circ - (36^\circ + 120^\circ) = 24^\circ.$$

Juwabı: $c \approx 8,7$; $\alpha \approx 36^\circ$, $\beta \approx 24^\circ$.

3-мәсеle. (*Ўшмүйешликти берилген ўш тәрепи бойынша sheshiw*). Eger ўшмүйешликте $a=10, b=6$ һәм $c=13$ bolsa, оңиң мүйешlerin табиғ.

Sheshiliwi: 1. Úshmúyeshlik súyir múyeshli bolıwı yaqı bolmaslıgın úlken táreptiń qarama-qarsısındağı múyeshliń kosinusınıń belgisine qarap anıqlaymız:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{100 + 36 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 6} = -\frac{33}{120} \approx -0,275 < 0.$$

Demek, C — doǵal múyesh eken. Bunı 153-bettegi kesteden C múyeshiniń shamasın anıqlawda esapqa alamız. Kesteden kosinusı 0,275 ge teń múyesh $\angle C_1 = 74^\circ$ ekenligin tabamız. Onda $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ formulası boyınsha,

$$\angle C = 180^\circ - \angle C_1 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ.$$

2. Sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \text{ Bunnan, } \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{10 \cdot \sin 106^\circ}{13} = \frac{10 \cdot \sin 74^\circ}{13} \approx \frac{10 \cdot 0,9615}{13} \approx 0,7396.$$

A — súyir múyesh bolǵanı ushın 153-bettegi kesteden $\angle A \approx 47^\circ$ ekenligin anıqlaymız.

3. $\angle B \approx 180^\circ - (106^\circ + 47^\circ) = 26^\circ$. **Juwabı:** $\angle A \approx 47^\circ$, $\angle B \approx 26^\circ$, $\angle C \approx 106^\circ$.

? Másele hám tapsırmalar

32.1. Úshmúyeshliktiń bir tárepi hám oǵan irgeles jatqan eki múyeshi berilgen:

- a) $a=5 \text{ cm}$, $\beta=45^\circ$, $\gamma=45^\circ$; b) $c=20 \text{ cm}$, $\alpha=75^\circ$, $\beta=60^\circ$;
d) $a=35 \text{ cm}$, $\beta=40^\circ$, $\gamma=120^\circ$; e) $c=12 \text{ cm}$, $\alpha=36^\circ$, $\beta=25^\circ$.

Úshmúyeshliktiń tóbesiniń múyeshin hám qalǵan eki tárepin tabıń.

32.2. Úshmúyeshliktiń eki tárepi hám olar arasındağı múyeshi berilgen:

- a) $a=6$, $b=4$, $\gamma=60^\circ$; b) $a=14$, $b=43$, $\gamma=130^\circ$;
d) $b=17$, $c=9$, $\alpha=85^\circ$; e) $b=14$, $c=10$, $\alpha=145^\circ$.

Úshmúyeshliktiń qalǵan múyeshlerin hám úshinshi tárepin tabıń.

32.3. Úshmúyeshliktiń úsh tárepi berilgen:

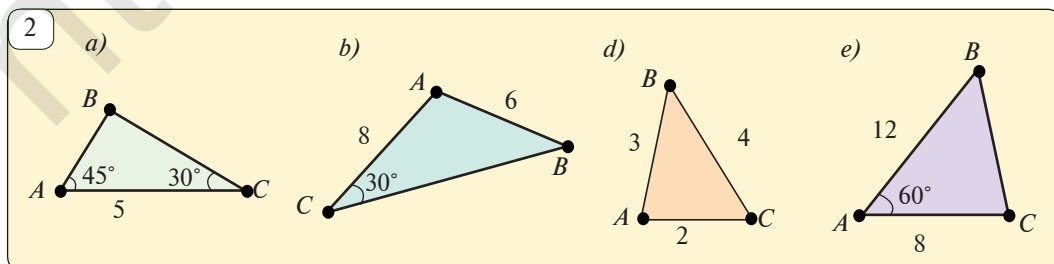
- a) $a=2$, $b=3$, $c=4$; b) $a=7$, $b=2$, $c=8$;
d) $a=4$, $b=5$, $c=7$; e) $a=15$, $b=24$, $c=18$.

Úshmúyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

32.4. Úshmúyeshliktiń eki tárepi hám bul táreplerden biriniń qarama-qarsısındağı múyeshi berilgen. Úshmúyeshliktiń qalǵan tárepi hám múyeshlerin tabıń:

- a) $a=12$, $b=5$, $\alpha=120^\circ$; b) $a=27$, $b=9$, $\alpha=138^\circ$;
d) $b=2$, $c=2$, $\alpha=60^\circ$; e) $b=6$, $c=8$, $\alpha=30^\circ$.

32.5. 2-súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında úshmúyeshlikti sheshiń.

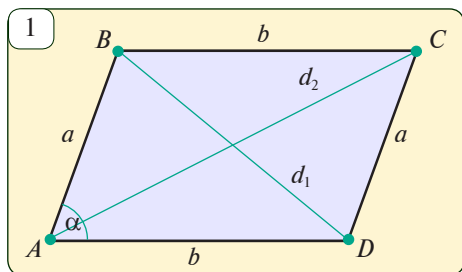


1-másele. Parallelogramm diagonallarınıń kvadratlarınıń qosındısı tárepleriniń kvadratlarınıń qosındısıniń teń ekenligin dáliylleń.

$ABCD$ — parallelogramm, $AB=a$,
 $AD=b$, $BD=d_1$, $AC=d_2$ (1-súwret).



$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$



Sheshiliwi. $ABCD$ parallelogrammniń A múyeshi α ға teń bolsın. Onda $\angle B = 180^\circ - \alpha$. ABD hám ABC úshmúyeshliklerine kosinuslar teoremasın qollanamız (1-súwret):

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha, \quad (1)$$

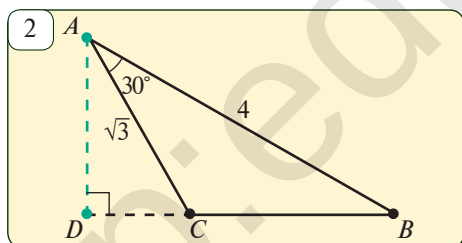
$$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \alpha).$$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ teńligin esapqa alsaq,

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha. \quad (2)$$

(1) hám (2) teńlikleriniń sáykes mánislerin qosıp, $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ teńligin payda etemiz.

2-másele. ABC úshmúyeshliginde $\angle A = 30^\circ$, $AB = 4$, $AC = \sqrt{3}$ bolsa, úshmúyeshliktiń A tóbesinen túsirilgen AD biyikligin tabıń (2-súwret).



Sheshiliwi. 1) Kosinuslar teoremasınan paydalanıp, úshmúyeshliktiń BC tárepın tabamız:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 7, \quad BC = \sqrt{7}.$$

2) Endi úshmúyeshliktiń maydanın tabamız:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{3}.$$

3) Tabılǵanlardan paydalanıp, úshmúyeshliktiń AD biyikligin tabamız:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD \quad \text{formuladan} \quad AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad \text{Juwabi: } \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

3-másele. Aydawshı jol háreketi qaǵıyaların buzıp, saat 12^{00} de kósheniń A noqatınan Almazar kóshesine qarap burıldı hám 140 km/saat tezlikte háreketin dawam etti (3-súwret). Saat 12^{00} de MAI xızmetkeri B noqatınan taslaq jol boylap 70 km/saat tezlikte qaǵıyda buzǵan aydawshınıń jolın kesip shıǵıw ushın jolǵa

shıqtı. MAI xızmetkeri kesilispede yaǵnıy C noqatında qaǵıyda buzıwshını toqtatıp qala ala ma?

Sheshiliwi: ABC úshmúyeshliginde

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (20^\circ + 50^\circ) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

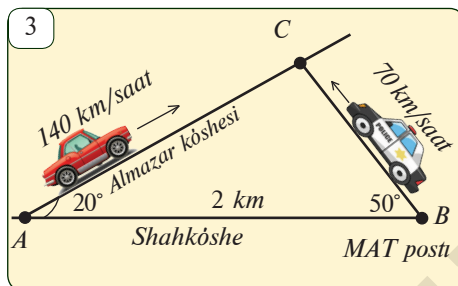
1. Almazar kóshesindegi joldıń AC bóliminiń uzınlıǵın tabamız: Sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}. \text{ Bul teńlikten } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\sin(90^\circ + 20^\circ)} = \frac{2 \cdot \sin 50^\circ}{\cos 20^\circ} \approx \frac{2 \cdot 0,766}{0,940} = \frac{1,532}{0,94} \approx 1,630 \text{ (km)}. \text{ Bul joldı qaǵıyda buzar aydawshı } \frac{1,630 \text{ km}}{140 \text{ km/h}} \approx 0,0116 \text{ saat} = 0,012 \cdot 3600 \text{ sekund} \approx 42 \text{ sekundda basıp ótedi}.$$

2. Endi taslaq joldıń BC bólegi uzınlıǵın tabamız: sinuslar teoreması boyınsha,

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \text{ Bul teńlikten } BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{2 \cdot 0,342}{0,766} \approx 0,893 \text{ (km)}.$$

Bul joldı MAI xızmetkeri $\frac{0,893 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} \approx 0,0128 \text{ saat} = 0,0128 \cdot 3600 \text{ sekund} \approx 46 \text{ sekundda}$ basıp ótedi. Demek, C kesispesine MAI xızmetkeri aydawshıdan keshirek jetip keledi eken. **Juwabı:** Yaq.



❓ Másele hám tapsırmalar

33.1. 4-súwrettegi maǵlıwmatlar boyınsha x tiń mánisin tabıń.

33.2. ABC úshmúyeshliginiń CD biyikligi 4 m. Eger $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.

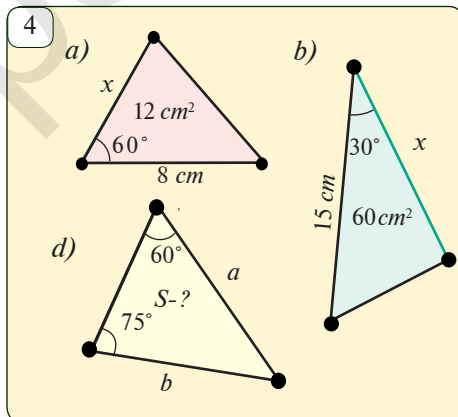
33.3. Bir noqatqa shaması birdey bolǵan eki kúsh qoyılǵan (5-súwret). Eger bul kúshlerdiń baǵıtları arasındaǵı múyesh 60° , bul kúshlerdiń teń tásir etiwshisi 150 kg bolsa, bul kúshlerdiń shamasın tabıń.

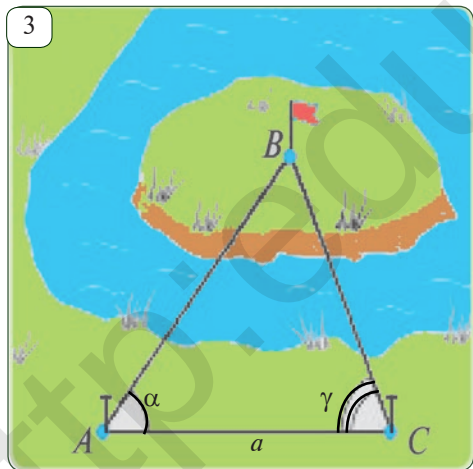
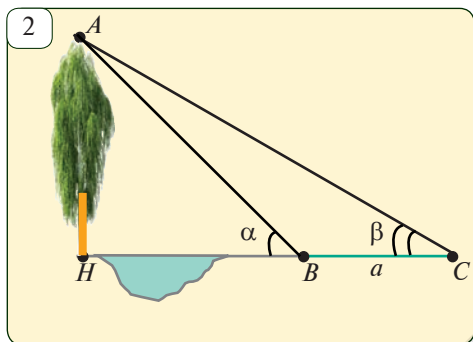
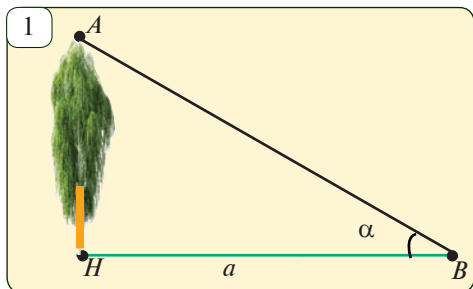
33.4. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 7 dm hám 11 dm, úshinshi tárepine túsirilgen medianası bolsa 6 dm. Úshmúyeshliktiń úshinshi tárepin tabıń.

33.5. Tárepleri 6 cm hám 8 cm bolǵan parallelogrammnıń bir diagonalı 12 cm bolsa, onıń ekinshi diagonalın tabıń.

33.6. Úshmúyeshliktiń 18 cm ge teń tárepi qarsısındaǵı múyeshi 60° qa teń. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusın tabıń.

33.7. Teń qaptalı trapeciyanıń kishi ultanı qaptal tárepine teń, úlken ultanı bolsa 20 cm. Eger trapeciyanıń bir múyeshi 120° bolsa, onıń perimetrin tabıń.





1. Biyiklikni ólshew. Aytayıq, terektiń AH biyikligin ólshew zárur bolsın (1-suwret).

a) Bunıń ushın B noqattı belgileyemiz hám BH aralıq a nı hám HBA muyesh α nı ólsheymiz. Onda, tuwrı muyeshli ABH ushmuyeshlikte

$$AH = BH \operatorname{tg} \alpha = a \operatorname{tg} \alpha.$$

b) Eger biyiklikniń ultanı H noqat barıp bolmaytuğın noqat bolsa (2-suwret), joqarıdağı usıl menen AH biyiklikni anıqlay almaymız. Onda tómendegishe jol tutamız:

1) H noqat penen bir tuwrı sızıqta jatqan B hám C noqatlardı belgileyemiz;

2) BC aralıqtı ólshep a nı tabamız;

3) ABH hám ACH muyeshlerdi ólshep $\angle ABH = \alpha$ hám $\angle ACH = \beta$ lardı tabamız;

4) ABC ushmuyeshlikke sinuslar teoremasın qollasaq ($\angle BAC = \alpha - \beta$)

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin(\alpha - \beta)}, \text{ yaki } AB = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

5) tuwrı muyeshli ABH ushmuyeshlikte AH biyiklikni tabamız:

$$AH = AB \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

2. Barıp bolmaytuğın noqatqa shekem bolğan aralıqtı esaplaw. Aytayıq, A noqattan barıp bolmaytuğın B noqatqa shekem bolğan aralıqtı esaplaw kerek (3-suwret). Bul máseleni ushmuyeshliklerdiń uqsaslıq belgilerinen paydalanıp juwabın tapqanımdı esletip ótemiz.

Endi bul máseleni sinuslar teoremasınan paydalanıp sheshemiz.

1) A hám B noqatlardan kórinip turğan tegis jayda C noqattı belgileyemiz.

2) AC aralıqtı ólsheymiz: $AC = a$.

3) Ásbaplar járdeminde ACB hám BCA muyeshlerdi ólsheymiz: $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$.

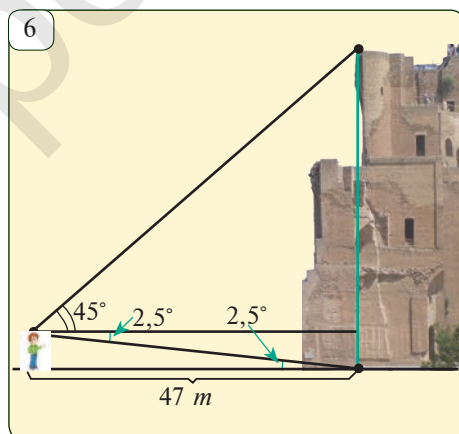
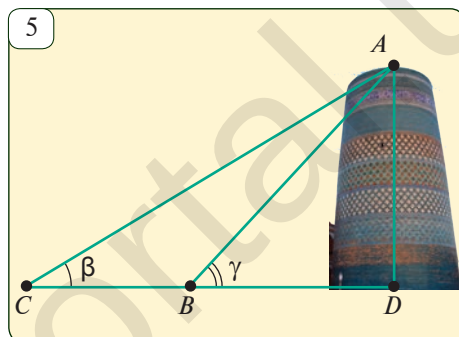
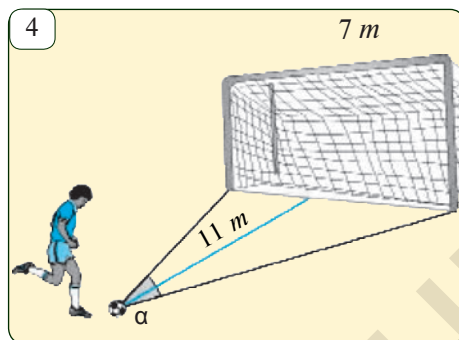
4) ABC ushmuyeshlikte $\angle B = 180^\circ - \alpha - \gamma$ bolğanı ushın,

$$\sin B = \sin(180^\circ - \alpha - \gamma) = \sin(\alpha + \gamma).$$

Sinuslar teoremasi boyınsha, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$ yaki $AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}.$

? *Mäsele hám tapsırmalar*

- 34.1.1**-suwrette $a=12\text{ m}$, $\alpha=42^\circ$ bolsa, terek biyikligin esaplañ.
- 34.2.2**-suwrette $a=8\text{ m}$, $\alpha=43^\circ$, $\beta=32^\circ$ bolsa, terek biyikligin esaplañ.
- 34.3.3**-suwrette $a=60\text{ m}$, $\alpha=62^\circ$, $\gamma=44^\circ$ bolsa, AB aralıqtı tabıñ.
- 34.4.**Futbol oyunında 11 metrlik járiyma tobin dárwazağa bağıtlaw muyeshi α nı tabıñ (4-suwret). Dárwazanın keñligi 7 m .
- 34.5.5**-suwrette Xiywa qalasındaǵı Kelteminar suwretlengen. Eger $\beta=30,7^\circ$, $\gamma=45^\circ$, $BC=50\text{ m}$ bolsa, Kelteminar biyikligin tabıñ.
- 34.6.**Sayaxatshı Shahrısabz qalasındaǵı Aq-saraydı onnan 47 m aralıqta tamasha qılıp atır (6-suwret). Eger ol Aq-saray ultanın gorizontqa salıstırǵanda $2,5^\circ$ ǵa teñ múyesh astında, joqarı bólegin bolsa 45° ǵa teñ múyesh astında kórip atırǵan bolsa, Aqsaray biyikligin tabıñ.
- 34.7.**Ush jol ABC úshmúyeshlikti quraydı. Bul úshmúyeshlikte $\angle A=20^\circ$, $\angle B=150^\circ$. A noqattan jolǵa shıqqan aydawshı C noqatqa imkan barınsha tezirek jetip barmaqshı. AC hám CB jollar taslı jol, AB asfalt jol bolıp, asphalt jolda taslı jolǵa qararaganda 2 márte tezirek háreketleniwi múmkin. Aydawshıǵa qaysı joldan juriwdi máslahat beresiz?



🕒 *Qızıqarli mäsele*

Pifagor teoremasının jáne bir “dáliliy”

Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlikte $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$. Bul eki teñlikti kvadratqa kóterip, aǵzama-aǵza qossaq hám $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ekenligin esapqa alsaq,

$$a^2 + b^2 = c^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = c^2.$$

Demek, $a^2 + b^2 = c^2$. Bul “dálillew” logikalıq jaqtan nadurıs ekenligin dálilleñ.

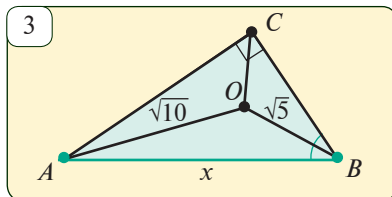
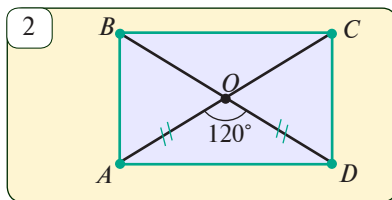
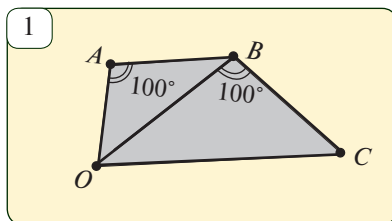
I. Testler

1. Tárepleri a , b , c , sáykes múyeshleri α , β , γ , maydanı S bolğan úshmúyeshlik ushın qaysı teńlik nadurıs?
 A. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$; B. $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$;
 D. $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$; E. $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$.
2. Nadurıs teńlikti tabıń:
 A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; B. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$;
 D. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$; E. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
3. Úshmúyeshliktiń ush tárepi belgili bolsa, qaysı teoremadan paydalanıp onıń múyeshlerin tabıw múmkin?
 A. Sinuslar teoreması; B. Kosinuslar teoreması;
 D. Fales teoreması; E. Geron formulası.
4. Úshmúyeshliktiń bir múyeshi 137° ға, ekinshi múyeshi 15° ға teń. Eger bul úshmúyeshliktiń ulken tárepi 22 ge teń bolsa, onıń kishi tárepin tabıń.
 A. 8,3; B. 9,3; D. 3,8; E. 6,5.
5. Úshmúyeshliktiń 14 hám 19 ға teń bolğan tárepleri arasındagı múyeshi 26° . Sol úshmúyeshliktiń ushinshi tárepin tabıń.
 A. 1,2; B. 5,4; D. 6,9; E. 19,7.
6. Eger eki vektordıń uzınlıqları $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=5$ hám olar arasındagı múyesh 45° bolsa, $\vec{a}$ hám $\vec{b}$ vektorlardıń skalyar kóbeymesin tabıń.
 A. 52; B. 32 D. 102; E. 2.
7. $\vec{a}(4; -1)$ hám $\vec{b}(2; 3)$ vektorlardıń skalyar kóbeymesin tabıń.
 A. 5; B. 3; D. 4; E. 9.
8. $\vec{a}(-\frac{1}{2}; \frac{3}{\sqrt{2}})$ hám $\vec{b}(\sqrt{3}; 1)$ vektorlar arasındagı múyeshiti tabıń.
 A. 30° ; B. 60° ; D. 90° ; E. 45° .
9. Úshmúyeshlik múyeshleriniń qatnası 3:2:1 sıyaqlı bolsa, onıń tárepleri qatnasın tabıń.
 A. 3:2:1; B. 1:2:3; D. $2:\sqrt{3}:1$; E. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$.
10. Tárepi 3 cm bolgan durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusin tabıń.
 A. $\sqrt{3}$; B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $2\sqrt{3}$; E. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

II. Máseleler

1. ABC úshmúyeshlikke $AB=6$ cm, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=75^\circ$. BC tárepti hámde ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusın tabıń.
2. Tárepleri 5 cm, 6 cm hám 10 cm bolğan úshmúyeshlik múyeshleriniń kosinusların tabıń.

3. ABC úshmúyeshlite $\angle B=60^\circ$, $AB=6\text{ cm}$, $BC=4\text{ cm}$. AC tárepti hámde ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusın tabıń.
4. Tárepleri 51 cm , 52 cm hám 53 cm bolğan úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusın tabıń.
5. Úshmúyeshliktiń eki tárepi 14 cm hám 22 cm , ushinshi tárepine ótkerilgen medianası bolsa 12 cm . Úshmúyeshliktiń ushinshi tárepın tabıń.
6. Parallelogrammnıń diagonalı 4 cm , $4\sqrt{2}\text{ cm}$ hám olar arasındaǵı múyesh 45° . Parallelogrammnıń a) maydanın; b) perimetrin; d) biyikliklerin tabıń.
7. Tárepleri 3 hám 5 bolğan parallelogramnıń bir diagonalı 4 ke teń. Onıń ekinshi diagonalın tabıń.
8. Tárepleri a) $2, 2$ hám $2, 5$; b) $24, 7$ hám 25 ; d) $9, 5$ hám 6 bolğan úshmúyeshliktiń turin anıqlań.
9. Parallelogrammnıń tárepleri $7\sqrt{3}$ hám 6 cm . Eger onıń doǵal múyeshi 120° bolsa, onıń maydanın tabıń.
10. ABC úshmúyeshliktiń AB , BC táreplerinde N , K noqatlar alınğan. Onda $BN=2AN$, $3BK=2KC$. Eger $AB=3$, $BC=5$, $CA=6$ bolsa, NK kesindini tabıń.
11. ABC úshmúyeshlikte $\angle A=30^\circ$, $BC=7\text{ cm}$. úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusın tabıń.
12. ABC úshmúyeshliktiń BE bissektrisası ótkerilgen. E noqattan BC tárepke EF perpendikulyar tusirilgen. Eger $EF=3$, $\angle A=30^\circ$ bolsa, AE ni tabıń.
13. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik AD tárepiniń ortası N noqatta. Eger $AB=3$, $BC=6$ bolsa, $\overline{NB} \cdot \overline{NC}$ skalyar kóbeymeni tabıń.
14. $\vec{a}(2;x)$, $\vec{b}(-4;1)$ bolıp, $\vec{a}+\vec{b}$ hám $\vec{b}$ vektorlar perpendikulyar. x tı tabıń.
15. $\vec{m}(7;3)$ hám $\vec{n}(-2;-5)$ vektorlar arasındaǵı múyeshiti tabıń.
16. 1- súwrette berilgenlerden paydalanıp, súwrettegi eń ulken kesindini anıqlań.
17. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń diagonalı O noqatta kesilisedi (2-súwret). Eger $AO=12\text{ cm}$, $\angle AOD=120^\circ$ bolsa, tórtmúyeshlik perimetrin tabıń.
18. Tuwrı múyeshli ABC úshmúyeshlik bissektrisalardı O nuqtada kesilisedi ($\angle C=90^\circ$). Eger $OA=\sqrt{10}$, $OB=\sqrt{5}$ bolsa, AB gipotenuzani tabıń (3-súwret).



III. Ózińizdi sınap kóriń (Ulgili qadaǵalaw jumısı)

1. Tárepleri $a=45$, $b=70$, $c=95$ bolǵan úshmúyeshliktiń eń ulken múyeshin tabıń.
2. Úshmúyeshlikte $b=5$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=50^\circ$ bolsa, úshmúyeshlikti sheshiń.
3. PKH úshmúyeshlikte $PK=6$, $KH=5$, $\angle PKH=100^\circ$. HF mediana uzınlıǵın hám PFH úshmúyeshliktin maydanın tabıń.
4. (*Qosımsha*). Úshmúyeshlikte $a=\sqrt{3}$, $b=1$, $\alpha=135^\circ$ bolsa, β múyeshti tabıń.



Tariyxıy maǵlıwmatlar. Sinus haqqında

Sinus haqqındaǵı maǵlıwmat dáslep IV-V asirlerdegi hind astronomlarınń shıǵarmalarında ushıraydı.

Orta Aziyalıq alımlar Al-Xorazmiy, Beruniy, Ibn Sino, Abdurahmon al-Haziniy (XII asir) sinus ushın «*al-jayb*» atamasın qollanǵan.

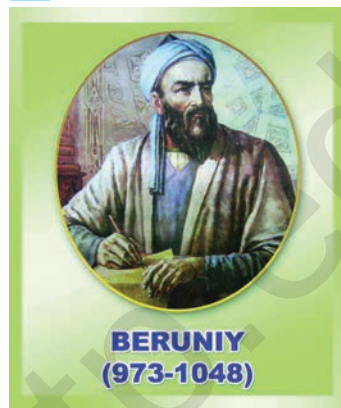
Házirgi sinus belgisin Simpson, Eyler, Dalamber, Lagranj (XVII asir) hám basqalar qollanǵan.

«*Kosinus*» ataması latınsha «komplimenti sinus» atamasınıń qısqartılǵanı, ol «qosımsha sinus», anıqıraǵı «qosımsha doǵanıń sinusi» demekdur.

Kosinuslar teoremasın grekler de bilgen, onıń dáliylı Evklidtiń “Negizler” shıǵarmasında keltirilgen. Sinuslar teoremasınıń ózine mas dáliylin Abu Rayhon Beruniy bayan etken.



Tariyxıy maǵlıwmatlar. Beruniy (tolıq atı — Abu Rayhon Muhammad ibn Ahmad) (973—1048) — orta ásirdeń ullı alımı. Ol



Xorezm úlkesiniń Qıyat qalasında tuwılǵan. Qıyat Amiwdaryanıń oń qırǵaǵı-házirgi Beruniy qalasınıń ornında bolǵan, ol jaqın waqıtlarǵa shekem Shabbaz dep atalǵan. Beruniydiń matematika hám pánniń basqa tarawlarına qosqan ulesin jazıp qaldırǵan 150 den aslam shıǵarmalarınan kóriwge boladı. Olardan eń irileri — “Hindistan”, “Estelikler”, “Masud nızamları”, “Geodeziya”, “Mineralogiya” hám “Astronomiya”.

Beruniydiń patsha shıǵarmasında “Masud nızamları”, tiykarınan, astronomiyaǵa baylanıslı bolsa da, onıń matematikaǵa baylanıslı bir qansha oylap tabıwları sol

shıǵarmada bayan etilgen.

Bul shıǵarmada Beruniy eki múyesh qosındısın hám ayırmasınıń sinusları, ekilengen hám yarım múyeshtiń sinusları haqqındaǵı teoremlar menen teń kushli bolǵan xordalar haqqındaǵı teoremlardı dáliylegen, eki graduslı doǵanıń xordaları esaplap tapqan, sinuslar hám tangensler kestesiń dúzgen, sinuslar teoremasın ózine saykes usıl dáliyllegen.

III BAP

SHEŃBER UZINLIĞI HÁM DÓŃGELEK MAYDANI



Bul bapni úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

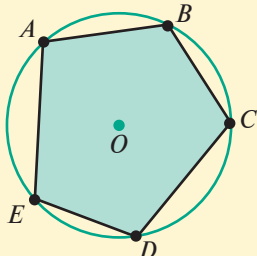
Bilimler:

- √ kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan hám ishley sızılğan sheńberlerdiń qásiyetlerin biliw;
- √ durıs kópmúyeshliklerdiń qásiyetlerin biliw;
- √ durıs kópmúyeshtiń maydanın esaplaw formulaların biliw;
- √ sheńber hám onıń doǵası uzınlıǵın esaplaw formulaların biliw;
- √ dóńgelek hám onıń bólekleri maydanın tabıw formulaların biliw;
- √ múyeshtiń radian ólshemin biliw.

Ámeliy kónlikpeler:

- √ durıs kópmúyeshliklerdi súwretley alıw;
- √ durıs kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan hám ishley sızılğan sheńberlerdiń radiusların taba alıw;
- √ sheńber hám onıń doǵası uzınlıǵın esaplay alıw;
- √ dóńgelek hám onıń bólekleri maydanın esaplay alıw.

1



Sheñberge ishlay sızılğan besmüyeshlik yaki besmüyeshlikke sırtlay sızılğan sheñber.

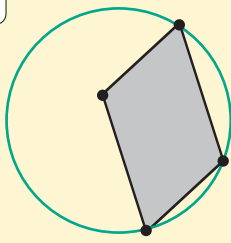
✓ Anıqlama. Eger kópmüyeshliktiń müyeshleri sheñberde jatsa, onda bul kópmüyeshlik sheñberge *ishley sızılğan*, sheñber bolsa kópmüyeshlikke *sırtlay sızılğan* delinedi (1-súwret).

Qálegen úshmüyeshlikke ishley sheñber sızıw múmkin ekenligi hám bul sheñberdiń orayı úshmüyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarları kesiliskeń noqatta jatatuǵının 8-klasta úyrensiz.

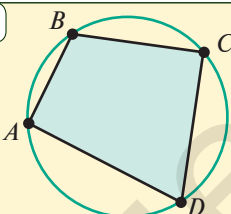
Eger kópmüyeshliktiń müyeshleriniń sanı úshewden artıq bolsa, kópmüyeshlikke hár qashan da sırtlay sheñber sızıwǵa bola bermeydi. Mısalı, tuwrı müyeshlikten ózgeshe parallelogramm ushın sırtlay sızılğan sheñber bolıwı múmkin emes (2-súwret).

8-klastan málim bolǵanday, tórtmüyeshlikte qarama-qarsı müyeshleriniń qosındısı 180° qa teń bolǵanda hám tek usınday jaǵdayda ǵana sırtlay sheñber sızıw múmkin (3-súwret).

2



3



$$\begin{aligned}\angle A + \angle C &= 180^\circ \\ \angle B + \angle D &= 180^\circ\end{aligned}$$

✎ 1-másele. Súyir müyeshli ABC úshmüyeshliktiń AA_1 hám BB_1 biyiklikleri H noqatında kesilisedi. A_1HB_1C tórtmüyeshligi sheñberge ishley sızılğan ekenligin dáliyleń.

Sheshiliwi. $AA_1 \perp BC$ va $BB_1 \perp AC$ bolǵanı ushın (4-súwret)
 $\angle HB_1C = \angle HA_1C = 90^\circ$.

Onda $\angle HB_1C + \angle HA_1C = 180^\circ$. Tórtmüyeshliktiń ishki müyeshleriniń qosındısı 360° bolǵanı ushın:

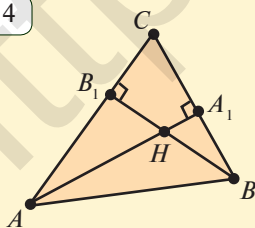
$$\angle B_1CA_1 + \angle B_1HA_1 = 180^\circ.$$

Demek, A_1HB_1C tórtmüyeshlikke sırtlay sheñber sızıw múmkin.

Sheñberge ishley sızılğan kópmüyeshliktiń tóbeleri sheñber orayınan teńdey qashıqlıqta jatqanı ushın sheñberdiń orayı kópmüyeshliktiń tárepleriniń orta perpendikulyarında jatadı (5-súwret). Demek, sheñberge ishley sızılğan kópmüyeshliktiń tárepleriniń orta perpendikulyarları bir noqatta kesilisiwi shárt.

✎ 2-másele. Radiusı 10 cm bolǵan sheñberge ultanǵa túsirilgen biyikligi 16 cm bolǵan teń qaptalı súyir müyeshli úshmüyeshlik ishley sızılğan. Úshmüyeshliktiń táreplerin tabıń.

4



Sheshiliwi. ABC úshmúyeshlikke sirtlay sızılğan sheńberdiń orayı O noqatta AC tárepiniń orta perpendikulyarı bolğan BD biyiklikte jatadı (6-súwret). Onda,

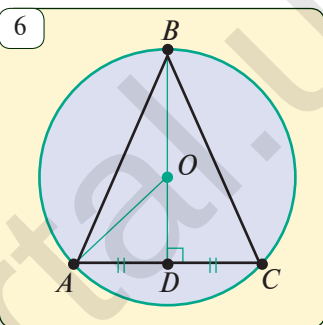
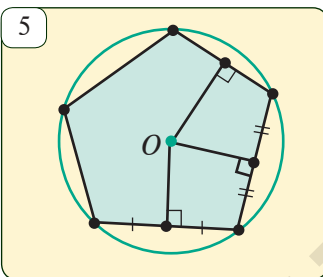
$$OD = BD - OB = 16 - 10 = 6 \text{ (cm)}$$

boladı hám Pifagor teoremasi boyınsha,

$$AD = \sqrt{OA^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ (cm)}, AC = 2AD = 16 \text{ (cm)}.$$

Sonday-aq, tuwrı múyeshli ABD úshmúyeshliginde

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5} \text{ (cm)}.$$



Juwabı: $8\sqrt{5} \text{ cm}$, $8\sqrt{5} \text{ cm}$, 16 cm .

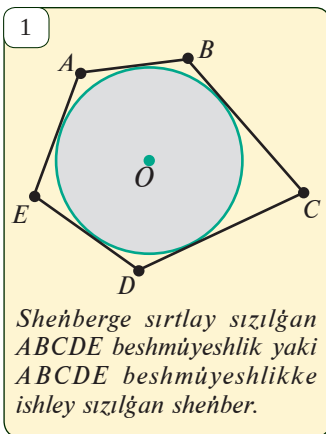
Мәселе hám tapsırmalar

- 36.1.** Eger kópmúyeshlik sheńberge ishley sızılğan bolsa, O nıń tárepleriniń orta perpendikulyarları bir noqatta kesilisetuǵının dáliyllen.
- 36.2.** Qanday úshmúyeshlik sheńberge ishley sızılğan bolıwı múmkin? Tórtmúyeshlik-she?
- 36.3.** $ABCDE$ becmúyeshligi sheńberge ishley sızılğan bolsa, $\angle ACB = \angle AEB$ bolatuǵının dáliyllen.
- 36.4.** Katetleri 16 cm hám 12 cm bolğan tuwrı múyeshli ushmúyeshlikke sirtlay sızılğan sheńber radiusın tabıń.
- 36.5.** Radiusı 25 cm bolğan sheńberge bir tárepi 14 cm bolğan tuwrı múyeshlik ishley sızılğan. Tuwrı múyeshliktiń maydanın tabıń.
- 36.6.** Radiusı 10 cm bolğan sheńberge ishley sızılğan a) teńtärepli úshmúyeshlik; b) kvadrat; c) teńqaptalı tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń táreplerin tabıń.
- 36.7.** Tárepleri 16 cm , 10 cm hám 10 cm bolğan úshmúyeshlikke sirtlay sızılğan sheńberdiń radiusın tabıń.
- 36.8.** Sheńberge ishley sızılğan $ABCDEF$ altımúyeshlikte $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$ bolsa, sheńber orayı AF tárepte jatatuǵının dáliyllen.
- 36.9.** Qálegen teń qaptalı trapeciya sheńberge ishley sızılıwı múmkin ekenligin dáliyllen.
- 36.10.** Teńqaptalı trapeciya sızıń. Oǵan sirtlay sızılğan sheńber jasań.

Qızıqarlı másele

On altı jaslı Galua (E.Galua—francuz matematigi, 1811—1832) kolledjde oqıp júrgen waqıtlarında, oǵan oqıtıwshısı bir saat ishinde úsh máseleni sheship beriwdi soragan. Ol sheshimi ańsat bolmaǵan bul máselelerdi 15 minutta sheship, hámmeni hayran qaldırǵan. Mine usi máselelerden biri. Onı siz de sheship kóriń!

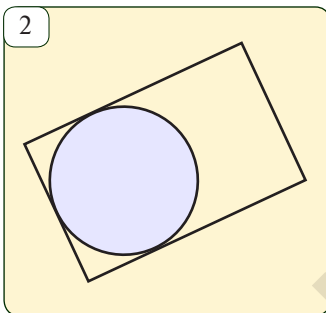
Мәселе. Sheńberge ishley sızılğan tórtmúyeshliktiń tórt tárepi a , b , c hám d ńa teń. Onıń diagonalların tabıń.



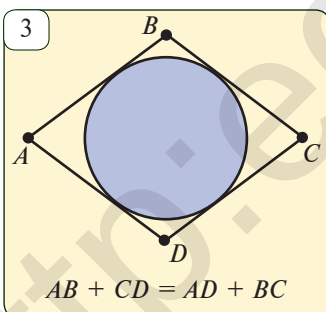
✓ Anıqlama. Eger kópmúyeshliktiń barlıq tárepleri sheñberge urınba jasasa, onda ol kópmúyeshlik sheñberge *sirtlay sızılğan*, sheñber bolsa kópmúyeshlikke *ishley sızılğan* delinedi (1-súwret).

Qálegen úshmúyeshlikke sirtlay sheñber sızıw múmkin ekenligin hám bul sheñberdiń orayı úshmúyeshliktiń bissektrisaları kesiliskeń noqatında ekenligi menen 8-klasta tanısqansız.

Eger kópmúyeshliktiń múyeshleriniń sanı úshen artıq bolsa, bul kópmúyeshlikke hár qashan da ishley sheñber sızıw múmkin bola bermeydi. Mısalı, kvadrattan ózgeshe tuwrı múyeshlikke ishley sheñber sızıwǵa bolmaydı (2-súwret).

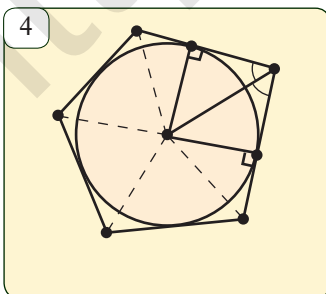


Jáne 8-klastan belgili, tórtmúyeshlikke tek ǵana qarama-qarsı tárepleriniń qosındısı teń bolǵanda ishley sheñber sızıw múmkin (3-súwret).



Sheñberge sirtlay sızılğan kópmúyeshliktiń múyeshiniń tárepleri sheñberge urıńǵanı ushın sheñber orayı usı múyeshitiń bissektrisasında jatadı (4-súwret). Demek, sheñberge sirtlay sızılğan kópmúyeshliktiń múyeshleriniń bissektrisaları bir noqatta kesilisedi.

Teorema. Eger r radiusli sheñberge sirtlay sızılğan kópmúyeshliktiń maydanı S , yarım perimetri p bolsa, $S = pr$ boladı.



Dáliytlew. Teorema dáilylin sheñberge sirtlay sızılğan ABCDEF altımúyeshlik ushın keltiremiz. Sheñber orayı O noqatın kópmúyeshliktiń tóbeleri menen tutastırıp, kópmúyeshlikti úshmúyeshliklerge ajıratamız. Bul úshmúyeshliklerdiń biyiklikleri r ge teń (5-súwret). Onda,

$$\begin{aligned} S &= S_{AOB} + S_{BOC} + \dots + S_{FOA} = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \dots + \frac{1}{2} FA \cdot r = \\ &= \frac{AB + BC + \dots + FA}{2} \cdot r = pr. \end{aligned}$$

Teorema dáilyllendi.

Мәселе. Шеңберге сыртлай сızılған тóртмúйешликтің майданı 21 cm^2 қа, периметри болса 7 cm ге тең. Шеңбердің радиусın табиң.

Sheshiliwi. $S=pr$ formulağa kóre,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{21}{3,5} = 6 \text{ (cm)}. \quad \text{Juwabı: } 6 \text{ cm.}$$

? Мәселе һәм тапсырмалар

37.1. Тәрепи 6 cm болған а) тең тәрепли ўшмúйешликке; б) квадратқа сыртлай сızılған шеңбер радиусın табиң.

37.2. Радиусı 5 cm болған шеңберге сыртлай сızılған kópmúйешликтің майданı 18 cm^2 . Kópmúйешликтің периметрин табиң.

37.3. 6-сúwrettegi тóртмúйешликлердің периметрин табиң.

37.4. 7-сúwrettegi мағlıwmatlar тийкарında сoralған кесиндини табиң.

37.5. Шеңберге сыртлай сızılған параллелограмм ромб болатуғının дәлийллең.

37.6. Туwрı мúйешли ўшмúйешликке ishley сızılған шеңбердің радиусı катетлер қосındısı менен гипотенуза айыrmasınıн yarımına тең екенлигин дәлийллең.

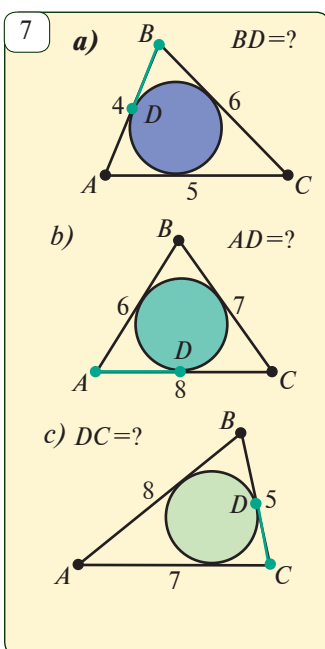
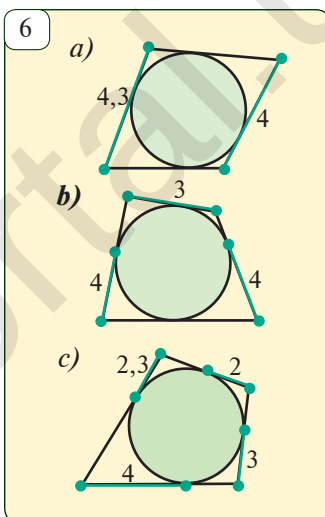
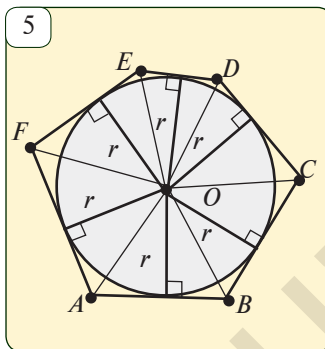
37.7. Шеңберге сыртлай сızılған тең қaptallı трапециyanıң орта сızıғı onıң қaptal тәрепине тең екенлигин дәлийллең.

37.8. Ултанларı 9 cm һәм 16 cm болған тең қaptallı трапециya шеңберге сыртлай сızılған. Шеңбердің радиусın табиң.

37.9*. ABCD тóртмúйешлик O orayına iye шеңберге сыртлай сızılған. AOB һәм COD ўшмúйешликлердің майданларınıн қосındısı тóртмúйешликтің майданınıн yarımına тең екенлигин дәлийллең.

37.10*. Шеңберге сыртлай сızılған тең қaptallı трапециyanıң ултанларı a һәм b болса, onıң биыйлиги $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ ге тең екенлигин дәлийллең.

37.11*. Тóбелери ABCD тóртмúйешликтің биссектрисаларınıн кесилиw noқatında болған EFPQ тóртмúйешликке сыртлай шеңбер сızıw мумкин екенлигин дәлийллең.

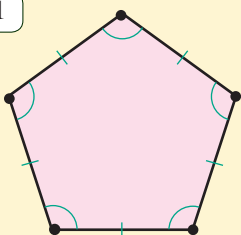




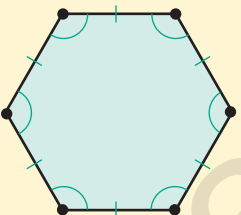
Jedellestirish shartlari

1. Qanday figuralar kópmúyeshlik delinedi?
2. Kópmúyeshlikni múyeshleri, qońsilas tárepleri, diagonallari dep nege aytiladi?
3. Dónes kópmúyeshlik dep qanday kópmúyeshlikke aytiladi?
4. Dónes kópmúyeshlikni ishki múyeshlerini qosindisi haqqında teoremani aytiń.

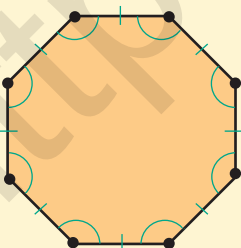
1



duris becmúyeshlik



duris altímúyeshlik



duris segizmúyeshlik

Aniqlama. Barliq tárepleri teń hám barliq múyeshleri teń bolǵan dónes kópmúyeshlik *duris kópmúyeshlik* delinedi.

Teń tárepli úshmúyeshlik, kvadrat duris kópmúyeshlikke misal boladi. 1-súwrette duris bes kópmúyeshlik, altímúyeshlik hám segizmúyeshlikler súwretlengen.

Teorema. Duris n múyeshtiń hár bir múyeshi

$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ ǵa teń.

Dáliytlew. Duris n múyeshtiń múyeshleriniń qosindisi $(n-2) \cdot 180^\circ$ qa teń (8-klass). Demek, onıń hár bir múyeshi

$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$ ǵa teń. **Teorema dáliytlendi.**

Másele. Duris $A_1A_2A_3A_4A_5$ becmúyeshlikte A_1A_3 hám A_1A_4 diagonallari teń ekenligin kórsetiń (2-súwret).

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — duris becmúyeshlik



$$A_1A_3 = A_1A_4$$

Sheshiliwi. Úshmúyeshliklerdiń teńliginiń TMT belgisi boyınsha, $A_1A_2A_3$ hám $A_1A_5A_4$ úshmúyeshlikleri óz ara teń. Haqıyqattan da, duris kópmúyeshlikni tárepleri teń hám múyeshleri teń bolǵanı ushın,

$$A_1A_2 = A_1A_5, A_2A_3 = A_5A_4 \text{ hám } \angle A_1A_2A_3 = \angle A_1A_5A_4.$$

Demek, $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle A_1A_5A_4$. Bunnan

$A_1A_3 = A_1A_4$ ekenligi kelip shıǵadı.

Nátiyje. Durıs becmúyeshliktiń barlıq diagonal-ları óz ara teń.

? Másele hám tapsırmalar

38.1. Durıs bolmağan kópmúyeshliklerge mısallar aytıń hám ne ushın durıs emesligin túsindirıń.

38.2. Tómenдеgi tastıyıqlawlardan durısların tabıń:

- barlıq tárepleri teń bolğan úshmúyeshlik durıs boladı;
- barlıq tárepleri teń tórtmúyeshlik durıs boladı;
- barlıq múyeshleri teń tórtmúyeshlik durıs boladı;
- barlıq múyeshleri teń romb durıs boladı;
- barlıq tárepleri teń tuwrı múyeshlik durıs boladı.

38.3. Eger a) $n=3$; b) $n=5$; d) $n=6$; e) $n=10$; f) $n=18$ bolsa, durıs n - múyeshliktiń múyeshlerin tabıń.

38.4. Durıs n múyeshliktiń sırtqı múyeshi nege teń boladı? Eger a) $n=3$; b) $n=5$; d) $n=6$; e) $n=10$; f) $n=12$ bolsa, durıs n múyeshliktiń sırtqı múyeshin tabıń.

38.5. Durıs n múyeshliktiń hár tóbesinen birewden alıńań sırtqı múyeshleriniń qosındısı 360° qa teń ekenligin dáliyllen.

38.6. Eger durıs kópmúyeshliktiń hár bir múyeshi a) 60° ; b) 90° ; d) 135° ; e) 150° bolsa, bul kópmúyeshliktiń tárepleriniń sanın tabıń.

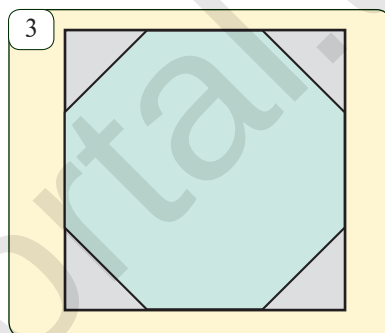
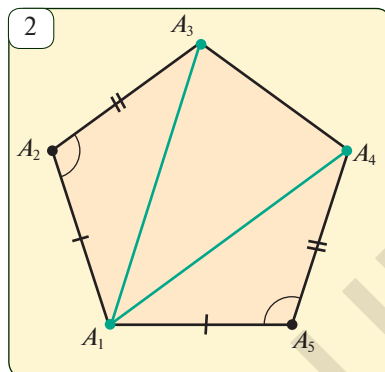
38.7. Durıs $ABCDEF$ altı múyeshligi berilgen.

- AC hám BD diagonallarınıń teńligin dáliyllen.
- ACE — durıs úshmúyeshlik bolatuǵının dáliyllen.
- AD , BE hám CF diagonal-lar óz ara teńligin dáliyllen.

38.8. Tárepi 10 cm bolğan durıs a) becmúyeshliktiń; b) altımúyeshliktiń; d) segizmúyeshliktiń; e) On eki múyeshliktiń; f) On segiz múyeshliktiń kishi diagonalın esaplań.

38.9. Durıs tórtmúyeshliktiń kvadrat bolatuǵının dáliyllen.

38.10*. Kvadrattıń tárepi a ға teń. Onıń táreplerine hár bir tóbesinen baslap diagonalınıń yarımına teń kesindiler qoyıldı. Nátiyjede 3-súwrette súwretlen-gen segizmúyeshlik payda boldı. Onıń túrin anıqlań hám maydanın tabıń.



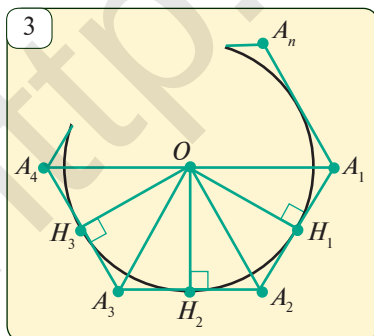
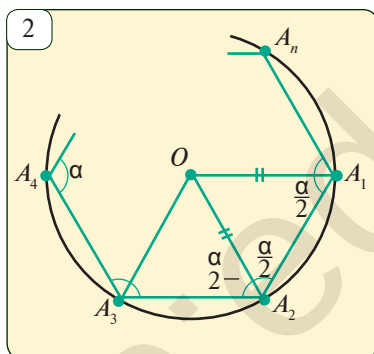
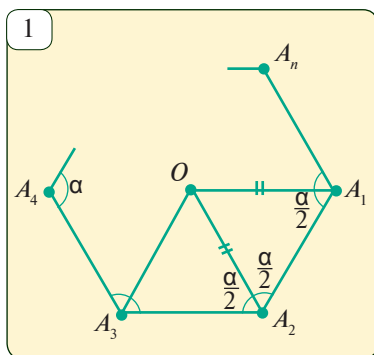


Jedellestiriwshi shınıǵıw

1. Sheñberge ishley sızılǵan kópmüeshlik dep, qanday kópmüeshlikke ayıladı?
2. Sheñberge sırtlay sızılǵan kópmüeshlik dep, qanday kópmüeshlikke ayıladı?
3. Qálegen kópmüeshlik sheñberge ishley (sırtlay) sızılǵan bolıwı múmkin be?



Teorema. *Hár qanday durıs kópmüeshlikke ishley sheñber de, sırtlay sheñber de sızıw múmkin.*



Dáliytlew. Aytayıq, $A_1A_2...A_n$ — durıs kópmüeshlik, O — A_1 hám A_2 müeshleri bissektisalarınıń kesilisiw noqatı bolsın. Bul durıs kópmüeshliktiń müeshin a menen belgileyik.

1. $OA_1=OA_2=...=OA_n$ ekenligin dáliytleymiz (*1-súwret*). Müyeshtiń bissektisasınıń táriyplemesi boyınsha,

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Demek, A_1OA_2 — teń qaptallı úshmüeshlik. Bunun, $OA_1=OA_2$ kelip shıǵadı. $\triangle A_1A_2O$ hám $\triangle A_3A_2O$ úshmüeshliklerdiń teńliginiń TMT belgisi boyınsha teń, sebebi $A_1A_2=A_3A_2$, A_2O — tárepi ulıwma hám de

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{\alpha}{2}.$$

Sonıń ushın $OA_3=OA_1$. Dál usınday jol tutıp, $OA_4=OA_2$, $OA_5=OA_3$ hám t.b. teńlikleri orınlı bolatıǵın kórsetiledi.

Solay etip, $OA_1=OA_2=...=OA_n$, orayı O hám radiusı OA_1 bolǵan sheñber kópmüeshlikke sırtlay sızılǵan sheñberden ibarat boladı (2-súwret).

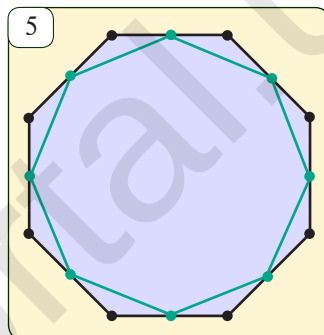
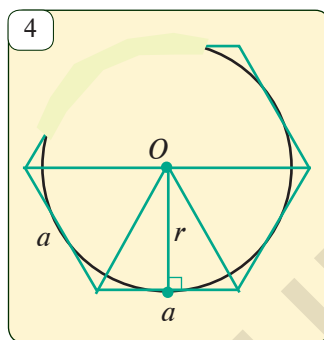
2. Joqarıda ayılǵanlar boyınsha teń qaptallı A_1OA_2 , A_2OA_3 , ... A_nOA_1 úshmüeshlikleri teń. Sonıń ushın, bul úshmüeshliklerdiń O tóbesinen túsirilgen biyiklikleri de teń boladı (3-súwret):

$$OH_1=OH_2=...=OH_n.$$

Demek, O orayına iye hám radiusı OH_1 kesindige teń bolǵan sheñber kópmüeshliktiń barlıq táreplerine urınadı. Yaǵnıy, bul sheñber kópmüeshlikke ishley sızılǵan sheñber boladı. **Teorema dáliytlendi.**

Nátiyje. *Durıs kópmüeshlikke ishley sızılǵan hám sırtlay sızılǵan sheñberlerdiń orayları bir noqatta boladı.*

Bul noqat duris kópmúyeshliktiń *orayı* delinedi. Kópmúyeshliktiń orayı n onıń eki qońsılas tóbeleri menen tutastiriwshı nurlardan ibarat múyesh (1-súwrettegi A_1OA_2 , A_2OA_3 ... múyeshler) onıń *oraylıq múyeshi* delinedi. Duris kópmúyeshliktiń orayınan tárepine túsirilgen perpendikulyar (3-súwrettegi OH_1 , OH_2 , ... kesindiler) onıń *apofeması* delinedi.



Másele. Másele. Eger duris n múyeshliktiń tárepi a , oǵan ishley sızılǵan sheńberdiń radiusı r bolsa, onıń S maydanı $S = \frac{1}{2} nar$ formulası menen esaplaw múmkin ekenligin dáliylleń.(4-súwret).

Sheshiliwi. Kópmúyeshliktiń yarım perimetri $p = \frac{1}{2} na$ bolǵanı ushın (sheńberge sırtlay sızılǵan kópmuyeshliktiń maydanın $S = pr$ formulası boyınsha, $S = \frac{1}{2} nar$ boladı.

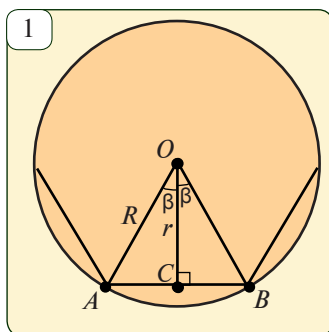
? Másele hám tapsırmalar

- 39.1. Maydanı 36 cm bolǵan kvadratqa ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların tabıń.
- 39.2. Perimetri 18 cm bolǵan duris úshmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların esaplań.
- 39.3. Duris altı múyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń radiusı onıń tárepine teń bolatuǵının dáliylleń.
- 39.4. Duris kópmúyeshliktiń tárepleriniń ortaları jáne duris kópmúyeshlik payda etetuǵının dáliylleń (5-súwret).
- 39.5. Duris kópmúyeshliktiń qálegen eki tárepiniń orta perpendikulyarları yaki bir noqatta kesilisiwi yaki bir tuwrıda jatatuǵının dáliylleń.
- 39.6*. Duris kópmúyeshliktiń qálegen eki tárepiniń orta perpendikulyarları yaki bir noqatta kesilisiwi yaki bir tuwrıda jatatuǵının dáliylleń.
- 39.7. Sheńberge ishley sızılǵan duris kópmúyeshliktiń bir tárepi sheńberden a) 60° ; b) 30° ; d) 36° ; e) 18° ; f) 72° qa teń doǵa ajratadı. Kópmúyeshliktiń neshe tárepi bar?
- 39.8. Qaǵazdan altı teńdey duris úshmúyeshlik qırqıp alıń. Olardan paydalanıp, duris altımúyeshlik jasań. Tárepleri teń bolǵan duris altımúyeshliktiń hám úshmúyeshliktiń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

Jedellestiriwshi shınıǵıw

Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń súyir múyeshiniń a) sinusı; b) kosinusı; c) tangensi dep nege ayıladı?

Tárepi a_n ge teń bolǵan durıs n múyeshke sırtlay sızılǵan sheńberdiń R radiusı hám ishley sızılǵan sheńberdiń r radiusın esaplaw ushın tuwrı múyeshli ACO úshmúyeshliginen paydalanamız. Bul jerde O — kóp múyeshliktiń AB tárepiniń ortası (I -súwret). Onda,



$$\beta = \angle AOC = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$R = OA = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{\frac{a_n}{2}}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}; \quad r = OC = \frac{AC}{\tan \beta} = \frac{\frac{a_n}{2}}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = OA \cdot \cos \beta = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Bul formulalardan paydalanıp, ayırım durıs kóp múyeshlikler tárepin, ishkihám sırtqı sızılǵan sheńberler radiuslari arasındagı baylanıslardı tabamız.

1. Durıs úshmúyeshlik ushın ($n=3$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ; \quad \frac{R \cdot \frac{a_3}{2}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a_3}{\sqrt{3}}; \quad \frac{a_3}{2 \tan 60^\circ} = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}; \quad R = 2r.$$

2. Kvadrat ushın ($n=4$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ; \quad R = \frac{a_4}{2 \sin 45^\circ} = \frac{a_4}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a_4}{2 \tan 45^\circ} = \frac{a_4}{2}; \quad R = r\sqrt{2}.$$

3. Durıs altımúyeshlik ushın ($n=6$):

$$\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ; \quad R = \frac{a_6}{2 \sin 30^\circ} = a_6; \quad r = \frac{a_6}{2 \tan 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}a_6}{2}; \quad R = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

Másele. Durıs n múyeshliktiń a_n tárepin usı kóp múyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńberdiń R radiusı hám ishley sızılǵan sheńberdiń r radiusı arqalı ańlatıń.

Sheshiliwi. $R = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$ hám $r = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$ formulalardan $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ hám $a_n = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$

formulalardı payda qılamız. Dara jaǵdayda, $n=3$ bolsa, $a_3 = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$.

? Másele hám tapsırmalar

40.1. Tárepi 15 cm bolǵan a) durıs úshmúyeshlikke; b) durıs tórtmúyeshlikke; d) durıs altımúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan sheńberlerdiń radiusların esaplań.

40.2. 2-súwrettiń oń tárepinde R radiusli sheńberge ishley sızılǵan kvadrat, durıs úshmúyeshlik hám durıs altımúyeshlik súwretlengen. Dápterinińge berilgen kestelerdi kóshirip, onıń bos keteklerin toltırın (a_n — kópmúyeshliktiń tárepi, P — kópmúyeshliktiń perimetri, S — onıń maydanı, r — oǵan ishley sızılǵan sheńber radiusı).

40.3. Radiusı 8 cm bolǵan sheńberge ishley sızılǵan durıs on eki múyeshliktiń bir tóbesinen shıqqan diagonalların tabıń.

40.4. Sheńberge ishley sızılǵan durıs úshmúyeshliktiń perimetri 24 cm. Bul sheńberge ishley sızılǵan kvadrattıń tárepin tabıń.

40.5. Cilindr formasındaǵı aǵashtan ultaniniń tárepi 20 cm bolǵan: a) kvadrat; b) durıs altımúyeshlik bolǵan prizma túrindegi baǵana tayarlaw kerek. Aǵashtıń

2

a)

	R	r	a_4	P	S
1.			6		
2.		2			
3.	4				
4.				28	
5.					16

b)

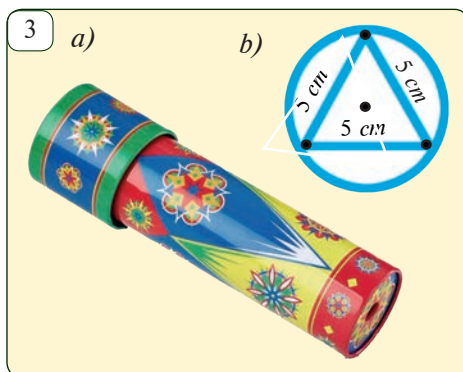
	R	r	a_3	P	S
1.	3				
2.					10
3.		2			
4.			5		
5.				6	

c)

	R	r	a_6	P	S
1.	4				
2.		5			
3.			6		
4.				42	
5.					$24\sqrt{3}$

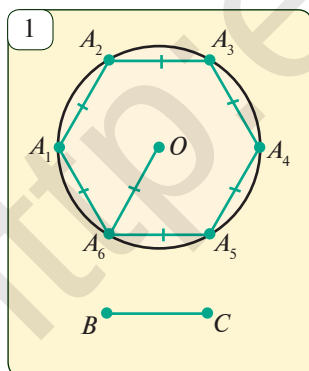
kese-kesiminiń diametri keminde qansha bolıwı zárúr?

40.6.3 a-súwrette súwretlengen, túrlishe naǵısların tamasha qılsa bolatuǵın “Kaley-doskop” dep atalǵan oyınshıq sizge tanıs bolsa kerek. Oyınshıq truba hám ayna bóleklerinen ibarat. 3 b-súwrette onıń kese-kesimi súwretlengen hám ólshemleri berilgen. Kaleydoskoptıń kese-kesiminiń radiusın tabıń.



I. Testler

1. Tóمندegi kópmúyeshliklerdiń qaysı birinde ishley sıızılǵan sheńber joq?
A) Úshmúyeshlikte; D) Kvadrattan ózgeshe rombda;
B) Kvadratta; E) Rombdan parıqlı tuwrı tórtmúyeshlikte.
2. Tóمندegi kópmúyeshliklerdiń qaysı birinde sırtlay sıızılǵan sheńber joq?
A) Úshmúyeshlikte; D) Kvadrattan ózgeshe rombda;
B) Kvadratta; E) Rombdan parıqlı tuwrı tórtmúyeshlikte.
3. Sheńberge ishley sıızılǵan barlıq $ABCD$ tórt múyeshlikler ushın nadurıs teńlikti tabıń.
A) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; D) $AB + CD = BC + AD$;
B) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; E) $\angle B + \angle D = 180^\circ$.
4. Sheńberge sırtlay sıızılǵan barlıq $ABCD$ tórt múyeshlikler ushın nadurıs teńlikti tabıń.
A) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$; D) $AB + CD = BC + AD$;
B) $\angle A + \angle C = 180^\circ$; E) $AB - BC = AD - CD$.
5. Tárepleri 5 cm hám 12 cm bolǵan tuwrı múyeshli tórtmúyeshlikke sırtlay sıızılǵan sheńber radiusın tabıń.
A) 6 cm; B) 6,5 cm; D) 7 cm; E) 7,5 cm.
6. Durıs 24 múyeshliktiń ishki múyeshin tabıń.
A) 120° ; B) 135° ; D) 150° ; E) 165° .
7. Hár bir sırtqı mıyeshi 60° bolǵan durıs kópmúyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı tabıń.
A) 540° ; B) 360° ; D) 90° ; E) 720° .

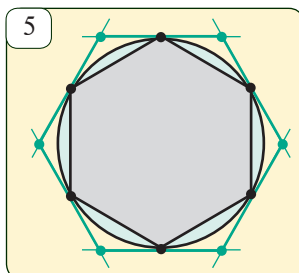
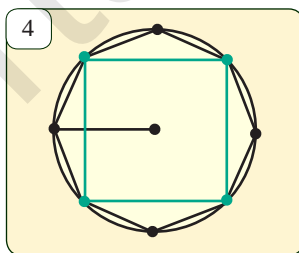
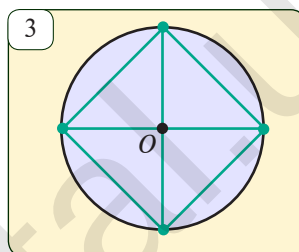
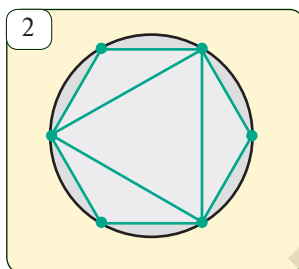


II. Jasawǵa tiysli máseleler.

1. Tárepi berilgen kesindigeteń bolǵan durıs altımúyeshlik jasań. Bunda durıs altımúyeshlikke sırtlay sıızılǵan sheńberdiń radiusı altımúyeshliktiń tárepine teń ekenliginen hám 1-súwretten paydalanıń.
2. 2-4-súwretlerdegi maǵlıwmatlardan paydalanıp, berilgen sheńberge ishley sıızılǵan a) durıs úshmúyeshlik b) kvadrat d) durıs segizmúyeshlik jasań.
3. 5-súwretten paydalanıp, berilgen sheńberge sırtlay sıızılǵan durıs altımúyeshlik jasań (5-súwrettegi sheńberge sırtlay sıızılǵan altımúyeshlik tárepleri usı sheńberge ishki sıızılǵan durıs altımúyeshlik ushlarına ótkizilgen urınbalarda jatadı).

III. Esaplawğa tiyisli máseleler.

1. Durıs úshmúyeshlik, kvadrat hám durıs altımúyeshliklerdiń tárepleri bir-birine teń. Ol ardiń maydanlariniń qatnasın tabıń.
2. Bir sheńberge ishley sızılğan durıs altımúyeshlik hám sırtlay sızılğan altımúyeshliktiń maydanlariniń qatnasın tabıń.
3. Durıs a) altımúyeshlik; b) segizmúyeshlik; c) On eki múyeshliktiń parallel tárepleri arasındagı aralıq 10 cm ge teń. Kópmúyeshliktiń tárepini tabıń.
4. Radiusı R bolğan sheńberge $A_1A_2\dots A_8$ durıs segizmúyeshlik ishley sızılğan. $A_3A_4A_7A_8$ tórtmúyeshliginiń tuwrımúyeshlik ekenligin dáliylleń hám onıń maydanın tabıń.
5. Sheńberge sırtlay sızılğan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasi sol sheńberge urınıw noqatında 4 cm hám 6 cm uzınlıqtağı kesindilerge ajıraladı. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
6. Durıs onmúyeshliktiń bir tóbesinen shıqqan eń úlken hám eń kishi diagonalları arasındagı múyeshti tabıń.



IV. Ózińizdi sınap kóriń. (baqlaw jumısı úlgisi).

1. Katetleri 10 cm hám 24 cm bolğan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishley sızılğan hám sırtlay sızılğan sheńberdiń radiusın tabıń.
2. Radiusı 5 cm bolğan sheńberge sırtlay sızılğan rombnıń bir múyeshi 150° qa teń. Rombniń a) perimetrin; b) diagonalların; d) maydanın tabıń.
3. Tárepleri 4 cm bolğan durıs altımúyeshliktiń bir ushınan shıqqan diagonalların tabıń.
4. (Qosımsha). Radiusı 3 cm bolğan sheńberge ishley sızılğan durıs altımúyeshlik hám durıs úshmúyeshlikler maydanlariniń ayırmasın tabıń.



Tariyx betlerinen.

Qalegen durıs kópmúyeshlikti de cirkul hám sızgısh járdeminde jasawğa bola bermeydi eken. Bunı 1801-jılı nemis matematigi Karl Gauss (1777—1855) algebralıq usılda dáliyllegen. Ol eger n sanınıń $2^m p_1 p_2 \dots p_n$ jayılasında $p_1, p_2, \dots, p_n$ túrlı ápiwayı sanlar $2^{2^k} + 1$ kórinisinde bolsa ǵana durıs n -múyeshti cirkul hám sızgısh járdeminde jasaw múmkin ekenligin dáliylledi. Buljerde m hám k teris bolmağan pútin sanlar.



Jedellestirish shirishi

1. Ádette truba bóleginiń kese-kesimi sheńberden ibarat boladı. Jıńışke jipti bir ushınan baslap, trubagabir márte orań. Bir márte orawǵaketken jip bólegi trubanıń kese-kesimi, yaǵnıy sheńberdın uzınlıǵı boladı. Onı súwrette kórsetilgendeı etip sıǵısh járdeminde ólsheń.
2. Joqaridaǵı usıl menen trubanıń kese-kesiminiń diametrin anıqlań.
3. Anıqlanǵan sheńber uzınlıǵın onıń diametrine qatnasın esaplań.
4. Joqarida keltirilgen ólshew hám esaplaw jáne bir neshe túrli ólsheздеги truba bólekleri ushın daorınlap, sheńber uzınlıǵınıń onıń diametrine qatnasların tabıń.
5. Tájiriye nátiyjesine kóre sheńber uzınlıǵınıń onıń diametrine qatnası haqqında qanday juwmaq shıǵarıw múmkin?

Teorema. *Sheńber uzınlıǵınıń sheńber diametrine qatnası sheńberdın radiusına baylanisli emes, yaǵnıy hár qanday sheńber ushın bul qatnas bir qıylı san boladı.*

Dáliyilew. Qálegen eki sheńber alamız. Olardıń radiusları R_1 hám R_2 , uzınlıqları bolsa sáykes túrde C_1 hám C_2 bolsın. $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ teńligin dáliyilewimiz kerek. Hár eki sheńberge ishley durıs n -múyeshti sızamız. Olardıń perimetrlerin sáykes túrde P_1 hám P_2 dep belgileyik. Onda,

$$P_1 = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P_2 = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ bolǵanı ushın } \frac{P_1}{P_2} = \frac{2R_1}{2R_2} (*) \text{ boladı.}$$

Bul teńlik qálegen n ushın durıs boladı. n sanı úlkeyip barsa, berilgen sheńberge ishley sızilǵan n -múyeshliktiń perimetri P_1 usı sheńber uzınlıǵı C_1 ge jaqınlasıp baradı. Sol sıyaqlı P_2 hám C_2 ge jaqınlasıp baradı.

Sonıń ushın $\frac{P_1}{P_2}$ qatnası $\frac{C_1}{C_2}$ qatnasına teń boladı (bunıń tolıq dáilyli matematikanıń joqarı basqışlarında úyreniledi). Solay etip, (*) teńliginen $\frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$, bunnan bolsa $\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$ teńligi kelip shıǵadı. **Teorema dáliyillendi.**

Sheńber uzunlıgın onıń diametrine qatnası grek álipbesiniń π háribi menen belgilew qabil etilgen (“*pi*” dep oqıladı). Sheńber uzunlıgın onıń diametrine qatnasın “ π ” háribi menen belgilewdi ullı matematik Leonard Eyler (1707—1783) ilimge kiritken. Grekshede “sheńber” sózi usı hárıp penen baslanadı. π irrasional san bolıp, ámeliyatta onıń $\pi \approx 3,1416$ ğa teń bolğan juwıq mánisinen P aydalanıladı.

Solay etip, $\frac{C}{2R} = \pi$. Bul teńlikten radiusı R ge teń sheńberdiń uzunlıgı ushın $C = 2\pi R$ formulasın payda etemiz.

Мәселе. Tárepi 6 cm bolğan durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńberdiń uzunlıgın tabıń.

Sheshiliwi. Durıs úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńberdiń radiusın tabıw formulası $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ boyınsha, $R = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\text{ (cm)}$. Endi, sheńber uzunlıgın tabıw formulasınan

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3}\text{ (cm)}. \quad \text{Juwabı: } 4\pi\sqrt{3}\text{ cm.}$$

? Мәселе hám tapsırmalar

42.1. Qanday san π menen belgilenedi? Radiusı R ge teń sheńberdiń uzunlıgın tabıw formulasınan paydalanıp kesteni toltırıń ($\pi \approx 3,14$ dep esaplań).

C			82	18π		6,28	
R	4	3			0,7		101,5

42.2. Eger sheńber radiusı a) 3 márte artsa; b) 3 cm ge artsa; d) 3 márte kemise; e) 3 cm ge kemise, sheńber uzunlıgı qanshaǵa ózgeredi?

42.3. Eger jer sharı ekvatorınıń 40 millionnan bir bólegi 1 m ge teń bolsa, Jer sharınıń radiusın tabıń.

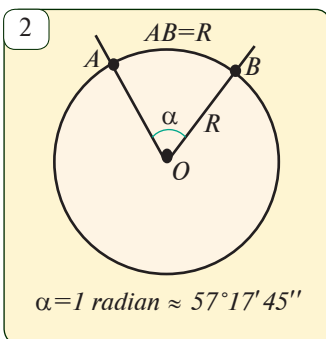
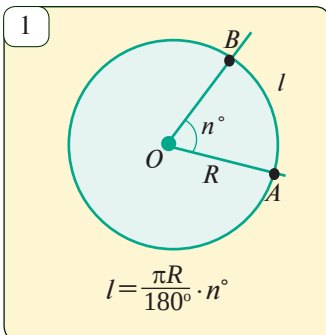
42.4. a) Tárepi a ğa teń bolğan durıs úshmúyeshlikke; b) katetleri a hám b bolğan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke; c) ultanı a hám qaptal tárepi b bolğan teńqaptallı úshmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńberdiń uzunlıgın tabıń.

42.5. a) Tárepi a ğa teń kvadratqa; b) gipotenuzası c ğa teń bolğan teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke; c) gipotenuzası c , súyir múyeshi α bolğan tuwrı múyeshli úshmúyeshlikke ishle sızılğan sheńberdiń uzunlıgın tabıń.

42.6. Teplovoz 1413 m jol júrdi. Bunda onın dóńgelegi 300 márte aylandı. Teplovoz dóńgeleginiń diametrin tabıń.

42.7. Jeńil avtomobil dóńgelegi sheńberiniń radiusı 24 cm ge teń. Avtomobil 100 km jol júrse, onıń dóńgelegi neshe márte aylanadı (2-súwret)





1. n° li oraylıq múyesh keltirelgen doğanıń uzınlıǵı.

Aytayıq, radiusı R ge teń bolǵan sheńberde n° li AOB oraylıq múyesh berilgen bolsın (1-súwret). Bunda sheńberdiń AOB oraylıq múyeshine tirelgen AB doğasınıń gradus ólshemin n° yaki n° li doğa dep júritiliwin esletip ótemiz.

Radiusı R ge teń bolǵan sheńber, yaǵnıy 360° li doğa uzınlıǵı $2\pi R$ ge teń bolǵanı ushın, 1° li doğa

uzınlıǵı $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$ ǵa teń boladı.

Onda, n° li doğa uzınlıǵı $l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ formula

menen anıqlanadı (1-súwret).

2. Múyeshtiń radian ólshemi.

Múyeshtiń gradus ólshemi menen bir qatarda onıń radian ólshemi de qollanıladı.

Sheńber doğası uzınlıǵı nıń radiusqa qatnasın joqarıdaǵı formulaǵa tiykarlanıp: $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$ ga teń.

Demek, sheńber doğası uzınlıǵınıń radiusına qatnası tek usı doğaǵa tirelgen oraylıq múyeshtiń shamasına baylanıslı eken. Bul qásiyetten paydalanıp, múyeshtiń radian ólshemi sıpatında dál usı qatnası alamız:

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ.$$

Ádette, radian sózi jazılmaydı. Máselen: 5 radian ornına 5 dep jazıladı. Bir radian $\frac{180^\circ}{\pi}$ gradusqa teń: $1 \text{ radian} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Múyeshtiń gradus ólsheminen radian ólshemine ótiw ushın

$$\alpha = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$$

formuladan paydalanıladı.

Solay etip, n° li múyeshtiń radian ólshemin tabıw ushın onıń gradus ólshemin $\frac{\pi}{180^\circ}$ qa kóbeytiw jetkilikli eken. Jeke halda, 180° múyeshtiń radian ólshemi π ge teń, 90° li, yaǵnıy tuwrımúyeshtiń radian ólshemi $\frac{\pi}{2}$ ge teń boladı.

α radianga teń oraylıq múyeshke sáykes doğasınıń uzınlıǵı $l = \alpha R$ formula menen esaplanadı.

Мәселе. Eki мүйешке mas rawishte 30° hám 45° bolǵan úshmüyeshliktiń mүйeshleriniń radian ólshemlerin tabıń.

Sheshiliwi. Úshmüyeshliktiń 30° lı mүйeshiniń radian ólshemi $30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$, 45° li mүйeshtiń radian ólshemi $45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. Úshmüyeshliktiń ishki mүйeshleriniń qosındısı 180° ga, yaǵnıy π ga teń ekenligi haqqındaǵı teoremaǵa tiykarlanıp, úshmüyeshliktiń úshinshi mүйeshiniń radian ólshemin tabamız.

$$\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$$

Juwabı: $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$ hám $\frac{7\pi}{12}$.

? Мәселе hám tapsırmalar

43.1. Radiusı 6 cm bolǵan sheńberdiń gradus ólshemi a) 30° ; b) 45° ; d) 90° ; 120° bolǵan doǵa uzınlıǵın tabıń.

43.2. a) 40° ; b) 60° ; d) 75° qa teń mүйeshtiń radian ólshemin tabıń.

43.3. a) 1,2; b) $\frac{2\pi}{3}$; c) $\frac{5\pi}{6}$ radianga teń mүйeshtiń gradus ólshemin tabıń.

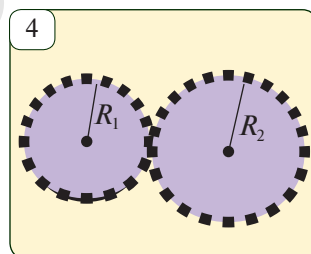
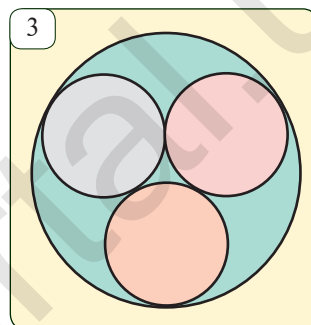
43.4. Eger sheńberdiń radiusı 5 cm bolsa, Onıń a) $\frac{\pi}{8}$; b) $\frac{2\pi}{5}$; c) $\frac{3\pi}{4}$ radianga teń bolǵan doǵa uzınlıǵın tabıń.

43.5. Radiusı 12 cm bolǵan sheńberge ABC úshmüyeshligi ishley sızılǵan. Eger a) $\angle A = 30^\circ$; b) $\angle A = 120^\circ$ bolsa, A noqatın óz ishine almaǵan BC doǵa uzınlıǵın tabıń.

43.6. Sheńberdiń teń xordaları sheńberden teń doǵalar ajratatuǵının dáliyllen.

43.7*. Eki sheńber bir-biriniń orayınan ótedi. Bul sheńberlerdiń ulıwma xordası hár eki sheńberden ajratqan doǵalar uzınlıqlarınıń qatnasın tabıń.

43.8*. Radiusları teń bolǵan úsh sheńberler bir-birine sırttan hám radiusı R ge teń bolǵan sheńberge ishley urınadı (3-súwret): a) sheńberlerdiń radiusın tabıń; b) boyalǵan figuranı shegaralawshı doǵalardıń uzınlıqlarınıń qosındısı tabıń.

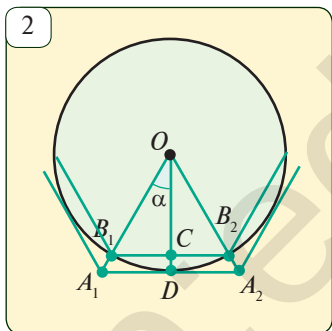
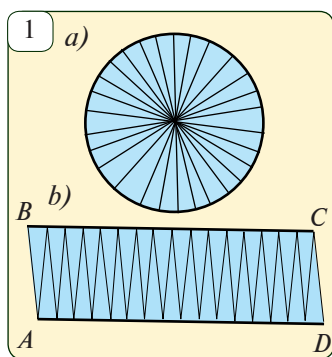


⌚ Qızıqarlı мәселе

4-súwrette súwretlengen eki tisli dóńgelekler bir-birine “tisletilgen”. Dóńgelekler radiusı R_1 hám R_2 . Birinshi dóńgelek n márte aylanǵanda ekinshi dóńgelek neshe márte aylanadı?

Aniqlama. Tegislikte berilgan O noqattin角度 berilgan R aralıqtan ulti bolmağan aralıqta jatıwshı bárshe noqatlardan payda bolğan figura *dóńgelek* dep ataladı.

Orayı O noqatında hám radius R ge teń bolğan dóńgelek tegisliktiń O noqatınan R den aspaytuğın aralıqta jatqan barlıq noqatlardan quralğın boladı.



Jedellestiriwshi shınıǵıw

Bir bet qağazğa qalıń sıızıq penen sheńber sıızın hám 1-a súwrette kórsetilgende, onıń bir neshe diametrlerin júrgizip, dóńgeleklerdi teńdey bóleklerge bólin. Soń bul bóleklerdi qıyıp alıń hám 1-b súwrette kórsetilgende etip terip, F figurasın payda etiń. Eger dóńgelek qáleğenshe kóp teńdey bóleklerge bólinip, bul bólekler súwrette kórsetilgen tártipte terilgende, nátiyjede tuwrı múyeshlikke júdá jaqın F figura payda boladı.

a) F figuranı tuwrı múyeshlik formasına júdá jaqın ekenligin esapqa alıp, onıń AB tárepi shama menen nege teń bolatuğının tabıń. (kórsetpe: AB tárepin dóńgelek radiusı menen salıstırıń).

b) F figuranıń BC “tárepi” shama menen nege teń boladı? (Kórsetpe: BC hám AD tárepleri qalıń sıızıq penen sıızılğanına, yağniy sheńber doğalarınan ibarat ekenligine itibar beriń)

d) F figuranıń $ABCD$ tuwrı múyeshlik formasına júdá jaqın ekenligin esapqa alıp, onıń maydanın juwıq esaplań. F figurasınıń maydanı dóńgelek maydanına júdá jaqın ekenligin názerde tutıp, dóńgelek maydanı haqqında juwmaq shıǵarıń.

Teorema. Radiusı R ge teń bolğın dóńgelektiń maydanı πR^2 qa teń.

Dálillew. Radiusı R hám orayı O noqatta bolğın sheńberdi qaraymız. Sheńberge sırtlay sıızılğın $A_1A_2 \dots A_n$ hám ishley sıızılğın $B_1B_2 \dots B_n$ durıs n múyeshlerdiń maydanları saykes túrde a S'_n hám S''_n bolsın (2-súwret).

A_1OA_2 hám B_1OB_2 úshmúyeshliklerdiń maydanların tabamız:

$$S'_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot OD = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot R; \quad S''_{B_1OB_2} = \frac{1}{2} B_1B_2 \cdot OC = \frac{1}{2} B_1B_2 \cdot OB_1 \cos \alpha = \frac{1}{2} B_1B_2 \cdot R \cos \alpha.$$

$$\text{Onda, } S'_n = n \cdot \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot R = \frac{1}{2} P_n R, \quad S''_n = n \cdot \frac{1}{2} B_1B_2 \cdot R \cos \alpha = \frac{1}{2} P_n R \cos \alpha \quad (1)$$

Bul jerde P'_n hám P''_n sáykes türde $A_1A_2...A_n$ hám $B_1B_2...B_n$ kópmúyeshliklerdiń perimetrleri. $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ bolǵanı ushın n niń jeterlishe úlken mánislerinde $\cos \alpha$ nıń mánisi birden, P'_n hám P''_n lerdıń mánisleri sheńber uzınlıǵı yaǵnıy $2\pi R$ den qálegenshe kem parq qıladı. Onda (1) teńlikler boyınsha, n nıń jeterlishe úlken mánislerinde kópmúyeshliklerdiń maydanı πR^2 ǵa jaqınlasıp baradı. Bunnan, dóńgelektiń maydanı ushın $S = \pi R^2$ formula kelip shıǵadı.

Teorema dáliyllendi.

Мәселе. Cirk arenası sheńberiniń uzınlıǵı 41 m. Arena radiusın hám maydanın tabıń.

Sheshiliwi. 1) Sheńberdiń uzınlıǵın tabıw formula-sınan radiusın tabamız (3-súwret):

$$R = \frac{C}{2\pi} \approx \frac{41}{2 \cdot 3,14} \approx 6,53 \text{ (m)}.$$

Dóńgelektiń maydanın esaplaw formulasınan arenanıń maydanın tabamız: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 6,53^2 \approx 133,84 \text{ (m}^2\text{)}.$

Juwabı: $R \approx 6,53 \text{ m}$; $S \approx 133,84 \text{ m}^2$.

? Мәселе hám tapsırmalar

44.1. Dóńgelek maydanın esaplaw formulasın tiykarlań.

44.2. Radiusı R ge teń bolǵan dóńgelektiń S maydanın tabıw formulasınan paydalanıp, kesteni toltırıń ($\pi = 3,14$ dep alıń).

R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3		6,25
S			9		49π		$\sqrt{3}$	

44.3. Eger dóńgelek radiusı a) k márte ósse; b) k márte kemise, dóńgelektiń maydanı qalay ózgeredi?

44.4. Tárepi 5 cm bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan hám sırtlay sızılǵan dóńgeleklerdiń maydanın tabıń.

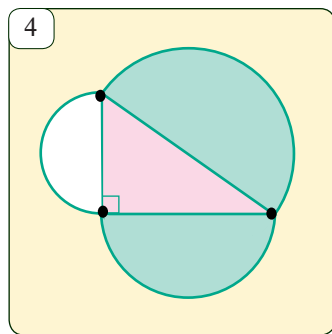
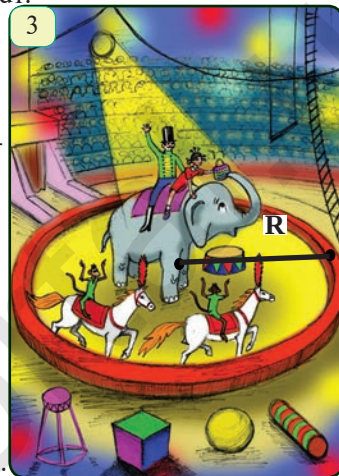
44.5. Tárepi $3\sqrt{3}$ cm bolǵan durıs úshmúyeshlikke ishley hám sırtlay sızılǵan dóńgelekleriniń maydanın tabıń.

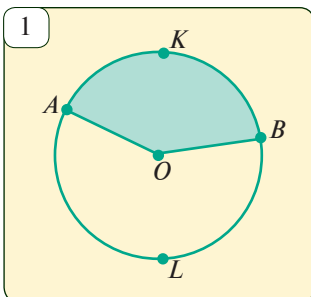
44.6. Radiusı R bolǵan dóńgelekten eń úlken kvadrat qırqıp alındı. Dóńgelektiń qalǵan bóliminiń maydanın tabıń.

44.7. Tárepleri 6 cm hám 7 cm bolǵan tuwrı múyeshlikke sırtlay sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń.

44.8. Tárepi 10 cm hám súyir múyeshi 60° bolǵan rombıǵa ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń.

44.9*. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń táreplerin diametr etip yarım dóńgelekler sızılǵan. Gipotenuzaǵa sızılǵan yarım dóńgelektiń maydanı katetlerge sızılǵan yarım dóńgeleklerdiń maydanlarınıń qosındısına teń bolatuǵının kórsetiń (4-súwret).





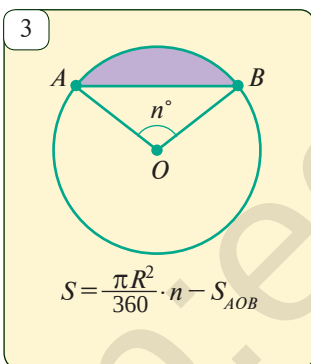
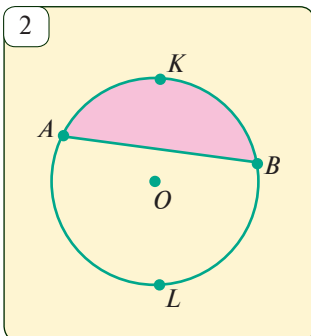
✓ Аңғалма. Дóнҗелектің доғасы һәм бул доға ақирларын дóнҗелек орayı менен тутастырыўшы еки радиусы менен shegarаланған бóлими **сектор** delinedi. Сектордın shegarası болған доға **сектор доғасы** delinedi.

1-сúwrette AKB һәм BLA доғалы еки сектор сúwretlengen (олардан биринshиси boyalған).

Radiusи R ge һәм доғанын градус óлshemi n° qa тең болған сектордın S maydanın tabıw ushın formula keltirip shıǵaramız. Доғасы 1° qa тең сектордın maydanı дóнҗелек (yaǵnıy доғасы 360° qa тең сектор) maydanınıн $\frac{1}{360}$ бóлиmine тең болғанı ushın, доғасы n° болған сектордın maydanı

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \quad \text{yaki} \quad S = \frac{1}{2} R \cdot l$$

formula арqalı tabıladı. Бул jerда l – n° lı сектор доғасынın узınlıǵı.

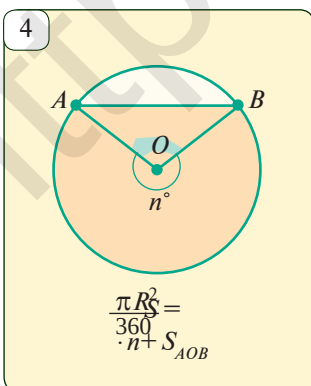


✓ Аңғалма. Дóнҗелектің доғасы һәм бул доға ақирларын тутастырыўшы xordasi менен shegarаланған бóлими **segment** delinedi.

2-сúwrette AKB һәм BLA доғалы еки segment сúwretlengen (олардан биринshиси boyalған). Yarıм дóнҗелеkten parqlı segmenttiн S maydanı

$$S = S_{\text{сектор}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n \pm S_{AOB}$$

boyınsha esaplanadı (3-һәм 4-сúwretlerge qarañ).



✎ Мәселе. Доғанын градус óлshemi 72° болған сектордın maydanı 45π ge тең. Сектор radiusын tabıñ.

Шешилиwi. Сектор maydanın tabıw formulası boyınsha,

$$\frac{\pi R^2}{360} \cdot 72 = 45\pi.$$

$$\text{Bunnan, } R^2 = \frac{45\pi \cdot 360}{72\pi} = 225, \text{ demek, } R = 15.$$

Јuwabı: 15.

? Másele hám tapsírmalar

45.1. Sektor maydanın tabıw formulasın keltirip shıǵarıń.

45.2. Segment maydanın tabıw formulasın keltirip shıǵarıń.

45.3. Doǵanıń gradus ólshewi a) 30° ; b) 45° ; d) 120° ; e) 90° hám radiusı 7 cm bolǵan sektor hám segment maydanların tabıń.

45.4. 5-súwrette tárepi a ǵa teń bolǵan durıs úshmúyeshlik, kvadrat hám durıs altımúyeshlik súwretlengen. Boyalǵan figuralardıń maydanın tabıń. Bunda sektorlardıń radiusları kóp múyeshlik tárepiniń yarımına teń.

45.5. Nishanda radiusları 1, 2, 3, 4 ke teń bolǵan tórt sheńber bar. Eń kishi dóńgelektiń maydanın hám hár bir jaǵdayda maydanın tabıń (6-súwret).

45.6. Radiusı 10 cm ge teń bolǵan dóńgelekke radiusqa teń xorda júrgizilgen. Payda bolǵan segmentlerdiń maydanın esaplań.

45.7. Radiusları 15 cm bolǵan eki dóńgelektiń orayları arasındıǵı aralıq 15 cm. Dóńgeleklerdiń ulıwma bóliminiń maydanın tabıń.

45.8. Radiusı 10 cm bolǵan dóńgelekke ishley hám sırtlay sızılǵan durıs on eki múyeshliklerdiń maydanın esaplań. Nátiyjelerdi dóńgelektiń maydanı menen salıstırıń.



Qızıqarlı másele

7-súwrette súwretlengen gúl túbektiń súwretin úsh tuwrı sızıq penen:

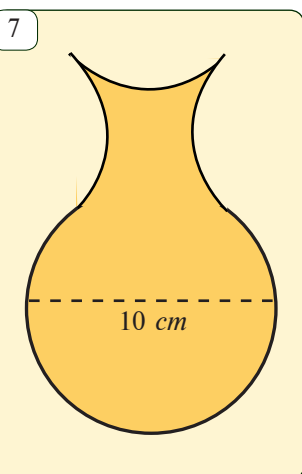
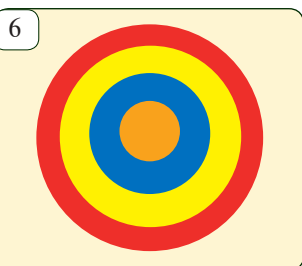
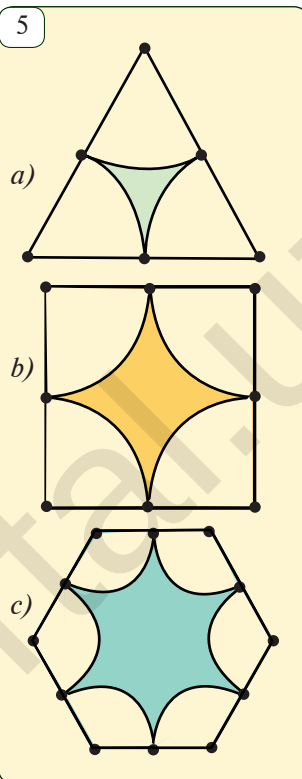
a) sonday tórt bólekke bóliń, nátiyjede olardan tuwrı múyeshlik jıynaw múmkin bolsın;

b) eki tuwrı sızıq penen sonday úsh bólimge bóliń, nátiyjede olardan kvadrat jasaw múmkin bolsın.



Tariyx betlerinen.

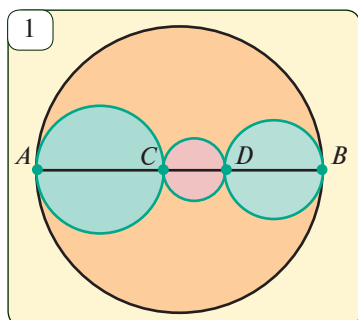
Uzaq waqıtlar dawamında dúnyanıń kóplep matematiklari “dóńgelek kvadraturasi” dep atalǵan tómendegi másele sheshiwge háreket etken: cirkul hám sızǵısh járdeminde maydanı berilgen dóńgelek maydanına teń bolǵan kvadrat jasaw. Tek XIX ásirdiń aqırında bul másele sheshimge iye emesligi dáliyllengen.



46

ÁMELIY SHÍNÍGÍWLAR HÁM OLARDÍN QOLLANÍWLARÍ

1-másele. C hám D noqatları sheńberdín AB diametrin úsh AC , CD hám DB kesindilerge ajratadı. AC , CD hám DB diametrli sheńberlerdín uzınlıqlarınń qosındısı AB diametrli sheńber uzınlığına teń ekenligin dáıylleń (*1-súwret*).



Sheshiliwi. Sheńber uzınlığın tabıw formulasınan paydalanıp, AC , CD hám DB diametrli sheńberlerdín C_1 , C_2 , C_3 uzınlıqlarınń qosındısın tabamız:

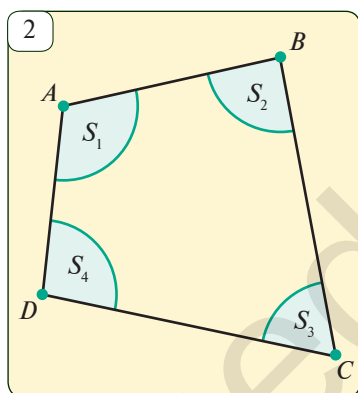
$$C_1 + C_2 + C_3 = AC \cdot \pi + CD \cdot \pi + DB \cdot \pi = \pi(AC + CD + DB).$$

$AC + CD + DB = AB$ hám AB diametrli sheńberdín C uzınlığı $AB \cdot \pi$ ға teń bolğanı ushın

$$C_1 + C_2 + C_3 = C.$$

Usı teńlikti dáıyllew talap etilgen edi.

2-másele. $ABCD$ tórtmúyeshliktiń tóbelerin oray etip birdey radiuslı sektorlar jasalgan (*2-súwret*). Bul sektorlardan qálegen ekewi ulıwma noqatqa iye emes hám barlıgının radiusı 1 cm . Sektorlardın maydanlarınıń qosındısın tabıń.



Sheshiliwi. 1) Tórtmúyeshliktiń A , B , C , D múyeshleri sáykes türde α_1 , α_2 , α_3 , α_4 bolsın. Onda, kóp-múyeshliktiń ishki múyeshleriniń qosındısı haqqındağı teorema boyınsha,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ.$$

2) Sektor maydanın tabıw formulası ($R=1$ cm),

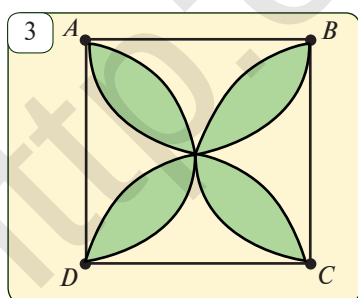
$$S_1 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_1, \quad S_2 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_2, \quad S_3 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_3, \quad S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot \alpha_4. \quad (1)$$

3) (1) teńliklerdín sáykes bóleklerin qosamız.

Onda,

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{\pi}{360^\circ} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\pi}{360^\circ} \cdot 360^\circ = \pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Juwbabı: $\pi \text{ cm}^2$.



? Másele hám tasırmalar

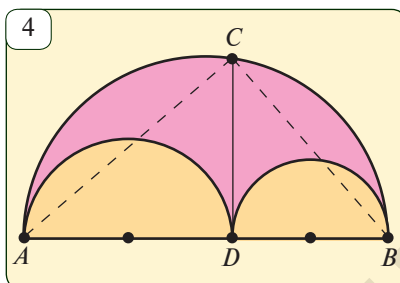
46.1. Perimetri 1 m bolğan kvadrat hám uzınlığı 1 m bolğan sheńber berilgen. Bul sheńber menen shegaralangan dóńgelektiń maydanı menen kvadrattın maydanın salıstırıń.

46.2. Radiusı 8 cm bolğan dóńgelekten 60° lı sektor qırqıp alıńan. Dóńgelektiń qalğan bóleginiń maydanın tabıń.

46.3. Diagonalları 6 cm hám 8 cm bolğan rombıǵa ishley sızılǵan dóńgelektiń maydanın esaplań.

46.4.3-сúwrette boyalıp kórsetilgen figura maydanın tabıń. Onda $ABCD$ —kvadrat, $AB=4$ cm.

46.5*.4-сúwrette “Arximed pıshaǵı” dep atalıwshı figura boyalıp kórsetilgen. Onıń maydanın $\frac{\pi \cdot CD^2}{4}$ formula menen esaplawdı dáliylleń (bunda, $\angle ACB=90^\circ$ hám $CD^2=AD \cdot DB$ ekenliginen paydalanıń).



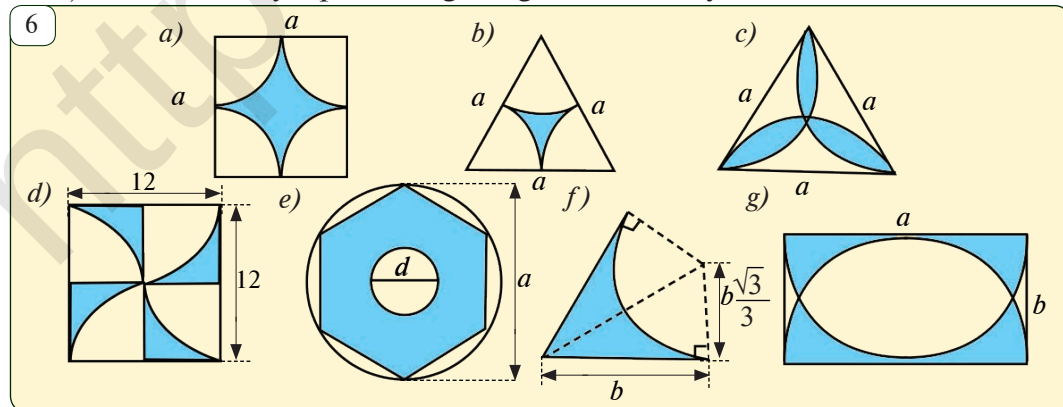
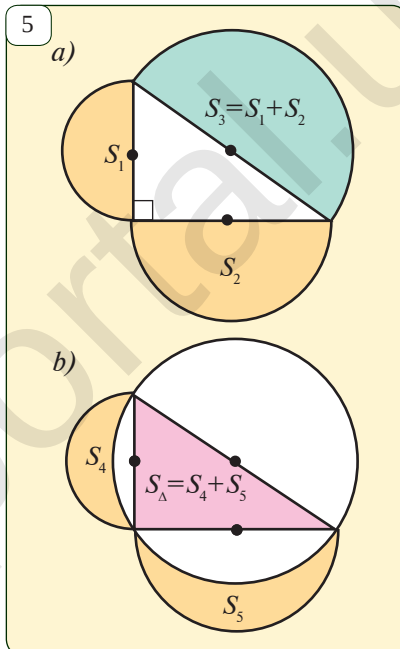
46.6. Agar $AD=6$ cm, $BD=4$ cm bolsa, 4-сúwrette boyalıp kórsetilgen figuranıń maydanın hám perimetri tabıń.

Tariyx betlerinen. Gippokrat ayshaları.

a) Gippokrat aylardıń — eki sheńber doğaları menen shegaralangan hám tómendegi qásiyetke iye bolǵan figuralar boladı. Bul sheńberler (ayshalar) radiusları hám doğalarınń xordaları boyınsha ayshalardı teńdey kvadratlar jasaw múmkin.

Pifagor teoreması qollanılsa, 5-a súwretlen gen gipotenuzaǵa jasalǵan yarım dóńgeleklerdiń maydanlarınń qosındısına teń boladı (121-bet, 44.9-máselege qarań). Sonıń ushın 5.b-súwrettegi aylardıń maydanlarınń qosındısı úshmúyeshliktiń maydanına teń (baqlap kóriń!). Eger súwrettegi úshmúyeshliktiń ornına teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlikti alsaq, payda bolǵan eki aydan hár biriniń maydanı úshmúyeshliktiń maydanınıń yarımına teń boladı. Dóńgelek kvadraturası haqqındaǵı máseleni sheshiwge urınıp, grek matematigi Gippokrat (b.e.sh. V ásir) kópmúyeshlik penen teńdey bir neshe túrli aylardı jasaǵan. Gippokrat aylardıń tolıq kestesi tek XIX-XX ásirlerde dúzilgen.

b) 6-сúwrette boyalıp kórsetilgen figuralardıń maydanın tabıń.



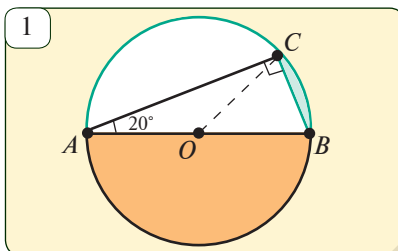
I. Testler

- 45° graduslı müyeshtiñ radian ólshemi nege teñ?
A. 1 ge teñ; B. $\frac{\pi}{2}$ ga teñ; D. $\frac{\pi}{4}$ ga teñ; E. $\sqrt{2}$ ga teñ.
- Radiusi 3 cm bolğan sheñberdiñ gradus ólshemi 150° gradus bolğan oraylıq müyeshke tirelgen doğa uzınlıgın tabıñ.
A. $\frac{5\pi}{2}$ cm; B. $\frac{5\pi}{3}$ cm; D. $\frac{10\pi}{3}$ cm; E. $\frac{5\pi}{4}$ cm.
- Radiusi 6 cm bolğan sheñberde $\frac{5\pi}{4}$ radiangä teñ oraylıq müyesh tirelgen doğanıñ uzınlıgın tabıñ.
A. $\frac{15\pi}{2}$ cm; B. $\frac{5\pi}{6}$ cm; D. $\frac{4\pi}{3}$ cm; E. $\frac{5\pi}{2}$ cm.
- Tärepi 5 cm ge teñ bolğan kvadratqa sırtlay sızılğan sheñberdiñ maydanın tabıñ.
A. $5\sqrt{2}\pi$; B. $\sqrt{2}\pi$; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 5π.
- Diametri 6 ga teñ dóñgelektiñ maydanın tabıñ.
A. 9π; B. 6π; D. $3\sqrt{2}\pi$; E. 12π.
- Doğanıñ gradus ólshemi 150°, radiusi 6 cm bolğan dógelek sektordıñ maydanın tabıñ.
A. 15π cm²; B. 6π cm²; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm²; E. 24π cm².
- Doğanıñ uzınlıgı 12 cm hám radiusi 6 cm bolğan dógelek sektordıñ maydanın tabıñ.
A. 15π cm²; B. 6π cm²; D. $30\sqrt{2}\pi$ cm²; E. 24π cm².
- Doğanıñ gradus ólshemi 120°, radiusi 3 ke teñ bolğan dógelek segmenttiñ maydanın tabıñ.
A. $6\pi - 4\sqrt{3}$; B. $6\pi + 4\sqrt{3}$; D. $3\pi - 4\sqrt{3}$; E. $3\pi + 4\sqrt{3}$.

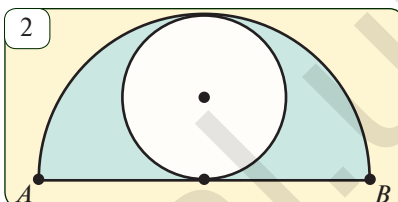
II. Máseleler

- ABCDEFKL durıs segizmüyeshliktiñ tärepi 6 cm. Onıñ AC diagonalın tabıñ.
- Kvadrat radiusi 4 dm bolğan sheñberge ishley sızılğan. Kvadrattıñ qoñsılas tärepleriniñ ortalarınan ótiwshi xordanıñ sheñberden ajıratqan doğalarınıñ uzınlıgın tabıñ.
- Sheñberdiñ 90° li doğasınıñ uzınlıgı 15 cm. Sheñberdiñ radiusın tabıñ.
- Radiusi 20 ga teñ sheñberden uzınlıgı 10 π ge teñ doğa ajıratıladı. Bul doğağa sáykes oraylıq müyeshti tabıñ.
- Eki doğanıñ ulıwma xordası bul dóñgeleklerdi shegaralawshı sheñberlerden 60° lı hám 120° lı doğalar ajıratadı. Dóñgeleklerdiñ maydanlarınıñ qatnasın tabıñ.
- Tärepleri 3, 4, 5 bolğan úshmüyeshlikke ishley hám sırtlay sızılğan dóñgeleklerdiñ maydanların tabıñ.
- Dóñgelek xordası 60° lı doğanı kerip turadı. Bul xorda ajıratqan segmentlerdiñ maydanlarınıñ qatnasın tabıñ.
- Durıs altımüyeshliktiñ maydanınıñ oğan ishley sızılğan dóñgelektiñ maydanına qatnasın tabıñ.

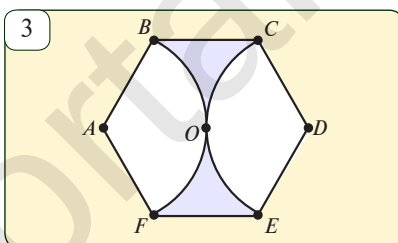
9. Тăрепи a ға тең болған $ABCDEF$ дурис алтımүешлик берилген. Орайы A ноқатı һәм радиусı болған шеһбер уısı алтımүешликти еки бөлекке ајратadı. Һәр бир бөлектің майданın табıń.



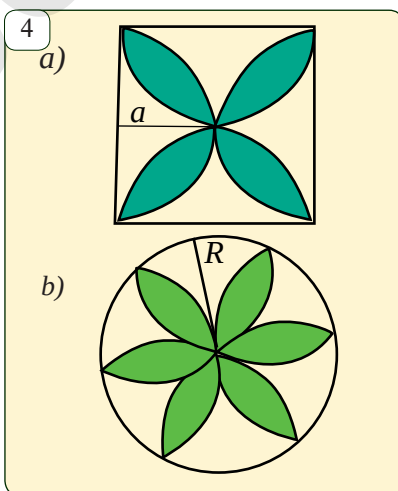
10. Туwrı мүйешли ABC үшмүйешликте $\angle A = 72^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 15$ cm. BC диаметрли шеһбердиң ABC үшмүйешлик ишинде јатқан доғасınıң узınlıǵın табıń.



11. Дóңгелекке ishley сızılған дурис сегизмүйешлик берилген. Онің еки қоңсылас тóбелерине јүргизилген радиуслар дóңгелекти еки секторға ајратadı. Бул секторлардıң майданларınıń қатнасын табıń.



12. Туwrı мүйешли ABC үшмүйешликте $\angle A = 20^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 18$ cm. BC kesindisi үшмүйешликке sırtlay сızılған дóңгелекти еки segmentке ајратadı. Boyap kórsetilgen segment майданın табıń (1-сúwret).



13. Kishi шеһбер ұлкен шеһберге һәм де онің AB диаметрине урınadı. Eger диаметрge урınw ноқатı шеһбер орайı һәм $AB = 4$ bolsa, сúwrette boyalған figuranıң майданın табıń (2-сúwret).

14. Дурис $ABCDEF$ алтımүешликтиң тăрепи 6 ға тең һәм орайı O ноқатında. Орайларı A һәм D ноқатında һәм радиусларı тең болған шеһберлер O ноқатında урınadı. Boyalған област майданın табıń (3-сúwret).

15. Туwrı мүйешли ABC үшмүйешликте $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $CB = 2$. Орайı гипотенузada болған шеһбер үшмүйешлик katетлерине урınadı. Уısı шеһбердиң узınlıǵın табıń.

16. 4-сúwrette boyap korsetilgen figuralardıң майданın табıń. Олар қандай сızılғанlıǵın аңлаń.

III. Ózińizdi sınap kórin (úlgı ushın baqlaw jumısı)

1. Тăреpleri 6 cm болған kvadratqa sırtlay сızılған шеһбер узınlıǵı һәм ishley сızılған дóңгелектиң майданın табıń.
2. Тăрепи 24 cm болған дурис kópmүйешликке ishley сızılған шеһбер радиусı $4\sqrt{3}$ cm ge тең bolsa, oǵan sırtlay сızılған шеһбер радиусın табıń.
3. 240° lı шеһбер доғасınıң узınlıǵı 24 cm bolsa,
 - a) шеһбер радиусın; b) доғası 240° болған сектордıң майданın;
 - d) доғası 240° болған segmenttiң майданın табıń.

Qızıqarli másele

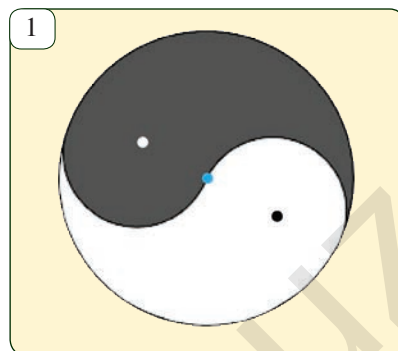
In va Yan

5-súwrette tábiyattağı qarama-qarsılıqlardı sáwlelendiriwshi “In hám Yan” dep atalgan Qıtay belgisi (tamǵası) súwretlengen.

a) In hám Yan belgileri maydanlarınıń teńligin kórsetiń;

b) bir tuwrı sızıq penen bul belgilerdiń hár birin maydanları teń bólgan eki bólekke ajratıń.

d) In hám Yan nıshanları perimetrlerin (olardı qorshap turǵan dóǵalar uzınlıqlarının qosındısı) tabıń.



 **Tariyx betlerinen.** Sheńber uzınlıǵın esaplaw júdá ayyemnen keń kólemdegi mashqala bolǵan. Sheńber uzınlıǵın oǵan ishley sızılǵan kópmúyeshlik perimetrine almasırw usılı keń tarqalǵan.

Orta Aziyalı matematikler de dóńgelekke ishley sızılǵan durıs kópmúyeshliklerdi jasaw, olardıń táreplerin dóńgelektiń radiusı arqalı ańlatıw máseleleri menen shuǵıllanǵan. Abu Rayxan Beruniy “Qonuniy Masudiy” miynetinde dóńgelekke ishley sızılǵan kópmúyeshliklerdiń tárepini anıqlaw menen shuǵıllanıw, ishley sızılǵan becmúyeshlik, altımúyeshlik, jetimúyeshlik, ..., onmúyeshliktiń táreplerin anıqlaw usılın kórsetedi. Bul esaplaw nátiyjesinde ol $\pi \approx 3,14$ mánisine iye boladı.

Ayyemgi Grek hám Mısır qoljazbaları hám basılımlarda π di úshke teń dep alǵan. Bul sol dáwirdiń anıqlıq talabı ushın jeterli bolǵan. Keyinshelik rimliler π ushın 3,12 ni paydalǵan. π sanı ushın Arximed bergen mánis 3,14 bolıp, bul a’meliy máselelerdi sheshiwde júdá qolaylı.

Qıtay matematiklerinde $\pi \approx 3,155 \dots$ hám $22/7$. Hindlerdiń “Sulva Sutra” (“Arqan qaǵıydası”) miynetinde π ushın 3,008 hám 3,1416 ... hám $\sqrt{10} \approx 3,162 \dots$ mánisleri ushıraydı.

Mırza Ulugbektiń “Astronomiya mektebi” talabalarınıń biri Jamshid Gıyasiddin al-Koshiy 1424-jılı jazǵan “Sheńber uzınlıǵı haqqında kitap” atamasındaǵı traktatında sheńberge ishley hám sırtlay sızılǵan durıs kópmúyeshlik tárepleri sanın eki eseleiw jolı menen $3 \cdot 2^{28} = 800\,335\,168$ tárepli durıs kópmúyeshliklerdiń perimetrlerin esaplaw, π ushın $\pi = 3,1\,415\,826\,535\,897\,932$ mánisin payda etken. Bul 16 onlıq sangá shekem anıq boladı.

Biraq al-Koshiydiń miyneti uzaq waqıtqa shekem Evropada belgisiz bolǵan. Evropalılardan Belgiyalı Van Romen 1597-jılı 2^{30} tárepli durıs kópmúyeshlikke Arximed usılın qollanıw, π ushın 17 onlıq sanları anıq bolǵan mánisti tapqan. Gollandiyalı Rudolf Van Seylon (1540—1610) bul anıqlıqtı 35 onlıq sanlarǵa shekem alıp barǵan. Házirgi dáwirde elektron esaplaw mashinaları járdeminde π ushın millionnan artıq onlıq sanları anıq bolǵan mánisleri tabılǵan. Kúndelik esaplawlar ushın 3,14 mánisi, matematikalıq esaplawlar ushın 3,1416 mánisi, ha’tte astronomiya hám kocmonavtika ushın 3,1415826 mánisi jetkilikli boladı.

IV BOB

ÚSHMÚYESHLIK HÁM SHEÑBERDEGI METRIKALÍQ QATNASLAR



Usı bapı úyreniw nátiyjesinde siz tómendegi bilim hám ámeliy kónlikpelerge iye bolasız:

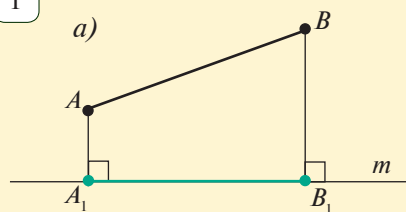
Bilimler:

- ✓ *proporsional kesilispelerdiñ qásiyetlerin biliw;*
- ✓ *tuwrı müyeshli úshmüyeshlikte gipotenuzağa túsirilgen biyikliktiñ qásiyetlerin biliw;*
- ✓ *öz ara kesilisiwshi xordalar kesilispeleri haqqındağı hám sheñberdi kesip ótiwshi tuwrı sızıq kesispeşi haqqındağı qásiyetlerdi biliw.*

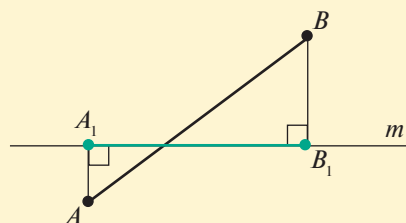
Kónlikpeler:

- ✓ *kesindilerdiñ qatnası hám proporsional kesilispege baylanıslı máselelerdi sheshiw;*
- ✓ *tuwrı müyeshli úshmüyeshlikte gipotenuzağa túsirilgen biyikliktiñ qásiyetlerinen paydalanıp, máseleler sheshe alıw;*
- ✓ *kesindi xordalar kesindilerin hám kesiwshi tuwrı sızıq kesindileriniñ qásiyetlerinen paydalanıp, máseleler sheshiw.*

1



b)



A_1 — A noqatining,
 B_1 — B noqatining,
 A_1B_1 — AB kesindining m tuwrı
 sıziqtağı proekciyalari



Jedellestiriwshi shınıǵıwlar

1. Kesindiler qatnasını neni ańlatadı?
2. Qanday kesindiler proporcional delinedi?
3. Fales teoremasın aytıń.

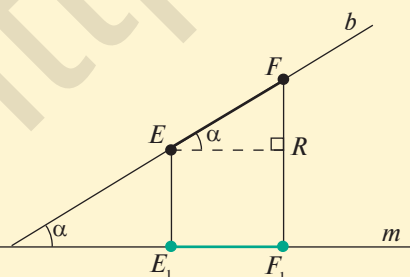
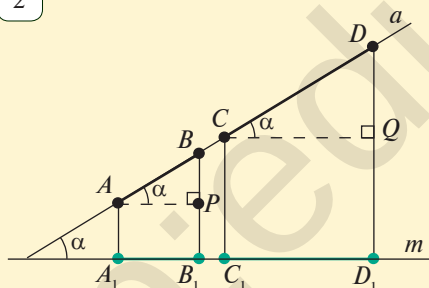
Tegislikte m tuwrı sıziq hâm AB kesindi berilgen bolsın. A hâm B noqatlardan m tuwrı sıziqqa AA_1 hâm BB_1 perpendikullar tusiremis (1-suwret). A_1B_1 kesindi AB kesindining m tuwrı sıziqtağı **proekciyası** (*sayası*) delinedi.

AB kesindining m tuwrı sıziqtağı A_1B_1 proekciyasın qurıw âmeli AB kesindini m tuwrı sıziqqa **proekciyalaw** delinedi.



Teorema. Bir tuwrı sıziqta yâki parallel tuwrı sıziqta jatatuǵın kesindiler berilgen bolsın. Olardıń tap bir tuwrı sıziqqa proekciyalari berilgen kesindilerge proporcional boladı.

2



$a \parallel b$,

A_1B_1 — AB nıń,

C_1D_1 — CD nıń,

E_1F_1 — EF nıń

m tuwrı sıziqtağı
 proekciyalari
 (2-suwret)



$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF} \quad (1)$$

Dâliyllew. a) Eger a hâm b tuwrı sıziqqa parallel bolsa, $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, $EF = E_1F_1$ boladı hâmde (1) teńlikler orınlı ekenligi anıq.

b) Eger de a hâm b tuwrı sıziqlar m tuwrı sıziqqa perpendikulyar bolsa, A_1 hâm B_1 , C_1 hâm D_1 , E_1 hâm F_1 noqatlar ustpe-ust tusedi. Sonıń ushın A_1B_1 , C_1D_1 , E_1F_1 kesindilerdi uzınlıǵı nolge teń boladı hâm (1) teńlikler orınlanadı.

d) Endi basqa jaǵdaydı qaraymız. 2-suwrette suwretlengenindey, tuwrı müyeshli ABP , CDQ , EFR úshmüyeshliklerin jasaymız. Onda $a \parallel b$ bolǵanı ushın, $\angle BAP = \angle DCQ = \angle FER$. Demek,

ABP , CDQ hám EFR tuwrı múyeshli úshmúyeshlikler uqsas.

Bunnan $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{E_1F_1}{EF}$ teńliklerin payda etemiz.

Teorema dáliyllendi.

Мәселе. AB hám CD kesindiler parallel tuwrı sıızıqlarda jatadı. Eger $AB=12$ cm, $CD=15$ cm hám AB kesindiniń bazı bir m tuwrı sıızıқтағы proekciyası 8 cm bolsa, CD kesindiniń sol m tuwrı sıızıқтағы proekciyasın tabıń.

Sheshiw. CD kesindiniń m tuwrı sıızıқтағы proekciyası x bolsın. Onda, dáliylengen teorema hám másele shártinen paydalanıp proporciya dúzemiz:

$$\frac{x}{15} = \frac{8}{12}.$$

Bu teńlikten $x = 10$ bolıwın tabamız.

Juwbı: 10 cm.

Мәселе hám tapsırmalar

48.1. Kesindiniń berilgen tuwrı sıızıқтағы proekciyası degen ne?

48.2. Bir tuwrı sıızıқта yáki parallel tuwrı sıızıқта jatqan kesindilerdiń dál basqa bir tuwrı sıızıqqa proekciyaları berilgen kesindilerge proporcional ekenligin dáliylleń.

48.3. a hám b tuwrı sıızıqlar arasındаğı muyesh 45° ға teń. a tuwrı sıızıқта uzınlıǵı 10 cm bolgan AB kesindi alınǵan. AB kesindiniń b tuwrı sıızıқтағы proekciyasın tabıń.

48.4. AB kesindiniń ushları l tuwrı sıızıqtan 9 cm hám 14 cm uzaqlıqta jatadı. Eger AB kesindi l tuwrı sıızıqtı kesip ótpese hám $AB = 13$ cm bolsa, AB kesindiniń l tuwrı sıızıқтағы proekciyasın tabıń.

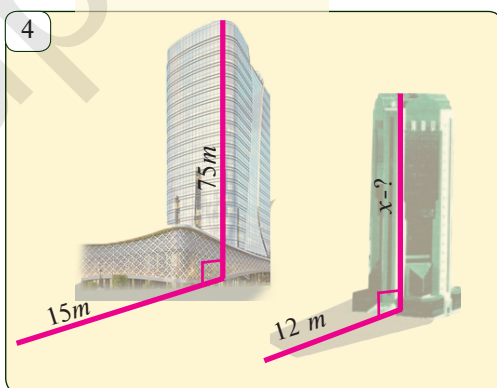
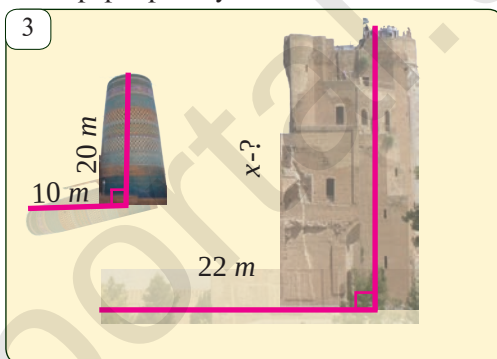
48.5. 3- hám 4-suwretlerdegi maǵlıwmatlar tiykarında imaratlardıń biyikliklerin tabıń.

48.6. Tuwrı sıızıq hám oǵan parallel bolmaǵan kesindi sıızıń. Kesindiniń tuwrı sıızıқтағы proekciyasın jasań.

48.7. Koordinatalar tegisliginde $A(2;3)$ hám $B(3;-4)$ noqatlar belgilengen. AB kesindiniń koordinata kósherlerindeki proekciyalarınıń uzınlıqların tabıń.

48.8. a hám b tuwrı sıızıqlar arasındаğı muyesh α ekenligi malim. a tuwrı sıızıқта AB kesindi alınǵan. AB kesindiniń b tuwrı sıızıқтағы proekciyasın tabıń.

48.9*. AB hám CD kesindilerdiń l tuwrı sıızıқтағы proekciyaları óz ara teń. AB hám CD kesindilerdiń uzınlıqları haqqında ne aytıw mumkin. Mısallar keltiriń.



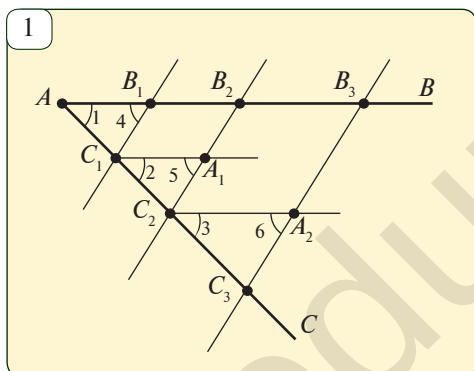
Fales teoremasının ulıwmalastırılğanınan ibarat bolğan áhmiyetli qásiyettin dálıylleymiz.

Teorema. *Múyeshtiń hár eki tárepin kesip ótken parallel tuwrı sıızıqlar onıń táreplerinen proporcional kesindiler ajıratadı.*

$\angle BAC, B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ (1-súwret)

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$$

Dáliyl. C_1 hám C_2 noqatlardan AB ға parallel C_1A_1 hám C_2A_2 tuwrı sıızıqlardı ótkeremiz. Ol jaúdayda birinshiden, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ boladı, sebebi olar óz-ara parallel bolğan AB , C_1A_1 hám C_2A_2 tuwrı sıızıqlardı AC tuwrı sıızıq keskende payda bolğan sáykes muyesh boladı. Ekinshiden, $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$, sebebi olar tárepleri parallel bolğan muyeshler boladı.



Demek, ushmuyeshlikler uqsaslıgının MM belgisine kóre, $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle C_1A_1C_2 \sim \triangle C_2A_2C_3$ boladı.

Ol halda,
$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{C_1A_1}{C_1C_2} = \frac{C_2A_2}{C_2C_3} \quad (1)$$
 teńliklerdi payda etemiz.

Bunnan tisqari, $B_1C_1A_1B_2$ hám $B_2C_2A_2B_3$ tórtmuyeshlikler parallelogramm, sebebi

$B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$ — shártke kóre;

$AB \parallel C_1A_1 \parallel C_2A_2$ — jasawğa kóre.

Sonıń ushın, bul parallelogrammlardıń qarama-qarsı tárepleri óz-ara teń boladı:

$$C_1A_1 = B_1B_2 \quad \text{hám} \quad C_2A_2 = B_2B_3. \quad (2)$$

(1) hám (2) tenliklerden
$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{B_1B_2}{C_1C_2} = \frac{B_2B_3}{C_2C_3}$$
 bolıwı kelip shıǵadı.

Teorema dálıylendi.

Ámeliy shınıǵıw. *Kesindini berilgen qatnasta bólıw.*

Berilgen a kesindiniń tórt bólekke sonday bólin, bóleklerdiń óz ara qatnası $m:n:l:k$ sıyaqlı bolsın.

Bunıń ushın tómendegilerdi qádembe-qádem orınlaymız:

1-qádem. Qálegen súyir muyesh sıızıp, onıń bir tárepine uzınlıqları $OA=m$, $AB=n$, $BC=l$ hám $CD=k$ ға teń bolğan kesindilerdi 2-súwrette kórsetilgenindey qılıp, izbe-iz qoyıp shıǵamız.

2-qádem. Muyeshhtiń ekinshi tárepine berilgen a kesindige teń OD_1 kesindini qoyamız.

3-qádem. D hám D_1 noqatlardı tutastıramız.

4-qádem. A , B , C noqatlar arqalı DD_1 ge parallel AA_1 , BB_1 hám CC_1 kesindilerdi ótkeremiz.

Joqarıdağı teoremağa kóre, berilgen A_1 , B_1 , C_1 hám D_1 noqatlar menen $m:n:l:k$ qatnasta bólingen boladı.

Tapsırma: Bul tastıyıqlawdı óz betińizshe dáliyllen.

Ámeliy tapsırma. Tórtinshi proporcional kesindini jasań.

a , b hám c kesindiler berilgen. a hám b kesindiler c hám d kesindilerge proporcional, yaǵnıy $a:b=c:d$ ekenligi málim. d kesindini jasań. (3-súwret).

1-qádem. Qálegen súyir múyesh sıızıp, onıń bir tárepine $OA=a$ hám $AB=b$ kesindilerdi 3-súwrette kórsetilgenindey qoyamız.

2-qádem. Ekinshi tarepine bolsa $OC=c$ kesindini qoyamız.

3-qádem. A hám C noqatlardı tutastıramız.

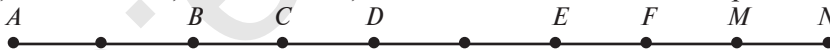
4-qádem. B noqattan AC ǵa parallel BD tuwrı sıızıp ótkeremiz.

Tapsırma: CD izlenip atırǵan d kesindi bolıwın tiykarlań.

Ǵádelet hám tapsırmalar

49.1. Uzunlıǵı 42 cm bolǵan kesindi berilgen. Onı a) 5:2; b) 3:4:7; d) 1:5:1:7 qatnastaǵı bólekshelerge bóliń.

49.2. Súwrette hár bir bólek birlik kesindiden ibarat bolsa, AB hám CD , EF hám MN , AC hám DF , AN hám CE , EN hám BM kesindilerdiń qatnasların tabıń.



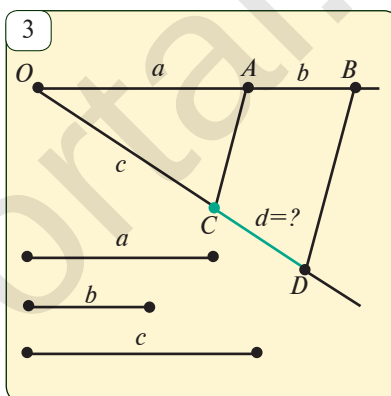
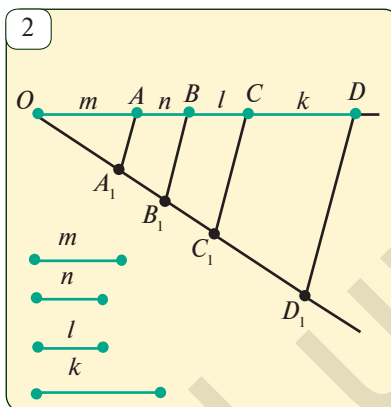
49.3. m , n kesindiler l hám k kesindilerge proporcional. Eger a) $m=4$ cm, $n=3$ cm hám $l=8$ cm; b) $m=2$ cm, $n=3$ cm hám $l=7$ cm bolsa, k — tórtinshi kesindini jasań hám uzunlıǵın tabıń.

49.4. Tórtmuyeshliktiń perimetri 54 cm hám tárepleri 3:4:5:6 sıyaqlı qatnasta bolsa, onıń hár bir tárepini anıqlań.

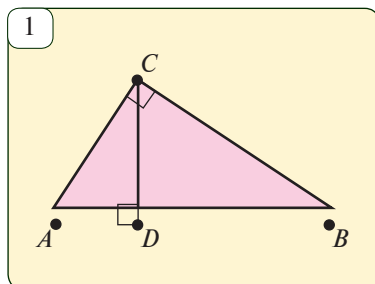
49.5. Tórtmuyeshliktiń múyeshleri óz ara 3:4:5:6 sıyaqlı qatnasta bolsa, onıń kishi múyeshi nege teńligin tabıń.

49.6. Uzunlıǵı 4, 5 hám 6 bolǵan kesindiler berilgen. Uzunlıǵı 4,8 ge teń kesindi jasań.

49.7*. Perimetri 60 cm bolǵan tórtmuyeshliktiń bir tárepi 15 cm, qalǵan tárepleri bolsa 2:3:4 qatnasta ekenligi málim. Onıń ulken tárepini tabıń.



Qásiyet. Tuwrí múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrí múyeshi ushınan tusirilgen biyikligi onı ózine uqsas eki úshmúyeshlikke ajıratadı.



Dáliytlew. ABC hám ACD úshmúyeshlikler tuwrí múyeshli bolıp, A múyesh bolsa olar ushın ulıwma. Demek, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Sonday-aq, ΔABC hám ΔCBD tuwrí múyeshli bolıp, olar ushın $\angle B$ ulıwma. Demek, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$.

1-súwrette súwretlengen AD hám DC kesindiler mas ráwishte AC hám BC katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları dep júritiledi.

Anıqlama. Eger a, b hám c kesindiler ushın $a:b=b:c$ bolsa, b kesindi a hám c kesindiler arasındagı **orta proporcional kesindi** dep ataladı.

Orta proporcionallıq shártin $b^2=ac$ yaki $b=\sqrt{ac}$ kórinisinde jazıw múmkin.

Joqarıda dáliyllengen qásiyetke tiykarlanatuğın bolsaq, orta proporcional kesindiler haqqındağı tómendegi teoremlar ańsat dáliyllenedi:

1-teorema. Tuwrí múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrí múyeshi ushınan tusirilgen biyiklik katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları arasında orta proporcional boladı.

Haqıyqattan da, dáliyllengen qásiyetke kóre, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$. Bunnan,

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

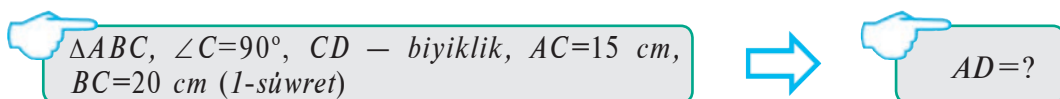
2-teorema. Tuwrí múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrí múyeshi ushınan tusirilgen biyiklik katetlerdiń gipotenuzadağı proekciyaları arasında orta proporcional boladı.

Haqıyqattan da, dáliyllengen qásiyetke kóre, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$. Bunnan,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

Tap usıǵan uqsas $BC = \sqrt{BD \cdot AB}$ ekenligin dáliytlew múmkin.

Másele. Katetleri 15 cm hám 20 cm bolǵan tuwrí múyeshli úshmúyeshliktiń kishi katetiniń gipotenuzadağı proekciyasın tabıń.



Sheshiw. 1) Pifagor teoremasidan paydalanib, úshmúyeshlik gipotenuzasin tabamiz: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, ya'niy $AB = 25$ cm.

2) Ekinshi teoremadan paydalanib, AD ni tabamiz:

$$AC^2 = AB \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2}{AB} = \frac{15^2}{25} = 9 \text{ (cm)}. \quad \text{Juwabi: } 9 \text{ cm.}$$

Ekinshi teoremadan nátiye sápatında Pifagor teoremasiniń Pifagor ózi jazıp qaldırǵan dáliyllew kelip shıǵadı. (1-súwret). 2-teoremaga kóre,

$$\left. \begin{array}{l} AC^2 = AD \cdot AB \\ BC^2 = BD \cdot AB \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2.$$

Sonday etip, $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

? Másele hám tapsırmalar

50.1. Dáliyileń (2-súwret):

a) $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$;

b) $b^2 = b_c \cdot c$, $a^2 = a_c \cdot c$; d) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$.

50.2. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına tusirilgen biyikligi gipotenuzanı 9 cm hám 16 cm ge teń kesindilerge bóledi. Úshmúyeshlik táreplerin tabıń.

50.3. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 15 cm ge, bir kateti bolsa 9 cm ge teń. Ekinshi katettiń gipotenuzadaǵı proekciyasın tabıń.

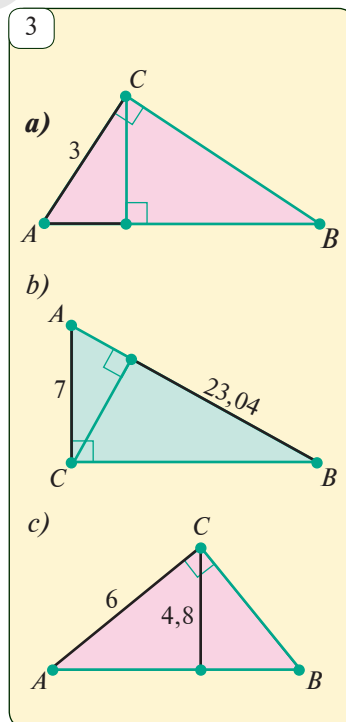
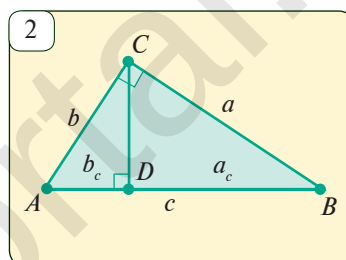
50.4. 3-súwrettegi maǵlıwmatlar tiykarında ABC úshmúyeshlik táreplerin tabıń.

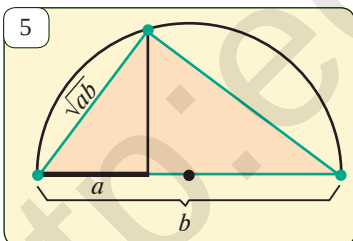
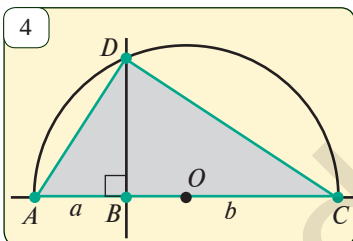
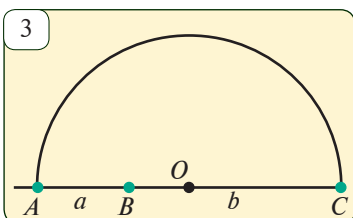
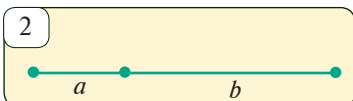
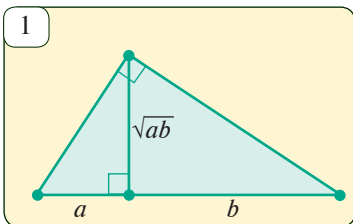
50.5*. Katetlerdiń qatnası 4:5 sıyaqlı bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik katetleriniń gipotenuzadaǵı proekciyaları qatnasın tabıń.

50.6*. Katetlerdiń qatnası 3:2 sıyaqlı bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik berilgen. Katetlerdiń gipotenuzadaǵı proekciyalarından biri ekinshisinen 6 cm ge uzın. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

50.7. Katetlerdiń gipotenuzadaǵı proekciyaları 2 cm hám 18 cm bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

50.8*. ABC úshmúyeshlikte $\angle C = 90^\circ$, CD — biyiklik, CE — bissektrisa hám $AE:EB = 2:3$. a) $AC:BC$; b) $S_{ACE}:S_{BCE}$; d) $AD:BD$ qatnasın tabıń.





Tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ tuwrı müyeshinen tusirilgen biyikligi gipotenuzanı a hám b kesindilerge bólse, biyiklik $\sqrt{ab}$ ga teñ bolıwın kórgen edik (1-súwret).

Demek, berilgen eki kesindige orta proporsional kesindini jasaw ushın:

- 1) gipotenuzasınıñ uzınlığı $a+b$ ga teñ (2-súwret);
- 2) tuwrı müyeshinen tusirilgen biyikligi sol gipotenuzanı a hám b bóleklerge bóletuğın tuwrı müyeshli üshmüyeshlik jasaw jetkilikli.

Bunıñ ushın tuwrı müyeshli üshmüyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber orayı gipotenuzanıñ ortasında jaylasaqañlıgınan paydalanamız (3-súwret).

Jasaw:

- 1) Tuwrı sızıq sızamız hám onda $AB=a$ hám $BC=b$ bolatuğın etip A , B hám C noqatlardı belgileymiz (3-súwret).

- 2) AC kesindiniñ ortası — O noqattı tabamız. Orayı O noqatta bolğan AC diametrli yarım sheńber jasaymız (3-súwret).

- 3) B noqattan AC tuwrı sızıq perpendikulyar tuwrı sızıq ótkeremiz (4-súwret). Bul tuwrı sızıq yarım sheńberdi D noqatta kesip ótken bolsın. Onda $\triangle ADC$ — tuwrı müyeshli üshmüyeshlik, $BD=\sqrt{ab}$ — biz jasawımız zárur bolğan kesindi boladı.

Jasaw orındandı.

Orta proporsional kesindi jasawda tuwrı müyeshli üshmüyeshliktiñ kateti gipotenuza menen sol katettiñ gipotenuzadağı proekciyası arasında orta proporsional ekenliginen paydalanıw da mumkin (5-súwret).

? Másele hám tapsırmalar

- 51.1. Uzınlığı a hám b bolğan kesindiler berilgen. Uzınlığı $\sqrt{ab}$ bolğan kesindini jasañ.
- 51.2. Uzınlığı a hám b ga teñ kesindiler berilgen. Pifagor teoremasınan paydalanıp, a) $\sqrt{a^2+b^2}$; b) $\sqrt{a^2-b^2}$ bolğan kesindini jasañ.
- 51.3. Uzınlığı 1 ge ten kesindi berilgen. Uzınlığı a) $\sqrt{2}$; b) $\sqrt{3}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{6}$; f) $\sqrt{18}$; g) $\sqrt{30}$ bolğan kesindilerdi jasañ.
- 51.4. 6-súwrettegi mağlıwmatlar tiykarında ABC üshmüyeshliktiñ maydanın tabıñ.

51.5. Sheńberdegi C noqattan AB diametrge CD perpendikulyar tusirilgen. Eger $CD=12$ cm, $AD=24$ cm bolsa, dóńgelek maydanın tabırń.

51.6. Aldıńǵı máseledegi ABC úshmúyeshliktiń maydanın tabırń.

51.7. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshiniń bissektrisasi gipotenuzanı 5:3 qatnasta bóledi. Tuwrı múyesh ushınan tusirilgen biyikliktiń gipotenuzadan ajratqan kesindileri qatnasın tabırń.

51.8. Radiusi 8 cm ge teń dóńgelekke bir múyeshi 30° bolǵan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ishley sızılǵan. Dóńgelektiń úshmúyeshlikten sırtındaǵı bólegi 3 segmentten ibarat. Áne sol segmentler maydanların tabırń.

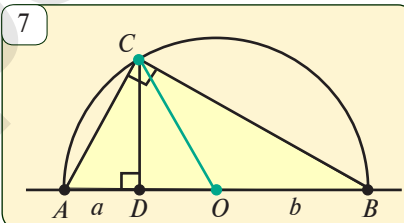
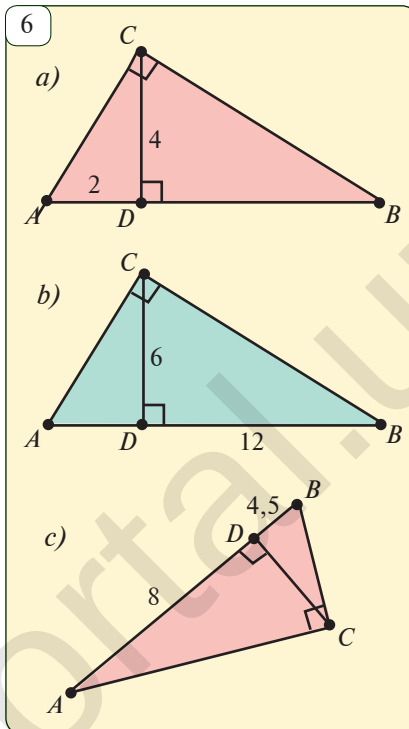
51.9*. 7-súwrette $AD=a$, $DB=b$, demek, $OC=\frac{a+b}{2}$ (O — sheńber orayı). Súwretten paydalanıp $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ teńsizlikti dáliyllen.



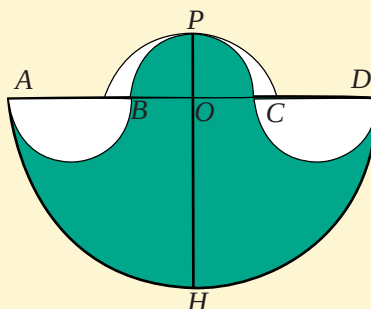
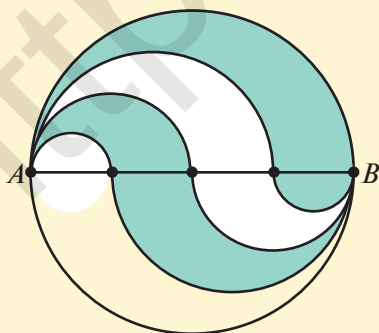
Qızıqlı máseleler

1. Sheńberdiń AB diametri tort teń bólekke bólinde hám 8-súwrette kórsetilgenindey yarım sheńberler jasaldı. Eger $AB=d$ bolsa, súwrette boyap kórsetilgen hár bir figura maydanın esaplań.

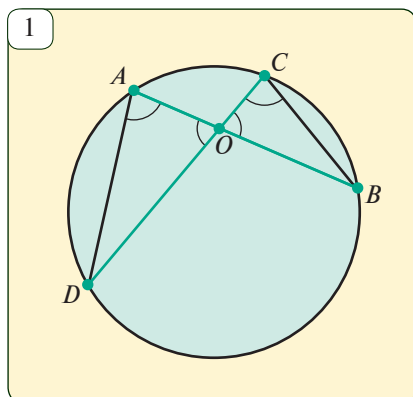
2. 9-súwrette AB hám CD kesindiler teń. O noqat AD kesindiniń ortası. AB , CD , AD hám BC kesindiler yarım dóńgeleklerdiń diametri. Bul yarım dóńgelekler menen shegaralangan figuranıń maydanı diametri PH ga teń dóńgelek maydanına tenligin dáliyllen. Bul jerde PH kesindi AD kesindiniń ortası O noqatqa ótkizilgen perpendikulyar.



8



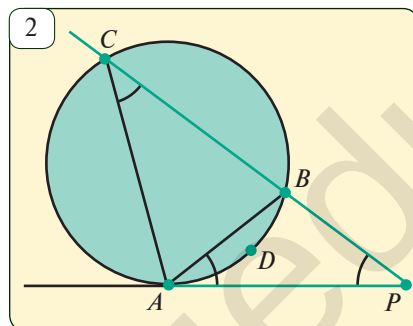
1-teorema. *Sheñberdiñ AB hám CD xordaları O noqatta kesilisse, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ teñlik orınlı boladı.*



Dáliytlew. AB hám CD xordalar (1-súwret) kórsetilgen tártipte jaylasqan bolsın. Ushların AD hám BC xordalar menen tutastıramız. Sonda $\angle BAD = \angle BCD$. Bizge belgili, $\angle AOD = \angle BOC$. Bul eki teñlikten, $\triangle AOD$ hám $\triangle BOC$ úshmúyeshliklerdiñ úqsaslıǵı kelip shıǵadı. Úqsas úshmúyeshlikler sáykes tárepleri bolsa proporcional: $\frac{OD}{OB} = \frac{AO}{CO}$ yaki $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Teorema dáliytlendi.

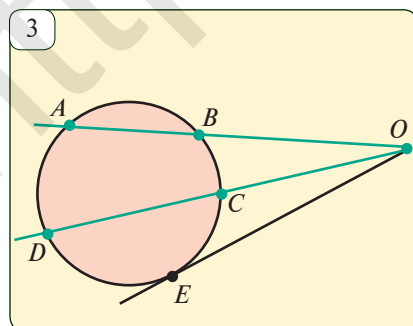
2-teorema. *Sheñber sırtındaǵı P noqattan sheñberge PA urınba (A – urınıw noqatı) hám sheñberdi B hám C noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı sızıq ótkizilgen bolsa, $PA^2 = PB \cdot PC$ boladı.*



Dáliytlew. ABP hám CPA úshmúyeshliklerdi qaraymız (2-súwret). Onda, $\angle C = \frac{ADB}{2} = \angle BAP$ hámde $\angle P$ — bul úshmúyeshlikler ushın ulıwma múyesh. Demek, ABP hám CPA úshmúyeshlikler eki múyeshi boyınsha úqsas. Bundan, $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PA}$ yaki $PA^2 = PB \cdot PC$.

Teorema dáliytlendi.

Másele. A, B, C hám D noqatlar sheñberdi AB, BC, CD hám AD doǵalarga ajratadı. Eger AB hám DC nurlar O noqatta kesilisse, ol jaǵdayda $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ teñlik orınlı bolıwın dáliytleñ.



Sheshiwi. Másele shártine sáykes sızılma sızamız (3-súwret) hám O noqattan OE urınba ótkeremiz. Onda, 2-teoremaga kóre,

$$\left. \begin{array}{l} OB \cdot OA = OE^2 \\ OC \cdot OD = OE^2 \end{array} \right\} \Rightarrow OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

? Mäsele hám tapsırmalar

52.1. 4-súwrette x penen belgilengen belgisiz kesindini tabıń.

52.2. A noqattan sheńberge AB urınba (B — urınıw noqatı) hám sheńberdi C hám D noqatlarda kesetuǵın kesiwshi ótkerilgen. Eger

- a) $AB=4$ cm, $AC=2$ cm bolsa, AD kesindini;
- b) $AB=5$ cm, $AD=10$ cm bolsa, AC kesindini;
- d) $AC=3$ cm, $AD=2,7$ cm bolsa, AB kesindini tabıń.

52.3. Shenberge $ABCD$ tórtmúyeshlik ishley sızılǵan. AB hám DC nurlar O noqatta kesisedi. Eger

- a) $AO=10$ dm, $BO=6$ dm, $DO=15$ dm bolsa, OC kesindini;
- b) $CD=10$ dm, $OD=8$ dm, $AB=4$ dm bolsa, OB kesindini tabıń.

52.4. Sheńberdiń AB diametri hám bul diametrge perpendikular CD xordası E noqatta kesilisedi. Eger $AE=2$ cm, $EB=8$ cm bolsa, CD xordanı tabıń.

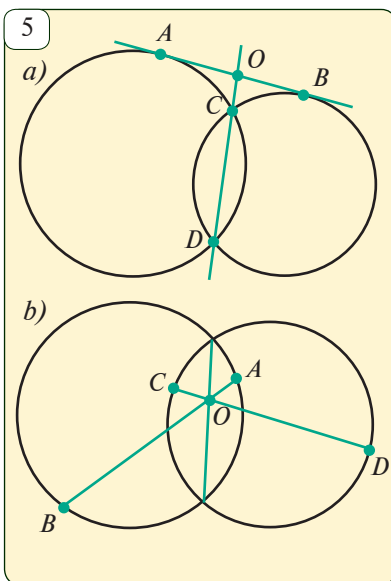
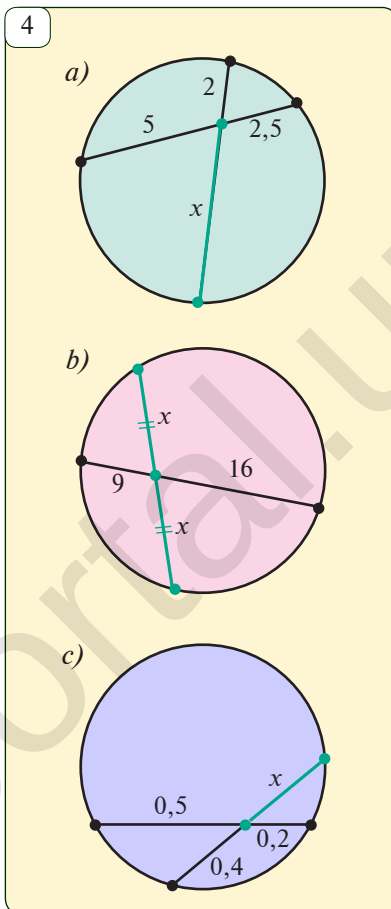
52.5. AB hám CD kesindiler O noqatta kesilisedi. Eger $AO \cdot OB = BO \cdot OD$ bolsa, A , B , C hám D noqatlardıń bir sheńberde jatıwın dáııylleń.

52.6. Radiusı 13 dm bolǵan sheńber orayınan 5 dm uzaqlıqta P noqat alıńǵan. P noqattan uzınlıǵı 25 dm bolǵan AB xorda ótkerilgen. AP hám PB kesindilerdi tabıń.

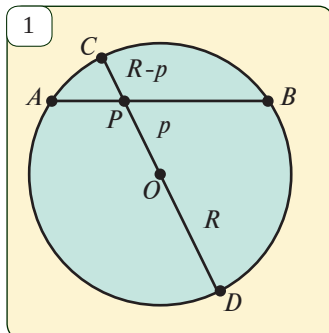
52.7. 3-súwrette $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ teńlikti AOD hám BOC úshmúyeshliklerdiń uqsas ekenliginen paydalanıp dáııylleń.

52.8*. 5-súwrette maǵlıwmatlar tiykarında $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ teńlikti dáııylleń.

52.9*. Eki sheńber C noqatta urınadı. AB tuwrı sizıq birinshi sheńberge A noqatta, ekinshi sheńberge bolsa B noqatta urınadı. $\angle ACB = 90^\circ$ ekanligini isbotlang.



Алдыңғы сабақта шеңбер кесилишхилери һәм хордаларының қасиетлерин дәлиллеген едик. Енди бул қасиетлердің айырым жағдайлары менен танисамыз.



1-мәсе. P нокаты R радиუსлы шеңбердің ишкы обласында һәм орайынан p аралықта жайласқан болсын. Онда P нокатынан өтiwшy қәлеген AB хорда ушын

$$AP \cdot PB = R^2 - p^2 \quad (1)$$

теңлиги орынлы болатуғынлығын дәлиллең.

Дәлиллев. P нокаты арқалы шеңбердің CD діаметрин жүргиземиз. Онда, $PC = R - p$, $PD = R + p$ (1-сүврет).

Кесип өтiwшy хордалар хаққындағы теорема бойынша,

$$AP \cdot PB = CP \cdot PD = (R - p)(R + p) = R^2 - p^2.$$

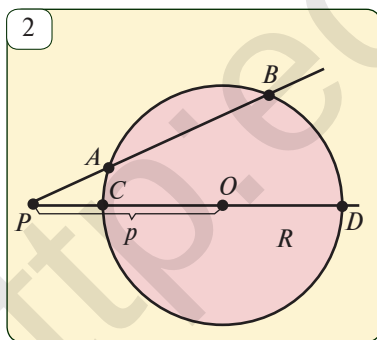
(1) теңлик дәлиллени.

2-мәсе. Радиусы 6 cm болған шеңбердің O орайынан 4 cm қәшиқлиқта P нокаты алынды. P нокаты арқалы AB хорда жүргизиледи. Егер $AP = 2 \text{ cm}$ болса, PB кесиндисин табың.

Шешиливи. Мәсе шәрти бойынша, $R = 6 \text{ cm}$, $d = 4 \text{ cm}$, $AP = 2 \text{ cm}$. Оул жағдайда

(1) теңлик бойынша, $2 \cdot PB = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$. Буннан, $PB = 10 \text{ cm}$.

Жувабы: $PB = 10 \text{ cm}$.



3-мәсе. R радиуслы шеңбердің сыртқы обласындағы P нокат шеңбер орайынан p аралығында жайласқан болсын. Онда P нокат арқалы өтiwшy һәм шеңберди A һәм B нокатларда кесип өтiwшy қәлеген туwры сызық ушын

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 \quad (2)$$

теңлиги орынлы болыwн дәлиллени.

Дәлиллев. Шеңбердің O орайы арқалы өтiwшy PO туwрысы шеңбер менен C һәм D нокатларда кесилиссин (2-сүврет). Онда, шәрт бойынша, $PC = p - R$, $PD = p + R$. Шеңбердің сыртқы обласындағы нокаттан жүргизилген кесiwшхилер хаққындағы теорема бойынша,

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (p - R)(p + R) = p^2 - R^2.$$

Солы етип (2) теңлик дәлиллени.

4-мәсәле. Радиуси 7 *cm* болган шеһбердин ораынан 13 *cm* qashıqlıqtağı *P* noqatınan ótiwshi tuwrı sheһberdi *A* hám *B* noqatlarda kesip ótedi. Eger $PA=10$ *cm* bolsa, *AB* xordanın tabıń.

Sheshiliwi. Shárt boyınsha, $R=7$ *cm*, $p=13$ *cm*. Onda, (2) formulağa kóre,

$$PA \cdot PB = p^2 - R^2 = 13^2 - 7^2 = 169 - 49 = 120.$$

$$\text{Bunnan, } PB = \frac{120}{PA} = \frac{120}{10} = 12 \text{ (cm). Demek,}$$

$$AB = PB - PA = 12 - 10 = 2 \text{ (cm). Juwabi: 2 cm.}$$

? Mäsele hám tapsırmalar

53.1. Радиуси 5 *cm* болган шеһбер ораынан 3 *cm* qashıqlıqtağı *P* noqatı alınған. *AB* xorda *P* noqatı arqalı ótedi. Eger $PA=2$ *cm* bolsa, *AB* xorda uzınlıgın tabıń.

53.2. Радиуси 5 *m* болган шеһбер ораынан 7 *m* qashıqlıqtağı *P* noqatı alınған. *P* noqatı arqalı ótiwshi tuwrı sheһberdi *A* hám *B* noqatında kesip ótedi. Eger $PA=4$ *m* bolsa, *AB* xorda uzınlıgın tabıń.

53.3. 3-súwrettegi maǵlıwmatlar tıykarında *x* penen belgilengen kesindini tabıń (*O*—sheһber orayı).

53.4. 4-súwretten paydalanıp, mäseleni sheshiń. Onda,

a) $PC=5$ *dm*, $OD=7$ *dm*, $AB=2$ *dm*, $PA=?$

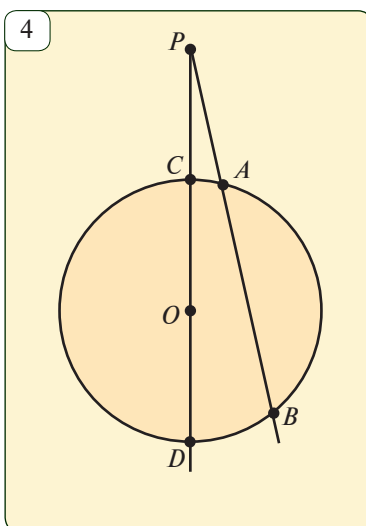
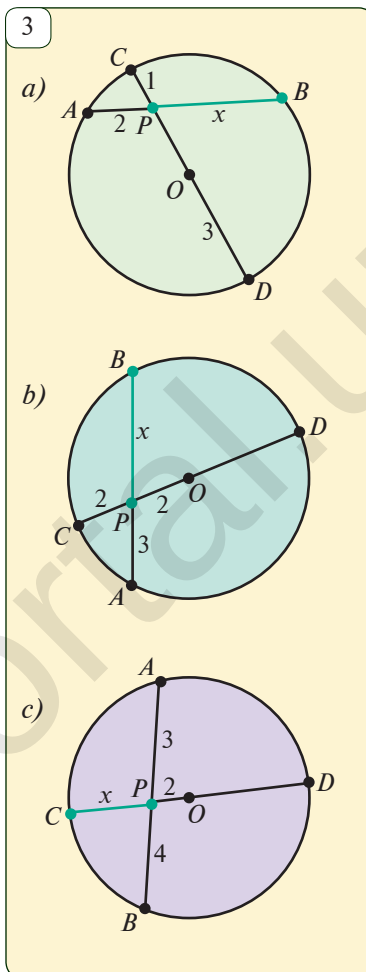
b) $PA=5$ *dm*, $AB=4$ *dm*, $PC=3$ *dm*, $OD=?$

53.5. Шеһбердин $AB=7$ *cm* hám $CD=5$ *cm* xordaları *P* noqatında kesilisedi. Eger $CP:PD=2:3$ bolsa, *P* noqatı *AB* xordasin qanday qatnasta bóledi?

53.6. Шеһбердин *C* noqatınan *AB* diametrge *CD* perpendikulyarı túsirilgen. Eger $AD=2$ *cm*, $DB=18$ *cm* bolsa, *CD* kesindisin tabıń.

53.7*. Шеһберge ishley sızılған *ABCD* tórtmüyeshliktiń diagonalları *K* noqatında kesilisedi. Eger $AB=2$, $BC=1$, $CD=3$ hám $CK:KA=1:2$ bolsa, *AD* kesindisin tabıń.

53.8*. Шеһберge ishley sızılған *ABCD* tórtmüyeshlikte $AB:DC=1:2$ hám $BD:AC=2:3$ bolsa, *DA:BC* qatnasin tabıń.



I. Testler

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına túsirilgen biyikligi haqqında nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:
A. Katetlerinen kishi;
B. Úshmúyeshlikti eki uqsas úshmúyeshliklerge ajıratadı;
D. Katetleriniń gipotenuzadaǵı proekciyaları arasında orta proporcional;
E. Gipotenuzanıń yarımına teń.
2. AB hám CD xordalar O noqatında kesilisedi. Nadurıs tastıyıqlawdı tabıń:
A. $\angle DAB = \angle DCB$; B. AOD hám COB úshmúyeshlikler uqsas;
D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AO = CO$.
3. Durıs tastıyıqlawdı tabıń:
A. Teń kesindilerdiń proekciyalari da teń boladı;
B. Úlken kesindiniń proekciyası úlken boladı;
D. Bir tuwrı sıziqtaǵı teń kesindilerdiń proektciyalari teń boladı;
E. Proektciya uzınlıǵı proektciyalanıwshı kesindi uzınlıǵına teń boladı.
4. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzasına túsirilgen biyiklik onı eki úshmúyeshlikke bóledi. Bul úshmúyeshlikler:
A. Teń; B. Teńles; D. Uqsas; E. Teń qaptallı.
5. Uzınlıǵı a hám b bolǵan kesindilerdiń orta proporcionalı nege teń?
A. $a+b$; B. $\sqrt{ab}$; D. $\frac{a+b}{2}$; E. $a:b$.
6. $ABCD$ tórtmúyeshligi O oraylı sheńberge ishley sızilǵan. Nadurıs tastıyıqlawdı kórsetiń:
A. $\triangle AOB \sim \triangle COD$; B. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$;
D. $AO \cdot OB = CO \cdot OD$; E. $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

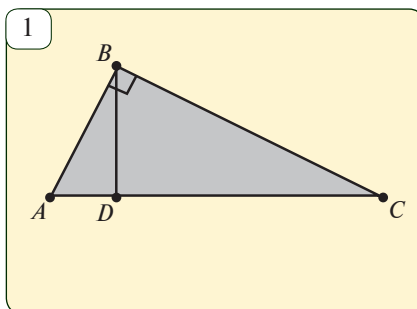
II. Máseleler.

1. Tuwrı múyeshli úshmúyeshlik katetleriniń qatnası 3:4 ke teń. Bul úshmúyeshliktiń gipotenuzası 50 cm. Úshmúyeshliktiń tuwrı múyeshi tóbesinen túsirilgen biyikligi gipotenuzadan qanday uzınlıqtaǵı kesindiler ajıratadı?
2. Sheńberdiń AB hám CD xordalarına E noqatında kesilisedi. Eger $AE=5$ cm, $BE=2$ cm hám $EC=2,5$ cm bolsa, ED nı tabıń.
3. Radiusı 6 m bolǵan sheńberdiń orayınan 10 m qashıqlıqta K noqatı alındı hám K noqatınan sheńberge urınba júrgizildi. Urınbanıń urınıw noqatı P menen K noqatı arasındaǵı aralıqtı tabıń.
4. ABC úshmúyeshliginde $\angle C=90^\circ$ hám CD biyikligi 4,8 dm. Eger $AD=3,6$ dm bolsa, AB tárepın tabıń.
5. Sheńberdiń AB hám CD xordaları O noqatta kesilisedi. Eger $AO=6$, $OB=4$ ham $CO=3$ bolsa, OD kesindisin tabıń.

6. Sheńberde A, B, C, D noqatları belgilengen, BA hám CD nurları O noqatında kesilisedi. Eger $OA=5$, $AB=4$, $OD=6$ bolsa, DC xordasını tabıń.
7. Sheńberge B noqatında urınıwshı tuwrısınıń üstinen A noqatı belgilendi. Eger $AB=12$ hám A noqatınan sheńberge shekem eń qısqa aralıq 8 bolsa, sheńber radiusın tabıń.
8. Yarım sheńberdegi C noqatınan AB diametrge túsirilgen CD perpendikulyar AB kesindide 4 hám 9 ga teń kesindilerdi ajıratadı. CD kesindisin tabıń.
9. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń biyikligi gipotenuzanı 3 dm hám 12 dm ge teń kesindilerge bóledi. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.
10. Radiusı 5 cm bolğan O orayına iye sheńberdiń AB xordasında D noqatı alıngan. Eger $AD=2$ cm, $DB=4,5$ cm bolsa, OD kesindisin tabıń.
11. Radiusı 5 cm bolğan O orayına iye sheńberdi A hám B noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı sıziqta P noqatı alındı. Eger $PA=5$ m, $AB=2,8$ m bolsa, OP aralıgın tabıń.
12. Tórt parallel tuwrı berilgen. Olar múyeshtiń táreplerin A hám A_1 , B hám B_1 , C hám C_1 hám de D hám D_1 noqatlarında kesip ótedi. Bunda A, B, C, D noqatlar múyeshtiń bir tárepinde jatsa. Eger $AB=8$, $CD=12$ hám $C_1D_1=9$ bolsa, A_1B_1 kesindisin tabıń.
13. Sheńber múyeshke ishley sızilğan. Eger múyesh ushınan sheńberge shekem bolğan aralıq radiusqa teń bolsa, múyeshtiń shamasın tabıń.
14. Sheńberge AB diametriniń B ushınan BC urınba hám AC kesiwshi júrgizilgen. AC kesiwshisi sheńber menen D noqatında kesilisedi. Eger $AD=DC$ bolsa, CBD múyeshin tabıń.
15. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetleriniń qatnası $2:3$ túrinde. Úshmúyeshliktiń gipotenuzağa túsirilgen biyiklik onı eki ushmúyeshlikke bóledi. Olardıń maydanlarınıń qatnasın tabıń.

III. Ózińizdi sınap kórin (úlgı ushın baqlaw jumısı)

1. Sheńber sırtındağı noqattan sheńberge urınba ótkizilgen. Bul noqattan sheńberge shekem bolğan eń qısqa aralıq 2 cm ge, urınıw noqatına shekem bolğan aralıq bolsa 6 cm ge teń. Sheńberdiń radiusın tabıń.
2. $\triangle ABC$ tuwrı múyeshli, $AD=9$ dm, $BD=16$ dm bolsá, usı úshmúyeshlikke ishley sızilğan sheńber rádiusın esaplań (*I-súwret*).
3. Noqattan tuwrıgı eki qıya júrgizilgen. Eger qiyalar $1:2$ qatnasta bolıp, olardıń proektciyalari 1 m hám 7 m bolsa, qiyalardıń uzınlıqların tabıń.
- 4.* (Qosımsha másele). PQ hám onnan uzın ET kesindileri berilgen. Sonday $ABCD$ tórt-múyeshligin jasań, nátiyjede $AB=BC=PQ$;



$BD = ET$ bolip, diagonallari kesilisetugin O noqati ushın $AO \cdot OC = BO \cdot OD$ tehligi orınlı bolsın.



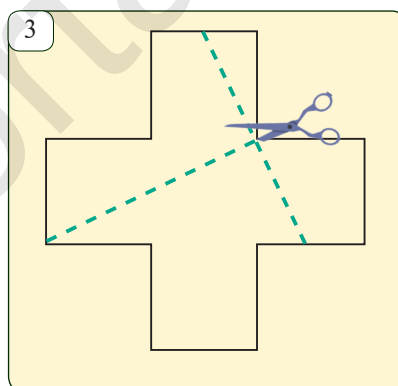
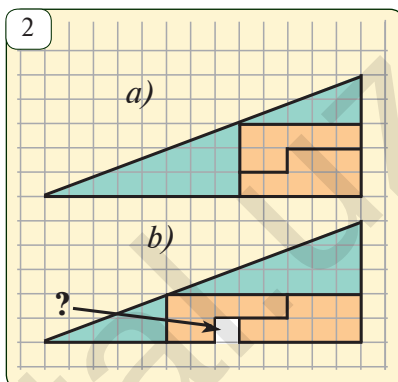
Qızıqlı másele

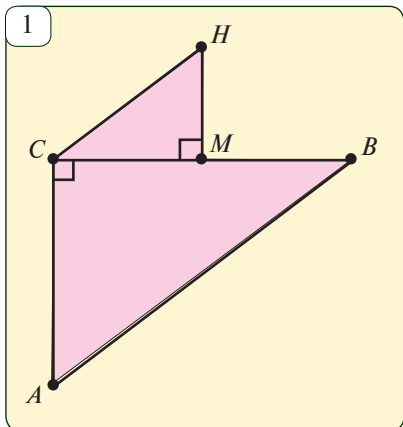
Úshmúyeshlik 2-a súwrette kórsetilgenindey etip, tórt bólekke bólingen hám 2-b súwrette kórsetilgende etip qayta jıynalğan. Artıq kvadrat qalay payda bolğanın aytıp berin?

(Yunon) Grek

Eramızdan aldınğı 500-jıllarda payda bolğan bul forma (3-súwret). Ómirdin belgisi sıpatında nan üstinde sızılğan.

Bul formanı qalın qagazga sızıp alıp onı súwrette kórsetilgen sızıqlar boylap qırqın. Payda bolğan bóleklerden kvadrat jasaw múmkinshiligine isenim payda etin.





I. Úlgi shın baqlaw jumısı

1. $ABCD$ parallelogrammda $\angle A = 45^\circ$, $AD = 4$. Parallelogrammniñ AB tárepiniñ dawamına $\angle PDA = 90^\circ$ qa teñ bolatuğın BP kesindi qoyıldı. BC hám PD kesindiler T noqatında kesilisedi, bunda $PT:TD = 3:1$.
 - a) $\triangle BPT \sim \triangle CDT$ ekenligin dálilleñ, bul úshmúyeshliklerdiñ maydanlariniñ qatnasın tabıñ.
 - b) $ABCD$ parallelogrammniñ maydanın tabıñ.
 - c) AB hám TD kesindileriniñ ortalariñ tutasırıwshı kesindiniñ uzınlıgın tabıñ.
 - d) $\overrightarrow{AB}$ vektorni $\overrightarrow{CA}$ hám $\overrightarrow{TB}$ vektorları arqalı añlatıñ.

f) CAD múyeshtiñ sinusın tabıñ.

2. (Qosımsha) 1-súwrette $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0,5AC$ bolsa, $AB \parallel CH$ ekenligin dálıylleñ.

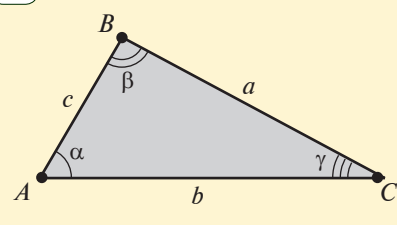
II. Baqlaw jumısı ushın kórsetpeli testler

1. Eger tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiñ biyikligi gipotenuzasın 6 cm hám 54 cm kesindilerge ajıratsa, bul úshmúyeshliktiñ maydanın tabıñ:
A) 648 cm^2 ; B) 324 cm^2 ; D) 1080 cm^2 ; E) 540 cm^2 .
2. C noqatınan ótkerilgen bir kesiwshi sheñberdi A hám B , ekinshisi bolsa D hám E noqatlarında kesip ótedi. Eger $CD = 18 \text{ cm}$, $CB = 8 \text{ cm}$, $DE = 8 \text{ cm}$ bolsa, DE kesindisiniñ uzınlıgın tabıñ:
A) 17 cm ; B) 1 cm ; D) 9 cm ; E) durıs juwap kórsetilmegen.
3. Eger $A(-5; 2\sqrt{3})$, $B(-4; 2)$, $C(-2; \sqrt{3})$, $D(0; 2)$ bolsa, $ABCD$ tórtmúyeshliginiñ diagonalları arasındagı múyeshti tabıñ:
A) 30° ; B) 60° ; D) 90° ; E) durıs juwap kórsetilmegen.
4. Eger parallelogrammniñ diagonalları 10 cm hám $8\sqrt{2} \text{ cm}$ ge teñ hám olar arasındagı múyesh 45° bolsa, parallelogrammniñ táreplerin tabıñ:
A) $\sqrt{17} \text{ cm}$ hám $\sqrt{97} \text{ cm}$; B) 5 cm hám 6 cm ;
D) $\sqrt{34} \text{ cm}$ hám $\sqrt{63} \text{ cm}$; E) durıs juwap kórsetilmegen.
5. Radiusi 8 cm bolğan sheñberge ishley sızılğan durıs altımúyeshtiñ maydanın tabıñ:
A) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$; B) $192\sqrt{3} \text{ cm}^2$; D) $96\sqrt{2}$; E) durıs juwap joq.
6. Oraylıq múyeshi 140° , maydanı $31,5\pi \text{ cm}^2$ bolğan sektordıñ radiusın anıqlañ:
A) 9 cm ; B) 18 cm ; D) $9\pi \text{ cm}$; E) durıs juwap kórsetilmegen.

7. Ultaniniń uzunlıǵı 15 *cm* bolǵan úshmúyeshliktiń ultanına parallel kesindi júrgizilgen. Eger payda bolǵan trapetsiyanıń maydanı úshmúyeshliktiń maydanınıń $\frac{3}{4}$ bólegin quraytuǵınlıǵı belgili bolsa, kesindiniń uzunlıǵın tabıń:
A) 6,5; B) 7; D) 7,5; E) 5.
8. Qaptal tárepi $2\sqrt{39}$ *cm* bolǵan teń qaptallı úshmúyeshliktiń biyikliginiń ultanına qatnası 3:4 ke teń bolsa, úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
A) 260; B) 245; D) 310; E) 72.
9. $\vec{a}(4;4\sqrt{3})$ hám $\vec{b}(8\sqrt{3};8)$ vektorları arasındaqı múyeshti tabıń:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.
10. Teń qaptallı trapetsiyanıń ultanları 10 *cm* hám 16 *cm*, qaptal tárepi bolsa 5 *cm*. Trapeciyanıń maydanın tabıń:
A) 45; B) 50; D) 48; E) 52.
11. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń gipotenuzası 13 *cm* bolıp, katetlerinen biri ekinshisinen 7 *cm* úlken. Úshmúyeshliktiń maydanın tabıń:
A) 30 *cm*²; B) 25 *cm*²; D) 45 *cm*²; E) 40 *cm*².
12. Tárepi 5 *cm* bolǵan rombinıń bir diagonalı 6 *cm* ge teń. Rombınıń maydanın tabıń:
A) 24 *cm*²; B) 30 *cm*²; D) 29 *cm*²; E) 40 *cm*².
13. Diagonalı $6\sqrt{2}$ bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan sheńberdiń uzunlıǵın tabıń:
A) 10π ; B) 8π ; D) 9π ; E) 6π .
14. Tárepi $6\sqrt{2}$ *cm* bolǵan kvadratqa sırtlay sızılǵan dóńgelektiń maydanın tabıń:
A) 9π ; B) 12π ; D) 15π ; E) 18π .
15. Biyiklikleri 4 *cm* hám 6 *cm* bolǵan parallelogrammnıń maydanı 36 *cm*² ge teń. Onıń perimetrin tabıń:
A) 26 *cm*; B) 30 *cm*; D) 29 *cm*; E) 36 *cm*.
16. Perimetri 30 *cm* bolǵan parallelogrammnıń tárepleri 2:3. Eger parallelogrammnıń súyir múyeshi 30° bolsa, onıń maydanın tabıń:
A) 26 *cm*²; B) 27 *cm*²; D) 29 *cm*²; E) 30 *cm*².
17. Eger ABC úshmúyeshliginde $AB=6\sqrt{3}$ *cm*, $BC=12$ *cm* ham $\angle C=60^\circ$ bolsa, úshmúyeshliktiń A múyeshin tabıń:
A) 45°; B) 90°; D) 30°; E) 60°.

PLANIMETRIYAGA BAYLANISLI TIYKARGI TUSINIK HAM MAGLIWMATLAR

1 Ushmuyeshliklar



1°. Tiykargı tusinikler

Tegislikte bir tuwrı sıziqta jatpağan ush noqat berilgen bolsın. Sol noqatlardıń hár ekewin kesindiler menen tutastıramız. Payda bolğan figura úshmuyeshlik delinedi. Noqatlar úshmuyeshliktiń ushları, kesindiler bolsa tárepleri delinedi. Belgileniwi: A, B, C - ushları, a, b, c - tárepleri (1-súwret).

Úshmuyeshlik úsh ishki múyeshke iye: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$. Belgileniwi: α , β , γ .

Mediana — úshmuyeshlik ushın onıń qarsısındağı tárep ortası menen tutastırılshı kesindi. Úshmuyeshlikte 3 mediana bolıp, olar m_a , m_b , m_c kibi belgilenedi.

Bissektrisa — úshmuyeshlik ushın onıń qarsısındağı tárep penen tutastırılshı hám sol ushtağı múyesh bissektrisasında jatıwshı kesindi. Úshmuyeshlikte 3 bissektrisa bolıp olar l_a , l_b , l_c kibi belgilenedi.

Biyiklik — úshmuyeshlik ushınan onıń qarsısındağı tárep jatqan tuwrı sıziqqa tusirilgen perpendikulyar.

Úshmuyeshlikte 3 biyiklik bolıp, olar h_a , h_b , h_c kibi belgilenedi.

Orta sıziq — eki tárep ortaların tutastırılshı kesindi.

Orta sıziqlar sanı da 3 dana.

Perimetr — ush tárep uzınlıqları qosındısı. Belgileniwi: P .

Úshmuyeshlik táreplerine qarap ush turge ajratıladı:

- a) teń tárepli ($a=b=c$); b) teń qaptallı (a, b, c lardıń qálegen ekewi teń);
- d) qálegen tárepli (a, b, c lardıń hesh qaysı ekewi teń emes).

Úshmuyeshliktiń ush tárepine urınıp ótiwshı sheńber oğan ishki sızilğan *sheńber* delinedi (bunday sheńber bar hám jalǵız). Ishki sızilğan sheńber radiusı r arqalı belgilenedi.

Úshmuyeshliktiń barlıq ushınan ótiwshı sheńber oğan *sırtlay sızilğan sheńber* delinedi hám onıń radiusı R arqalı belgilenedi (bunday sheńber bar hám jalǵız).

2°. Tiykargı tusinikler

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Úshmuyeshlik ishki múyeshleri qosındısı 180° ǵa teń.

2) Ush mediana bir noqatta kesilisedi. Bul noqat mediananı 2:1 qatnasta bóledi. Mediana úshmuyeshlikte eki maydanları teń úshmuyeshliklerge ajratadı. Medianalar uzınlıqları $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ formulalardan tabıladı.

3) Ush bissektrisa bir noqatta kesilisedi. Bul noqat ishki sızilğan sheńber orayı boladı. Bissektrisa ózi tusirilgen tárepti qalğan qalğan táreplerge proporcional bóleklerge ajratadı (2-súwret).

BD bissektrisa bolsa, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)}; \quad l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \sqrt{p(p-c)}, \quad p = (a+b+c)/2$$

Bissektrisa uzunlıqların usı formulalardan tabıw mümkin.

4) Üshmüyeshlik biyiklikleri yáki olardıń dawamları bir noqatta kesilisedi.

Biyiklik uzunlıqların

$$h_a = \frac{2S}{a}; \quad h_b = \frac{2S}{b}; \quad h_c = \frac{2S}{c}$$

formulalardan tabıw mümkin. Bul jerde

S — üshmüyeshlik maydanı.

5) Üshmüyeshlik tárepleriniń orta perpendikulyarı bir noqatta kesilisedi. Bul noqat üshmüyeshlikke *sırtlay sızılğan sheńber orayı* boladı.

6) Üshmüyeshliktiń *orta sızılğı* üshinshi tárepke parallel hám onıń yarımına teń.

7) Sinuslar teoreması:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

8) Kosinuslar teoreması:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\gamma$$

9. Üshmüyeshlik maydanın esaplaw formulası:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c; \quad S = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}bcsin\alpha = \frac{1}{2}acsin\beta;$$

10. Geron formulası:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}; \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr.$$

3°. Áhmiyetli jeke jaǵdaylar

a) *Tuwrı müyeshli üshmüyeshlik (3-súwret).*

$\angle\gamma = 90^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, AC hám BC — katetler, AB — gipotenuza. Pifagor teoreması:
 $a^2 + b^2 = c^2$.

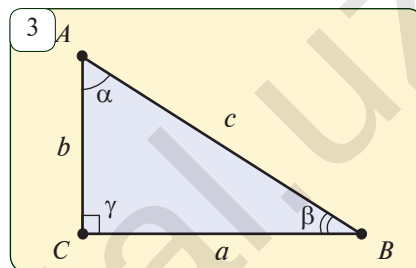
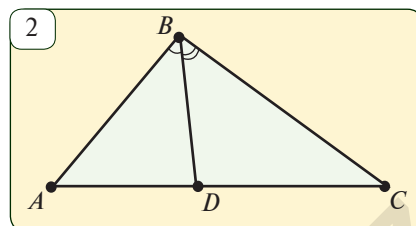
$$S = \frac{1}{2}ab; \quad R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha; \quad \frac{a}{c} = \cos\beta; \quad \frac{b}{c} = \sin\beta; \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha.$$

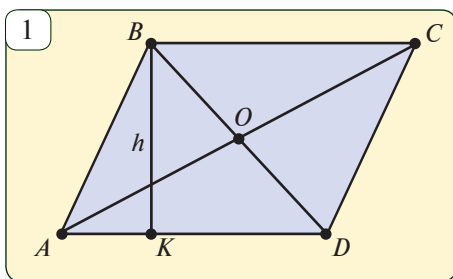
$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha; \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta.$$

b) *Teń tárepli üshmüyeshlik*

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



TÓRTMÚYESHLIKLER



1°. Parallelogramm

Qarama-qarsi tárepleri parallel bolgan tórtmúyeshlik *parallelogramm* delinedi (1-suwret).

Qo'nsi bolmagan ushlardi tutastirish kesindi diagonal delinedi.

AB hám CD ; AD hám BC parallel tárepler;
 BD hám AC diagonal.

Tiykargi qásiyetler hám qatnasıqlar

1) Diagonal kesilish noqati parallelogramnıń simmetriya orayı boladı.

2) Qarama-qarsi táreplerdin uzınlıqları óz-ara teń:

$$AB=CD \text{ hám } AD=BC.$$

3) Parallelogramnıń qarama-qarsi múyeshleri óz ara teń:

$$\angle BAD=\angle BCD \text{ hám } \angle ABC=\angle ADC.$$

4) Qo'nsi múyeshler qosındısı 180° ga teń.

5) Diagonal kesilish noqatında teń ekige bólinedi: $BO=OD$ hám $AO=OC$

6) Tárepleri kvadratlarınıń qosındısı diagonalı kvadratlarınıń qosındısına teń:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2 \text{ yaki } 2(AB^2+BC^2)=AC^2+BD^2.$$

7) Parallelogramm maydanı: a) $S=ah_a$, bul jerde: $a=AD$ tárep, $h_a=BK$ — biyiklik; b) $S=absin\alpha$, bul jerde: $b=AB$ — tárep, $\alpha=\angle BAD$ — AB hám AD tárepler arasındaǵı múyesh.

2°. Romb

Barlıq tárepleri óz-ara teń bolgan parallelogramm *romb* delinedi.

Paralelogramm ushın orınlı bolgan barlıq qásiyetler romb ushın da orınlı.

Rombnıń qosımsha qásiyetleri.

1) Romb diagonalı óz ara perpendikulyar.

2) Romb diagonalı ishki múyeshlerdin bissektisaları boladı.

3) Romb maydanı $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, bul jerde: d_1, d_2 — romb diagonalı.

3°. Tuwrı tórtmúyeshlik

Barlıq múyeshleri 90° ga teń bolgan parallelogram *tuwrı tórtmúyeshlik* delinedi.

1) Tuwrı tórtmúyeshlik diagonalı óz ara teń.

2) Tuwrı tórtmúyeshlik maydanı $S=ab$, bul jerde: a hám b — tuwrı tórtmúyeshlikniń qo'nsi tárepleri.

4°. Kvadrat

Barlıq tárepleri óz ara ten bolgan tuwrı tórtmúyeshlik *kvadrat* delinedi.

Romb hám tuwrı tórtmúyeshlikler ushın orınlı bolgan barlıq qásiyetler kvadrat ushında orınlı.

Eger a -kvadrat tárepi, d bolsa diagonalı bolsa: $S=a^2$; $S=\frac{d^2}{2}$; $d=a\sqrt{2}$.

5°. Trapeciya

Ultanlar dep atalishshi eki tárep óz ara parallel hám qaptal tárepler dep atalishshi qalgan eki tárepi bolsa parallel bolmağan tórtmüyeshlik *trapeciya* delinedi.

Qaptal tárepleri ortaların tutastırishshi kesindi trapetciyanıń *orta sıziǵı* delinedi.

Tiykargı qásiyetler

1) Trapetciya orta sıziǵı ultanlarına parallel hám ultanları qosındısınnıń yarımına teń boladı.

2) Trapetciya maydanı $S = \frac{a+b}{2}h$, bul jerde a hám b -ultanları, h bolsa biyiklik (2-súwret).

SHEÑBER, DÓNGELEK

1°. Oń san R hám tegislikte O noqat berilgen bolsın. O noqattan R aralıqta jaylasqan noqatlardan quralǵan *figura sheñber* delinedi. O noqat *sheñber orayı*, oray menen sheñberdegi noqattı tutastırishshi kesindi *radius*, R san bolsa *radius uzınlıǵı* delinedi. Sheñberdegi eki noqattı tutastırishshi kesindi *xorda*, oraydan ótiwshi xorda bolsa *diametr* delinedii.

Tegisliktiń sheñber menen shegaralangan shekli bólimi *dóñgelek* dep ataladı.

Tiykargı munasibetler

- 1) $D=2R$, bul jerde: D — diametr uzınlıǵı.
- 2) $l=2\pi R$ — sheñber uzınlıǵı.
- 3) $S=\pi R^2$ — dóñgelek maydanı.
- 4) AB hám CD xordalar K noqatta kesilisse (3-súwret), $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ munasibet orınlanadı.
- 5) Xordanı teń ekige bóliwshi diametr sol xordaǵa perpendikulyar.
- 6) Teń xordalar oraydan teń aralıqlarda jaylasqan hám kerisinshe, oraydan ten aralıqta jaylasqan xordalar óz ara teń.

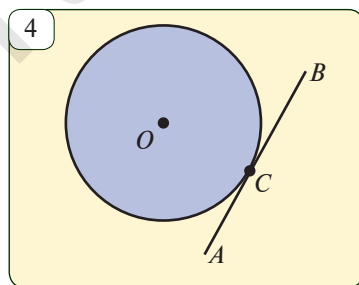
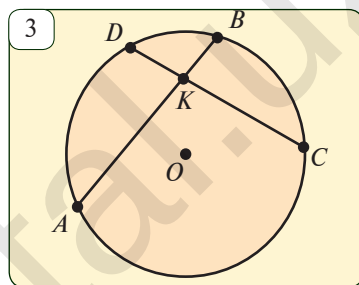
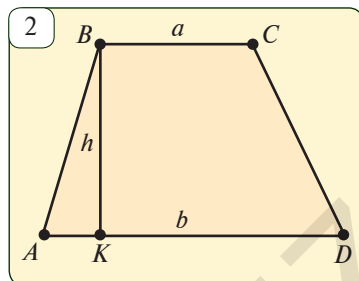
2°. Urınba

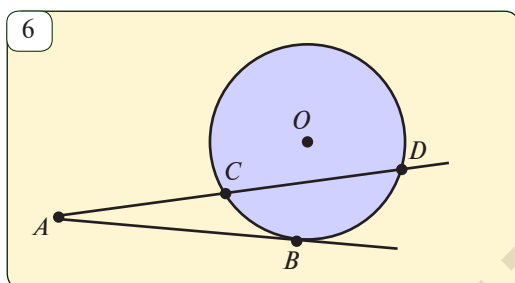
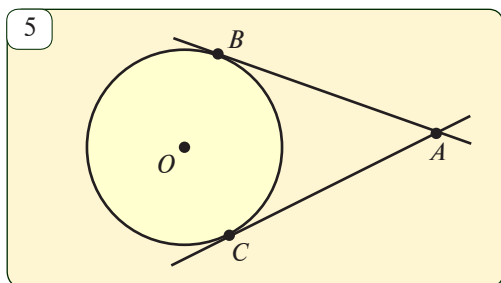
Shenber (yaki *dóñgelek*) menen jalǵız ulıwma noqatqa iye bolgan tuwrı sıziq urınba delinedi. Noqat bolsa urınıw noqatı delinedi (4-súwret).

Shenber menen 2 ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrı sıziq *kesiwshi* dep ataladı.

Urınbanıń qásiyetleri

- 1) Urınıw noqatına ótkizilgen radius urınbaǵa perpendikulyar.
- 2) Dóñgelek sırtındaǵı noqattan sol dóñgelekke eki urınba ótkiziw mümkin. Bul urınbalardıń kesindileri óz ara teń (5-súwret): $AB=AC$.
- 3) Eger AC kesiwshi bolıp, sheñberdi C hám D noqatlarda kesip ótse, AB bolsa urınba bolsa, $AB^2=AD \cdot AC$ teńlik orınlı (6-súwret).





3°. Orayliq hám ishley sızılğan múyeshler

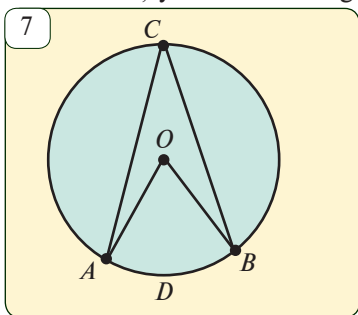
Sheńberdegi eki noqat járdeminde sheńber eki bólekke ajıraladı. Bul bólekler *doğalar* dep ataladı. Belgileniwi: ADB ; ACB .

AOB múyesh ADB doğağa tirelgen orayliq múyesh (7-*súwret*), ACB múyesh bolsa ADB doğağa tirelgen hám *ishki sızılğan múyesh* delinedi. Bul múyeshler arasında $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$

qatnas orınlı.

Demek, yarım sheńberge tirelgen ishki múyesh tuwrı múyesh boladı (8-*súwret*).

Bir doğağa tirelgen ishki sızılğan múyeshler óz ara teń boladı.



4°. Sektor hám segment

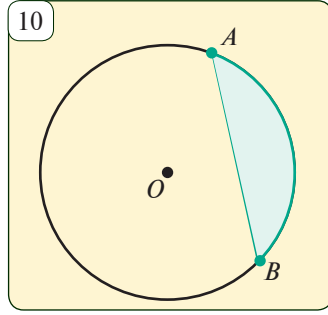
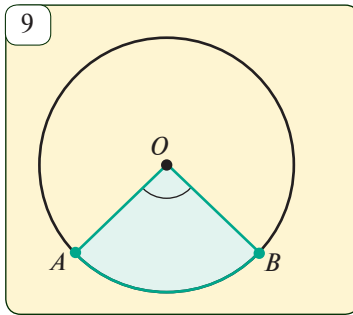
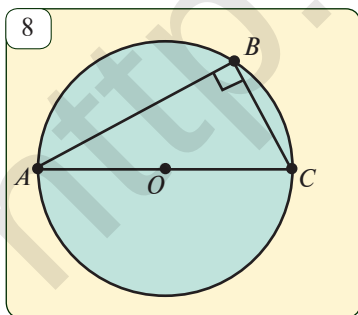
Dóńgelektiń eki radius penen shegaralangan bólegi sector delinedi (9-*súwret*). Sektor doğasınıń uzınlıǵı:

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}, \text{ bul jerde } \alpha \text{ — orayliq múyeshtiń gradus}$$

ólshemi.

$$\text{Sektor maydanı: } S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}; S = \frac{1}{2} R l.$$

Segment — dóńgelektiń xorda hám sol xorda tirelgen doğa menen shegaralangan bólegi (10-*súwret*).



$$\text{Segment maydanı: } S = S_{\text{sektor}} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha$$

DURIS KÓPMÚYESHLIKLER

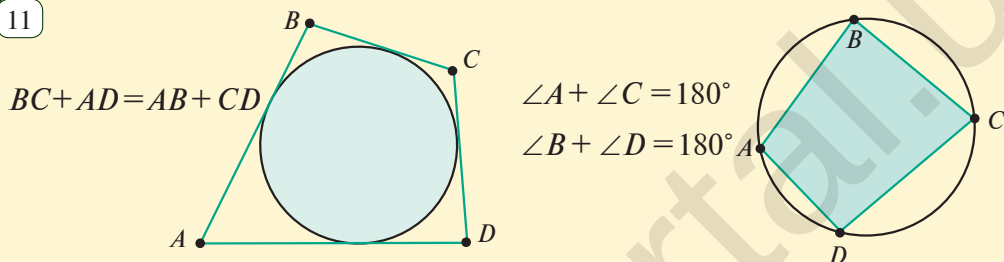
Duris n múyeshtiń tárepi a_n , perimetri P_n , maydanı S_n , ishley sızilǵan sheńber radiusı r_n , sırtlay sızilǵan sheńber radiusı R_n , ishki múyeshi α_n bolsa,

$$P_n = na_n, \quad S_n = \frac{1}{2} P_n r_n = \frac{1}{2} na_n r_n, \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Sheńberge sırtlay hám ishley sızilǵan tórtmúyeshlikler (II-súwret).

11



10 nan 99 ǵa shekem bolǵan natural sanlardıń kvadratlarınıń kestesi

onlıq birlik	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

Ayırım shamalardıń kestesi

$\pi \approx 3,1416$	$\sqrt{8} \approx 2,8284$
$\sqrt{2} \approx 1,4142$	$\sqrt{10} \approx 3,1623$
$\sqrt{3} \approx 1,7320$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$
$\sqrt{5} \approx 2,2360$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$
$\sqrt{6} \approx 2,4495$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \approx 0,3183$
$\sqrt{7} \approx 2,6457$	

Trigonometriyalik funkciyalarning mánislarini kestesi

α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	α°	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
1	0,0175	1,000	0,0175	57,3	46	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,0349	0,999	0,0349	28,6	47	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,0523	0,999	0,0524	19,1	48	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,0698	0,998	0,0699	14,3	49	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,0872	0,996	0,0875	11,4	50	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,1045	0,995	0,1051	9,51	51	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,1219	0,993	0,1228	8,14	52	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,11	53	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,31	54	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,67	55	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	56	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,507	57	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	58	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	59	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	60	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	61	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	62	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	63	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0,326	0,946	0,344	2,904	64	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	65	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	66	0,914	0,405	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	67	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	68	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,405	0,914	0,445	2,246	69	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	70	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	71	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	72	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	73	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	74	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	75	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	76	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	77	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	78	0,978	0,208	4,507	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	79	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	80	0,985	0,174	5,67	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	81	0,988	0,156	6,31	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	82	0,990	0,139	7,11	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	83	0,993	0,1219	8,14	0,1228
39	0,629	0,777	0,810	1,235	84	0,995	0,1045	9,51	0,1051
40	0,643	0,766	0,839	1,192	85	0,996	0,0872	11,4	0,0875
41	0,656	0,755	0,869	1,150	86	0,998	0,0698	14,3	0,0699
42	0,669	0,743	0,900	1,111	87	0,999	0,0523	19,1	0,0524
43	0,682	0,731	0,933	1,072	88	0,999	0,0349	28,6	0,0349
44	0,695	0,719	0,966	1,036	89	1,000	0,0175	57,3	0,0175
45	0,707	0,707	1,000	1,000	90	1,000	0,0000	-	0,0000

JUWAPLAR HÁM KÓRSETPELER

- 1-tema.** 5. 50° ; 130° ; 133° ; 97° . 6. 65° ; 70° ; 45° . 7. 105° ; 130° ; 125° . 8. 35° ; 35° ; 110° . 9. 94° ; 56° ; 30° . 10. 110° ; 130° ; 120° . 11. *Kórsetpe:* tórtúshmúyeshliktiń hár biriniń tárepleri dáslepki úshmúyeshliktiń sáykes tárepleriniń yarmına teń. 12. *Kórsetpe:* DF kesindi ABH úshmúyeshliktińde hám CEB úshmúyeshliktiń de orta sızıǵı boladı. 13. *Kórsetpe:* ANC hám CKA úshmúyeshliklerdiń hámde ishki almasıwshı múyeshlerdiń teńliginen paydalanıń.
- 2-tema.** 2. a) $\sqrt{34}$ yaki $\approx 5,8$ cm; b) $14\sqrt{2}$ m; c) $\approx 21,5$ cm; d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm; e) $\sqrt{2}$ cm; f) $\sqrt{13}$ cm. 4. a) $\sqrt{21}$ cm, $\sqrt{5}$ cm; b) $\sqrt{21}$ cm, $\sqrt{22}$ cm; c) $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{3}$ cm. 5. 12 cm. 6. a) $\sqrt{10}$ cm; b) $2\sqrt{5}$ cm; c) $\sqrt{33}$ m. 8. b), e) hám. f) 9. hámmesi. 10. 225. 11. 5 cm. 12. $\sqrt{27}$ m. 14. b) $\approx 4,3$ m; c). $\approx 2,23$. 15. a) 8,62 m; b) $\approx 5,97$ m. 16. $\approx 1,84$ m². 17. $\approx 105,6$ m. 18. $\approx 102,5$ km. 19. $\approx 48,4$ km.
- 3-tema.** 1. a) 11,7 m; b) 35 mm; c) 6,2 km; d) 172 cm; e) $4(x-1)$ cm; f) $(4x+2)$ m; g) $(13x+2)$ km; h) $(6y-8)$ cm; i) $8x$ km. 2. a). $\approx 7,967$ cm; b) $\approx 44,329$ m; c) $\approx 409,86$ mm. 3. a) Awa; b) Joq; c) Awa; d) Awa. 4. 0,8 m; 24,64 m²; 21,12 m². 5. ≈ 50 máрта. 7. 17,5 cm; 10,5 cm; 38,1 cm; 59,1 cm. 8. 91,5 m.
- 4-tema.** 1. c. 2. a) C; b) A; 3. 8 ge, 2,4 m. 5. $\approx 53,4$ m. 6. $\approx 19,25$ m². 9. 12 ta 10. Birinshisinde. 11. 80 ta. 12. 7 dm². 14. a) 180 dm³; b) 105 cm³ c) 1364 cm³. 15. 1,8 m³. 16. a) 22 cm; b) 20 cm hám 24 cm²; c) 96 cm³. 20. a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{21}$; c) $h = 2\sqrt{7}$. 21. a) $(384+80\sqrt{5})$ cm², 640 cm³; b) 84 cm², 36 cm³. c) $(12\sqrt{34}+156)$ m², 180 m³. d) $36564+306\sqrt{97}$ cm², 404838 cm³.
- 6-tema.** 2. Úshmúyeshlikler uqsas. 4. 5; $8\frac{1}{2}$. 5. 72; 162; 90.
- 7-tema.** 3. 12 m. 4. 7,5 cm; 12,5 cm; 15 cm. 6. 73,5 m²; 37,5 m². 7. Úshmúyeshlikler uqsas.
- 8-tema.** 3. a) 4,5; b) 10,5; c) 4,5. 4. a) 10; b) 6; c) 4,5. 5. a) 5 cm, 3,5 cm; b) $5\frac{5}{7}$ cm, $2\frac{2}{7}$ cm. 6. a) 8; b) 3,5; c) 12,5. 8. 12 cm.
- 9-tema.** 3. a) awa; b) joq; c) joq. 4. $2\frac{1}{3}$ cm, 9. 5. a) 15 cm; 20 cm; b) 24 cm; 18 cm; c) 144 cm²; 256 cm².
- 10-tema.** 2. hám. 3. a) hám c); d) hám e). 4. 108 cm². 5. 4 cm; 6 cm. 7. 4,8 cm. 9. 12.
- 11-tema.** 1. a) hám d); b) hám e); g) hám f). 2. 36 m yaki 20,25 m. 3. 12 cm; 14 cm. 5. $5\frac{5}{11}$ cm. 7. 4 m. 8. 16 m. 9. 8,4 m.
- 12-tema.** 3. a) 15; b) $3\frac{2}{11}$; c) $3\frac{5}{17}$. 4. 18 cm; 6 cm. 5. 29 dm². 6. 6 dm. 7. m:n. 10. Awa.
- 13-tema.** 1. $3\frac{3}{17}$ m; 13,6 cm. 7. n:m. 8. a) S: 4; b) S: 2; c) S: 4. 9. 30. 10. 57,75.
- 14-tema.** II. 1. 12 cm². 2. 8,4. 3. 2,4. 4. 24. 5. 8. 6. 1,6. 7. 18 mm. 8. a) 4; b) 10; c) 32. 9. Awa. Úshmúyeshlikler uqsaslıǵınıń 2-belgisi. 10. 16. 11. Awa, $k=2$. 12. 24 mm. 13. a) 36 cm²; b) 54 mm². 14. a) ; b) . 15. a) 7; b) 7. 16. 6 m. 17. 12 m.

15-tema. 1. a) (1;-1); b) (-2;3); c) (0;-4). 2. (-1;5). 4.(0;-3). 5. (-1;-8). 6. Awa. 7. Joq. 8. BB_1 ga.

16-tema. 1. a) Ox kósherine salıstırğanda simmetriyalı: (1;-2), (0;-2), (2;-2). b) Oy kósherine salıstırğanda simmetriyalı: (-1;2), (0;2), (-2;2). 2. Ox kósherine salıstırğanda. 4. Sáykes túrde: 2 ta, 4 ta, 2 ta, 1 ta, 1 ta. 8. BOB, MUM

17-tema. 1. (8;3). 3. (2;-5), (-2;-2), (6;-12). 6. Tuwrı tórtmúyeshlik, kvadrat, parallelogrammnıń simmetriya orayı — diagonalları kesilişiw noqatında, tuwrı sıziqtıń simmetriya orayı — onıń qálegen noqatında.

12. a) kósherge salıstırğanda simmetriyalı (birew).

b) oraylıq simmetriya, kósherge salıstırğanda simmetriyalı (4 de).

c) oraylıq simmetriya.

d) kósherge salıstırğanda simmetriyalı (5).

e) oraylıq simmetriya, kósherge salıstırğanda simmetriyalı (6)

13. a) kósherge salıstırğanda simmetriyalı:

M, X, V, T, Y, V, W, D, B, H, K, C, I, E, A. b) oraylıq simmetriya: N, S, Z, X, H, I.

14. a) 180° ga; b) Joq; c) Joq; d) 90° ga; e) Joq; f) 120° ga.

15. a) $\frac{360^\circ}{7}$; b) 60° ; c) 360° . 17. 15

18-tema. 5. 1 km 750 m. 8. 7,2 cm. 9. $k=\frac{1}{2}$ yaki $k=2$.

19-tema. 4. $k=2$. 5. 6 cm^2 ; 24 cm^2 . 6. 104 cm^2 . 7. Hár eki jağdayda $k=1$. 8. 1,2 m^2 . 9. 16 cm, 32 cm.

20-tema. 4. $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}$. 5. X_1X hám Y_1Y nurlardıń kesilişiw noqatı gomotetiya orayı.

6. $OX_1=2 \cdot OX$. 7. Kórsetpe: Temada sheshilgan máseleden paydalanıń.

21-tema. 4. a) $P_2=42$; $k=\frac{1}{2}$; b) $S_1=12$, $k=2$; d) $P_1=150\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$; e) $P_1=10$, $S_2=216$.

22-tema. 1. $\approx 6,94$ m. 2. 300 m. 3. ≈ 72 m. 4. 6,6 m.

23-tema. 1. 9. 2. $P_2=39$ dm. 3. 8 m. 4. 24 dm^2 . 6. Kórsetpe: ABC úshmúyeshlik sıziń, kópmúyeshlikler jasaw temasındağı 1-máseleden paydalanıp, sızilğan úshmúyeshlik táreplerinen ush márte kishi úshmúyeshlik jasań.

9. 72° ; 72° ; 36° . 11. 12 cm^2 . 12. 150 000 000 km. 13. a) Awa; b) Awa. 15. 6 cm, 12 cm, 18 cm. 16. 84 m.

24-tema. II. 1. 8 cm. 2. $4\frac{4}{9}cm$. 3. 48 m. 4. 4 cm; 0,5 cm^2 . 5. $5\frac{1}{3}m$. 6. 867 km. III. 7. 7,5 m.

8. 6 cm. 9. a) 7,5 cm; b) 6 cm; d) 16,2 cm. Qızıqarlı máseleler: 1. Ózgermeydi. 2.

a) Awa; b) Joq. 3. Kórsetpe: Sızgısh penen hár bir quwırshaqtıń uzınlıgıń ólsheń hám olardıń qatnasıń tabıń.

25-tema. 1. $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$. 5. a) 1; b) 1; d) 1. 6. 3,5 cm. 7. a) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; b) $\pm \frac{\sqrt{15}}{4}$; d) 0. 8*. a) 30° ; b) 135° ; d) 150° .

26-tema. 2. 36 cm^2 . 3. 24 cm. 4. a) $6\sqrt{3}$; b) 30; d) $\frac{105\sqrt{3}}{4}$. 5. $(24+4\sqrt{3})$ cm; $(24+8\sqrt{3})$ cm^2 .

6. $10\sqrt{3}$ cm. 7. a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 8. ≈ 807 m². 9. ≈ 88 m.

10. 1000, 37°. 12. 2°. 13. 34°. 14. $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. 15. $R = 3\sqrt{3}$ cm; $BO = 6\sqrt{3}$.

16. 5 cm. 17. 12, $24\sqrt{3}$. 18. 20 cm, 200 cm². 19. 4, $16\sqrt{3}$. 20. 30°; 60°. 22. 12 cm; $4\sqrt{3}$ cm; $8\sqrt{3}$ cm. 23. 32 cm².

27-tema. 2. a) 6 cm²; b) 73,5 cm²; d) 6 cm². 3. 36 cm². 4. $49\sqrt{2}$ cm². 5. $54\sqrt{3}$ cm².

6. $2\frac{2}{3}$ cm; $4,5\sqrt{2}$ cm. 7. $S = \frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$. 8. $4,8\sqrt{3}$ cm.

28-tema. 2. a) $BC=6$; b) $AB=8\sqrt{2}$; d) $AC=7\sqrt{2}$. 3. a) $\sin C = \frac{1}{3}$; b) $\sin A = \frac{7}{16}$; d) $\sin B = \frac{2}{3}$. 4. 4,8 dm. 5. 30° yoki 150°. 6. Múmkín. 7. $AB \approx 21,1$ m; $\angle B \approx 37^\circ$, $\angle C \approx 76^\circ$. 8. 76°; 26,1 cm; 23,8 cm.

29-tema. 2. a) $\sqrt{13}$ cm; b) 4 m; d) $\sqrt{283}$ dm. 3. $\frac{1}{5}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{5}{7}$. 4. $2\sqrt{13}$ cm yoki $2\sqrt{109}$ cm. 5. $\sqrt{31}$ cm, $\sqrt{91}$ cm. 6. $\sqrt{109}$ cm, $\sqrt{39}$ cm.

7. Kórsetpe: ADB hám BDC úshmúyeshliklerge kosinuslar teoremasın qollap, a^2 hám c^2 ni tabıń, sońınan bul teńliklerdi aǵzama aǵza qosıń. 8. $\frac{\sqrt{106}}{2}$ cm; $\frac{\sqrt{151}}{2}$ cm; $\frac{\sqrt{190}}{2}$ cm.

30-tema. 1. $\angle B$ va $\angle C$. 2. AB hám BC . 3. a) súyir múyeshli; b) tuwrı múyeshli; d) doǵal múyeshli. 4. a) $8\frac{1}{8}$; b) $8\frac{1}{8}$; d) $24\frac{1}{6}$; e) $\frac{35\sqrt{6}}{24}$. 6. Kórsetpe: Sinuslar teoremesınan paydalanıń. 7. Kórsetpe: 6-máselege uqsas sheshiledi.

8. Kórsetpe: Sinuslar teoremesınan paydalanıń.

31-tema. 1. a) $10\sqrt{3}$; b) $28\sqrt{2}$; d) 12; e) $\approx 0,3064$. 2. a) -2 ; b) 0; d) 2. 3. a) 8; b) 24; d) 8; e) 0. 5. a) $-7,5$; d) 0. 6. $a \perp b$, $c \perp d$.

32-tema. 1. a) $\alpha=90^\circ$, $c=5\sqrt{2}$; b) $\gamma \approx 45^\circ$; $a \approx 27,3$, $b \approx 24,5$; d) $\alpha=20^\circ$; $b \approx 65,8$; $c \approx 88,6$; e) $\gamma=119^\circ$; $a \approx 8,1$; $b \approx 5,8$. 2. a) $c \approx 5,29$; $\alpha \approx 79^\circ 6'$; $\beta \approx 138^\circ 21'$; b) $c \approx 53,09$; $\alpha \approx 11^\circ 39'$; $\beta \approx 38^\circ 21'$; d) $a \approx 19,9$; $\beta \approx 58^\circ 19'$; $\gamma \approx 936^\circ 41'$; e) $a \approx 22,9$; $\beta \approx 21^\circ$; $\gamma \approx 15^\circ$. 3. a) $\alpha \approx 29^\circ$; $\beta \approx 47^\circ$; $\gamma \approx 104^\circ$; b) $\alpha \approx 54^\circ$; $\beta \approx 13^\circ$; $\gamma \approx 113^\circ$; d) $\alpha \approx 34^\circ$; $\beta \approx 44^\circ$; $\gamma \approx 102^\circ$; e) $\alpha \approx 39^\circ$; $\beta \approx 93^\circ$; $\gamma \approx 48^\circ$.

33-tema. 1. a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 16 cm; d) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. 2. $4\sqrt{2}$ m; 8 m va $4+4\sqrt{3}$ m. 3. $50\sqrt{3}$ kg. 4. 14 cm. 5. $2\sqrt{14}$ cm. 6. $6\sqrt{3}$ cm. 7. 50 cm.

34-tema. 1. $\approx 10,8$ m. 2. ≈ 15 m. 3. $\approx 43,4$ m. 4. $\approx 35^\circ$. 5. $\approx 73,2$ m. 6. ≈ 49 m. 7. Asfalt jayılǵan.

35-tema. II. 1. $3\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$. 2. $\frac{111}{120}$, 0,89; $-0,65$. 3. $2\sqrt{7}$ cm; $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ cm. 4. $30\frac{1}{30}$ cm. 5. 28 cm. 6. 8 cm²; $(4+4\sqrt{5})$ cm; $h_a=4$ cm, $h_b=0,8\sqrt{5}$ cm. 7. $2\sqrt{13}$. 8. a) súyir múyeshli; b) tuwrı múyeshli, d) doǵal múyeshli. 9. 63 cm². 10. $\approx 3,7$ cm. 11. 7 cm. 12. 6. 13. 0. 14. -9 . 15. 135° . 16. $OC \approx 9,6$. 17. $(24+24\sqrt{3})$ cm. 18. 5. III. 1. $\approx 109^\circ$. 2. $\gamma=100^\circ$, $a \approx 3,25$; $c \approx 6,43$. 3. 6,25; 14,76.

36-tema. 2. a) Hár qanday úshmúyeshlik sheńberge ishley sızılıwı múmkín. b) Qarama-qarsı múyeshliriniń qosındısı 180° bolǵan tórtmúyeshlikler. 3. Bir doǵaǵa urınǵan múyeshleri teń. 4. 10 cm. 5. 672 cm². 6. a) $10\sqrt{3}$ cm; b) $10\sqrt{2}$ cm; d) $10\sqrt{2}$ cm; $10\sqrt{2}$ cm; 20 cm. 7. 8 cm. 8. $\triangle ABF$ da, $\angle BAF + \angle AFB = 90^\circ$, $\angle ABF = 90^\circ$. Demek, AF — diametr. 9. Qarama-qarsı múyeshliriniń qosındısı

180° , ya'niy she'berge ishley sızıw múmkin. **10. Kórsetpe:** Bir últan hám bir qaptal táreptiń orta perpendekulyar kesisken noqat she'ber orayı boladı.

37-tema. **2.** 7,2 cm. **3.** a) 16,6; b) 22; d) 22,6. **4.** a) 2,5; b) 3,5; d) 2. **8.** 6 cm.

38-tema. **3.** a) 60° ; b) 108° ; d) 120° ; e) 144° ; f) 160° . **4.** a) 120° ; b) 72° ; d) 120° ; e) 36° ; f) 30° . **5.** a) 3; b) 4; d) 8; e) 12.

39-tema. **1.** 3 cm hám $3\sqrt{2}$ cm. **2.** $\sqrt{3}$ hám $2\sqrt{3}$. **7.** a) 6; b) 12; d) 10; e) 20; f) 5.

40-tema. **3.** 8 cm; $8\sqrt{2}$ cm; $8\sqrt{3}$ cm; $8\sqrt{2}+\sqrt{3}$ cm; 16 cm.

4. cm; **5.** a) $20\sqrt{2}$ cm; b) 40 cm. **6.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm.

41-tema. **I.** $\frac{8\sqrt{6}}{3}$; **2.** D; **3.** D; **4.** B; **5.** B; **6.** E; **7.** E. **III.** **1.** $\sqrt{3}:4$; $6\sqrt{3}$. **2.** $3:4$. **3.** a) $\approx 5,780$ cm; b) $\approx 4,142$ cm; d) $\approx 2,679$ cm. **4.** $S=\sqrt{2}R^2$. **5.** 24 cm^2 . **IV.** **1.** 4 cm; 13 cm. **2.** a) 80 cm; b) $20\sqrt{2}-\sqrt{3}$ cm; $40\sqrt{2}-\sqrt{3}$ cm; d) 200 cm^2 . **3.** $4\sqrt{3}$ cm; 8 cm. **4.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2$.

42-tema. **2.** a) 3 márte artadı; b) 6π cm ge artadı; d) 3 márte kemeyedi; e) 6π cm ge kemeyedi. **3.** 6369 km. **4.** a) $\frac{2\pi\sqrt{3a}}{3}$; b) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; d) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **5.** a) πa ; b) $\pi c(\sqrt{2}-1)$; d) $\pi c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. **6.** 1,5 m. **7.** 66348 márte.

43-tema. **1.** a) π cm; b) $1,5\pi$ cm; d) 3π cm; e) 4π cm. **2.** a) $\frac{2\pi}{9}$; b) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{5\pi}{12}$. **3.** a) $\approx 69^\circ$; b) 120° ; d) 150° . **4.** a) $\frac{5\pi}{8}$ cm; b) 2π cm; d) $\frac{15\pi}{4}$ cm; **5.** a) 4π ; b) 16π . **7.** 2.

44-tema. **3.** k^2 márte artadı; b) k^2 márte kemeyedi. **4.** $6,25\pi\text{ cm}^2$; $12,5\pi\text{ cm}^2$. **5.** $2,25\pi\text{ cm}^2$; $9\pi\text{ cm}^2$. **6.** $(\pi-2)R^2$. **7.** $21,25\pi\text{ cm}^2$. **8.** $18,75\text{ cm}^2$.

45-tema. **3.** a) $\frac{49}{12}\pi\text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-3)}{12}\text{ cm}^2$; b) $6,125\pi\text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-2\sqrt{2})}{8}\text{ cm}^2$; d) $\frac{49\pi}{3}\text{ cm}^2$; $\frac{49(4\pi-3\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$; e) $\frac{49\pi}{4}\text{ cm}^2$; $\frac{49(\pi-2)}{4}\text{ cm}^2$. **4.** a) $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; b) $a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$; d) $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{2}a^2$; **5.** $\pi\text{ cm}^2$; $3\pi\text{ cm}^2$; $5\pi\text{ cm}^2$; $7\pi\text{ cm}^2$. **6.** $\frac{25(2\pi-3\sqrt{3})}{3}\text{ cm}^2$; $\frac{25(10\pi-3\sqrt{3})}{3}\text{ cm}^2$; **7.** $\frac{75(4\pi-3\sqrt{3})}{2}\text{ cm}^2$. **8.** $S_1 < S < S_2$; $300\text{ cm}^2 < 314\text{ cm}^2 < 321,48\text{ cm}^2$.

46-tema. **1.** She'berdiń úlken. **2.** $\frac{160}{3}\pi\text{ cm}^2$. **3.** $5,76\pi\text{ cm}^2$. **4.** $8(\pi-2)\text{ cm}^2$. **6.** $6\pi\text{ cm}^2$; $10\pi\text{ cm}$.

47-tema. **II.** **1.** $6\sqrt{2}+\sqrt{2}$. **2.** $\frac{8\pi}{3}\text{ dm}$. **3.** 30 cm. **4.** 90° . **5.** 3. **6.** π va $6,25\pi$. **7.** $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{2\pi-3\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{3\pi}{8}$. **9.** $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{6}a^2$. **10.** $1,5\pi$. **11.** 7. **12.** $\approx 9\pi-26,04$. **13.** π . **14.** $54\sqrt{3}-24\pi$. **15.** $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. **III.** **2.** $8\sqrt{3}\text{ cm}$. **3.** a) $\frac{18}{\pi}\text{ cm}$; b) $\frac{216}{\pi}\text{ cm}^2$; d) $\frac{216\pi+81\sqrt{3}}{\pi^2}\text{ cm}^2$.

48-tema. **3.** $5\sqrt{2}\text{ cm}$. **4.** 12 cm. **5.** 44 m, 60 m. **7.** 1:7. **8.** $AB\cos\alpha$.

49-tema. **1.** a) 30 cm, 12 cm; b) 9 cm, 12 cm, 21 cm; d) 3 cm, 15 cm, 3 cm, 21 cm. **3.** 6 cm; 10,5 cm. **4.** 9 cm, 12 cm, 15 cm, 18 cm. **5.** 60° . **6.** 21 cm. **7.** 20 cm.

50-tema. **1.** Kórsetpe: $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$. **2.** 25 cm, 15 cm, 20 cm. **3.** $9\frac{3}{5}\text{ cm}$.

4. a) 5, 4; b) 24, 25; d) 8, 10. **5.** 16:25. **6.** $56,16\text{ cm}^2$. **7.** 60 cm^2 . **8.** $\frac{2}{3}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}$.

51-tema. **2.** Kórsetpe: a) katetleri a hám b bolğan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań; b) gipotenuzası a , bir kateti b bolğan tuwrı múyeshli úshmúyeshlik jasań.

- 3. Kórsetpe:** Katetleri $AB=BC=1$ bolgan $DABC$ jasañ. Soñgı kateti $CC_1=1$ hám $\angle C_1=90^\circ$ bolgan $DBCC_1$ jasañ hám t.b. **4.** a) 20; b) 45; d) 37,5.
- 5.** $225\pi \text{ cm}^2$. **6.** 180 cm^2 . **7.** 25:9. **9.** $OC \geq OD$ bolğanı ushın teñsizlik hár qashan tuwrı.
- 52-tema.** **1.** a) 6,25; b) 12; d) 0,25. **2.** a) 8 cm; b) 2,5 cm; d) 0,9 cm. **3.** a) 4 dm; b) 4 dm. **4.** 8 cm. **6.** 9 dm; 16 dm.
- 53-tema.** **1.** 10 cm. **2.** 2 cm. **3.** a) 2,5; b) 4; d) 2. **4.** a) $4\sqrt{6}-1$ cm; b) 6 cm. **5.** 1:6. **6.** 6 cm. **7.** 3. **8.** 1:4.
- 54-tema.** **II.** **1.** 18 cm; 32 cm. **2.** 4 cm; **3.** 8 cm; **4.** 6,4 dm. **5.** 8 cm. **6.** 1,5. **7.** 5. **8.** 6. **9.** 45 dm^2 . **10.** 4 cm. **11.** 8 cm. **12.** 6. **13.** 60° . **14.** 45° . **15.** 4:9.
- III.** **1.** 8 cm. **2.** 5 dm. **3.** 4 cm; 8 cm.
- 55-tema.** **1.** a) 9; b) 4 cm^2 ; d) 3,5 cm; e) $\frac{1}{2}TB - CA$; f) 0,2. **2.** $\triangle CMH \sim \triangle BCA$.

Sabaqlıqtı düziwde paydalanılğan hám qosımsha üyreniwge usınıs etilip atırğan oqıw ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A'zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. «O'qituvchi», 1993.
2. Александров А.Д. "Геометрия -9", учебник, Москва. Просвещение", 2013.
3. Атанасян С. "Геометрия 7-9 классы", учебник, Москва. Просвещение", 2002.
4. Бевз Г.П. и др. "Геометрия 9" учебник, Киев, "Вежа", 2007
5. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 8" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
6. Истер О.С. "Геометрия 9" учебник, Киев, Освита, 2007.
7. Мерзляк А.Г. и др., "Геометрия 9" учебник, Харьков, Гимназия, 2008.
8. Перельман Я.И. Қизикарли геометрия, Тошкент. Ўқитувчи, 1981.
9. Погорелов А.В. "Геометрия 7-9", учебник, Москва. Просвещение", 2004.
10. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп, Москва. Наука, 1993.
11. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/ Cole, Cengage Learning, 2011.
12. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
13. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
14. <http://www.uzedu.uz> - Xalq ta'limi vazirligining axborot ta'lim portali.
15. <http://www.eduportal.uz> - Multimedia markazi axborot ta'lim portali.
16. <http://www.matematika.uz> - Masofadan turib o'qitish sayti (uzbek tilida).
17. <http://www.problems.ru/> Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. <http://www.ixl.com> - Masofadan turib o'qitish sayti (ingliz tilida).
19. <http://www.mathkang.ru> - "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).
20. <http://www.khanakademy.org> - "Xon akademiyasi" masofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida)
21. <http://www.brilliant.org> – Matematikadan asofaviy ta'lim sayti (ingliz tilida).
22. <http://www.markaz.tdi.uz> - Ta'lim sifatini baholash bo'yicha xalqaro tadqiqotlarni amalga oshirish milliy markazi sayti.
23. <http://www.oecd.org/pisa> - Iqtisodiy hamkorlik va taraqqiyot tashkiloti sayti, PISA – tadqiqotlarning ochiq materiallari.

Xaydarov Boxodir Qayumovich

Geometriya: 9-klass ushın sabaqlıq/B.Q.Xaydarov, E.S.Sariqov, A.Sh.Qo'chqorov.
— T.:, 2019.—160 b.

Q.Xaydarov, Boxodir.

ISBN 978-9943-5875-1-9

UDK 514.1(075)

BBK 22.151ya7

Boxodir Qayumovich Xaydarov,
Ergashvoy Sotvoldiyevich Sariqov,

Atamurod Shamuratovich Qo'chqorov

GEOMETRIYA

9-klass ushın sabaqlıq

Tórtinshi basılım
(Qaraqalpaq tilinde)

"Huquq va Jamiyat" nashriyoti, 2019
Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko'chasi.

Original-maket "Huquq va Jamiyat" nashriyoti tomonidan tayyorlandi.

Muharrir	<i>G.Uzaqbaeva</i>
Badiiy muharrir	<i>A.Umarova</i>
Bosh dizayner	<i>H&J dizayn jamoasi</i>
Sahifalovchi	<i>Q.Atabaev</i>

Litsenziya AI №022, 27.10.2018 yil.

Basıwǵa ruqsat etildi waqtı 20.08.2019. Kólemi 70x100¹/₁₆. Tayms garniturası.

Kegli 10. Ofset usılında basıldı. Shartlı baspa tabaǵı 11,7.

Esap baspa tabaǵı 11,83. Nusqası 11 915. 19-17 sanlı buyırtpa.

"Huquq va Jamiyat" nashriyotining matbaa bo'limi
Toshkent, Yunusobod 6, Jumamasjid ko'chasi.
Guvohnoma №10-2750, 13.06.2017 yil

Ijarağa berilgen sabaqlıq jaǵdayın kórsetiwshı keste

T/r	Oqıwshınıń atı hám familiyası	Oqıw jılı	Sabaqlıqtıń alıńandaǵı jaǵdayı	Klass basshı-sınıń qolı	Sabaqlıqtıń tapsırıl-ǵandaǵı jaǵdayı	Klass basshı-sınıń qolı
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Sabaqlıq ijaraga berilip, oqıw jılı aqırında qaytarıp alıńanda joqarıdaǵı keste klass basshısı tárepinen tómendegi bahalaw ólshemlerine tiykarlanıp toltırıladı.

Taza	Sabaqlıqtı birinshi ret paydalanıwıǵa berilgendeǵı jaǵdayı.
Jaqsı	Muqaba pütün, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen ajıralmaǵan. Barlıq betleri bar. Jırtılmaǵan, betleri almasırılmaǵan, betlerinde jazıw hám sıızqlar joq.
Qanaatlandırarlı	Muqaba jelngen, biraz sıızılıp, shetleri qaytılǵan, sabaqlıqtıń tiykarǵı bóliminen alınıp qalıw jaǵdayı bar, paydalanıwshı tárepinen qannatlanarlı qálpine keltirilgen. Alınǵan betleri qayta islengen, ayırım betleri sıızılǵan.
Qanaatlandırarsız	Muqabaǵa sıızılǵan, jırtılǵan, tiykarǵı bóliminen ajıralǵan yamasa pütünley joq, qanaatlandırarsız islengen. Betleri jırtılǵan, betleri tolıq emes, sıızıp, boyap taslanǵan. Sabaqlıqtı qayta tiklewge bolmaydı.