

MATEMATIKA



ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY GEOMETRIÝA I BÖLÜM

Orta bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylary üçin derslik

1-nji neşir

Özbekistan Respublikasynyň Halk bilimi
ministrligi tarapyndan tassyklanan

DAŞKENT
2017

UO'K 51(075.3)

KBK 22.1

M 51

Algebra we analiziň esaslary bölüminiň awtorlary:

M.A. Mirzaahmedow, Ş.N. Ismailow, A.K. Amanow.

Geometriýa bölüminiň awtory:

B.K. Haýdarow

Syn ýazanlar:

R.B. Beşimow – Mürze Ulugbek adyndaky Özbekistan Milli Uniwersitetiniň "Geometriýa we topologiýa" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň doktory.

M.D. Pardayewa – Respublikan Tälim merkeziniň direktorynyň orunbasary.

D.E. Dawletow – Nyzamy adyndaky DDPU "Matematikany okatmagyň metodikasy" kafedrasynyň müdiri, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty

G.M. Rahimow – DIOHMII ýanyndaky akademik liseýiň mugallymy, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

A.A. Akmalow – Daşkent şäher HTIGTHKI prorektory, pedagogika ylymlarynyň kandidaty, dosent.

Dersligiň "Algebra we analiziň esaslary" bölümünde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:



– meseläni çözmek (subut etmek) başlandy



– meseläni çözmek (subut etmek) gutardy



– barlag işleri we test (synag) gönükmeleri



– soraglar we ýumuşlar



– esasy maglumat



– çylşyrymlyrak gönükmeler

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.
ISBN 978-9943-5056-2-9

© Ähli hukuklar goralan

© "EXTREMUM PRESS" JÇJ, 2017

I BAP



TOPLUMLAR. MANTYK



TOPLUM DÜŞÜNJESI, TOPLUMLAR ÜSTÜNDE AMALLAR. DOLDURYJY TOPLUM

Toplum matematikanyň başlangyç düşüňjelerinden bolup, ony özünden ýönekeýrak düşüňjeler arkaly häsiýetlendirip bolmaýar. Durmuşda mälüm obýektler toplumyny bir bitewi zat diýip garamaly bolýar. Aýdaly, biolog haýsy-da bolsa ülkedäki ösümlikler we haýwanat dünýäsini öwrenmek bilen, ol jandarlary görnüşler boýunça, görnüşleri bolsa uruglar boýunça klaslara bölýärler. Her bir görnüş bir bitewilik diýlip garalýan jandarlar toplumydyr.

Toplum islendik tebigatly obýektlerden düzülen bolmagy mümkin. Meselem, Aziýa kontinentindäki ähli derýalar ýa-da sözlükdäki ähli sözler toplum bolup biler.

Toplumlaryň matematiki häsiýetnamasyny bermek üçin toplum düşüňjesini görnükli nemes matematigi **G.Kantor** (1845–1918) aşakdaky ýaly girizipdir:

«Toplum pikirde bir bitewi diýlip garalýan köplükdir».

Toplumy düzyän obýektlere onuň *elementleri* diýilýär.

Toplum, adatda, amatlylyk üçin, latyn elipbiýiniň baş harplary, meselem, $A, B, C, \dots$, onuň elementleri bolsa kiçi harplary, meselem, $a, b, c, \dots$ bilen belgilenýär.

Elementleri $a, b, c, \dots$ bolan A toplum ýaýlaryň kömeginde $A = \{a, b, c, \dots\}$ ýaly ýazylyar.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ ýazuwlar bir toplumy aňladýar.

Meselem, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – onluk hasaplama ulgamyndaky sifrler toplumy, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – inlis dilindäki çekimli harplar toplumy. 10-njy a synpdaky okuwçylar toplumyny $\{a_1, a_2, \dots, a_{30}\}$ bilen belgilesek, a_1 – žurnaldaky birinji nomerli okuwçyny, $\dots$, a_{30} – žurnaldaky otuzynjy nomerli okuwçyny aňladýar.

x -in A toplumyn elementidigi $x \in A$ ýaly, elementi daldigi bolsa $x \notin A$ ýaly ýazylýar we birinji ýagdaýda " x element A -ga degişli", ikinji ýagdaýda " x element A -ga degişli däl" diýlip okalýar.

Meselem, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ üçin $4 \in A$, emma $9 \notin A$.

Eger toplumy düzyän elementler çakli sanda bolsa, beýle toplum **çakli toplum**, tersine bolanda **çaksiz toplum** diýilýär.

Meselem, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ toplum çakli, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ - ähli natural sanlar toplumy bolsa çaksiz toplumdur.

$n(A)$ diýip çakli A toplumyn ähli elementleriniň sanyny belgilesek, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ toplumyn ähli elementleriniň sany $6 = a$ deň bolany üçin, $n(A) = 6$ bolýar.

Çaksiz topluma ýene bir mysal hökmünde 13-den kiçi bolmadyk ähli natural sanlar toplumyny getirmek bolýar.

Ýekeje-de elemente eýe bolmadyk topluma **boş toplum** diýilýär we $\emptyset$ ýaly belgilenýär.

$\emptyset$ toplum hem çakli hasaplanýar we onuň üçin $n(\emptyset) = 0$.

Çaksiz A toplum üçin $n(A) = \infty$ belgilemek kabul edilen.

Eger A toplumyn hemme elementleri B topluma degişli bolsa, A toplum B toplumyn **bölek toplumy** diýilýär we $A \subseteq B$ ýaly ýazylýar.

Şeýle ýagdaýda " A toplum B -da ýatýar" ýa-da " A toplum B -niň bölegi" hem diýlip atlandyrylýar.

$\{a\}$ toplum $\emptyset$ we $\{a\}$, ýagny iki bölek topluma eýe.

$\{a, b\}$ toplum bolsa dört: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ we $\{a, b\}$ bölek toplumlara eýe.

Meselem, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, çünki birinji toplumyn hemme elementleri ikinji toplumyn hem elementleri bolýar.

A toplumyn B topluma degişli bolmadyk elementleri bar bolsa, A toplum B -niň bölek toplumy bolup bilmeýär we bu ýagdaý $A \not\subseteq B$ ýaly ýazylýar.

Meselem, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ bolsun. $1 \notin B$ bolany üçin $A \not\subseteq B$.

Görnüşi ýaly, $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ gatnaşyklar ýerlikli.

$A \subseteq B$ we $B \subseteq A$ bolsa, bu toplumlar şol bir hili elementlerden ybarat bolup, olar **deň** (üstme-üst düşýän) **toplumlar** diýlip atlandyrylýar hem-de bu $A = B$ ýaly ýazylýar.

Meselem, dogry üçburçluklar toplumy ähli burçlary özara deň bolan üçburçluklar toplumy bilen üstme-üst düşýär. Munuň sebäbi islendik dogry üçburçlugyň ähli burçlary deň we tersine, eger üçburçlukda ähli burçlar deň bolsa, ol dogry bolýar.

Esasy sanly toplumlary ýatladyp geçýäris:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – natural sanlar toplumu; $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ – bitin

sanlar toplumu; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ – rasional sanlar toplumu;

$\mathbb{R}=(-\infty; +\infty)$ – hakyky sanlar toplumu.

Toplumlaryň birleşmesi we kesişmesi

1) A, B toplumlaryň **birleşmesi** diýip bu toplumlardan iň bolmanda biriniň elementi bolan elementlerden düzülen topluma aýdylýar.

A, B toplumlaryň birleşmesi $A \cup B$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $P = \{1, 3, 4\}$ we $Q = \{2, 3, 5\}$ üçin $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) A, B toplumlaryň **kesişmesi** diýip bu toplumlaryň umumy elementlerinden düzülen topluma aýdylýar.

A, B toplumlaryň kesişmesi $A \cap B$ ýaly belgilenýär.

Meselem, $P = \{1, 3, 4\}$ we $Q = \{2, 3, 5\}$ üçin $P \cap Q = \{3\}$.

Umumy elementlere eýe bolmadyk iki topluma **özara kesişmeýän** toplumlar diýilýär.

1-nji mysal. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ we $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ toplumlar üçin aşakdakylary anyklaň:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| a) çyn ýa-da ýalandygyny: | I $4 \in M$; | II $6 \notin M$; |
| b) toplumlary tapyň: | I $M \cap N$; | II $M \cup N$; |
| c) çyn ýa-da ýalandygyny: | I $M \subseteq N$; | II $\{9, 6, 3\} \subseteq N$. |

 a) 4 sany M toplумыň elementi bolmadygy üçin $4 \in M$ gatnaşyk ýalan. 6 sany M toplумыň elementi bolmandygy üçin $6 \notin M$ gatnaşyk çyn.

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, çünki diňe 3 we 9 sanlar iki toplумыň hem elementleridir. $M \cup N$ toplumu tapmak üçin ýa-da M -e, ýa-da N -e degişli bolan elementleri ýazýarys: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ gatnaşyk ýalan, çünki M toplumda N -e degişli bolmadyk elementleri bar. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ gatnaşyk çyn, çünki N -de $\{9, 6, 3\}$ toplумыň elementleri bar. 

Gönükmeler

1. $\in, \notin, \subseteq$ belgilerden peýdalanyp, ýazyň:

- 5 sany D toplумыň elementi;
- 6 sany D toplумыň elementi däl;
- $\{2, 5\}$ toplum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ toplумыň bölek toplумы;
- $\{3, 8, 6\}$ toplum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ toplумыň bölek toplумы däl;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ toplumlar üçün $A \cup B$ we $A \cap B$ -leri tapyň.
3. Toplumlaryň elementleri sanyny tapyň:
a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$;
b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
c) $A \cap B$;
d) $A \cup B$.
4. Toplumlaryň çäkli ýa-da çäksizdigini anyklaň:
a) 10-dan uly emma 20-den kiçi natural sanlar toplumy;
b) 5-den uly bolan natural sanlar toplumy.
5. Toplumlardan haýsylary özara kesişmeýär:
a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Käbir ýagdaýlarda toplumy bermek üçin onuň elementleri üçin ýerlikli, başga elementler üçin ýerlikli bolmadyk *harakteristik häsiýet* görkezilýär. Eger x element P häsiýete eýe diýen pikir gysgaça $P(x)$ diýlip ýazylyan bolsa, P häsiýete eýe bolan ähli elementler toplumy $\{x|P(x)\}$ görnüşde belgilenýär.

Meselem, $A = \{x | -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ýazuw aşakdaky ýaly okalýar: "-2-den uly ýa-da deň hem-de 4-den kiçi ýa-da deň bolan ähli bitin sanlar toplumy".

Bu toplum sanlar okunda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



Görnüşü ýaly, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ we ol çäkli, munda $n(A) = 7$.

Edil şeýle $B = \{x | -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ ýazuw aşakdaky ýaly okalýar: "-2-den uly ýa-da deň hem-de 4-den kiçi bolan ähli hakyky sanlar toplumy".

Bu toplum sanlar okunda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



Görnüşü ýaly, $B = [-2, 4)$ we ol çäksiz, munda $n(B) = \infty$.

2-nji mysal. $A = \{x | 3 < x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsun.

- a) Bu ýazuw nähili okalýar?
- b) Bu toplumyň elementlerini atma-at ýazyp çykyň;
- c) $n(A)$ -ni tapyň.

- △ a) "3-den uly hem-de 10-dan kiçi ýa-da deň bolan ähli bitin sanlar toplumy";
 b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
 c) $n(A) = 7$. ▲

Gönükmeler

6. Toplumlardan haýsylary çäkli, haýsylary çäksiz:
 a) $\{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$;
 c) $\{x \mid x \geq 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$?
7. Ýazuwlary okaň:
 a) $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x \mid -2 < x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$;
 c) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{x \mid 5 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{Q}\}$.
 Eger mümkin bolsa, şu toplumlaryň elementlerini atma-at ýazyp çykyň.
8. Aşakdaky toplumlary ýazyň:
 a) "-100-den uly hem-de 100-den kiçi bolan ähli bitin sanlar toplumy";
 b) "1000-den uly bolan ähli hakyky sanlar toplumy";
 c) "2-den uly ýa-da deň hem-de 3-den kiçi ýa-da deň bolan ähli rasional sanlar toplumy".
9. Soraglara jogap beriň:
 a) $\{a, b, c\}$ we $\{a, b, c, d\}$ toplumlaryň ähli bölek toplumlaryny ýazyň. Olar näçe?
 b) Eger B toplum n sany elemente eýe bolsa, onda B toplum näçe bölek topluma eýe?
10. Haýsy ýagdaýlarda $A \subseteq B$ bolýar?
 a) $A = \emptyset$ we $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ we $B = \{8, 9\}$;
 c) $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ we $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;
 d) $A = \{x \mid 3 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Q}\}$ we $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{R}\}$;
 e) $A = \{x \mid -10 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$ we $B = \{z \mid 0 \leq z \leq 5, z \in \mathbb{Z}\}$;
 f) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$ we $B = \{y \mid 0 < y \leq 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Bizi 1-den uly ýa-da deň hem-de 8-den kiçi ýa-da deň bolan ähli natural sanlar toplumy gyzyklandyrýar we biz onuň bölek toplumlaryny garamakçy, diýip çak edeliň.

Adatda, munda $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$ toplum girizilýär we ol **uniwersal toplum** diýlip atlandyrylýar.

A toplumyň A' **dolduryjysy** diýip U uniwersal toplumyň A -ga degişli bolmadyk ähli elementleriniň toplumyna aýdylýar.

Meselem, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ uniwersal toplum bolsa, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ toplumyň **dolduryjysy** $A' = \{2, 4, 6\}$ toplum bolýar.

- Görnüşi ýaly,
- $A \cap A' = \emptyset$
 - $A \cup A' = U$
 - $n(A) + n(A') = n(U)$,

ýagny A we A' toplumlar umumy elementlere eýe däl hem-de olary düzýän ähli elementler U -ny emele getirýär.

3-nji mysal. Uniwersal toplum $U = \{\text{ähli natural sanlar}\}$ bolsa, C' -ni tapyň.

- a) $C = \{\text{ähli jübüt sanlar}\};$
 b) $C = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{Z}\}, U = \mathbb{Z}.$

- △ a) $C' = \{\text{Ähli täk natural sanlar}\};$
 b) $C' = \{x \mid x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}.$ ▲

4-nji mysal. $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\},$
 $B = \{x \mid -3 \leq x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdaky toplumyň elementlerini ýazyň:

- a) $A;$ b) $B;$ c) $A';$ d) $B';$
 e) $A \cap B;$ f) $A \cup B;$ g) $A' \cap B;$ h) $A' \cup B'.$

- △ a) $A = \{1, 2, 3, 4\};$ b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
 c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\};$ d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$
 e) $A \cap B = \{1\};$ f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
 g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\};$ h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}.$ ▲

Гөнүкмелер

11. C' -ni tapyň.

- a) $U = \{\text{iňlis dili harplary}\}, C = \{\text{çekimli harplar}\};$
 b) $U = \{\text{bitin sanlar}\}, C = \{\text{otrisatel bitin sanlar}\};$
 c) $U = \mathbb{Z}, C = \{x \mid x \leq -5, x \in \mathbb{Z}\};$
 d) $U = \mathbb{Q}, C = \{x \mid x \leq 2 \text{ ýa-da}, x \geq 8, x \in \mathbb{Q}\}.$

12. $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\},$
 $B = \{x \mid 5 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

- a) $A;$ b) $A';$ c) $B;$ d) $B';$
 e) $A \cap B;$ f) $A \cup B;$ g) $A \cap B'.$

13. $n(U) = 15, n(P) = 6, n(Q) = 4$ bolsa, aşakdakylary tapyň:

- a) $n(P');$ b) $n(Q).$

14. $U = \{x \mid 0 < x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leq x \leq 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary
 tapyň:

- a) B' b) C' c) A' d) $A \cap B$
 e) $(A \cap B)'$ f) $A' \cap C$ g) $B' \cup C$ h) $(A \cup C) \cap B'$

5-nji mysal. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4 \text{ sanynyň } 50\text{-den kiçi bolan kratnylary}\}$ we
 $Q = \{6 \text{ sanynyň } 50\text{-den kiçi bolan kratnylary}\}$ bolsun.

- a) P, Q toplumlaryň elementlerini ýazyň;
 b) $P \cap Q$ -ny tapyň;
 c) $P \cup Q$ -ny tapyň;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

△ a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,

$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;

b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;

c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;

d) $n(P \cup Q) = 16$ we $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Diýmek, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňlik ýerlikli eken. ▲

Gönükmeler

15. $U = \mathbb{N}$, $P = \{25\text{-den kiçi bolan düýp sanlar}\}$ we
 $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ bolsun.
 a) P toplumyň elementlerini ýazyň;
 b) $P \cap Q$ -ny tapyň;
 c) $P \cup Q$ -ny tapyň;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

16. $U = \mathbb{N}$, $P = \{30\text{-uň böljileri}\}$ we
 $Q = \{40\text{-yň böljileri}\}$ bolsun.
 a) P, Q toplumlarynyň elementlerini ýazyň;
 b) $P \cap Q$ -ny tapyň;
 c) $P \cup Q$ -ny tapyň;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

17. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4 \text{ sanynyň } 30 \text{ we } 60 \text{ sanlarynyň arasyndaky kratnylary}\}$ we
 $Q = \{6 \text{ sanynyň } 30 \text{ we } 60 \text{ sanlarynyň arasyndaky kratnylary}\}$ bolsun.
 a) P, Q toplumlaryň elementlerini ýazyň;
 b) $P \cap Q$ -ny tapyň;
 c) $P \cup Q$ -ny tapyň;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

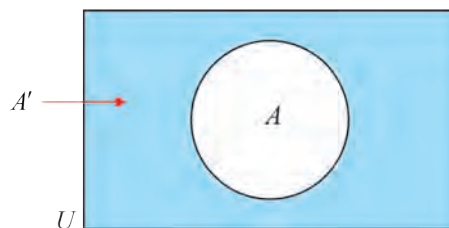
- 18.** $U = \{x \mid 0 < x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leq x \leq 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, aşakdakylary
 tapyň:
 a) B' ; b) C' ; c) A' ;
 d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
 g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.
- 19.** $U = \mathbb{Z}$, $C = \{y \mid -4 \leq y \leq -1, y \in \mathbb{Z}\}$ we
 $D = \{y \mid -7 \leq y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ bolsun.
 a) C, D toplumlaryň elementlerini ýazyň;
 b) $C \cap D$ -ni tapyň;
 c) $C \cup D$ -ni tapyň;
 d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.
- 20.** $U = \mathbb{N}$, $P = \{12\text{-niň böljileri}\}$, $Q = \{18\text{-iň böljileri}\}$ we
 $R = \{27\text{-niň böljileri}\}$ bolsun.
 a) P, Q, R toplumlaryň elementlerini ýazyň;
 b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
 III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
 V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
 c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup R$,
 lary tapyň.
- 21.** $U = \mathbb{N}$, $A = \{4 \text{ sanynyň } 40\text{-dan kiçi bolan kratnylary}\}$,
 $B = \{6 \text{ sanynyň } 40\text{-dan kiçi bolan kratnylary}\}$ we
 $C = \{12 \text{ sanynyň } 40\text{-dan kiçi bolan kratnylary}\}$ bolsun.
 a) A, B, C toplumlaryň elementlerini ýazyň;
 b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
 III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
 c) $A \cup B \cup C$ -ni tapyň;
 d) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) +$
 $+ n(A \cap B \cap C)$ deňligiň ýerine ýetirilişini barlaň.
- 22.** $U = \mathbb{N}$, $A = \{6 \text{ sanynyň } 31\text{-den kiçi bolan kratnylary}\}$,
 $B = \{30\text{-uň böljileri}\}$ we
 $C = \{30\text{-dan kiçi bolan diýp sanlar}\}$ bolsun.
 Toplumlaryň elementlerini ýazyň:
 a) A, B, C ;
 b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
 III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
 c) $A \cup B \cup C$ -ni tapyň;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ deñligiň ýerine ýetirilişini barlaň.

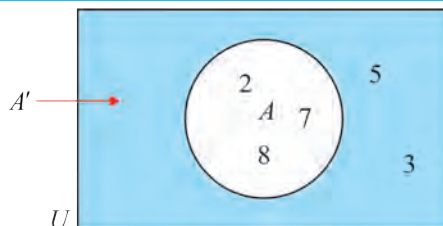
Wenn diagrammalary

Toplumlary *Wenn diagrammalarynyň* kömeginde şekillendirmek maksada laýyk. Wenn diagrammasynda U uniwersal toplum – gönüburçluk, toplum bolsa şu gönüburçlugyň içinde ýatýan tegelek ýaly şekillendirilýär.

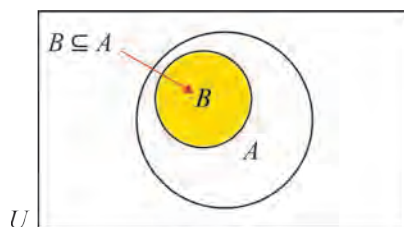
Meselem, suratda U uniwersal toplum içinde A toplum görkezilen. Töweregiň daşarsyndaky boýalan zolak A toplumyň A' dolduryjysyny aňladýar:



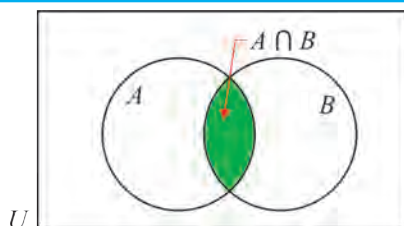
$U = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, $A = \{2, 7, 8\}$ we $A' = \{3, 5\}$ bolsa, şu toplumlar Wenn diagrammasynda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



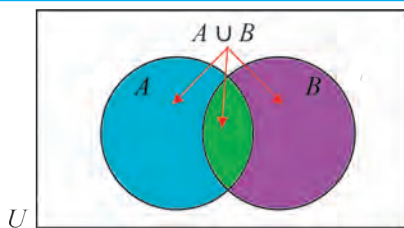
Eger $B \subseteq A$ bolsa, onda B toplumyň islendik elementi A topluma degişli. Diýmek, muňa laýyk Wenn diagrammasynda B toplumy aňladýan tegelek A toplumy aňladýan tegelegiň içinde ýatýar:



$A \cap B$ kesişme elementleri-de A -ga, hem B -ge degişli bolýar. Diýmek, muňa laýyk Wenn diagrammasynda $A \cap B$ toplumy aňladýan boýalan zolak şeýle şekillendirilýär:



$A \cup B$ birleşme elementleri $\dot{y}$ a-da A -ga, $\dot{y}$ a-da B -ge, $\dot{y}$ a-da ikisine deęiřli bolýar. Diýmek, muña laýyk Wenn diagrammasynda $A \cup B$ toplumy aňladýan zolak aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



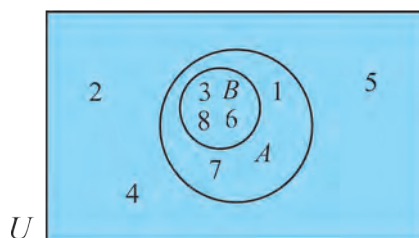
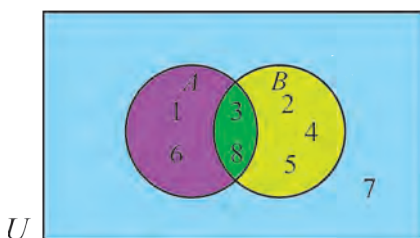
6-njy mysal. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, aşakdaky toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ we $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ we $B = \{3, 6, 8\}$.

△ a) $A \cap B = \{3, 8\}$

b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}, B \subseteq A$



Gönükmeler

23. A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{2, 4, 6\}$ we $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{2, 4, 6\}$ we $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{2, 4, 5, 6\}$ we $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}, A = \{3, 4, 5, 7\}$ we $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{10\text{-dan kiçi bolan tåk sanlar}\}$ we $B = \{10\text{-dan kiçi bolan diýp sanlar}\}$ bolsun.

a) A, B toplumlaryň elementlerini ýazyň;

b) A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň;

c) $A \cap B$ we $A \cup B$ toplumlary tapyň.

25. $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{6\text{-nyň kratnylary}\}$ we $B = \{9\text{-uň kratnylary}\}$ bolsun.

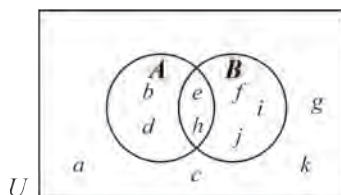
a) A, B toplumlaryň elementlerini ýazyň;

b) $A \cap B$ we $A \cup B$ toplumlary tapyň;

c) A, B toplumlary Wenn diagrammasynda şekillendiriň.

26. A, B toplumlary Wenn diagramma-synda görkezilen.

Aşakdaky toplumlaryň element-lerini ýazyň:



I A ;

II B ;

III A' ;

IV B' ;

V $A \cap B$;

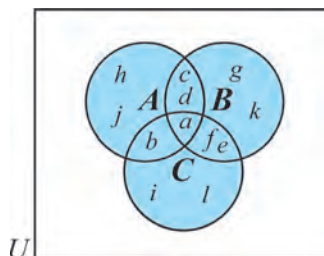
VI $A \cup B$;

VII $(A \cup B)'$;

VIII $A' \cup B'$.

27.

A, B, C toplumlary Wenn diagram-masynda görkezilen.



a) Topplumlaryň elementlerini ýazyň:

I A ;

II B ;

III C ;

IV $A \cap B$;

V $A \cup B$;

VI $B \cap C$;

VII $A \cap B \cap C$;

VIII $A \cup B \cup C$.

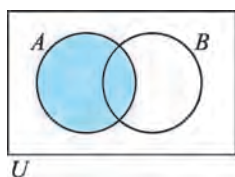
b) Aşakdakylary tapyň:

I $n(A \cup B \cup C)$;

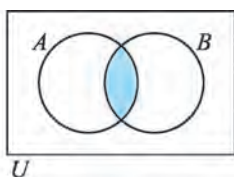
II $n(A) + n(B) + n(C) -$
 $- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
 $- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Wenn diagrammasynda toplumlary boýap şekillendirmek mümkin.

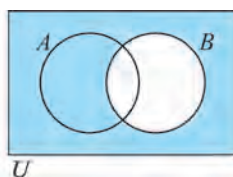
Meselem, suratda, deňişlilikde, $A, A \cap B, B', A \cap B'$ toplamlar boýalan:



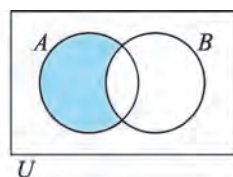
A



$A \cap B$



B'

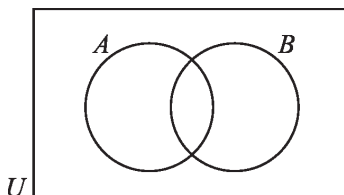


$A \cap B'$

Gönükmeler

Diagrammalary depderiňize göçürüň we görkezilen toplumlary boýaň:

28.



a) $A \cap B$;

b) $A \cap B'$;

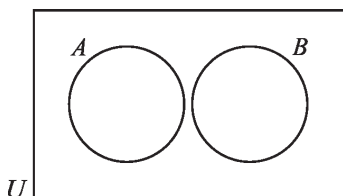
c) $A' \cup B$;

d) $A \cup B'$;

e) $(A \cap B)'$;

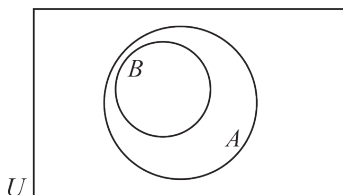
f) $(A \cup B)'$.

29.



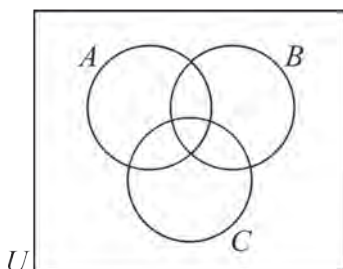
- | | |
|--------------------|------------------|
| a) A ; | b) B ; |
| c) A' ; | d) B' ; |
| e) $A \cap B$; | f) $A \cup B$; |
| g) $A' \cap B$; | h) $A \cup B'$; |
| i) $(A \cap B)'$. | |

30.



- | | |
|--------------------|------------------|
| a) A ; | b) B ; |
| c) A' ; | d) B' ; |
| e) $A \cap B$; | f) $A \cup B$; |
| g) $A' \cap B$; | h) $A \cup B'$; |
| i) $(A \cap B)'$. | |

31.



- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) A ; | b) B' ; |
| c) $B \cap C$; | d) $A \cup B$; |
| e) $A \cap B \cap C$; | f) $A \cup B \cup C$; |
| g) $(A \cap B \cap C)'$; | h) $(A \cup B) \cup C$; |
| i) $(B \cap C) \cap A$. | |



PIKIR YÖRETMELER. INKÄR, KONYUNKSIYA WE DIZYUNKSIYA

Çyn ýa-da ýalan bolan habar sözlemine **pikir ýöretme** diýilýär.

Sorag şeklindäki sözlemler, şahsyň gatnaşygyny aňladýan habar sözlemleri, meselem, "Ýaşyl reňk ýakymlydyr" pikir ýöretme bolup bilmeýär.

Käbir pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanmaýar.

Meselem, "Bu ýazyjy Daşkentde doglan" pikir ýöretme belli bir ýazyja görä çyn, başgasyna görä ýalan bolmagy mümkin.

1-nji mysal. Aşakdakylardan haýsysy pikir ýöretme bolýar?

Eger ol pikir ýöretme bolsa, onuň çyn-ýalanlygy bir bahaly anyklanýarmy?

- | | |
|--------------------------------|-----------------------|
| a) $20:4=80$; | b) $25 \cdot 8=200$; |
| c) Meniň galamym nirede? | |
| d) Seniň gözleriň mawy reňkde. | |

- △ a) Bu pikir ýöretme we ol ýalan, çünki $20:4=5$ bolýar;
- b) bu pikir ýöretme we ol çyn;
- c) bu sorag sözlemi bolany üçin, ol pikir ýöretme bolmaýar;

d) bu pikir y retme, onu   yn- alanlygy bir bahaly anyklanmayar,  unki k bir adamlara g r  ol  alan, k birlerine g r  bolsa  yn. ▲

Biz pikir y retmeleri $p, q, r \dots$ harplar bilen belgiley ris.

Meselem, p : Si enbe g ni  agys  agdy;

q : $20:4=5$;

r : x – j b t san.

 yl yrymlyrak pikir y retmeleri düzmek   in $\wedge$ (kon unksiya – "we", "emma"), $\vee$ (diz unksiya – " a-da"), $\neg$ (ink r – "... d l", "... n dogry") **mantyky baglayjylar** di il  an mahsus belgilerden pe dalanyl ar. Olara garap  ykaly .

Ink r

p pikir y retme   in " p d l"  a-da " p ekendigi n dogry" g rn  daki pikir y retme p -ni  **ink ri** di il  ar we $\neg p$  aly belgilen ar.

Meselem, p : Si enbe g ni  agys  agdy
pikir y retm ni  ink ri
 $\neg p$: Si enbe g ni  agys  agmady;

p : Medin ni  g zi mawy
pikir y retm ni  ink ri
 $\neg p$: Medin ni  g zi mawy d l bol ar.

G rn  i  aly, p  yn bolsa, $\neg p$  alan, p  alan bolsa $\neg p$  yn pikir y retme bol ar. Bu maglumat ** ynlyk jedwelini ** k meginde d   ndiril  ar.    le jedwel p -a garap t ze $\neg p$ pikir y retm ni  çynlyk bahasy  yn T^1  a-da  alan F^1 -digini anyklayar:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Gönükmeler

32. Aşakdakylardan ha sysy pikir y retme bol ar? Eger ol pikir y retme bolsa, onu   yn- alanlygy bir bahaly anyklan army?

- a) $11-5=7$; b) 12 – j b t san; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
- e) Parallelogram 4 sany tarapa e e;
- f) 37 – d  p san;
- g) Seni  bo u  n  e santimetr?
- h)  hli kwadratlar dörtburçluk;
- i) Gar  ag army?
- j) D rtbur luk parallelogram d l;
- k) Seni  dogany  13  a da;

¹ T we F harplary, de i lilikde, inlis e "true" ( yn), "false" ( alan) s zlerini  ba  harplarydyr.

- l) Saňa taryhy kitaplar ýakýarmy?
- m) Medine gowy aýdym aýdýar;
- n) Sen Samarkantda doglansyň;
- o) Garşylykly burçlar özara deň;
- p) Parallel göni çyzyklar kesişýär.

33. Pikir ýöretmeleriniň inkärini ýazyň. Bu pikir ýöretmäniň we onuň inkäriniň çyn-ýalanlygyny anyklaň.

- a) p : ähli dörtburçluklar parallelogram bolýar;
- b) q : $\sqrt{5}$ – irrasional san;
- c) r : 7 – rasional san;
- d) s : $23-14=12$;
- e) t : $52:4=13$;
- f) u : islendik iki jübüt sanlaryň tapawudy täk bolýar;
- g) p : yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasyly hemişe jübüt bolýar;
- h) q : ähli kütäk burçlar özara deň;
- i) r : ähli trapesiýalar parallelogramlardyr;
- j) s : eger üçburçlugyň iki burçy özara deň bolsa, ol deňýanly bolýar;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ bolsun. Pikir ýöretmeleriniň inkärini ýazyň:

- a) $x > 5$;
- b) $x \geq 3$;
- c) $y < 8$;
- d) $y \leq 10$.

35. Berlen r, s pikir ýöretmeler üçin s pikir ýöretme r pikir ýöretmäniň inkäri bolarmy?

Eger s pikir ýöretme r pikir ýöretmäniň inkäri bolmasa, r pikir ýöretmäniň dogry inkärini tapyň.

- a) r : Medinäniň boýy 140 sm-dan beýik; s : Medinäniň boýy 140 sm-dan pes;
- b) r : Akbar futbol bilen meşgullanýar; s : Akbar aýdym-saz bilen meşgullanýar;
- c) r : Men bu gün gara çay içdim; s : Men bu gün gök çay içdim;
- d) r : Men Samarkantda bolupdym; s : Men hiç haçan Samarkantda bolmadym.

2-nji mysal. Pikir ýöretmäniň inkärini düzüň:

- a) x – gawun, $x \in \{\text{gawunlar, garpyzlar}\}$;
- b) $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$;
- c) $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$;
- △ a) x – garpyz;
- b) $x = 1$;
- c) $x < 2$ we $x \in \mathbb{Z}$. ▲

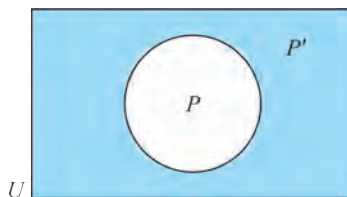
Gönükmе

36. Pıkr ýöretmäniň inkärini düzüň.

- a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- b) $x \in \{atlar, goýunlar\}$;
- c) $x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$;
- d) x – okuwçy bola, $x \in \{okuwçylar\}$;
- e) x – okuwçy gyz, $x \in \{gyzlar\}$.

Pıkr ýöretmäniň inkärini Wenn diagrammasından peýdalanyp hem düzmek mümkin.

Meselem, p : " x san 10-dan uly" diýen pıkr ýöretmä garalyň.

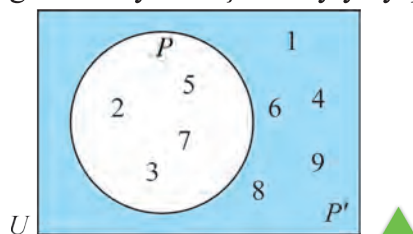


Diagrammada U – ähli sanlar toplumy, P toplum p pıkr ýöretmäniň **çynlyk toplumy**, ýagny ol çyn pıkr ýöretme bolýan x -laryň toplumy, P' toplum diýip $\neg p$ inkärniň çynlyk toplumy görkezilen.

3-nji mysal. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ -da p : x – **düýp san** pıkr ýöretmä garalyň. p we $\neg p$ -niň çynlyk toplumlaryny tapyň.

△ P toplum p pıkr ýöretmäniň **çynlyk toplumy**, P' toplum $\neg p$ inkärniň çynlyk toplumy bolsun. Onda $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

Bu toplumlar Wenn diagrammasynda aşakdaky ýaly şekillendirilýär:



Gönükmeler

37. Pıkr ýöretmeleriň inkärini düzüň, Wenn diagrammasynda şekillendirin:

- a) $U = \{x \mid 20 < x < 30\}$ -da p : x – düýp san;
- b) $U = \{x \mid 1 < x < 10\}$ -da p : x – jübüt san.

38. $U = \{10-njy synp okuwçylary\}$, $M = \{aýdym-saz gurnagynda meşgullanýan okuwçylar\}$, $O = \{orkestrde saz çalyan okuwçylar\}$ bolsa, aşakdaky pıkr ýöretmeleri Wenn diagrammasynda şekillendirin:

- a) aýdym-saz gurnagynda meşgullanýan ähli okuwçylar orkestrde saz çalyrlar;
- b) orkestrde saz çalyan okuwçylardan hiç biri aýdym-saz gurnagynda meşgullanmaýar;

c) orkestrde saz čalaýan okuwçylaryň hemmesi aýdym-saz gurnagynda meşgullanmaýar.

39. $U = \{x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$ da $p: x < 9$ pikir ýöretmäni Wenn diagrammasynda şekillendiriň we $\neg p$ inkäriň çynlyk toplumynyň elementlerini ýazyň.

40. $U = \{x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da $p: x - \text{jübüt san}$ pikir ýöretmäni Wenn diagrammasynda şekillendiriň we inkäriň çynlyk toplumynyň elementlerini ýazyň.

Konýunksiýa

Eger iki pikir ýöretme "we" sözi bilen baglansa, emele gelen täze pikir ýöretme berlen pikir ýöretmelere *konýunksiýasy* diýilýär.

p, q pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy $p \wedge q$ ýaly belgilenýär.

Meselem,

p : Eldar günortan palaw iýdi;

q : Eldar günortan somsa iýdi.

Pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy aşakdaky ýaly bolýar:

$p \wedge q$: Eldar günortan palaw we somsa iýdi.

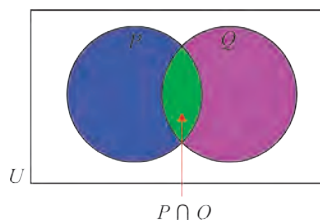
Görnüş i ýaly, $p \wedge q$ pikir ýöretme Eldar günortanlyga hem palaw, hem somsa iýende, ýagny p, q pikir ýöretmeleriň ikisi-de çyn bolanda çyn bolýar. Eger p, q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri ýalan bolsa, onda $p \wedge q$ pikir ýöretme çyn bolmaýar.

p, q pikir ýöretmeleriň konýunksiýasy aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	p, q pikir ýöretmeleriň ikisi-de çyn bolanda $p \wedge q$ çyn bolýar.
T	F	F	p, q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri ýalan bolanda $p \wedge q$ pikir ýöretme ýalan bolýar.
F	T	F	
F	F	F	

Birinji we ikinji sütünler p, q pikir ýöretmeleriň mümkin bolan çynlyk bahalaryndan düzülen.

Diagrammada P toplum p pikir ýöretmäniň, Q toplum bolsa q pikir ýöretmäniň çynlyk toplumlary bolsa, $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumu iki pikir ýöretme-de çyn bolan $P \cap Q$ toplum bolýar:



Gönükmeler

41. Aşakdaky pikir ýöretmeleriň konýunksiýasyni ýazyň:
- a) p : Medine – terapewt; q : Munisa – stomatolog;
 b) p : x san 15-den uly; q : x san 30-dan kiçi;
 c) p : howa bulutly; q : ýagyş ýagýar;
 d) p : Alymyň saçlary gara; q : Alymyň gözleri mawy.
42. $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:
- a) p : 5 – täk san; q : 5 – düýp san;
 b) p : kwadrat dört tarapa eýe; q : üçburçluk baş tarapa eýe;
 c) p : $39 < 27$; q : $16 > 23$;
 d) p : 12 sany 3-e bölünýär; q : 12 sany 4-e bölünýär;
 e) p : $5+8 = 12$; q : $6+9 = 15$.
43. $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin p : x –jübüt san, q : x sany 7 dan kiçi pikir ýöretmeler berlen.
- a) Wenn diagrammasynnda p , q pikir ýöretmeleriň çynlyk toplumlaryny;
 b) $p \wedge q$ pikir ýöretmäniň çynlyk toplumyny şekillendirin.

Dizýunksiýa

Eger iki pikir ýöretme "**ýa-da**" sözi bilen baglansa, emele gelen täze pikir ýöretme berlen pikir ýöretmeleriň *dizýunksiýasy* diýilýär.

p , q pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy $p \vee q$ ýaly belgilenýär.

Meselem,

p : Eldar bu gün kitaphana bardy; q : Eldar bu gün teatra bardy.

Pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy aşakdaky ýaly aňladylýar:

$p \vee q$: Eldar bu gün ýa-da kitaphana ýa-da teatra bardy.

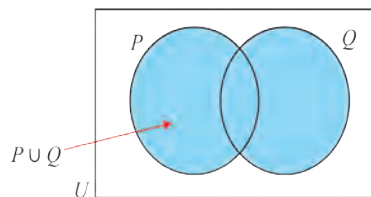
Görnüşi ýaly, $p \vee q$ pikir ýöretme Eldar bu gün kitaphanadan ýa-da teatrdan birine ýa-da ikisine baranda çyn bolýar.

Eger p , q pikir ýöretmeleriň ikisi ýalan bolsa, onda $p \vee q$ pikir ýöretme çyn bolmaýar.

p , q pikir ýöretmeleriň dizýunksiýasy aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	p , q pikir ýöretmeleriň haýsy-da bolsa biri çyn bolanda $p \vee q$ çyn bolýar.
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	p , q pikir ýöretmeleriň ikkalasi ýalan bolanda $p \vee q$ pikir ýöretme ýalan bolýar.

Diagrammada P toplum p pikir yöretmăniň, Q toplum bolsa q pikir yöretmăniň çynlyk toplumlary bolsa, $p \vee q$ pikir yöretmăniň çynlyk toplumu iki pikir yöretmde çyn bolan $P \cup Q$ toplum bolýar:



Gönükmeler

- 44.** $p \vee q$ pikir yöretmăniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:
 a) p : 24 sany 4-e bölünýär, q : 24 sany 6-a bölünýär;
 b) p : $-8 > -5$, q : $5 < 0$.
- 45.** $p \vee q$ pikir yöretmăniň çyn-ýalan bolýandygyny anyklaň:
 a) p : 5 we 9 sanlarynyň orta arifmetigi 7-ä deň, q : 8 we 14 sanlaryň orta arifmetigi 10-a deň;
 b) p : $5+8 = 12$, q : $6+9 = 15$.
- 46.** $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin:
 p : x san 3-e kratny, q : x – düýp san pikir yöretmelere garalyň.
 a) Wenn diagrammasynda p , q pikir yöretmeleriniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň;
 b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ pikir yöretmăniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň.
- 47.** $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$ üçin:
 p : x – düýp san, q : x san 12-niň bölüjisi pikir yöretmelere garalyň.
 a) Berlen Wenn diagrammasynda p , q pikir yöretmeleriniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň;
 b) **I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$ pikir yöretmăniň çynlyk toplumlaryny şekillendiriň.
- 48.** x : Serdar ertir ýüzmäge barýar;
 y : Serdar ertir futbola barýar.
 Aşakdakylary x , y we $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň:
 a) Serdar ertir ýüzmäge barmaýar;
 b) Serdar ertir ýüzmäge we futbola barýar;
 c) Serdar ertir ýa-da ýüzmäge, ýa-da futbola barýar;
 d) Serdar ertir ne ýüzmäge, ne futbola barýar;
 e) Serdar ertir ýüzmäge barýar, emma futbola barmaýar.
- 49.** Sözlemleri $\neg$, $\vee$, $\wedge$ mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň:
 a) Serdara doňdurma we sowuk içgiler ýakýar;
 b) Serdara doňdurma ýakýar, emma sowuk içgiler ýakmaýar;

- c) x sany 10-dan uly bolan düyp sandyr;
d) kompýuter işlemeýär.

50. Pikir ýöretmeler Serdaryň takmyny gün tertibini kesgitleýär:

- p : Serdar ir turdy;
 q : Serdar ertirlik edindi;
 r : Serdar günortanlyga çorba içdi;
 s : Serdar agşamky nahara palaw iýdi;
 u : Serdar sport bilen meşgullandy;
 v : Serdar kitap okady.

Aşakdakylary tebigy dilde aňladyň (aýdyň):

- a) q ; b) s ; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9

MANTYKY DEŇGÜÝÇLÜLIK. MANTYKY KANUNLAR

Manysyna garap tebigy dildäki ýönekeý pikir ýöretmeleri harplar bilen erkin belgiläp inkär, konýunksiýa we dizýunksiýa ýaly mantyky baglaýjylaryň kömeginde çylşyrymlyrak pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygyna üns bermezden simwolik görnüşlerini düzeliň.

Tebigy dildäki pikir ýöretme	Simwolik şekili
Inkär: 1. Salim öýde däl. 2. Pul aňsat tapylmaýar. 3. Raşidiň kitap okaýandygy nädogry. 4. Meryemiň Buharadandygy ýalan.	$\neg S$ $\neg M$ $\neg R$ $\neg B$
Konýunksiýa: 5. Akmal bilen Sunnat ikisi mugallym. 6. Babur hem-de Ahmet sport bilen meşgullanýar. 7. Babur güýçli, emma Ahmet ondan güýçlüräk. 8. Ähli media (habar) serişdeleri garşy bolsa hem, "Barselona" futbol kluby in gowy klub hasaplanýar.	$A \wedge S$ $B \wedge A$ $B \wedge A$ $M \wedge B$
Dizýunksiýa: 9. Maral ýa-da metroda ýa-da awtobusda geler. 10. Babur ýa-da Ahmet sportuň şu görnüşini saýlady.	$M \vee A$ $B \vee A$

Inkär, konýunksiýa we dizýunksiýa üçin çynlyk jedwellerini umumlaşdyryp, çylşyrymlyrak pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwellerini düzmek mümkin:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-nji mysal. $p \vee \neg q$ pikir yretmnin çynlyk jedwelini dz.

1-nji dim

Birinji we ikynji sütünler p we q -laryn mümkin bolan çynlyk bahalaryndan düzülen jedweli yzarys:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-nji dim

nji stndki q -nyn çynlyk bahalaryna garap $\neg q$ -nyn çynlyk bahalaryny yzarys:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-nji dim

Drdnji stndki p we $\neg q$ -nyn çynlyk bahalaryna garap $p \vee \neg q$ -nyn çynlyk bahalaryny yzarys: ▲

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Hemie yn bolan pikir yretm **mantyky kanun ya-da tawtologiya** diylr. Pikir yretme mantyky kanun bolandygyny çynlyk jedwelinin kömeginde subut etmek mümkin.

2-nji mysal. $p \vee \neg p$ pikir yretme tawtologiya bolandygyny subut edi.

ynlyk jedwelini dzaris:

$p \vee \neg p$ pikir yretme hemie yn bahalary (nji sütüne gara) kabul edendigi sebpli ol tawtologiya bolar. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Iki pikir yretmnin çynlyk jedwellerindki degişli sütünler bir hili bolsa, bu pikir yöretmeler mantyky **degyli** diylr.

3-nji mysal. $\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir yretmelerinin mantyky degyli bolandygyny subut edi.

△ $\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwelleri düzýäris:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$ pikir ýöretmeleriň çynlyk jedwellerindäki degişli sütünler birmeňzeş, diýmek, bu pikir ýöretmeler mantyky deňgüýçli.

Bu gatnaşygy $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ ýaly ýazýarys. ▲

Gönükmeler

51. Pikir ýöretmeler üçin çynlyk jedwellerini düzüň:
 - a) $\neg p \wedge q$;
 - b) $\neg(p \vee q)$;
 - c) $\neg p \vee \neg q$;
 - d) $p \vee p$.
52. Pikir ýöretmeler tawtologiýa bolarmy:
 - a) $\neg p \wedge \neg q$;
 - b) $(p \vee q) \vee \neg p$;
 - c) $p \wedge \neg q$?
53. Mantyky deňgüýçlülükleri subut ediň:
 - a) $\neg(\neg p) = p$;
 - b) $p \wedge q = p$;
 - c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;
 - d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.
54. Pikir ýöretmeler berlen bolsun:

p : Serdar almany gowy görýär;

q : Serdar üzümi gowy görýär.

Aşakdaky pikir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:

 - a) $p \vee q$;
 - b) $\neg(p \vee q)$;
 - c) $\neg p$;
 - d) $\neg p \wedge \neg q$.
55. Çynlyk jedwelini düzüp, $\neg(p \vee q)$ we $\neg p \wedge \neg q$ pikir ýöretmeler mantyky deňgüýçli bolýandygyny subut ediň.

10-11

IMPLIKASIÝA, KONWERSIÝA, INWERSIÝA WE KONTRAPOZISIÝA

Implikatsiya

Iki pikir ýöretme "eger ... bolsa, onda ..." jümle bilen baglansa, onda pikir ýöretmeler **implikasiýasyna** eýe bolarys.

"Eger p bolsa, onda q " implikativ pikir ýöretme $p \Rightarrow q$ ýaly belgilenýär we " p -den q gelip çykýar", " p pikir ýöretme q üçin ýeterli", " q pikir ýöretme p üçin zerur" manylary hem aňladýar.

Munda p pikir ýöretme q üçin **ýeterli şert**, q pikir ýöretme p üçin **zerur şert** diýlip atlandyrylýar.

Meselem, p : *Serdaryň telewizory bar*; q : *Serdar kino görýär*
pikir ýöretmeler üçin

$p \Rightarrow q$: *Serdaryň telewizory bolsa, ol kino görýär*
pikir ýöretmäni aňladýar.

Edil şeýle $p \Rightarrow q$: *Serdar kino görmek üçin onda telewizor bolmagy ýeterli*
pikir ýöretmäni alýarys.

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretme diňe p çyn bolup, q ýalan bolsa, p
pikir ýöretme çyn bolany üçin aşakdaky çynlyk jedwelini
alýarys:

Ýönekeý pikir ýöretmeleriň hem-de mantyky baglaýjy-
laryň kömeginde çyn-ýalanlyga üns bermezden çylşyrym-
lyrak pikir ýöretmeleri düzmek mümkin.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1-nji mysal. p : "Maral kinofilmleri köp görýär"; q : "Jeren kinofilmleri köp görýär"; r : "Jeren synagdan geçip bilmeyär"; s : "täsinlik bolup geçýär" pikir ýöretmeler berlen bolsun.

△ Onda aşakdakylara eýe bolarys:

1. $p \wedge \neg q$: "Maral kinofilmleri köp görýär, Jeren bolsa ýok".
2. $p \Rightarrow \neg q$: "Maral kinofilmleri köp görse, Jeren kinofilmleri köp görmeyär".
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: "Jeren kinofilmleri köp görse, ol ýa-da synagdan geçip bilmeyär ýa-da täsinlik bolup geçýär".
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: "Jeren kinofilmleri köp görse we täsinlik bolup geçmese, onda Jeren synagdan geçip bilmeyär".
5. $(q \wedge s) \vee r$: "Ýa-da Jeren kinofilmleri köp görýär we täsinlik bolup geçýär, ýa-da Jeren synagdan geçip bilmeyär". ▲

Ekwiwalensiýa

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ görnüşdäki pikir ýöretme p we q pikir ýöretmeleriň ekwiwalensiýasy diýilýär we $p \Leftrightarrow q$ ýaly belgilenýär.

$p \Leftrightarrow q$ ýazuw " p pikir ýöretme q üçin zerur we ýeterli" ýa-da " p pikir ýöretme diňe q bolanda ýerlikli bolýar", diýlip okalýar.

2-nji mysal. p : x – jübüt san, q : x sanyň ahyrky sifri jübüt pikir ýöretmeler üçin $p \Leftrightarrow q$ pikir ýöretme nähili okalýar?

△ $p \Rightarrow q$: x jübüt san bolsa, onuň ahyrky sifri jübüt bolýar;

$q \Rightarrow p$: x sanyň ahyrky sifri jübüt bolsa, ol jübüt bolýar.

pikir ýöretmelere garasak, $p \Leftrightarrow q$ ýazuw " x san jübüt bolmagy üçin onuň ahyrky sifri jübüt bolmaly we ýeterli" ýa-da " x san diňe onuň ahyrky sifri jübüt bolanda jübüt bolýar" diýlip okalýar. ▲

Indi islendik p we q pikir yöretmeler berlen bolsa

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ pikir y retme   in  ynlyk jedwelini d z aris:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Di mek, $p \Leftrightarrow q$ pikir y retm ni   ynlyk jedweli a akdaky  aly bol ar. G rn  i  aly, $p \Leftrightarrow q$ pikir y retme p we q pikir y retmelerini  ynlyk bahalary di ne birme ze  ( agny  a-da ikisi-de  yn,  a-da ikisi-de  alan) bolanda  yn bol ar.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Gönükmeler

- 56.** A akdaky implikativ pikir y retmelerde zerur we  eterli şertleri anykla  we bu pikir y retmeleri "zerur", " eterli" s zlerini ulanyp ba ga a a lady :
- eger men ertirki awtobusa  eti mesem, mekdebe gij  galaryn;
 - eger temperatura  eterli  peselse,  apdaky suw do  ar;
 - eger $x > 20$ bolsa, $x > 10$ bol ar;
 - eger men gol ursam, bizi  komandamyz  e i  gazanmagy mümkün.
- 57.** $p \Rightarrow q$ pikir y retm ni tebigy dilde a lady :
- p : G n  alpylda ar, q : men suwa d  m ge barjak;
 - p : x san 6-a b l n ar, q : x – j b t san;
 - p : sowadyjyda  umurtgalar bar, q : Medine tort bi ir ar.
- 58.**
- $p \Rightarrow \neg q$;
 - $\neg q \Rightarrow \neg p$;
 - $(p \vee q) \Rightarrow p$;
 - $q \wedge (p \Rightarrow q)$;
 - $p \Leftrightarrow \neg q$;
 - $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg p$;
 - $p \Rightarrow (p \wedge \neg q)$;
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$
- pikir y retmelerini  ynlyk jedwellerini d z  .
- 59.** Pikir y retmeleri simwolik g rn  de a lady :
- p :  agys  agdy, q : l  kler pe da boldy;
-  agys  agsa, l  kler pe da bol ar;
 - l  kler pe da boldy, di mek,  agys  agdy;
 - l  kler  ok;
 -  agys  agmady;
 - eger  agys  agmasa, l  kler pe da bolma ar;
 - eger l  kler pe da bolmasa,  agys  agmandyr;

- g) eger lüýkler peýda bolmasa, ýagys ýagýar;
h) lüýkler peýda bolmagy üçin ýagys ýagmaly we ýeterli.

60. Çynlyk jedwellerini düzüp,

$$\neg p \Rightarrow q = p \vee q;$$

$$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \text{ bolýandygyny subut ediň.}$$

61. $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäge mantyky deňgüýçli pikir ýöretmäni tapyň:

- a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;
c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Pikir ýöretmelerden haýsylary hemişe çyn, hemişe ýalan bolýar?

- a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Konwersiýa

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň **konwersiýasy** diýip $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäge aýdylýar.

Konwersiýa aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-nji mysal.

p : üçburçlugyň deňýanly,

q : üçburçlugyň iki burçy deň pikir ýöretmelere garalyň.

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäni we onuň konwersiýasyny tebigy dilde aňladyň.

$\triangle p \Rightarrow q$: Eger üçburçluk deňýanly bolsa, onda onuň iki burçy deň.

$q \Rightarrow p$: Eger üçburçlugyň iki burçy deň bolsa, onda beýle üçburçluk deňýanly bolýar. $\triangle$

Inwersiýa

$p \Rightarrow q$ pikir ýöretmäniň **inwersiýasy** diýip $\neg p \Rightarrow \neg q$ pikir ýöretmäge aýdylýar.

Inwersiýa aşakdaky çynlyk jedweline eýe:

Bu jedwel $q \Rightarrow p$ pikir ýöretmäniň çynlyk jedweli bilen üstme-üst düşýär, diýmek, konwersiýa we inwersiýa mantyky deň güýçli eken.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Kontrapozisiya

$p \Rightarrow q$ pikir yotetmanin kontrapozisiyasi diyip
 $\neg q \Rightarrow \neg p$ pikir yotetmaga aydylyar.

Kontrapozisiya asakdaky chynlyk jedweline eye:
 Bu jedwel $p \Rightarrow q$ pikir yotetmanin chynlyk jedweli
 bilen ustme-ust dushyar, diymek, implikasiya we
 kontrapozisiya mantyky den gulycli eken.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-nji mysal. "Hemme mugallymlar mekdebe golaý yerde yasaýar" pikir yotetmanin kontrapozisiyasyny duzun.

△ Bu pikir yotetme asakdaky yaly anladylmagy mumkin: "Eger bu adam mugallym bolsa, ol mekdebin golaýynda yasaýar".

Bu habar sozlemi $p \Rightarrow q$ sekile eye, bu yerde:

p : Bu adam – mugallym, q : Bu adam mekdebin golaýynda yasaýar.

$\neg q \Rightarrow \neg p$ kontrapozisiya asakdaky yaly anladylyar:

"Eger bu adam mekdebin golaýynda yashamasa, onda ol mugallym dal". ▲

5-nji mysal. p : Samandar kitaphanada,

q : Samandar kitap okaýar

pikir yotetmelere garalyñ. Onuñ ucin implikasiya, konwersiya, inwersiya we kontrapozisiyani duzun.

△ **Implikasiya**

Samandar kitaphanada bolsa, ol kitap okaýar.

$p \Rightarrow q$

Konwersiya

Samandar kitap okasa, ol kitaphanada bolýar.

$q \Rightarrow p$

Inwersiya

Samandar kitaphanada bolmasa, ol kitap okamaýar.

$\neg p \Rightarrow \neg q$

Kontrapozisiya

Samandar kitap okamaýan bolsa, ol kitaphanada bolmaýar.

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Implikasiya we konwersiya mantyky den gulycli bolmaýar, chunki, meselem, Samandar kitaby synpda okamagy-da mumkindigini aytmak yerliklidir. ▲

Gonukmeler

63. Konwersiya we inwersiya duzun:

- eger Diýara kurtke geýse, ol ýylynýar;
- eger iki ucburçluk menzeş bolsa, olaryñ degişli burçlary den bolýar;

- c) eger $2x^2 = 12$ bolsa, onda $x = \pm\sqrt{6}$ bolýar;
 d) eger Aým oýun oýnasa, ol hoşal bolýar;
 e) eger üçburçluk dogry bolsa, onda onuň taraplary deň bolýar.

64. Aşakdaky pikirýöretmeleriň kontrapozisiýalaryny düzüň:

- a) ähli bägüller tikenli;
 b) ähli sudýalar (žýuriler) hemişe dogry karar çykarýarlar;
 c) hemme gowy futbolçylar pökgini anyk nyşana depýärler;
 d) suwuklyk gaba guýlanda gabyň şeklini kabul edýär;
 e) eger adam halal we sowatly bolsa, ol üstünlik gazanýar.

65. a) "ähli 10-njy synp okuwçylary matematikany öwrenýärler" pikir ýöretmesiniň kontrapozisiýasyny düzüň;

b) "ähli 10-njy synp okuwçylary matematikany öwrenýärler" pikir ýöretmesi çyn bolsa, aşakdakylar barada nähili karara gellersiňiz:

"Şawkat – 10-njy synp okuwçysy";

"Myrat matematikany öwrenmeýär";

"Durdy hem matematikany, hem inlis dilini öwrenýär"?

66. Pikir ýöretmeleriň kontrapozisiýalaryny düzüň:

- a) x san 3-e bölünýär $\Rightarrow x^2$ sany 9-a bölünýär;
 b) x sanyň ahyrky sifri 2 bolsa $\Rightarrow x$ – jübüt san;
 c) $ABCD$ – gönüburçluk $\Rightarrow AB \parallel CD$ we $AD \parallel BC$;
 d) ABC – dogry üçburçluk $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$.

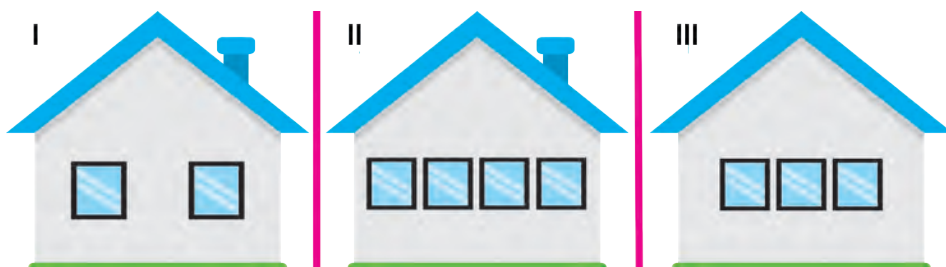
67. p : Öý iň köpi bilen 3 äişgeli bolýar,

q : Öý daşary түsse çykarýan түsseçykara еýе pikir ýöretmelere garalyň.

Onda $p \Rightarrow q$: Eger öý iň köpi bilen 3 äişgeli bolsa, ol daşary түsse çykarýan түsseçykara еýе;

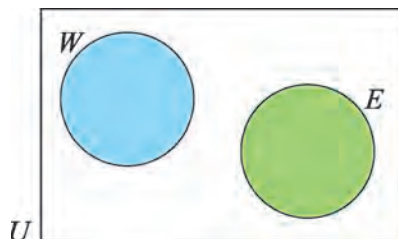
a) konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýa düzüň;

b) aşakdaky ýagdaýlarda implikasiýa, konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýa üçin çyn-ýalanlygy anyklaň:



68. Diagrammada W – gowşak özleşdirýän okuwçylar, E bolsa 10-njy synp okuwçylary toplumyny şekillendirýär.

Aşakdaky pikir ýöretmeleri dolduryň:



- a) gan gowşak özleşdirýän okuwçylar ýok;
- b) gan 10-njy synp okuwçylary ýok;
- c) eger $x \in W$ bolsa, onda
- d) eger $x \in E$ bolsa, onda
- e) c we d gatnaşyklaryň arasynda nähili baglanyşyk bar?

12-13

PREDIKATLAR WE KWANTORLAR

Predikatlar we kwantorlar

Käbir pikir ýöretmelerde üýtgeýjiler gatnaşyp, şu üýtgeýjileriň ýerine anyk bahalary goýsak, pikir ýöretme emele gelýär.

Şeýle pikir ýöretmä **predikat** diýilýär.

1-nji mysal. $P(x)$: " $x^2 > x$ " predikat bolsa,

$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ pikir ýöretmeleriň çyn-ýalanlygyny anyklaň.

△ $P(2)$: $2^2 > 2$ – çyn. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{2}$ – ýalan. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2 > -\frac{1}{2}$ – çyn. ▲

Käbir predikatlarda üýtgeýjini onuň manysyna garap kesgitlemek mümkin.

Meselem, "Bu ýazyjy Daşkentde doglan" we "Ol Daşkentde doglan" habar sözlemlerde üýtgeýji "Bu ýazyjy" söz düzümi ýa-da "ol" çalyşmadyr. Olaryň ýerine "Abdulla Kadyry" bahasyny goýsak, "Abdulla Kadyry Daşkentde doglan" çyn pikir ýöretmäni, "Şekspir" bahany goýsak, "Şekspir Daşkentde doglan" ýalan pikir ýöretmäni alarys.

x arkaly üýtgeýjini belgilesek, ýokardaky habar sözlemleri " x Daşkentde doglan" şeklinde ýazmak mümkin.

Predikatda bir ýa-da birnäçe üýtgeýji gatnaşmagy mümkin, gatnaşan üýtgeýjilere garap predikat $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, ýaly belgilenýär.

Predikatlar bilen birlikde $\forall$ (umumylyk kwantory, "hemme ... ler üçin") we $\exists$ (barlyk kwantory, "şeýle ... bar bolup") mahsus belgilerden peýdalanyp, täze

pikir yöretmeler alyn ar. Meselem, $\forall xP(x)$ görnüşdäki t ze pikir y retme x -i   hli bahalary   in $P(x)$ bol andygyny, $\exists xP(x)$ görnüşdäki t ze pikir y retme bolsa x -i  $P(x)$ bol an bahasy bardygyny a lad ar.

Meselem, $P(x)$: " x Samarkantda doglan" predikata gara arys. Onda $\forall xP(x)$ görnüşdäki t ze pikir y retme "hemme Samarkantda doglan"  aly, $\exists xP(x)$ görnüşdäki t ze pikir y retme bolsa "   yle adamlar bar bolup, olar Samarkantda doglan"  aly okal ar.

$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$ görnüşdäki pikir y retmelerin   yn- alanlygyny kesgitlemek   in mysallar getir aris.

2-nji mysal.

$D = \{1,2,3,4,5\}$ bolsa, $\forall x \in D, x^2 \geq x$ pikir y retme   yn bol andygyny subut edi .

  G rn  i  aly,

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \quad 5^2 \geq 5.$$

Di mek, $\forall x \in D, x^2 \geq x$ pikir y retme   yn eken.  

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ pikir y retme  alan bol andygyny subut etmek   in x -i  ol  alan bol an bir bahasyny tapmak yeterli, di mek yerliklidir.

  ndan hem, $x = \frac{1}{2}$ bolanda $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ bol ar.

x -i  $\forall xP(x)$ pikir y retm ni   alanlygyny g rke   an ha sy-da bolsa bir bahasya **kontrmysal** di il ar.

3-nji mysal. $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 \geq m$ pikir y retme   yn bol andygyny subut edi .

  $1^2 = 1$ bolany   in, $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 \geq m$ pikir y retme   yn eken.

Eger $E = \{5,6,7,8\}$ bolsa, $\exists m \in E, m^2 \geq m$ pikir y retme  alan,   unki $5^2 = 25 \neq 5$; $6^2 = 36 \neq 6$; $7^2 = 49 \neq 7$; $8^2 = 64 \neq 8$.  

Ink r amaly bilen bagly iki m   m mantyky kanuny getir aris:

$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)), \quad \neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

 u kanunlary  manysyny d   nmek   in mysal getireli .

$P(x)$: " x synpda sym otli nik" predikata garaly .

$\neg(\exists xP(x))$  azuw "synpda slarym içinde otli niklar bar d l" pikir yöretmäni, $\forall x(\neg P(x))$  azuw bolsa o a de     li pikir y retme bolan "Hemme synpda slarym otli nik d l" pikir yöretmäni a lad ar.

Edil    yle, $\neg(\forall xP(x))$ formula "Hemme synpda slarym otli nidigi n dogry" pikir yöretmäni, $\exists x(\neg P(x))$ formula bolsa o a de  g    li pikir y retme bolan "K bir synpda slarym otli nik d l" pikir yöretmäni a lad ar.

Görnüşü ýaly, $P(x,y)$ predikatdan kwantorlaryň kömeginde

$$\forall xP(x,y), \quad \forall yP(x,y), \quad \exists xP(x,y), \quad \exists yP(x,y)$$

görnüşdäki bir üýtgeýjili predikatlary, olardan bolsa, öz gezeginde.

$$\begin{aligned} \forall x\exists yP(x,y), & \quad \exists y\forall xP(x,y), & \quad \exists x\forall yP(x,y), & \quad \forall y\exists xP(x,y), \\ \forall x\forall yP(x,y), & \quad \forall y\forall xP(x,y), & \quad \exists x\exists yP(x,y), & \quad \exists y\exists xP(x,y) \end{aligned}$$

görnüşdäki pikir ýöretmeleri gurmak mümkin.

$\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall y\forall xP(x,y)$ hem-de $\exists x\exists yP(x,y)$, $\exists y\exists xP(x,y)$ pikir ýöretmeleriň manylary bir hili bolsa-da, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$ pikir ýöretmeler deňgüýçli däl eken.

Meselem, $P(x,y)$: *y adam x synpdaşymyň atasy* predikata garaýarys.

Munda $\forall x\exists yP(x,y)$ = "*islendik synpdaşymyň atasy bar*"; $\exists y\forall xP(x,y)$ "*şeyle adam bar bolup, ol ähli synpdaşlarymyň atasy bolýar*" pikir ýöretmeleri aňladýar.

Edil şeýle, $\exists x\forall yP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$ pikir ýöretmeler deňgüýçli dældigini görkezmek mümkin (özbaşdak ýagdaýda mysallar düzüň).

Predikatlaryň we kwantorlaryň kömeginde mantyky kanunlary almak mümkin.

Meselem, "Eger ähli gargalar gara bolsa, gara bolmadyk guşlaryň hiç biri garga däl" pikir ýöretme

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

mantyky kanuna mysal bolup biler.

Gönükmeler

69. Pikir ýöretmeleri predikatlar we kwantorlar kömeginde aňladyň:

- käbir guşlar uçup bilmeýär;
- käbir ýazyjylar şahyr däl;
- käbir çybynlar çakmaýar;
- hemme planetalar şar şeklinde;
- ähli esgerler güýçli adamlar;
- ähli hirurglar – lukmanlar;
- hemme aýylar bal iýýärler;
- islendik tegelek – ýasy şekil;
- käbir towşanlar kelemi gowy görýärler;
- käbir kitaplar gyzykly;
- hemme eneler çagalaryny eý görýärler.

Şu pikir ýöretmeleriň inkärini düzüň hany?

- 70.** Píkir ýöretmeleri, mümkin bolsa, dowam etdiriň:
- a) hiç hili süýdemdiriji žabralardan dem alyp bilmeýär. Sazan žabralardan dem alýar. Diýmek,;
 - b) ähli adamlaryň kemçilikleri bar. Ähli korollar – adamlar. Diýmek,;
 - c) gyzyly reňkdäki gülleriň ysy ýok. Bu güliň ysy ýok. Diýmek...;
 - d) möjekler guzulary iýýär. Bu haýwan guzyny iýýär. Diýmek...;
 - e) ähli planetalar – asman jisimleri. Aý – planeta däl. Diýmek...;
 - f) ähli metallar elektrik toguny gowy geçirýär. Altyn – metal. Diýmek.. ;
 - g) ähli guşlar ýumurtga guzlaýar. Ähli guşlar oňurgaly. Diýmek...;
 - h) eger adamyň temperaturasy ýokary bolsa, ol kesellän bolýar. Bu adamyň temperaturasy ýokary. Diýmek...;
 - i) eger adamyň temperaturasy ýokary bolsa, ol kesellän bolýar. Bu adam kesel däl. Diýmek....
- 71.** $P(x,y)$: y adam x -iň perzendi, predikatlar berlen bolsun. Píkir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:
- a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$;
 - b) $\forall x \exists y P(x,y)$;
 - c) $\forall x \exists y P(y,x)$.
- 72.** $F(x,y)$: x adam y -i öz dosty diýip hasaplaýar predikat berlen bolsun. Píkir ýöretmeleri tebigy dilde aňladyň:
- a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$;
 - b) $\forall x \exists y F(x,y)$;
 - c) $\exists y \forall x F(x,y)$;
 - d) $\forall x \exists y F(y,x)$;
 - e) $\exists y \forall x F(y,x)$;
 - f) $\forall y \exists x F(x,y)$;
 - g) $\exists y \forall x F(y,x)$.
- 73.** $D(m,n)$: n bitin san m bitin sana galyndysyz bölünýär predikat berlen bolsun. Píkir ýöretmelerden haýsysy çyn:
- a) $\forall m \forall n D(m,n)$;
 - b) $\forall n \exists m D(m,n)$;
 - c) $\exists m \forall n D(n,m)$;
 - d) $\exists n \forall m D(n,m)$;
 - e) $\forall n \exists m D(n,m)$;
 - f) $\exists m \forall n D(n,m)$.
- 74.** Píkir ýöretmelerden haýsylary dogry? Degişli mysallar getiriň.
- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$;
 - b) ähli başga sanlardan kiçi bolan san bar;
 - c) eger $\forall x \exists y P(x,y)$ bolsa, onda $\exists y \forall x P(x,y)$ bolýar.

14-15

DOGRY PIKIR YÖRETMEK (ARGUMENTASIYA) KANUNLARY. SOFIZMLER WE PARADOKSLAR

Pikiri dogry beyan etmegi diñe pikirlenme kanunlarynyñ talaplaryna amal edilende gazanmak mümkin. **Pikirlenme kanuny** pikir yöretmek prosesinde pikirler (pikirlenme elementleri) arasyndaky bar bolan zerur aragatnaşyklardan ybarat. Pikirlenme kanunlarynyñ mazmunyndan gelip çykýan, pikir yöretmäni dogry gurmak üçin zerur bolan talaplar pikirini anyk, yzygider, ýeterli derejede esaslanan bolmagyndan ybarat.

Kararlarda predmet bilen onuñ häsiýeti, predmetleriñ arasyndaky gatnaşyklar, predmetiñ bar bolmagy ýa-da bolmazlygy baradaky pikirler tassyklama ýa-da inkär görnüşde aňladylýar. Meselem, "Demir–metal" diýen hökümde predmet (demir) bilen onuñ häsiýetiniñ (metaldygy) arasyndaky gatnaşyk anyklyan. "Ah-lak hukukdan öň peýda bolupdyr" diýen kararda bolsa iki predmetiñ (ahlak we hukuk) arasyndaky gatnaşyk anyklyan. Mazmun taýdan dürli bolan bu kararlary gurluşyna görä birmeňzeşdir: olarda predmet baradaky düşüñjeler toplumy (S) bilen predmet belgisi baradaky düşüñjäniñ (R) arasyndaky gatnaşyk anyklyan, ýagny R -iñ S -e mahsuslygy tassyklanandyr.

Umumy ýagdaýda karar $S \Rightarrow R$ mantyky şeklinde aňladylýar.

Biz S pikir yöretmeler toplumyny **esas**, R pikir yöretmäni bolsa **netije** diýip atlandyrylýars. Kararda esas we netije "diýmek" baglaýjy söz bilen baglanýar.

Adatda $S \Rightarrow R$ kararda esas we netije gorizontaly çyzyk bilen şeýle

bölünýär: $\frac{S}{P}$. Ýönekeýje mysal getireliñ.

Eger Sabyr sport bilen meşgullansa, ol sagdyn bolýar.

Sabyr sport bilen meşgullanýar.

Diýmek, Sabyr sagdyn bolýar.

Bu kararyñ mantyky şekilini tapalyñ.

p : Sabyr sport bilen meşgullanýar.

q : Sabyr sagdyn

pikir yöretmelere garasak, karar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array} \right\} \text{ esas}}{q \left. \right\} \text{ netije}}$$

$p \Rightarrow q$ we p pikir yöretmelerden q pikir yöretme gelip çykany üçin, karar $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ mantyky şekile eýe.

Kararyň çynlyk jedwelini düzýäris:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Netijede tawtologiýany emele getirdik. Bu ýagdaý kararyň **dogrudygyny** görkezýär, ýagny berlen esaslardan dogry netije çykarylanlygyny aňladýar.

1-nji mysal. Aşakdaky kararyň nädogrudygyny subut ediň:

Eger üçburçluk üç tarapa eýe bolsa, onda $2+4=7$.

Diýmek, üçburçluk üç tarapa eýe.

 Bu kararyň mantyky şekilini tapalyň.

p : üçburçluk üç tarapa eýe.

q : $2+4=7$

pikir ýöretmelere garasak, karar aşakdaky görnüşe eýe bolýar:

$$\frac{\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array} \right\} \text{ esas}}{q \text{ } \left. \right\} \text{ netije}}$$

$p \Rightarrow q$ we q pikir ýöretmelerden p pikir ýöretme gelip çykany üçin, karar $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ mantyky şekile eýe.

Çynlyk jedwelini düzýäris:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Netijede tawtologiýa emele gelmedi. Bu ýagdaý kararyň **nädogrudygyny** görkezýär, ýagny berlen esaslardan dogry netije çykarylmandygyny aňladýar.

Aşakda biz dogry kararlary (**argumentasiýa** kanunlaryny) getirýäris:

T.n	Karar	Manysy	Mysal
1°.	$p \Rightarrow q$ $\frac{p}{q}$	p dogry bolanda q dogry bolsun. Munda p dogry. Diýmek, q hem dogry.	Eger dersligi okasam, gowy baha alaryn. Dersligi okadym. Diýmek, gowy baha alaryn.

2°.	$\frac{p \Rightarrow q}{\neg p} \quad \neg q$	p dogry bolanda, q dogry bolsun. Emma q nădogry. Diýmek, p hem nădogry.	Eger kitap okasam, gowy baha alaryn. Gowy baha almadym. Diýmek, kitap okamadym.
3°.	$\frac{p \vee q}{\neg p} \quad q$	p ýa-da q dogry we p nădogry bolsun. Diýmek, q nădogry.	Men ýa-da kitap okajak, ýa-da kino görjek. Men kitap okamadym. Diýmek, men kino gördüm.
4°.	$\frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow r} \quad p \Rightarrow r$	p -dan q hem-de q -dan r gelip çyksyn. Onda p -dan r gelip çykýar.	Eger howa aýyk bolsa, men sport meýdançasyna bararyn. Eger men sport meýdançasyna barsam, futbol oýnaryn. Diýmek, howa aýyk bolsa, men futbol oýnaryn.

Biz kararlaryň dogrudygyny subut etmegi gönükme hökmünde okuwça hödürleýäris.

Gönükmeler

- 75.** Aşakdaky karara garalyň:
 Alijanyň bedeniniň temperaturasy diňe ol syrkawlanda ýokary bolýar.
 Alijanyň bedeniniň temperaturasy ýokary däl.
 Diýmek, Alijan syrkawlamandyr.
 a) kararyň mantlyky şekilini ýazyň;
 b) kararyň dogry bolýandygyny subut ediň.
- 76.** Kararlaryň mantlyky şekilini ýazyň:
 a)
$$\begin{array}{ccccc} \text{I} & p \Rightarrow q & \text{II} & p \vee q & \text{III} & \frac{p \vee q}{p} & \text{IV} & \frac{p \Rightarrow q}{\neg p} & \text{V} & \frac{p \Rightarrow q}{q \Rightarrow p} \\ & \neg q & & \neg p & & & & \neg p & & p \\ \hline & \neg p & & q & & & & \neg q & & p \end{array}$$

 b) her bir karar üçin çynlyk jedwelini ýazyp, olardan haýsylarynyň dogry bolýandygyny tapyň.
 c) tebigy dilde aňladylmagyna mysallar getirin.
- 77.** Pikir ýöretmeleri karar şeklinde ýazyň:
 a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$; c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$;
 b) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$; d) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee p)$.
 Emele gelen kararlardan haýsylary dogry?
- 78.** p : x – düýp san we q : x – tāk san pikir ýöretmelere garalyň:
 Aşakdaky kararlardan haýsylary dogry?
 a) Eger x – düýp san bolsa, ol tāk bolýar. x – tāk ýa-da düýp san. Diýmek, x – tāk san;

b) x – ták ýa-da düýp, emma bir wagtda däl. x – ták san. Diýmek, x – düýp san.

79. Karar berlen: Döwran ýaryşa gatnaşmagy üçin ol ýa Singapura, ýa-da Gongkonga barýar. Döwranýň Singapura barjagy mälim. Diýmek, Döwran Gongkonga barmaýar.

a) çynlyk jedweli kömeginde bu karar nädogry bolýandygyny subut ediň;

b) näme üçin bu karar nädogry bolýandygyny düşündiriň.

80. Aşakdaky kararlardan haýsylary dogry, haýsylary nädogry:

a) Talyp sagat 10.00-da ýa kino, ýa-da teatra barýar. Talyp sagat 10.00-da kino barmady. Diýmek, Talyp sagat 10.00-da teatra bardy;

b) x sany 4-e kratny bolsa, ol jübüt san bolýar. x – jübüt san, diýmek, ol 4-e kratny;

c) x sany ýa-da 30-uň ýa-da 50-niň bölüjisi. Diýmek, x sany 50-niň bölüjisi;

d) eger yzygiderlik arifmetik progressiýa bolmasa, ol geometrik progressiýa bolýar. Diýmek, yzygiderlik ýa arifmetik, ýa-da geometrik progressiýa bolýar;

e) ähli synpdaşlarym gowy okaýar. Mahsuma gowy okaýar. Diýmek, Mahsuma meniň synpdaşym.

81. Pikir ýöretmeleri dowam etdirip, dogry kararlary alyň:

a) Ikimizden birimiz häzir stomatologýň kabulyna girmeli.

Men girjek däl. Diýmek

b) Men ýa mekdebe bararyn, ýa-da enem maňa gaty käýer. Bu gün men mekdebe anyk barmaryn. Diýmek

c) Eger meseläni dogry çözsäm, onuň jogaby kitapdaky jogap bilen birmeňzeş bolýar. Meniň netijäm kitapdaky jogapdan tapawutly. Diýmek..;

d) Eger Genri öýlenen bolsa, onuň mülküne aýaly eýe bolýar. Eger öýlenmedik bolsa, onuň mülküne agasy eýe bolýar. Diýmek, onuň mülküne

e) Ýa-da otly gijä galmady, ýa-da ol ýatyrylan. Eger ony ýatyrylan bolsa, men bu gün hiç ýere gitmeýärin. Eger ol gijä galýan bolsa, men iş wagtynda baryp bilmerin. Diýmek men.....;

f) Eger 2 – düýp san bolsa, ol iň kiçi düýp san bolýar. 2 – düýp san. Diýmek

Sofizmler we paradokslar

Sofizm² –bilgeşleýin çykarylýan nädogry netije, haýsy-da bolsa bir tassyklamanýň nädogry subudy. Munda subutdaky ýalňyş ep-esli ussalyk bilen, bildirmezden gizlenýär.

Sofizme degişli meseleleri ilki, miladydan öňki V asyrda Gadymký Gresiýada ýaşan matematik Zenon düzupdir.

Zenon, meşhur bedew Ahillesiň önünde süýrenip baryan pyşbagaynyn hiç haçan kowup ýetip bilmejekdigini matematiki pikir ýöretmeleriniň kömeginde aşakdaky ýaly "subut" edipdir. Ahilles pyşbaga garanda 10 esse çaltrak çapyp bilýär. Ilki, pyşbaga 100 metr önde bolsun. Ahilles bu 100 metri çapyp geçýänçe, pyşbaga 10 metr öňe ýöreýär. Ahilles bu 10 metri çapyp geçýänçe pyşbaga ýene 1 metr süýşýär we ş.m. Olaryň arasyndaky aralyk hemişe gysgalyp barýar, ýöne hiç haçan nola öwrülmeýär.

Zenonyň meseleleri çäksizlik, hereket, älem düşüňjeleri bilen bagly bolup, olar matematika we fizika ylymlarynyň ösmeginde uly ähmiýete eýe boldy.

Käbir sofizmler beýik eždatlarymyz Farabynyň eserlerinde, Biruny bilen Ibn Sinanyň ýazyşan hatlarynda ara alnyp maslahatlaşylypdyr.

Biz aşakda iň ýönekeý sofizmlere mysallar getirip, olary düşündirmäge çalşarys.

2-nji mysal. *1000 som nirä gitdi?* 3 dost naharhanada naharlayp bolanlaryndan soň hyzmatçy olara 25000 somluk hasaby berdi. 3 dostuň her biri 10000 somdan pul berip, 30000 somy hyzmatça berdiler. Hyzmatçy olara 5000 som gaýtargy berdi. Dostlar 1000 somdan bölüşip aldylar we 2000 somy taksi üçin berdiler. Gaýdyşyn dostlardan biri hasaplap başlady, "Her birimiz 9000 somdan harajat etdik, bu 27000 som bolýar, 2000 som taksä berdik, muny goşsak 29000 som bolýar. 1000 som nirä gitdi?"

△ Bu ýerdäki esasy "ýalňyşlyk" hasaplamanyň nädogry edilýänliginde. 3 dost 9000 somdan 27000 som pul tölediler. Mundan 25000 somuny nahara töläp, 2000 somuny taksi üçin dostuna berdiler, diýmek, umumy hasap 27000 som bolýar. Ýokardaky hasaplamada 2000 som 27000 somuň içinde ýatyr. ▲

3-nji mysal. *"2·2=5" sofizmi:* $20-16-4=25-20-5$ dogry deňligi ýönekeýleşdirýäris:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$

$$2 \cdot 2 \cdot (5-4-1)=5 \cdot (5-4-1)$$

Ahyrky deňligiň sag we çep böleklerini umumy $(5-4-1)$ köpeldijä gysgaldyp, $2 \cdot 2=5$ deňligi alarys.

△ Bu ýerdäki goýberilýän esasy "ýalňyşlyk" $2 \cdot 2 \cdot (5-4-1)=5 \cdot (5-4-1)$ deňligiň iki bölegini nola deň bolan $(5-4-1)$ köpeldijä gysgaltmakda. ▲

Paradoks³ – köpçülik tarapyndan kabul edilen adaty pikire öz mazmuny ýa-da şekili bilen ýiti ters bolan, garaşylmadyk pikir ýöretme. Islendik paradoks "şubhesiz dogry" (esaslymy, esassyzmy – tapawudy ýok) hasaplanan ol ýa-da bu pikiri inkär etmek ýaly görünýär. "Paradoks" termininiň özi-de ilki antik filoso-fiýada islendik täsin, original pikiri aňlatmak üçin ulanylan.

Paradokslar, adatda, mantyky esaslary doly anyklanmadyk nazaryýetlerde duşýar.

4-nji mysal

Ýalançy paradoksy. "Men tassyklaýan hemme zat ýalan" pikir ýöretmä garalyň.

△ Eger bu pikir ýöretme çyn bolsa, bu pikir ýöretmäniň manysyna esasan aýdylan pikir ýöretmäniň ýalandygy hakykat. Eger bu pikir ýöretme ýalan bolsa, pikir ýöretmedäki tassyk – ýalan. Diýmek, bu pikir ýöretme ýalan diýen pikir ýöretme ýalan, şeýle bolýan bolsa, bu pikir ýöretme hakykat. Garşylyk. ▲

5-nji mysal

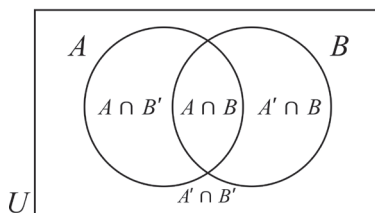
Refleksiwlilik paradoksy. Özbek dilindäki sözün manysy özünde aňladylsa, ony refleksiw diýip atlandyralyň.

Meselem, "özbekçe" sözi refleksiw, "iňlisçe" sözi bolsa refleksiw däl. Edil şeýle, "on harply" sözi ondaky harplaryň sany çyndan hem 10-a deň bolany üçin refleksiw, "alty harply" sözi bolsa refleksiw däl. Ähli refleksiw sözler toplumyna garalyň. "Refleksiw däl" sözünüň özi refleksiwmi?

△ Eger bu söz refleksiw bolsa, onda manysyna görä, ol refleksiw däl. Eger bu söz refleksiw bolsa, onda onuň manysy özünde aňladylany üçin, ol refleksiw bolýar. Gapma-garşylyk. ▲

16-18 MESELELER ÇÖZMEK

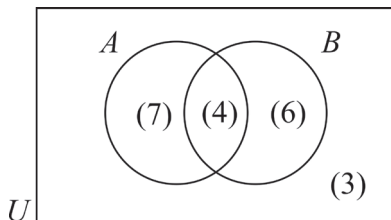
1-nji mesele. Kesişýän iki A , B toplumlar uniwersal toplumy dört bölege bölýär:



3 Gad. grek. παράδοξος – garaşylmadyk, täsin.

△ Ді́ймек, уни́версал топлумы́н элементleriniń саны şu бөлекleriń элементleriniń саныныń жемі екен.

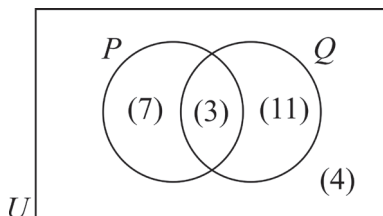
Аşaқдакы diagrammada уни́версал топлумы́н дегиşли бөлекleriniń элементleriniń саны ýаýыń içине алнып ýазылан:



Бу ýерде, meselem, A , B топлумларыń ikisine 4 element дегиşли, 3 element bolsa hiç birине-de дегиşли дәл.

U топлумыń islendik elementi 4 бөлекlerden hiç болмаса birине дегиşли боланы себәпли U топлумыń элементleriniń саны $7+4+6+3=20$ -ә дең. ▲

2-нји mesele. Surata garap, ашақдакы топлумларыń элементleriniń саныны тапыń:



- a) P ; b) Q ; c) $P \cup Q$;
d) P -ge дегиşли, emma Q -ga дегиşли болмадык elementler топлумы;
e) Q -a дегиşли, emma P -ge дегиşли болмадык elementler топлумы;
f) ne P -ge, ne-de Q -a дегиşли болмадык elementler топлумы.

- △ a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q)=7+4=11$;
c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P, \text{ emma } Q \text{ дәл})=7$;
e) $n(Q, \text{ emma } P \text{ дәл})=11$. ▲

3-нји mesele. Eger $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ we $n(A \cap B)$ bolsa,

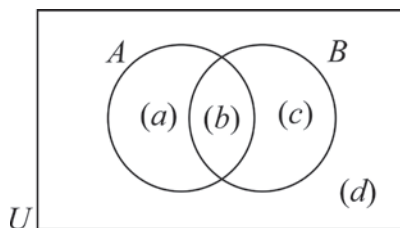
a) $n(A \cup B)$ -ni тапыń.

b) A -ga дегиşли, emma B -ge дегиşли болмадык elementler топлумы нәче elementден дүзүлен?

△ Wenn diagrammasyny дүзýäris:

$n(A \cap B)$ -ден $b=6$; $n(A)$ -дан $a+b=14$; $n(B)$ -ден $b+c=17$; $n(U)$ -дан $a+b+c+d=30$ деңлик gelip чыкýар.

Ді́ймек, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



Diagrammadan aşakdakylara eýe bolarys:

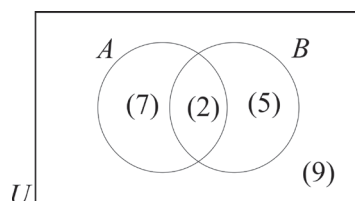
a) $n(A \cup B) = a + b + c = 25$;

b) A -ga degişli, emma B -ge degişli bolmadyk elementler sany $a = 8$ -e deň. ▲

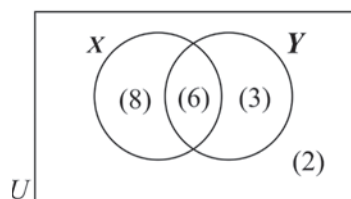
Gönükmeler

Diagrammadan peýdalanyň, aşakdaky toplumlaryň elementleriniň sanyny tapyň:

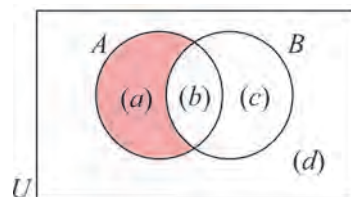
- 82.** a) B ; b) A' ; c) $A \cup B$;
d) A -ga degişli, emma B -ge degişli bolmadyk elementler toplumy;
e) B -ge degişli, emma A -ga degişli bolmadyk elementler toplumy;
f) ne A -ga, ne-de B -ge degişli bolmadyk elementler toplumy.



- 83.** a) X' ; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;
d) X -a degişli, emma Y -ge degişli bolmadyk elementler toplumy;
e) Y -ge degişli, emma X -a degişli bolmadyk elementler toplumy;
f) ne X -a, ne-de Y -ge degişli bolmadyk elementler toplumy.



- 84.** a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



- 85.** $n(U) = 26$, $n(A) = 11$, $n(B) = 12$ we $n(A \cap B) = 8$ bolsa,

a) $n(A \cup B)$ -ni tapyň;
b) B -ge degişli, emma A -ga degişli bolmadyk elementler toplumy näçe elementden düzülen?

- 86.** $n(U) = 32$, $n(M) = 13$, $n(M \cup N) = 26$ we $n(M \cap N) = 5$ bolsa,

a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$ -i tapyň.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ we $n(R \cup S)=48$ bolsa,

a) $n(R \cap S)$;

b) S -e degışli, emma R -e degışli bolmadyk elementler toplumy näçe elementden düzülen?

4-nji mesele. Sport gurnagynda gatnaşan 27 sany okuwçydan 19 sany-sy gara saçly, 14 sanysy gara gözli we 11 sanysy hem gara saçly, hem gara gözli.

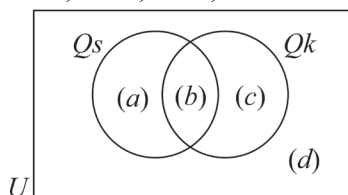
a) Bu maglumaty Wenn diagrammasynda şekillendiriň we düşündiriň.

b) **I** Ýa gara saçly, ýa-da gara gözli; **II** gara saçly, emma gara gözli däl okuwçylar näçe?

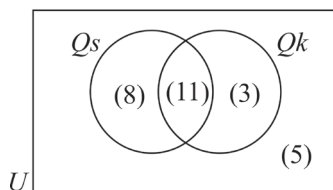
△ a) Q_s – gara saçly, Q_k bolsa gara gözli okuwçylar toplumy bolsun. Aşakdaky diagramma eýe bolarys:

Munda

$$a+b+c+d=27; \quad a+b=19; \quad b+c=14; \\ b=11; \quad a=8; \quad c=3; \quad d=5.$$



Ýagny



b) Diagramma garap, aşakdakylary anyklaýarys:

I Ýa gara saçly, ýa-da gara gözli okuwçylar sany

$$n(Q_s \cap Q_k)=8+11+3=22 \text{ sany};$$

II Gara saçly, emma gara gözli däl okuwçylar sany

$$n(Q_s \cap Q_k')=8 \text{ sany.} \blacktriangle$$

Gönükmeler

88. Badminton klubunda 41 sany gatnaşyjydan 31 sanysy ýekebara we 16 sanysy jübütliklerde oýnadylar. Näçe gatnaşyjy hem ýekebara, hem jübütliklerde oýnapdyrlar?

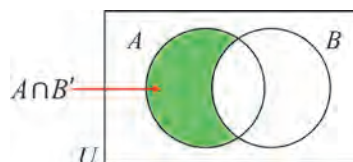
89. Kärhanada 56 sany işçi işleýär. 1 hepdäniň içinde şolardan 47 sanysy gündizki we 29 sanysy gijeki smenalarda işlediler. Näçe işçi hem gündizki, hem gijeki smenada işlediler?

90. Aşakdaky Wenn diagrammasyna garap

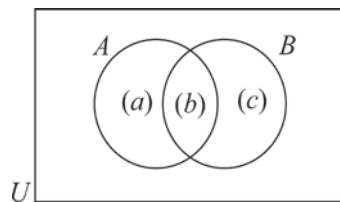
$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B),$$

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$$

deňlikler yerliklidigini görkeziň.



- 91.** Wenn diagrammasyndan peýdalanyň
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 formulany getirip çykaryň.



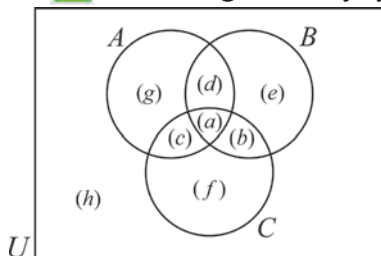
- 92.** 50 sany talypdan 40 sanysy iňlis dilini, 25 sanysy bolsa nemes dilini öwrenýär. Ik dili-de öwrenýän talyp näçe?

4-nji mesele. Futbol ýaryşynda şäherden 3 sany A , B we C komanda gatnaşýar. Şäher ilatynyň 20 göterimi A komanda, 24 göterimi B komanda we 28 göterimi C komanda janköýerlik edýärler. Şäher ilatynyň 4 göterimi hem A , hem B komanda, 5 göterimi hem A , hem C komanda, 6 göterimi bolsa hem B , hem C komanda janköýerlik edýär. Mundan daşary, şäher ilatynyň 1 göterimi ähli komandalara janköýerlik edendigi mälim.

Şäher ilatynyň näçe göterimi:

- diňe A komanda janköýerlik edýär;
- hem A , hem B komanda janköýerlik edip, C komanda janköýerlik etmeýär;
- hiç hili komanda janköýerlik etmeýär?

△ Wenn diagrammasyny maglumatlar bilen doldurýarys.



$a=1$, çünki şäher ilatynyň 1 göterimi ähli komandalara janköýerlik edýär.

$a+d=4$, çünki şäher ilatynyň 4 göterimi hem A , hem B komanda janköýerlik edýär.

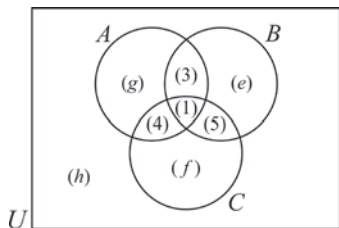
$a+b=6$, çünki şäher ilatynyň 6 göterimi hem B , hem C komanda janköýerlik edýär.

$a+c=5$, çünki şäher ilatynyň 5 göterimi hem B ,

hem C komanda janköýerlik edýär.

Diýmek, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Netijede aşakdaky diagramma emele gelýär:



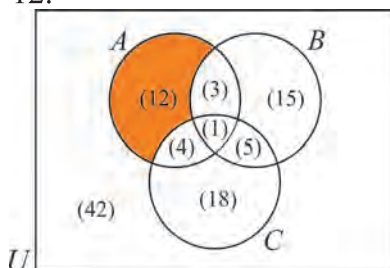
Mundan daşary, şäher ilatynyň 20 göterimi A komanda janköýerlik edeni üçin $g+1+4+3=20$, ýagny $g=12$.

Edil şeýle, şäher ilatynyň 24 göterimi B komanda janköýerlik edeni üçin $e+1+5+3=24$, ýagny $e=15$.

Ahyrynda, şäher ilatynyň 28 göterimi C komanda janköýerlik edeni üçin $f+1+5+4=28$, ýagny $f=18$.

Şäher ilaty 100 göterim bolany üçin, hiç haýsy komanda janköýerlik etmedikler göterimi $h=42$ -ä deň.

a) diňe A komanda janköýerlik edýänleriň göterimini deňişli bölegi boýap tapýarys: $g=20-4-3-1=12$.



b) hem A , hem B komanda janköýerlik edip, C komanda janköýerlik etmeýänler göterimi $12+3+15=30$ -a deň.

c) hiç hili komanda janköýerlik etmeýänler sany $h=42$ -ä deň. ▲

Gönükmeler

93. Halkara maslahatda 58 gatnaşyjylar dürli dillerde, şol sanda 28 sanysy arap, 27 sanysy hytaý, 39 sanysy bolsa inlis dilinde gepleşip bilýärler.

- diňe hytaý dilinde gepleşip bilýänler;
- şu dillerden hiç birinde-de gepleşip bilmeýänler;
- ne arap, ne hytaý dilinde gepleşip bilmeýänler näçe?

94. Aşakdaky pikir ýöretmeleriň inkärini düzüň:

- Gün şöhle saçýar we howa yssy;
- eger asman bulutsyz bolsa, men derýa bararyn;
- ýagyş ýaganok;
- men ýa barlag işine taýýarlanaryn, ýa barlag işini gowy ýazyp bilmeýärim;
- käbir okuwçylar zehinli;
- ähli okuwçylar zehinli;
- zehinli okuwçylar ýok;
- käbir okuwçylaryň gözleri mawy.

Pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň (**95–104**):

95. Eger talyp matematikany özleşdirse, onuň pikirlenmesi giňelýär.

96. Eger men matematikany we daşary ýurt dilini özleşdirsem, men dynç almaga ýa-da öýe, ýa-da daga giderin.

97. Dynç alşyň başlanandygy ýalan.

- 98.** Eger adam ýaşlygyndan özüne erk edip bilse, onda onuň töweregindäkiler ondan öýkelemeyärler we ony hormat edýärler.
- 99.** Eger metaldan elektrik togy geçse, onuň temperaturasy artýar.
- 100.** Ol öýe ýa takside, ýa otluda gidýär.
- 101.** Bu önüm üçin gara ýa-da reňkli metal ulanylan.
- 102.** Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmagy ýeterli.
- 103.** Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmaly.
- 104.** Dynç alşyň başlanmagy üçin çärýek gutarmagy zerur we ýeterli.
Pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň we çyn-ýalanlygyny anyklaň (**105–117**):
- 105.** Eger adam ruhy kesel bolsa, ol ýakynlaryny tanamaýar. Bu adam ruhy kesel. Diýmek, ol ýakynlaryny tanamaýar.
- 106.** Eger men saňa ynansam, sen meni aldaýarsyň. Diýmek, men saňa ynanmasam, sen meni aldap bilmersiň.
- 107.** Ertir biz teatra ýa-da muzeýe bararys. Eger teatra barsak, öýe giç gaýdýarys. Eger muzeýe barsak, öýe irräk ýetip geleris. Emma biz öýe giç gaýtmarys. Diýmek, biz teatra дәl, muzeýe barýarys.
- 108.** Eger ol Aşyryň atasy bolsa, ol Myradyň atasy bolup bilmeýär. Ol Aşyryň we Jemşidiň atasydygy nädogry eken. Ol ýa Jemşidiň ýa Myradyň atasydygy anyklandy. Diýmek, ol Aşyryň atasy дәl.
- 109.** Eger häzir gys bolsa, temperatura pes bolýar. Häzir güyz bolmasa, gys bolýar. Häzir güyz. Diýmek, temperatura pes дәl.
- 110.** Eger Polat bilesigeliji bolmasa, ol žurnalist bolmaýar. Eger Polat žurnalist bolsa, ol mugallym bolmaýar. Polat örän bilesigeliji, emma ol mugallym дәl. Diýmek, Polat – žurnalist.
- 111.** Eger ýagys ýagsa, asman bulutly bolýar. Eger asman bulutly bolmasa, Gün bolýar. ýagys ýagmaýar, emma Gün bar. Diýmek, Gün bolsa, asman bulutly bolmaýar.
- 112.** Eger Myrat ýene tizligi artdyrsa, onuň sürüjilik güwänamasy alynýar. Eger Myrat pýan ýagdaýda rula geçse, ol tizligi artdyrmaýar. Bu gün Myrat pýan bolmaýar we tizligi artdyrmaýar. Diýmek, onuň sürüjilik güwänamasy alynmaýar.
- 113.** Köpeltmek jedwelini bilmedikler sowatsyz hasaplanýar. Elipbiýi bilmedikler hem sowatsyz hasaplanýar. Ol ýa köpeltmek jedwelini, ýa elipbiýi bilmeýär. Diýmek, ol sowatsyz.
- 114.** Eger ol hak bolsa, men ondan ötünç soramaly. Eger men hak bolsam, ol menden ötünç soramaly. Ikimizden birimiz elbetde ötünç soramaly. Netije: birimiz hak.

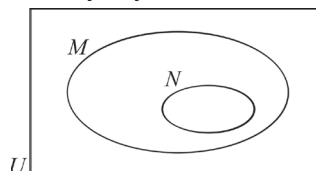
- 115.** Men ýa mekdebe bararyn, ýa maňa enem käýer. Men mekdebe barmaýaryn. Diýmek, enem maňa hökman käýer.
- 116.** Eger men meseläni ýalňyşsyz çözsäm, alnan netije derslikdäki jogap bilen birmeňzeş bolýar. Meniň netijäm bilen derslikdäki jogap tapawutlanýar. Diýmek, men meseläni çözende ýalňyş goýberipdirin.
- 117.** Ylym çylşyrymly däl ýa-da ol gowy okadylýar. Eger ylym çylşyrymly bolmasa, ony özleşdirerin. Eger ylym gowy okadylsa, ony özleşdirerin. Diýmek, ähli ýagdaýlarda ylmy özleşdirerin.
- 118.** Çynlyk jedwelleriniň kömeginde aşakdaky pikir ýöretmeleriniň görnüşini anyklaň we tebigy dildäki degişli habar sözlemine mysal getirin.
- | | |
|--|---|
| a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$; | d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$; |
| b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$; | e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$; |
| c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$; | f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$. |
- Aşakdaky pikir ýöretmeleri mantyky baglaýjylaryň kömeginde aňladyň we çyn-ýalanlygyny anyklaň (119-130):
- 119.** Ähli delfinler – süýdemdirijiler. Ýekeje-de balyk süýdemdiriji däl. Diýmek, ýekeje-de balyk delfin däl.
- 120.** Ähli sygyrlar – süýdemdirijiler. Ähli sygyrlar bedäni iýýärler. Diýmek, käbir süýdemdirijiler bedäni iýýärler.
- 121.** Käbir talyplar işleýär we käbir talyplar gowy okaýarlar. Diýmek, käbir gowy okaýan talyplaryň içinde işleýänleri bar.
- 122.** Ähli metallar gaty görnüşde. Simap – metal. Diýmek, simap gaty görnüşde.
- 123.** Hiç hili metal gaz däl. Käbir maddalar metallar. Diýmek, käbir maddalar gaz däl.
- 124.** Ähli metallar ýylylygy gowy geçirýärler. Ähli metallar elektrik toguny geçirýärler. Diýmek, käbir elektrik geçirijiler ýylylygy gowy geçirýärler.
- 125.** Käbir erkekler matematiklerdir. Käbir matematikler – filosoflardyr. Diýmek, käbir filosoflar erkeklerdir.
- 126.** Ähli alpinistler batyrgaý. Käbir alpinistler erkekler. Diýmek, käbir erkekler batyrgaý bolýar.
- 127.** Ähli alymlar akylyly. Käbir akylyly adamlaryň dili ýiti. Diýmek, käbir dili ýitiler alymlardyr.
- 128.** Ähli daşary ýurt dili mugallymlary daşary ýurt dilini gowy bilýärler. Daşary ýurt dilini gowy bilýänleriň käbirleri matematikany gowy görmeýärler. Diýmek, matematikany gowy görýänleriň käbirleri daşary ýurt dili mugallymlary däl.

- 129.** Ähli kromanýonlar – agressiw (çozujy). Hiç bir neandertal kromanýon däl. Diýmek, hiç hili neandertal agressiw däl.
- 130.** Käbir süýdemdirijiler – kitler. Ähli kitler – iri haýwanlar. Diýmek, käbir iri haýwanlar süýdemdirijilerdir.
- Tekstleri okaň we ýagdaýy ara alyp maslahatlaşyň (**131–138**):
- 131.** Krit filosofy Epimenid ähli kritliler ýalançy bolýandygyny tassyklady. Epimenid çyn gepläpmi?
- 132.** Platon: Häzir Sokrat aýdan ähli zat ýalan.
Sokrat: Häzir Platon aýdan gep ýalan.
Kim çyn gepläpdir?
- 133.** Kagyzyň bir tarapyna: "Kagyzyň başga tarapyna ýazylan sözlem ýalan", şu kagyzyň ikinji tarapyna: "Kagyzyň başga tarapyna ýazylan sözlem ýalan" diýip ýazylan. Kagyzyň haýsy tarapyna çyn sözlem ýazylypdyr?
- 134.** Meşhur filosof Protagor Ewatly mugt hukuk öwretmek üçin şägirtlige aldy. Munda eger Ewatl özüniň birinji sud mejlisinde ýeňiji bolsa, muňa birneme pul töleýär manydaky şertnama düzüldi.
Okuwdan soň Ewatl işe hiç çykmady. Netijede onuň birinji sud mejlisinde gatnaşmak-gatnaşmazlygy hyýaly boldy. Protagor özüniň şägirdiniň üstünden suda şikaýat etdi. Sud prosesinden parça:
Protagor. Islendik ýagdaýda bu ýigit maňa tölemeli. Hakykatdan ham, eger ol bu sudda ýeňiji bolsa, şertnama görä ol maňa töleýär. Eger utmasa, suduň kararyna görä maňa töleýär.
Ewatl. Men Protagora hiç zat bermerin! Eger men sudda ýeňiji bolsam, ýeňiji bolan adam hökmünde hiç zat bermerin. Emma men utdurmaga-da taýýardyryn. Munda şertnama görä men hiç zat tölemeýärim.
- 135.** Bu gyzykly sözlemde sözleriň sany ýedä deň.
- 136.** Bu sözlemi okamak gadagan.
- 137.** Bir adam totuguşy satjak mahalynda totuguş islendik dilde eşiden her bir sözüni gaýtalaýar, diýip ynandyrdy. Emma satyn alnan totuguş hiç zat geplemeýär. Eger satyjynyň aldamanlygy mälim bolsa, ýagdaýy düşündiriň.
- 138.** Meretdäki kitaplar 1000 sanydan köp.
Ýok, ondaky kitaplar 1000 sanydan kem.
Onda iň bolmanda bir kitap bar.
Şu üç pikir ýöretmeden hiç bolmanda bir çyn. Meretde näçe kitap bar?

Barlag ýumuşlary I variant

1. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $A = \{0 \text{ we } 9 \text{ arasyndaky ähli jübüt sanlar}\}$, $B = \{18 \text{ sanynyň natural bölüjileri}\}$ bolsa, $A \cap B$ toplumyň elementlerini ýazyň.

2. Diagrammany depderiňize göçüriň we $M \cap N$ toplumy belgiläň.

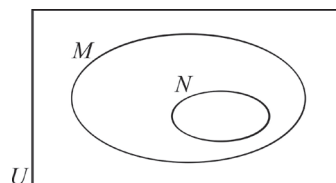


3. p : x – jübüt san, q : x san 3-e bölünýär pikir ýöretmelere garalyň. Pikir ýöretmeleri sözleriň kömeginde aňladyň. Olar haýsy x -larda çyn? Ýalan? a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.
4. Aşakdakylardan haýsylary mantyky deňgüýçli?
a) $p \Rightarrow q$ we $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ we $(p \wedge q) \wedge \neg p$.
5. Kararlaryň mantyky şekillerini ýazyň. Bu kararlaryň dogry-nädogrudygyny barlaň. Eger asman bulutly bolsa, men telpegimi geýýärim. Asman bulutly. Diýmek, men telpegimi geýýärim.

II variant

1. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{0 \text{ we } 9 \text{ arasyndaky ähli jübüt sanlar}\}$, $B = \{18 \text{ sanynyň natural bölüjileri}\}$ bolsa, $(A \cap B)'$ toplum elementlerini ýazyň.

2. Diagrammany depderiňize göçüriň we $M \cap N'$ toplumy belgiläň.



3. p : x – jübüt san, q : x san 3-e bölünýär pikir ýöretmelere garalyň. Pikir ýöretmeleri sözleriň kömeginde aňladyň. Olar haýsy x -larda çyn? Ýalan? a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.
4. Aşakdakylardan haýsylary mantyky deňgüýçli?
a) $\neg(p \wedge q)$ we $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ we $q \Rightarrow p$.
5. Kararlaryň mantyky şekillerini ýazyň. Bu kararlaryň dogry-nädogrudygyny barlaň. Ähli mugallymlar ylma teşne. Muazzam Alymowa mugallym däl. Diýmek, Muazzam Alymowa ylma teşne däl.



II BAP

MALIYE MATEMATIKASY ELEMENTLERI

19-21

YÖNEKEY WE ÇYLŞYRYMLY GÖTERIMLER

Mälim mukdardaky pul karzyna berlende karz alyjy bellenen möhletde karz berijä (*kreditora*) alnan summany (karzy) gaýtarmagy barada ylalaşylýar.

Mundan daşary, her bir karz alyjy kreditora goşmaça serişde tölemegi öz üstüne alýar.

Görnüşü ýaly, karzdar tarapyndan tölenýän pul karzyň mukdaryna, töleg möhletine we kreditor tarapyndan girdeji almak maksadynda bellenen göterim stawkasyna bagly.

Kreditoryň karzdara mälim mukdardaky puly bellenen möhletde karza berenligi netijesinde alýan girdejiini hasaplamak üçin adadta iki usul: **ýönekey (sada) göterimler we çylşyrymly göterimler** usullary ulanylýar.

Yönekey göterimler

Yönekey göterimler – kreditoryň karzdara mälim mukdardaky puly bellenen möhletde karzyna berenligi netijesinde alýan girdejisini hasaplamagyň usulydyr.

Meselem, 2 000 000 som 3 ýyla karzyna alynýar. Munda kreditor tarapyndan her ýyl 17 göterim stawkasy kesgitlendi.

Munda 1 ýyldan soň $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000$ som, 3 ýyldan soň bolsa goşmaça serişde $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 1\,020\,000$ som tölenmelidir.

Bu mysaldan aşakdaky **ýönekeý göterimler formulasy** diýlip atlandyrylýan gatnaşyk gelip çykýar:

$$I = \frac{C r n}{100},$$

bu ýerde C – ilki alnan karzyň mukdary, I – C mukdardaky puly ulanandygy üçin karzdaryň kreditora töleýän göterim tölegi. Şu parametr **göterim** tölegi ýada, ýönekeýrāk, göterim diýlip hem atlandyrylýar, r – her ýyla bellenen göterim stawkasy, n – ýyllar sany.

1-nji mysal. 8 000 000 som ýylyna 7 göterim stawkasynda 18 aýa alnan bolsa, göterim tölegi hasaplaň.

$$\triangle C = 8000000, \quad r = 7\%, \quad n = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ ýyl.}$$

$$\text{Diýmek, } I = \frac{C r n}{100} = \frac{8000000 \cdot 7 \cdot 1,5}{100} = 840 \text{ 000 som. } \triangle$$

2-nji mysal. Kreditor tarapyndan göterim stawkasy her ýyla 8% diýlip bellenen. Telekeçi 4 ýylyň içinde alnan karzyna we **göterim** tölegine goşmaça 1600 ABŞ dollaryny töledi we karzdan gutuldy. Telekeçi näçe mukdarda karz alypdy?

$\triangle$ Ýönekeý göterimleriň formulasyna görä

$$I = \frac{C r n}{100}, \text{ bu ýerde } I = 1600; r = 8; n = 4.$$

$$\text{Diýmek, } 1600 = \frac{C \cdot 8 \cdot 4}{100}.$$

$$\text{Mundan, } C = 5000 \text{ (ABŞ dollary). } \triangle$$

3-nji mysal. Bank ilki 4000 ABŞ dollary mukdarynda karz berip 18 aýda 900 ABŞ dollary girdeji aldy. Eger töleg ýylma-ýyl amala aşyrylan bolsa ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

$\triangle$ Ýönekeý göterimler formulasyna görä

$$I = \frac{C r n}{100}, \text{ bu ýerde } I = 900; n = 18 \text{ oy} = 1,5 \text{ ýyl, } C = 4000.$$

$$\text{Diýmek, } 900 = \frac{4000 \cdot r \cdot 1,5}{100}.$$

$$\text{Mundan, } r = 15\%. \triangle$$

4-nji mysal. Kreditor ilki 2000 ABŞ dollary mukdarynda karz berip, birnäçe ýylyň dowamynda ýylma-ýyl tölenenden soň jemi 3000 ABŞ dollaryny aldy. Eger göterim stawkasy her ýyla 12,5% diýlip bellenen bolsa, tölegler näçe ýylda amala aşyrylypdyr?

△ Kreditor 3000–2000=1000 (ABŞ dollari) mukdarynda girdeji alan.

Ýönekeý göterimler formulasyna görä

$$I = \frac{Crn}{100}, \text{ bu ýerde } I=1000; C=2000; r=12,5\%.$$

$$\text{Diýmek, } 1000 = \frac{2000 \cdot 12,5 \cdot n}{100}$$

Jogaby: 4 ýyl. ▲

Çylşyrymly göterimler

Çylşyrymly göterim usulynyň mazmunyna düşünmek üçin aşakdaky meselä üns berýäris.

5-nji mysal.

Eger 6000 ABŞ dollari mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan alynýan girdeji näçe bolar?

△ Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasyny hasaba alyp, her ýylky göterim töleg mukdaryny hasaplaýarys:

Ýyl	Karz (1)	Göterim tölegi $= \frac{Crn}{100}$ (2)	Balans (1) + (2)
1	\$6000,00	$\$6000,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$480,00$	\$6480,00
2	\$6480,00	$\$6480,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$518,40$	\$6998,00
3	\$6998,00	$\$6998,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$559,87$	\$7558,27

Diýmek, 6000 ABŞ dollari mukdardaky bergiden gutulmak üçin 3 ýylyň dowamynda 7558,27 ABŞ dollari mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor \$7558,27 – \$6000 = \$1558,27 mukdarda girdeji alýar. Bu girdeji umumy *çylşyrymly göterim tölegi (artdyрма göterim)* diýlip atlandyrylýar. ▲

Görnüşi ýaly, kreditor girdeji ahyrky ýylda emele gelen balans we başlangyç karz mukdarynyň tapawudyna deň eken.

Çylşyrymly göterimler usuly ýyly ýarym ýyllyklara, çärýeklere, aýlara, günlere bölüp ulanylmagy-da mümkin.

6-нй mysal.

Eger 10000 ABŞ dollary mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6% bilen 1 ýylda çärýeklere bölüp tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan alynýan girdeji näçe bolar?



Çärýek	Karz (1)	Göterim tölegi = $\frac{Crn}{100}$ (2)	Balans (1) + (2)
1	\$10000,00	$\$10000,00 \times \frac{6}{100 \cdot 4} \times \frac{1}{4} = \$150,00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$\$10000,00 \times \frac{6}{100 \cdot 4} \times \frac{1}{4} = \$152,25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$\$10302,25 \times \frac{6}{100 \cdot 4} \times \frac{1}{4} = \$154,53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$\$10456,78 \times \frac{6}{100 \cdot 4} \times \frac{1}{4} = \$156,85$	\$10613,63

Diýmek, 10000 ABŞ dollary mukdardaky karzdan gutulmak üçin 1 ýylyň dowamynda 10613.63 ABŞ dollary mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor 613.63 ABŞ dollary mukdarda girdeji alýar. ▲

Eger karz birnäçe ýyla berlen bolsa, jemleýji balans aşakdaky ýaly hasaplanýar:

$$A = C(1 + \frac{r}{100})^n,$$

bu ýerde A – jemleýji balans, C – ilki alnan karzyň mukdary, r – her ýyla bel-lenilen göterim stawkasy, n – ýyllar sany.

Eger karz n ýyla berlen bolsa, tölegler bolsa her ýyly k sany bölege (ýarym ýyllyklar, çärýekler, aýlar we ş.m.) bölüp amala aşyrylsa, tölenýän umumy mukdar

$A = C(1 + \frac{r}{100k})^{kn}$ formula boýunça hasaplanýar.

Iki usulda-da umumy çylşyrymly göterim tölegi (artdyrma göterim)

$I = A - C$ formula boýunça hasaplanýar.

6-njy mysaly şu formulalara daýanyp çözüäris.

$C=10000$, $r=6$, $n=1$, $k=4$.

$$A = C(1 + \frac{r}{100k})^{kn}; \quad A = 10000 \times (1 + \frac{6}{100 \cdot 4})^4; \quad A = 10613,64.$$

Діёмек, 10000 АБ\$ dollary mukdardaky karzdan gutulmak üçin 1 ýyl dowamynda 10613.64 АБ\$ dollary mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly.

Munda kreditor 613.64 АБ\$ dollary mukdarda girdeji alýar.

Eger banka ýönekeý göterim boýunça goýlan başlangyç serişde C som bolsa, n ýyldan soň bank müşderä $a_n = C(1 + \frac{nr}{100})$ som mukdarda pul töleýär, bu ýerde r bankyň ýyllyk göterim stawkasy.

Eger, şu serişde çylşyrymly göterim boýunça banka goýulsa, n ýyldan soň bank müşderä $b_n = C(1 + \frac{r}{100})^n$ som mukdarda pul töleýär.

a_n – yzygiderligiň arifmetik progressiýa,

b_n – yzygiderligiň bolsa geometrik progressiýa düzyändigini aýdyň.

Гөнүкмелер

1. a) 3 000 funt sterling ýyllyk göterim stawkasy 7% boýunça 3 ýyla karzyna alynsa;
b) 6100 АБ\$ dollary ýyllyk göterim stawkasy 5,9% boýunça 15 aýa karzyna alynsa;
c) 800 000 Ýaponiýa iýenasy ýyllyk göterim stawkasy 6,5% boýunça 4 ýyl-u 7 aýa karzyna alynsa;
d) 250 000 ýewro ýyllyk göterim stawkasy 4,8% boýunça 134 güne karzyna alynsa;
kreditora tölenýän göterim tölegini tapyň.
2. 130000 АБ\$ dollary karzyna berlen bolsa, kreditor haýsy ýagdaýlarda köpräk girdeji alýar:
ýyllyk göterim stawkasy 7% boýunça 5 ýyla,
ýa-da ýyllyk göterim stawkasy 7,7% boýunça 5,5 ýyla belenilendemi?
3. Kreditor tarapyndan göterim stawkasy her ýyla 7% diýlip belenen. Telekeçi 5 ýylyň içinde alnan karzy we göterim tölegine goşmaça 910 АБ\$ dollaryny töleýär we karzdan gutuldy. Telekeçi näçe mukdarda karz alan?
4. Ýyllyk göterim stawkasy 8% diýlip belenen. 3 ýylyň içinde göterim tölegine goşmaça 3456 funt sterling tölenen bolsa, näçe mukdarda karz alan?
5. Inwestor 21 aýda 2300 ýewro girdeji almakçy. Her ýylky göterim stawkasy 6,5% diýlip belenen bolsa, inwestor näçe mukdarda investisiýa girizmeli?
6. a) Kreditor 4500 АБ\$ dollary mukdarynda karz berip, 3 ýylda 900 АБ\$ dollaryna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?
b) Kreditor 170000 Ýapon iýenasy mukdarynda karz berip, 2 ýylda 170000 Ýapon iýenasyna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?

7. 8 aýyň dowamynda 9000 ABŞ dollary mukdarynda karz alnyp, karzdan daşary goşmaça 700 ABŞ dollary tölendi. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?
8. Raýat 26 million som banka goýup, onuň hasabynda 18 aýda 32 million som bolandygyny anyklady. Ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?
9. a) Kreditor 20000 ABŞ dollary karz berip, 5000 ABŞ dollaryna deň girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 7% bolsa, karz näçe ýyla alnan?
b) Kreditor 1200 ýewro mukdarynda karz berip 487 ýewro girdeji aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 6,75% bolsa, karz näçe ýyla alnan?
10. Müşderi banka 9400 funt sterlingi ýyllyk göterim stawkasy 6,75% bilen goýdy. 1800 funt sterling girdeji almak üçin näçe wagt gerek?
11. Eger:
 - a) 4500 ýewro karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 7% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen;
 - b) 6000 ABŞ dollary karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5% bilen 4 ýylda tölemek şerti bilen;
 - c) 7400 funt sterling mukdarynda karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6,5% bilen 3 ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, jemleýji balansy hasaplaň.

22-24

MESELELER ÇÖZMEK

1-nji mesele. Çak edeliň, telekeçi 23000 ABŞ dollary mukdarynda karzdan gutulmak üçin tölegleri ýylma-ýyl däl, meselem, aýma-aý deň böleklerde amala aşyrmagy karar etdi. Eger töleg döwri 6 ýyl, ýyllyk göterim stawkasy 8% bolsa, ol her aýda nähili mukdardaky tölegleri amala aşyrmaly?

△ 1-nji ädim

Göterim töleg mukdaryny hasaplaýarys.

$C=23\ 000$, $r=8\%$, $n=6$ bolany üçin

$$I = \frac{Crn}{100} = \frac{23000 \cdot 8 \cdot 6}{100} = \$11040.$$

2-nji ädim

Artan kapital serişde mukdaryny, ýagny umumy tölenýän summany hasaplaýarys:

$$C+I = \$23000 + \$11040 = \$34040.$$

3-nji ädim

Näçe aýyň dowamynda tölenmelidigini hasaplaýarys:

$$6 \times 12 = 72 \text{ aý.}$$

4-nji ädim

Diýmek, her aýynda tölenýän serişde

$$\frac{\$34040}{72} \approx \$472,78\text{-e deň.} \blacktriangle$$

2-nji mesele.

Eger 8800 ýewro karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 4,5% bilen her ýylda tölemek şerti bilen alnan bolsa, kreditor tarapyndan 3,5 ýylda alnan girdeji näçe bolar?

$$\blacktriangle C=8800, r=4,5\%, n=3,5, k=12 \times 3 \frac{1}{2} = 42$$

$$\text{Diýmek, } A = C \times \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}, \quad A = 8800 \times \left(1 + \frac{4.5}{1200}\right)^{42},$$

$$A = 10298,08, \quad \text{ýagny} \quad I = A - C = 10298,08 - 8800 = 1498,08$$

3,5 ýylda alnan girdeji €1498,08-e deň. $\blacktriangle$

3-nji mesele.

Eger bankdan 50000 ABŞ dollary mukdarynda alnan kredit ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,2% bilen her çäryekde tölemek şerti bilen alnan bolsa, banka 3 ýylda näçe ABŞ dollary tölenýär?

$$\blacktriangle A=50000, r=5,2\%, n=3, k \cdot n=4 \times 3=12$$

$$\text{Diýmek, } A = C \times \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn} \quad 50000 = C \times \left(1 + \frac{5,2}{400}\right)^{12}$$

$$C = 42820,99. \text{ Banka 3 ýylda } \$42821 \text{ tölenýär. } \blacktriangle$$

Binalar, desgalar we ymaratlar, tehniki serişdeler, esbap-enjam, inwentar we enjamlar, kompýuterler we ş.m. ler peýdaly hyzmat möhleti dowamynda könelyär. Könelme olardan peýdalanylan wagtynda şu serişdeleriň tehniki önümçilik häsiýetlerini ýuwaş-ýuwaşdan ýitirmek prosesini görkezýär.

Amortizasiýa sarp edilen serişdeleriň bahasyny olaryň könelmäge laýyk ýagdaýda önümiň özüne düşýän gymmaty, döwür harajatlaryna geçirmek, sarp edilen serişdeleriň öwezini dolmak maksadynda pul fonduny toplanyşyny görkezýär.

Amortizasiýanyň bahasyny hasaplamak üçin aşakdaky formuladan peýdalanylýar:

$$A = C \times \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n,$$

bu yerde $A - n$ sany döwür böleginden soñ bolan amortizasiya bahasy, C – başlangıç nyrh, r – her ýyla bellenilen amortizasiya normasy, n – döwür bölekleri sany (meselem, ýyllar).

4-nji mesele.

Gurluşyk enjamy 2400 funt sterling nyrhda satyn alnan. Eger amortizasiya normasy 15% diýlip bellenilen bolsa, onuň 6 ýyldan soňky bahasyny tapyň.

△ $A = C \times (1 - \frac{r}{100})^n$, by ýerde $C = 2400$, $r = 15$, $n = 6$.

Diýmek,

$$A = 2400 \times (1 - 0,15)^6,$$

$$A = 2400 \times (0,85)^6.$$

Amortizasiya bahasy takmynan 905,16 funt sterling bolýandygyny tapýarys.

Diýmek, enjamyň 6 ýyldan soňky bahasy $£2400 - £905,16 = £1494,84$ -e deň. ▲

Sarp edilýän (meselem mebel, elektron-durmuş tehnikasy, kompýuter, awtomaşyn we ş.m.) harytlary ýa-da ýaşaýyş jaýy (ipoteka) satyn almak üçin dürli kreditleri resmileşdirýärler. Adatda, beýle kreditler gysga möhletlere berilýär we hemişelik ýa-da üýtgeýän artdyrma göterim belnilleýär.

Aşakda biz fomulalardan peýdalanmazdan tiz hasap-hesipler üçin kredit tölegi jedwelini getirýäris (1000 pul birligine laýyk):

Aýlar	Ýyllyk artdyrma göterim						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-nji mysal.

Raýat 9200 ýewro kredit aldy. Oña 12% ýyllyk göterim tölegi we 3,5 ýyllyk töleg möhleti bellenilen. Bir aýa näçe tölenmeli? Jemi näçe tölenmeli?

△ Töleg möhleti 42 aý bolany üçin jedwelden her bir 1000 ýewro €29,2756 ýewro tölenmelidigini anyklaýarys.

Diýmek, 9200 ýewro üçin her aýda $€9200 = €29,2756 \times 9,2$

$= €269,33552 \approx €269,340$ tölenmeli.

Jemi

$= €269,40 \times 42 = €11314,80$ tölenmeli. ▲

Gönükmeler

12. 10000 ABŞ dollary mukdarynda karz 10 ýyla ýyllyk göterim stawkasy 5,75% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde her ýarym ýylda nähili mukdarda amala aşyrmaly?
13. 15000 ýewro mukdaryndaky karz 36 aýa ýyllyk göterim stawkasy 4,5% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde her çärýekde nähili mukdarda bermeli?
14. Bir adam bankdan 8000 funt sterlingi 3,5 ýyla her aýda 230 funt sterling tölemek şerti bilen kredite aldy. Oña nähili ýyllyk göterim stawkasy bel-lenilipdi?
15. 6800 ABŞ dollary mukdaryndaky karz 2,5 ýyla ýyllyk göterim stawkasy 8% boýunça alyndy. Karz töleglerini deň böleklerde aýma-aý tölemek üçin her aýda nähili mukdarda bermeli?
16. Eger
 - a) 950 ýewro mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,7% bilen 2 -nji ýylyň ahyrynda;
 - b) 4180 funt sterling mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5,75% bilen 3 -nji ýylyň ahyrynda;
 - c) 237000 Ýapon iýenasy mukdaryndaky karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 7,3% bilen 4 -nji ýylyň ahyrynda
 hasaplansa, umumy çylşyrymly göterim tölegini tapyň.
17. Maks 8500 ABŞ dollary mukdaryndaky bank depozitine pul goýdy. Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasyny 6% belgiläp, bank her çärýekde Maksyň hasabyna pul geçirýär. 1 ýyldan soň Maksyň hasabyndaky näçe pul bolar?
18. Mariýa 24000 funt sterlingi ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 5% boýunça banka goýdy. Her aýda bank onuň hasabyna pul geçirýär. 3 aýdan soň Mariýanyň hasabynda näçe pul bolar?
19. Kreditor 45000 ABŞ dollary mukdarynda ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8,5% boýunça karz berdi. Eger tölegler

- a) yönekeý göterimler;
- b) her ýarym ýyla çylşyrymly göterimler;
- ç) her çärýekde çylşyrymly göterimler

boýunça amala aşyrylsa, 3 ýyldan soň alnan girdejileri deňeşdiriň.

- 20.** Ofis üçin mebel 2500 ýewro satyn alyndy. Şeýle serişdeleriň amortizasiýa normasy 15%-e deňdigi mälim. Aşakdaky jedweli depderiňize göçüriň we dolduryň.

Ýyllar	Amortizasiýa	Nyrhy
0		€2500
1	$15\% \cdot €2500 = €375$	
2		
3		

- 21.** Raýat mebel satyn almak üçin 1200 ABŞ dollary mukdarynda kredit aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 8%, töleg möhleti 5 ýyl bolsa, ol her aýda näçe tölemeli? Jemi näçe serişde tölenýär? Kredit tölegi jedwelinden peýdalanyň.
- 22.** Raýat ýaşayyş jaýyny abatlamak üçin 14000 ABŞ dollary mukdarynda kredit aldy. Ýyllyk göterim stawkasy 11%, töleg möhleti 4 ýyl bolsa, ol her aýda näçe tölemeli? Jemi näçe serişde tölenýär? Kredit tölegi jedwelinden peýdalanyň.

Barlag ýumuşlary

1. Bank tarapyndan her ýyla göterim stawkasy 14% diýlip belleni-len. Telekeçi bankdan alan karzyny we göterim tölegine goşmaça 16000000 somy 5 ýylyň içinde töleýär we karzdan gutulýar. Telekeçi näçe mukdarda karz alypdyr?
2. Raýat ilki banka 20000000 som amanata goýup, 15 aýda 900000 som girdeji aldy. Eger töleg ýylma-ýyl amala aşyrylan bolsa, ýyllyk göterim stawkasy näçä deň?
3. Eger 20000000 som karz ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 6% bilen 1 ýylda çärýeklere bölüp tölemek şerti bilen alnan bolsa, kre-ditoryň alýan girdejisi näçe bolar?
4. Djon ýaşayyş jaýyny satyn almak üçin 5 ýyla 25000 ABŞ dollary mukdarynda kredit alypdyr. Ýyllyk çylşyrymly göterim stawkasy 8% bolsa we tölegler her aýda amala aşyrylýan bolsa ol her aýda näçe pul tölemeli? Kreditor näçe girdeji alar?
5. Enjam 45000 ABŞ dollaryna satyn alyndy we 2 ýyl 3 aýdan soň könelmegi netijesinde onuň bahasy 28500 ABŞ dollaryna deň. En-jamyň ýyllyk amortizasiýa normasyny tapyň.





III BAP

ELEMENTAR FUNKSIYALAR WE DEŃLEMELER

25-28

YÖNEKEY RASIONAL DEŃLEMELER WE OLARYŃ ULGAMLARY

Eger bir deñlemäniň ähli çözüwleri ikinji deñlemäniň hem çözüwleri bolsa, onda ikinji deñleme birinjisiniň *netijesi* diýilýär.

Iki deñlemäniň çözüwleri toplumlary üstme-üst düşse, beýle deñlemelere *deňgüýçli* diýilýär.

1-nji mysal. Deñlemeler deňgüýçlümi?

$$1) x + 2 = 3 \text{ we } x + 5 = 6; \quad 2) \frac{x^2 + x}{x-1} = 0 \text{ we } \frac{x+1}{x-1} = 0.$$

△ 1) Iki deñleme birmeňzeş köke eýe: $x=1$. Başga kökler ýok bolany üçin bu deñlemeler deňgüýçli.

2) Birinji deñleme 0 köküne eýe, ikinjisi bolsa beýle köke eýe däl. Diýmek, berlen deñlemeler deňgüýçli däl. ▲

x üýtgeýjili iki $P(x)$ we $Q(x)$ köpagza berlen bolsun.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ görnüşdäki aňlatma *rasional aňlatma* diýilýär.

Eger $A(x)$ we $B(x)$ – rasional aňlatmalar bolsa,

$$A(x)=B(x)$$

görnüşdäki deñleme *rasional deñleme* diýilýär.

Ilki in ýönekey görnüşdäki

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad (1)$$

rasional deñlemä garalyň.

Mälim bolşy ýaly, $\frac{m}{n}$ drob nola deň bolmagy üçin onuň sanawjysy nola deň bolmaly, maýdalawjysy bolsa nola deň bolmaly däl (0-a bölmek mümkin däl!).

Diýmek, (1) deňlemäni çözmek üçin $Q(x) \neq 0$ we $P(x)=0$ şertleri bir wagtda kanagatlandyryan x näbelliniň ähli bahalaryny tapmaly we ýeterli.

Bu ýagdaý gysga görnüşde aşakdaky ýaly ýazylyar:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 7} = 0; & 2) \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 7} = 0; \\ 3) \frac{2x^2 - 5x + 3}{9x - 13,5} = 0; & 4) \frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1} = 0. \end{array}$$

 1) $x^2 - 2x + 1 = 0$ deňleme ýeke-täk $x=1$ köke eýe. $x=1$ bolanda maýdalawjy noldan tapawutly. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=1$ çözüwe eýe.

2) $x^2 - 2x + 3 = 0$ kwadrat deňleme çözüwe eýe däl, çünki $D = 1 - 3 = -2 < 0$. Diýmek, berlen deňleme-de köklere eýe däl.

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ deňleme kwadrat deňlemedir.

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$, diýmek, bu deňleme iki köke eýe:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}; \quad x_1 = \frac{5-1}{4} = 1; \quad x_2 = \frac{5+1}{4} = 1,5.$$

Emma 1,5 sany $\frac{2x^2 - 5x + 3}{9x - 13,5}$ aňlatmanyň maýdalawjysyny nola öwürýär,

1 sany bolsa – ýok. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=1$ köke eýe.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ deňleme 1 we -2 iki köke eýe. Emma 1 sany $(x-1)$ maýdalawjyny nola öwürýär, -2 sany bolsa – ýok. Diýmek, berlen deňleme ýeke-täk $x=-2$ köke eýe. 

Eger $A(x)$ ýa-da $B(x)$ aňlatmalaryň iň bolmanda biri birnäçe rasional aňlatmalaryň jemi görnüşinde bolsa, $A(x)=B(x)$ rasional deňlemäni çözmek düzgüni şeýle bolmagy mümkin:

1-nji ädim. Deňlemä giren droblaryň umumy maýdalawjysy tapylar;

2-nji ädim. Deňlemäniň iki bölegi umumy maýdalawja köpeldilýär;

3-nji ädim. Emele gelen deňlemäniň kökleri tapylar;

4-nji ädim. Tapylan köklerden umumy maýdalawjyny nola öwürýänleri alyp taşlanýar.

3-nji mysal. $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$ deňlemäni çözüň.

△ Deňlemäniň iki bölegini-de $2x(2-x)$ umumy maýdalawja köpeldýäris.

Emele gelen $4x+x(2-x) = 8$ deňlemede ýönekeýleşdirmeleri ýerine ýetirip, şu kwadrat deňlemä gelyäris: $x^2-6x+8=0$;

$$D=9-8=1>0,$$

Diýmek, bu deňleme iki köke eýe: $x_1=2$; $x_2=4$.

Barlamak.

Eger $x=2$ bolsa, maýdalawjy $x(2-x) = 2(2-2) = 0$. Ýagny $x=2$ berlen deňlemäniň köki däl.

Eger $x=4$ bolsa, maýdalawjy $x(2-x) = 4(2-4) \neq 0$. Ýagny $x=4$ berlen deňlemäniň köki. Jogaby: 4 ▲

Eger $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $B(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ görnüşde bolsa, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ görnüşdäki rasional deňlemäni çözmek üçin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporsiyanyň esasy häsiýetinden peýdalanmak maksada laýyk:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Munda aşakdaky algoritm boýunça çemeleşilýär:

1-nji ädim. $f(x)q(x) = p(x)g(x)$ deňleme kökleri tapylýar;

2-nji ädim. Tapylan köklerden $q(x), g(x)$ maýdalawjylary nola öwrülýänleri alyp taşlanýar.

4-nji mysal. $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$ deňlemäni çözüň.

△ $(x-2)(x-4) = (x+2)(x+3); \quad x^2-4x-2x+8 = x^2+3x+2x+6;$

$$-6x+8-5x-6 = 0;$$

$$-11x = -2;$$

$$x = \frac{2}{11}.$$

Eger $x = \frac{2}{11}$ bolsa, $x+2 = \frac{2}{11}+2 \neq 0$; $x-4 = \frac{2}{11}-4 \neq 0$.

Jogaby: $\frac{2}{11}$. ▲

Käbir ýagdaýlarda berlen deňlemede amatly çalşyрма ýerine ýetirip, ýönekeýräk deňlemä gelmek mümkin.

5-nji mysal. Deñlemäni çözüň:

$$1) \left(\frac{2x}{x+1} \right)^4 + 5 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 - 36 = 0; \quad 2) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 2} = 1.$$

 1) $\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 = t$ çalışırma yerine yetirýäris. Munda $t \geq 0$ we deñleme $t^2 + 5t - 36 = 0$ görnüşi alýar. Ahyrky deñleme $t = -9$ we $t = 4$ köklere eýe, şolardan ikinjisi položitel.

Diýmek, $\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 = 4$, ýagny $\frac{2x}{x+1} = 2$ ýa-da $\frac{2x}{x+1} = -2$.

$\frac{2x}{x+1} = 2$ deñleme çözüwe eýe däl, $\frac{2x}{x+1} = -2$ deñleme bolsa ýeke-täk $x = -0,5$ çözüwe eýe.

Jogaby: $x = -0,5$. 

2) Görnüşi ýaly, $x = 0$ sany deñlemäni kanagatlandyrýar. $x \neq 0$ bolsun. Deñlemäniň sanawjysyny we maýdalawjysyny x -a bölsek:

$$\frac{x+3+\frac{2}{x}}{x-1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{x-2+\frac{2}{x}} = 1 \text{ deñlemäni alarys.}$$

$$z = x + \frac{2}{x} - 2 \text{ çalışırmagy yerine ýetirsek, berlen deñleme}$$

$$\frac{z+5}{z+1} + \frac{1}{z} = 1 \text{ görnüşi alýar.}$$

Ahyrky deñlemäni çözüýäris:

$$\begin{aligned} \frac{z+5}{z+1} + \frac{1}{z} = 1 &\Leftrightarrow \frac{(z+5)z}{(z+1)z} + \frac{z+1}{z(z+1)} - \frac{z(z+1)}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2 + 5z + z + 1 - z^2 - z}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5z+1}{z(z+1)} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Indi x -i tapýarys.

$$x + \frac{2}{x} - 2 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} - \frac{9}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 9x + 10 = 0.$$

$5x^2 - 9x + 10 = 0$ kwadrat deñlemäniň diskriminanti otrisatel bolany sebäpli, ol hakyky çözüwe eýe däl.

Jogaby: $x = 0$. 

Rasional deñlemeler ulgamlary

Rasional deñlemelerden düzülen ulgamlary çözmek bize mälim bolan goşmak, ornuna goýmak we ş.m. usullaryna daýanyar. Munda gatnaşan rasional aňlatmalaryň maýdalawjylary nola deñ bolmaýandygyny bellik edýäris.

6-njy mysal. Ulgamy çözüň:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15. \end{cases}$$

△ 1) Birinji deñlemede $\frac{x}{y} = t$ çalşyrmagy ýerine ýetirsek, $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$ ($t \neq 0$) bolýar.

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2}, \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ ýagny } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{x}{y} = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Mundan ýa-da $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ ýa-da $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ x^2 - y^2 = -5. \end{cases}$ ulgamlary alarys.

Bu ulgamlary çözüäris:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ \frac{9}{4}y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \text{ ýa-da } \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ \frac{4}{9}y^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

Birinji ulgam (3, 2), (−3, −2) çözüwlere eýe, ikinji ulgam bolsa çözüwe eýe däl.

Jogaby: (3; 2), (−3; −2).

2) $a=xy$, $b = \frac{x}{y}$ belgileme girizeliň.

$$\begin{cases} 2a - 3b = 15, \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y \cdot 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Jogaby: (6; 2), (−6; −2). ▲



Soraglar we ýumuşlar

1. Rasional deňlemä kesgitleme beriň.
2. Deňgüçli deňlemelere kesgitleme beriň.
3. Deňgüçli deňlemeler ulgamyna mysal getiriiň.

Gönükmeler

1. Deňlemeleri çözüň (1–2):

a) $\frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1};$	b) $\frac{2y-5}{y+5} = \frac{3y+21}{2y-1};$	c) $\frac{5x-7}{x-3} = \frac{4x-3}{x};$
d) $\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1};$	e) $\frac{x^2-2x}{x-2} = x^2-2;$	f) $\frac{1}{x} - \frac{2x}{x+1} = 0;$
g) $\frac{7}{2x+9} - 6 = 5x;$	h) $\frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{3}{2};$	i) $\frac{15}{x-2} = \frac{14}{x} + 1.$

2. a) $\frac{1}{x^2-12x+36} + \frac{12}{36-x^2} = \frac{1}{x+6};$	b) $\frac{8x-3}{4c^2-2c+1} + \frac{6}{8c^3+1} = \frac{2}{2c+1};$
c) $\frac{3x-2}{x-1} + \frac{x-4}{x+3} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)};$	d) $\frac{2-3x}{x+1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x+1}{2-3x} = \frac{4}{3};$
e) $\frac{x-49}{x+6} + \frac{2x+50}{x+5} = 2;$	f) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1} \cdot (x-5) = -24.$

3. Deňgüçli deňlemeleri görkeziň:

a) $\frac{(5x-4)}{x+1} = 0;$	b) $5x-4=0;$	c) $(5x-4)(x+1)=0;$
d) $10x=8;$	e) $\left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0;$	f) $6x-4=x;$
g) $x^2+2x+18=0;$	h) $2x^2+2x+11=0.$	

Deňlemeler ulgamyny çözüň (4–7):

4. a) $\begin{cases} \frac{x}{2y+3} = 3, \\ \frac{y}{2y+3} = -\frac{1}{9}; \end{cases}$	b) $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2, \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 2; \end{cases}$	c) $\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{25}{y} = 7, \\ \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2. \end{cases}$
5. a) $\begin{cases} \frac{5x}{8y} = \frac{8y}{5x}, \\ 5x-8y = 20; \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x + \frac{7}{y} = 11, \\ 7x + \frac{2}{y} = 16; \end{cases}$	c) $\begin{cases} \frac{(x-9)(x-6)}{y+8} = 0, \\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6} = 0. \end{cases}$

6.

$$a) \begin{cases} 4x = \frac{25}{y} + 15, \\ 4y = \frac{25}{x} + 15; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{x}{4x-7} = -\frac{y}{4x-7}, \\ 4x^2 - 11y + 7 = 0; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{5x-4y} = \frac{y}{5y-4x}, \\ xy = -16. \end{cases}$$

7.

$$a) \begin{cases} (x+1)(x-8) = 0, \\ \frac{y-3}{x+y-2} = 5; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{4}{y^2}, \\ xy = -8; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x^2}{y^5} = 5 \frac{x^2}{y^4}, \\ x - 5y = 15. \end{cases}$$

8.

Klubuň zalynda 320 orun bolup, hatarlar boýunça birmeňzeş paýlanan. Her bir hatardaky orunlar sanyny 4 sany artdyryp, ýene bir hatar goýlandan soň zalda 420 orun boldy. Zaldaky hatarlar sany näçe boldy?

9.

108 synag tabşyryňan okuwçylar düzme ýazýarlar. Olara 480 list kagyz paýlandy, şunuň bilen birlikde her bir gyz her bir oglana garanda bir list artyk kagyz aldy. Hemme gyzlar bolsa oganlar näçe list kagyz alan bolsalar, şonça list kagyz aldylar. Näçe gyz we näçe ogan bolupdyr?

29-32

ÝÖNEKEÝ IRRASIONAL DEŇLEMELER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Üýtgeýjisi kök astynda gatnaşan deňleme *irrasional deňleme* diýilýär.

Irrasional deňlemeleriň käbir görnüşlerini çözmegiň usullaryny getireliň.

$$I \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \quad (1)$$

görnüşdäki ýönekeý irrasional deňlemä garalyň.

$f(x)$, $g(x)$ aňlatmalar otrisatel däl bolanda bu deňlemäniň iki bölegini kwadrata götersek, deňgüçli deňlemä gelyäris.

$f(x)=g^2(x) \geq 0$ bolany üçin $f(x)$ aňlatma otrisatel däl bolýar.

Diýmek, (1) deňlemäni çözmek

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

düzgün boýunça amala aşyrylýar.

Edil şeýle $\sqrt[n]{f(x)} = h(x)$ görnüşdäki deňleme $\begin{cases} f(x) = h^{2n}(x) \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$ ulgam deňgüçli.

1-nji mysal. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$ deňlemäni çözüň.

△ Deňlemäni iki bölegini-de kwadrata göterýäris we netijede $2x-x^2=x^2-4x$ ýa-da $2x(x-3)=0$ deňlemä eýe bolarys. Mundan $x_1=0$, $x_2=3$ kökleri alýarys

$x > 2$ bolany üçin $x = 3$ berlen deňlemäniň çözüwi. ▲

II $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ görnüşdäki deňleme.

Iki aňlatmanyň köpeltmek hasyly nola deň bolmagy üçin, olardan iň bolmanda biri nola deň bolmaly.

Diýmek, $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ bolmagy üçin ýa-da $g(x) = 0$ deňlik ýa-da $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ ulgam ýerlikli bolmaly.

Bu ýagdaý gysgaça $\begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ ýaly ýazylýar.

2-nji mysal. $(x^2 + 3x - 10)\sqrt{x + 4} = 0$ deňlemäni çözüň.

$$\triangle (x^2 + 3x - 10)\sqrt{x + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0, \\ x + 4 \geq 0, \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5, \\ x = 2, \end{cases} \\ x + 4 \geq 0, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -4. \end{cases}$$

Jogaby: -4 we 2 . ▲

3-nji mysal. $(x - 3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2x - 6$ deňlemäni çözüň.

$\triangle$ Berlen deňleme $(x - 3)(\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2) = 0$ şekile getirilýär.

$\begin{cases} x = 3, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$ ulgam çözüwe eýe bolmanlygy üçin $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2$ deňlemä

garamak ýeterli. Bu deňlemäniň iki bölegini kwadrata götersek, oňa deň güýçli bolan $x^2 - 5x + 4 = 4$ deňlemäni alarys.

Jogaby: 0 we 5 . ▲

III $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ görnüşdäki deňleme.

Şeýle deňlemeler çözülide kök derejesi n sanynyň jübüt-täkligine garalýar we berlen deňlemäni deňgüýçli deňlemä getirilýär.

Eger **n - ták bolsa:** $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Meselem, $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$ deňleme $f(x) = g(x)$ deňlemä deňgüýçli.

4-nji mysal. $\sqrt[3]{x^2 + 8x - 8} = \sqrt[3]{2x - 1}$ deňlemäni çözüň.

$$\triangle \sqrt[3]{x^2 + 8x - 8} = \sqrt[3]{2x - 1} \Leftrightarrow x^2 + 8x - 8 = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -7. \end{cases}$$

Jogaby: 1 we -7 . ▲

Eger n jübüt, ýagny $n=2k$ bolsa, berlen deňleme şu ulgamlaryň her birine deňgüçlüdir:

$${}^{2k}\sqrt{f(x)} = {}^{2k}\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad {}^{2k}\sqrt{f(x)} = {}^{2k}\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Amalda şolardan aňsadrak bolanlary saýlanýar.

5-nji mysal. $\sqrt[6]{x^2 - 2} = \sqrt[6]{x}$ deňlemäni çözün.

$$\triangle \sqrt[6]{x^2 - 2} = \sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Jogaby: $x=2$. 

IV Üýtgeýjileri çalşyrmak.

6-njy mysal. $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + 3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 4$ deňlemäni çözün.

$$\triangle u = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} \text{ çalşyrma girizýäris. Onda}$$

$$\begin{cases} u + \frac{3}{u} = 4, \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ u = 3, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Indi berlen deňlemäniň köklerini tapýarys.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1, \\ \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 1, 2. \end{cases}$$

Jogaby: $x=2$ we $x=1, 2$. 

7-nji mysal. $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 6$ deňlemäni çözün.

$$\triangle z = \sqrt{x^2 + 3x} \text{ çalşyrma girizýäris:}$$

$$\begin{cases} z^2 + z = 6, \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3, \\ z = 2, \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2.$$

Indi berlen deňlemäniň köklerini tapýarys.

$$\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Jogaby: $x = -4$ we $x = 1$. ▲

Irrasional deñlemeler ulgamy

Irrasional deñlemelerden düzülen ulgamlary çözmek bize mälim bolan goşmak, ornuna goýmak we ş.m. usullaryna daýanýar. Elbetde munda gatnaşýan irrational aňlatmalaryň barlyk ýaýlalaryny hasaba almalydygyny nygtaýarys.

8-nji mysal. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$ deñlemeler ulgamyny çözüň.

△ $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 25, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x, \\ x(13 - x) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x, \\ x^2 - 13x + 36 = 0. \end{cases}$$

Bu ulgamdan (4; 9) we (9; 4) çözüwleri tapýarys. ▲

9-njy mysal. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9 \end{cases}$ deñlemeler ulgamyny çözüň.

△ $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ diýip belgileýäris, hem-de gysga köpeltmek formulasyndan peýdalansak:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ u^2 - uv + v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ (u + v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2. \end{cases}$$

ulgama eýe bolarys. Bu ulgamyň çözüwi $u_1 = 1, v_1 = 2, u_2 = 2, v_2 = 1$ bolýar. Mundan (1; 8) we (8; 1) çözüwlerini tapýarys. ▲

10-njy mesele

Tekizlikde $A(3; 4)$ we $B(-2; 5)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.

△ $AC = BC$ bolýanlygyndan iki nokadyň arasyndaky aralygyň formulasyna göre $\sqrt{(x-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (0-5)^2}$ irrational deñlemäni alarys.

Bu deñlemäni deñgüýçli deñlemäniň häsiýetlerinden we gysga köpeltmek formulalaryndan peýdalanyp çözssek, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ ýa-da $-10x=4$ deñlemäni alarys. Ahyrky deñlemäniň köki $x=-0,4$ bolýar. Diýmek, gözlenýän nokat $C(-0,4; 0)$ eken. ▲

11-nji mesele

Tekizlikde $A(-1; 2)$ we $B(3; -4)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän we $y=3x$ göni çyzykda ýatýan nokady tapyň.

△ Şerte görä gözlenýän nokadyň ordinatasy $y=3x$ bolýar. Diýmek, gözlenýän nokat $C(x; 3x)$ koordinataly nokat eken. $AC=BC$ bolýanlygyndan iki nokadyň arasyndaky aralygyň formulasyna görä, $\sqrt{(x+1)^2 + (3x-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (3x+4)^2}$ irrasional deñlemäni alarys. Bu deñlemäni çözssek, $(x+1)^2 + (3x-2)^2 = (x-3)^2 + (3x+4)^2$, ýa-da $-28x=20$ deñlemä gelyäris. Ahyrky deñlemäniň köki $x=-\frac{5}{7}$ bolýar. Diýmek, gözlenen nokat $C(-5/7; -15/7)$ eken.

Jogaby: $C(-5/7; -15/7)$. ▲

Soraglar we ýumuşlar



1. Irrasional deñlemä kesgitleme beriň we mysal getiriň.
2. Deñgüýçli irrasional deñlemä kesgitleme beriň.
3. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \\ \sqrt{xy} = b \end{cases}$ görnüşdäki deñlemeler ulgamy nähili çözülýär?
4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a, \\ x + y = b \end{cases}$ görnüşdäki deñlemeler ulgamy nähili çözülýär?

Gönükmeler

Deñlemäni çözüň (10–19):

- | | | | | |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 10. | a) $\sqrt{3x+5} = -8$; | b) $\sqrt{4x-6} = 9$; | c) $\sqrt{5x+9} = 17$; | d) $\sqrt{13x+5} = -17$. |
| 11. | a) $\sqrt{12x-11} = 15$; | b) $\sqrt{23x+5} = -7$; | c) $\sqrt{23x-7} = 27$; | d) $\sqrt{6x+13} = -2$. |
| 12. | a) $\sqrt{x^2-3x+1} = x+2$; | b) $\sqrt{x^2+5x+2} = x+4$. | | |
| 13. | a) $\sqrt{x^2+7x+1} = x-1$; | b) $\sqrt{x^2-6x+2} = x+5$. | | |
| 14. | a) $\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{-2x-1}$; | b) $\sqrt{-2x^2-3x-2} = \sqrt{x+1}$. | | |
| 15. | a) $\sqrt{x^2+8x-7} = \sqrt{-x-1}$; | b) $\sqrt{-x^2+3x+5} = \sqrt{x+10}$. | | |

16. a) $x^2 + 3x - 1 + \sqrt{x^2 + 3x - 9} = 0$; b) $x^2 - x - 7 + \sqrt{x^2 - x - 9} = 0$.
17. a) $x^2 + 2x - 11 + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = 0$; b) $x^2 - 8x + 3 + \sqrt{x^2 - 8x - 7} = 0$.
18. a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$; b) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.
19. a) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} = 5$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 3$.

Deñlemeler ulgamyny çözün (20–23):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 3y, \\ y^2 + 2\sqrt{x} = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x} = 4y, \\ y^2 + 5\sqrt{x} = 5. \end{cases}$
21. a) $\begin{cases} x - 4\sqrt{y} = 1, \\ x + 2y = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = -2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$
22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 5)(\sqrt{y} - 3) = 0, \\ 3x + 5y = 60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 3) = 0, \\ 3x + 2y = 15. \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} 5x - 3\sqrt{y} = -34, \\ 5x + 3\sqrt{y} = -16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5\sqrt{y} = -37, \\ 6x + 5\sqrt{y} = 13. \end{cases}$
24. Tekizlikde $A(5; 7)$ we $B(-3; 4)$ nokatlardan deñ uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.
25. Tekizlikde $A(5; 9)$ we $B(-6; 7)$ nokatlardan deñ uzaklykda ýerleşýän $C(x; 0)$ nokady tapyň.

33–36 YÖNEKEÝ GÖRKEZIJILI DEÑLEMELER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Görkezijili deñlemeler

Üýtgeýjisi derejede gatnaşan deñleme *görkezijili deñleme* diýilýär.

Görkezijili deñlemeler çözülende aşakdaky deňliklerden peýdalanylyar:
($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

1. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;
2. $a^x a^y = a^{x+y}$;
3. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
4. $a^x b^x = (ab)^x$;
5. $(a^x)^y = a^{xy}$;
6. $a^0 = 1$.

Görkezijili deñlemeleriň käbir görnüşlerini çözmegiň usullaryny getireliň.

I Birmeñzeş esasa getirmek

Bu usulda deñleme $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ görnüşdäki deñlemä getirilýär. Mundan $f(x) = g(x)$ bolýar.

1-nji mysal. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ deñlemäni çözüň.

△ $\frac{3}{7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ bolýandygyny hasaba alyp, berlen deñlemäni $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ görnüşde ýazýarys.

1-nji deñlige görä $3x - 7 = -7x + 3$, $x = 1$.

Jogaby: 1. ▲

2-nji mysal. $0,125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ deñlemäni çözüň.

△ Deñlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-x} \quad 2^{-3} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-nji deñlige görä $2^{-3+2(2x-8)} = \left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$ ýa-da $2^{4x-19} = 2^{2,5x}$.

Ahyrky deñleme $4x - 19 = 2,5x$

deñlemä deň güýçlüdir. Mundan $x = \frac{38}{3}$.

Jogaby: $x = \frac{38}{3}$. ▲

II Täze üýtgeýjini girizmek.

3-nji mysal. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ deñlemäni çözüň.

△ 2-deñligi ulanyp, deñlemäni $5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 - 250 = 0$ ýaly ýazyp alarys.

$5^x = t > 0$ deb, täze üýtgeýji girizýäris. Onda $\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0$ deñlemä gelýäris.

U $t_1 = -50$, $t_2 = 25$ köklere eýe. Emma $t_1 = -50$ kök $t > 0$ şerti kanagatlandyрмаýar. Diýmek, $5^x = 25$ we $x = 2$.

Jogaby: $x = 2$. ▲

4-mysal. $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$ deñlemäni çözüň.

△ Deñlemäniň ik bölegini $4^x \neq 0$ -a bölýäris:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \quad \text{ýa-da} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ diýip, ahyrky deňlemäni $t^2 + t - 2 = 0$ görnüşe getirýäris. Bu deňlemäniň çözüwlerini tapýarys: $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

t_1 -iň bahasy üçin $t > 0$ şert ýerine ýetirilmändi. Diýmek,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$$

Jogaby: $x=0$. ▲

5-nji mysal. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$. deňlemäni çözüň.

△ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ bolany sebäpli-de $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Deňlemäni $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ görnüşde ýazýarys.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ diýeliň. Mundan $\frac{1}{t} + t = 4$, ýagny $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Ahyrky deňleme $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ köklere eýe.

1-nji ýagdaý. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$, $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2 + \sqrt{3}$, $\frac{x}{2} = 1$, $x = 2$.

2-nji ýagdaý. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2 - \sqrt{3}$,

$\left(2 - \sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2 - \sqrt{3}$, $-\frac{x}{2} = 1$, $x = -2$.

Jogaby: $x=-2$ we $x=2$. ▲

III Umumy köpeldijini ýaýlardan daşary çykarmak.

6-njy mysal. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ deňlemäni çözüň.

△ Çep tarapda 6^x -ny, sag tarapda bolsa 2^x -i ýaýdan daşary çykarýarys. Netijede $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ ýa-da $6^x = 2^x$ deňlemä gelyäris. Bu deňlemäniň iki tarapyny $2^x \neq 0$ -a bölsek, $3^x = 1$, ýagny $x=0$ -y alarys.

Jogaby: $x=0$. ▲

İn yönekey görkezijili deñlemeler ulgamy

7-nji mysal. Deñlemeler ulgamyny çözün:
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 2^{5x-y} = 8. \end{cases}$$

△ Derejaniñ häsiyetlerine görä deñlemeler ulgamy aşakdaky deñlemeler ulgamyna deñgüýçli:
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 3^3, \\ 2^{5x-y} = 2^3. \end{cases}$$
 Mundan
$$\begin{cases} x+y=3, \\ 5x-y=3 \end{cases}$$
 ulgama gelýäris. Onuñ çözüwleri $x=1, y=2$ bolýandygy görnüp dur.
Jogaby: $x=1, y=2$. ▲

8-nji mysal. Deñlemeler ulgamyny çözün:
$$\begin{cases} 3^{5x+6y} = 9, \\ 2^{7x+3y} = 8. \end{cases}$$

△ Derejaniñ häsiyetlerine görä deñlemeler ulgamy aşakdaky görnüşi alýar:
$$\begin{cases} 3^{5x+6y} = 3^2, \\ 2^{7x+3y} = 2^3. \end{cases}$$

Ahyrky deñlemeler ulgamy bolsa
$$\begin{cases} 5x+6y=2, \\ 7x+3y=3. \end{cases}$$
 çyzykly ulgama deñgüýçli. Çyzykly deñlemeler ulgamynyñ 2-deñlemesini (-2) ä köpeldip 1-nji deñlemä goşsak, $-9x=-4$ deñlemäni alarys. Mundan $x=\frac{4}{9}$ bolýandygy tapylýar. Ony 2-nji deñlemä goýsak, $\frac{28}{9}+3y=3$ ýa-da $3y=3-\frac{28}{9}$, ýa-da $3y=-\frac{1}{9}$, ýa-da $y=-\frac{1}{27}$ -ni tapýarys. Jogaby: $x=\frac{4}{9}, y=-\frac{1}{27}$. ▲

9-nji mysal. Deñlemeler ulgamyny çözün:
$$\begin{cases} 4^x + 5^y = 9, \\ 4^x - 5^y = -1. \end{cases}$$

△ $4^x=u, 5^y=v$ belgileme girizsek, berlen deñlemeler ulgamy şu görnüşi alýar:
$$\begin{cases} u+v=9, \\ u-v=-1. \end{cases}$$
 Görnüşi ýaly, bu deñlemeler ulgamynyñ çözüwi $u=4, v=5$. Onda

$4^x=4$ we $5^y=5$ deñlemeleri alarys. Bu ýerden $x=1, y=1$ çözüwleri tapýarys.
Jogaby: $x=1, y=1$. ▲

Gönlükmler

Deñlemäni çözün (26–35):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^x=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^x = -6$; b) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} = 68$;
c) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^x = 31$; d) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^x = 10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^x + 3^x - 6 = 84$; b) $25^x + 5^x - 30 = 0$;
c) $5 \cdot 4^{x+2} - 6 = 0$; d) $9^x + 3^x - 12 = 0$.

30. a) $9 \cdot 25^x - 7 \cdot 15^x - 16 \cdot 9^x = 0$; b) $7 \cdot 16^x + 9 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

31. a) $4^x + 7 \cdot 6^x - 8 \cdot 9^x = 0$; b) $9 \cdot 16^x + 7 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

32. a) $(0,125)^{x-1} = \sqrt{2^{5-4x}}$; b) $\frac{4}{5} \cdot (0,8)^{x-1} = (1,25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x} = \frac{4}{16^x}$; b) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5 \cdot 2^{3(x-1)} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$; b) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

36. Müşderi 100 000 000 somy banka ýyllyk 22% göterim stawkasy bilen mälüm möhlete goýdy. Möhletniň ahyrynda ol 221 533 456 som aldy. Pul näçe ýyla goýlandygyny tapyň.

37. Telekeçi 10 000 000 somy banka ýyllyk 21% göterim stawkasy bilen mälüm möhlete goýdy. Möhlet ahyrynda ol 17 715 610 som aldy. Pul näçe ýyla goýlandygyny tapyň.

38. Ilat sany ýylyna 4% artsa, näçe ýyldan soň ilat sany 3 esse artar?

39. Ilat sany ýylyna 2% kemelse, näçe ýyldan soň ol 10% kemeler?

Deñlemeler ulgamyny çözün (40–43):

40. a) $\begin{cases} 3^{5x-6y} = 27, \\ 2^{7x+3y} = 32; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x+16y} = 81, \\ 2^{3x-5y} = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^{x+2y} = 81, \\ 9^{3x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$

41. a) $\begin{cases} 3^{5x-y} = 243, \\ 2^{7x+11y} = 16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x+8y} = 9, \\ 2^{x-12y} = 64; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 2^x - 2^y = 2. \end{cases}$

42.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5^{3x-y} = 25, \\ 2^{x^2+xy+y^2} = 8; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5^{x+2y} = 125, \\ 2^{x^2+3xy-y^2} = 8; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 11^x + 7^y = 18, \\ 11^x - 7^y = 4. \end{cases} \end{array}$$

43.

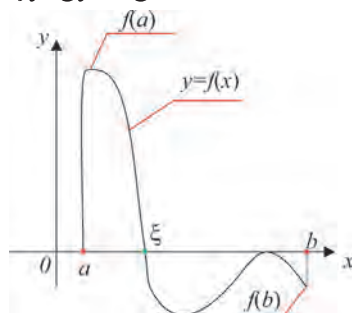
$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} 5^{x+y} = 25, \\ 2^{x^2-3xy+2y^2} = 1; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5^{3x-y} = 25, \\ 2^{x^2+xy+y^2} = 8; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} 6^x + 3^y = 39, \\ 6^x - 3^y = 108. \end{cases} \end{array}$$

37-38

DEŃLEMELERI TAKMYNY ÇÖZMEK

Eger $f(x)$ köpagza $[a, b]$ kesimiň uçlarynda dürli alamatly bahalary kabul etse, ýagny $f(a) \cdot f(b) < 0$ bolsa, bu kesimiň içinde $f(x) = 0$ deňlemäniň iň bolmanda bir çözüwi bar. Ýagny, şeýle $\xi \in [a, b]$ ("ksi" diýlip okalýar) bar $f(\xi) = 0$.

Bu tassyklama aşakdaky çyzgyda görkezilen.



Deňlemäniň hut bir köküni öz içine alan $[a, b]$ kesime garalyň.

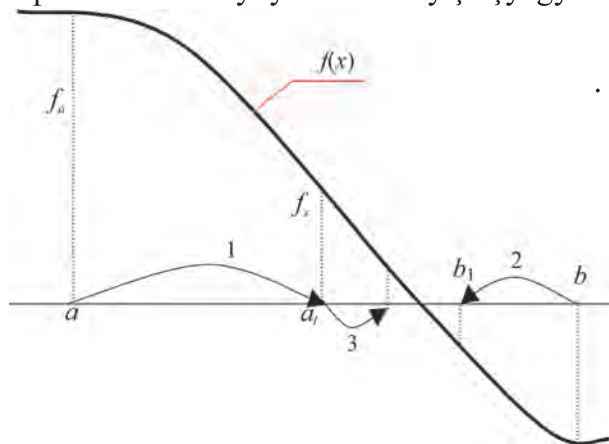
Kesimi deň ýarpa bölmek usuly $[a, b]$ kesimi emele gelýän kesimiň uzynlygy berlen ε anyklykdan kiçi bolýança deň ýarpa bölmekden ybarat.

Munuň üçin:

- 1) $x=a$ -da $f(x)$ aňlatmanyň $f_a = f(a)$ bahasy hasaplanýar.
- 2) kesim deň ýarpa bölünýär, ýagny $x = (b-a)/2$ hasaplanýar;
- 3) $f(x)$ aňlatmanyň $x = (b-a)/2$ bolandaky f_x bahasy hasaplanýar.
- 4) $f_a \cdot f_x > 0$ şert barlanylýar;
- 5) eger bu şert ýerine ýetirilse, täze kesimiň çep araçägi hökmünde öňki kesimiň ortasy alynýar, ýagny $a=x$, $f_a = f_x$ diýlip alynýar (kesimiň çep araçägi orta geçýär);
- 6) eger bu şert ýerine ýetirilmese, täze kesimiň sag araçägi orta geçýär, ýagny $b=x$ diýlip alynýar;
- 7) kesimi nobatdaky bölmekden soň $b-a < \varepsilon$ şertiň ýerine ýetirilendigi barlanylýar.

8) eger bu šert ýerine ýetirilse, hasaplamak bes edilyär. Munda takmyny çözüw hökmünde x -iň ahyrky hasaplanan bahasy alynýar. Eger bu šert ýerine ýetirilmese, bu algoritmiň 2-nji ädimine gaýdyp, hasaplama dowam etdirilýär.

Kesimi deň ýarpa bölmek usulynyň mazmuny şu çyzgyda görkezilen:



Hakyky kök ýatýan aralygy tapmak

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ deňleme köki ýatýan aralygy tapmak üçin

$A=\max\{a,b,c\}$ we $B=\max\{\frac{1}{c}; \frac{a}{c}; \frac{b}{c}\}$ hasaplanýar.

Berlen deňlemäniň köki üçin $\frac{1}{1+B} < |x| < 1+A$ deňsizlik ýerlikli bolýar. Diýmek, berlen deňlemäniň iň bolmanda 1 köki $(-1-A; 1+A)$ aralykda ýerleşýän eken. Bu köki takmynan tapmak üçin $-1-A < d_1 < d_2 < 1+A$ we $f(d_1) \cdot f(d_2) = (d_1^3 + ad_1^2 + bd_1 + c)(d_2^3 + ad_2^2 + bd_2 + c) < 0$ deňsizlikleri kanagatlandyryan d_1 we d_2 bitin sanlar tapylýar.

1-nji mysal. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ deňleme köki ýatýan aralygy tapyň.

△ Deňlemäniň iki bölegini-de 2-ä bölsek, $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ deňleme emele gelýär. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ bolany üçin, $A=\max\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\}=2,5$.

Diýmek, $x \in (-2,5; 2,5)$ aralykda deňlemäniň iň bolmanda 1 sany köki bar. Deňleme $(0; 2,5)$ aralykda köke eýe däl, çünki $x_0 \in (0; 2,5)$ bolsa, $2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 1 > 0$ bolýar. Diýmek, deňleme $(-2,5; 0)$ aralykda köke eýe eken. Bu aralygy kiçeltmek üçin bitin sanlary alarys, ýagny $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Indi $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ sanlary deňlemä goýup we aşakdaky şertleri barlap

$$d_1^3 + \frac{3}{2}d_1^2 + \frac{5}{2}d_1 + \frac{1}{2} = -8 + 6 - 5 + 0,5 = -6,5 < 0;$$

$$d_2^3 + \frac{3}{2}d_2^2 + \frac{5}{2}d_2 + \frac{1}{2} = -1 + 1,5 - 2,5 + 0,5 = -1,5 < 0;$$

$d_3^3 + \frac{3}{2}d_3^2 + \frac{5}{2}d_3 + \frac{1}{2} = 0,5 > 0$ deñlemäniň köki $(-1; 0)$ aralykda bolýandygyny tapýarys. ▲

Deñlemäniň köküni berlen ε takyklykda aralygy deň 2-ä bolup tapmagyň usuly

Ýokardan mälim bolşy ýaly, eger $(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c)(\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c) < 0$ bolsa, deñlemäniň köki $(\alpha; \beta)$ aralykda bolýar. Indi $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ bolsun. Eger $|\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c| < \varepsilon$ bolsa, $x = \gamma$ san – deñlemäniň ε takyklykdaky köki. Eger $(\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c)(\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c) < 0$ bolsa, köki $(\gamma; \beta)$ aralykdan gözlenýär; eger $(\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c)(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0$ bolsa, köki $(\alpha; \gamma)$ aralykdan gözlenýär. Bu proses tä kök gerekli takyklykda tapylýança dowam ediberýär.

2-nji mysal.

$x^3 + 1,5x^2 + 2,5x + 0,5 = 0$ deñlemäniň köküni $\varepsilon = 0,1$ takyklykda tapyň.

▲ Öňki mysaldan mälim bolşy ýaly, kök $(-1; 0)$ aralykda ýatýar. $\gamma = \frac{-1 + 0}{2} = -0,5$ we $(-0,5)^3 + 1,5(-0,5)^2 + 2,5(-0,5) + 0,5 = -0,5 < 0$ bolýanlygyndan deñlemäniň köki $(-0,5; 0)$ aralykda eken.

$\gamma = \frac{-0,5 + 0}{2} = -0,25$ we $|(-0,25)^3 + 1,5(-0,25)^2 + 2,5(-0,25) + 0,5| = |-0,046| < 0,1$ bolany üçin deñlemäniň $0,1$ takyklykdaky çözüwi $x = -0,25$ bolýar. ▲

Soraglar we ýumuşlar



1. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ deñlemäniň köki ýatýan aralyk nähili tapylyar?
2. Deñlemäniň kökini berlen ε takyklykda aralygy deň 2-ä bölüp tapmak usulyny düşündiriň.

Gönükmeler

Deñlemäniň köki ýatýan aralygy tapyň (44–47):

- | | | |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|
| 44. | 1) $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0;$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 7x + 6 = 0.$ |
| 45. | 1) $2x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0;$ | 2) $x^3 + 4x^2 + 9x + 17 = 0.$ |
| 46. | 1) $4x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0;$ | 2) $x^3 + x^2 + x + 19 = 0.$ |

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Deñlemäniň köküni $\varepsilon=0,1$ takyklykda tapyň (48–51):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

39-41 YÖNEKEY RASIONAL DEŇSIZLIKLER WE OLARYŇ ULGAMLARY

Bir üýtgeýjili rasional deňsizlikler we olary çözmegini usullary

$A(x)$ we $B(x)$ rasional aňlatmalar üçin $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geq B(x)$, $A(x)\leq B(x)$ gatnaşyklara x üýtgeýjili deňsizlikler diýilýär. x -iň deňsizligi dogry sanly deňsizlige öwürýän islendik bahasyna deňsizligiň çözüwi diýilýär.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

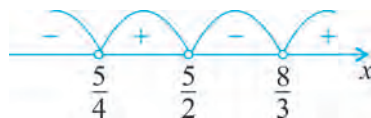
△ Deňsizligi aralyklar usulynyň kömeginde çözüäris. Bu usul bilen 9-njy synpda tanşypdyňyz. Ýaýlaryň içindäki aňlatmalary nola deňläp, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ sanlary tapýarys. Olar sanlar okuny $(-\infty; \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4}; \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2}; \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3}; +\infty)$ aralyklara bölýär. Deňsizlige $(\frac{8}{3}; +\infty)$ aralyga degişli, meselem, $x=10$ sanyny goýsak, deňsizlik dogry deňsizlige öwrülýär. Diýmek, deňsizlik $(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$ aralyklarda ýerlikli. ▲

2-nji mysal.

Deňsizligi çözüň: $\frac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ sanlar deňsizligiň çözüwi däl. $x\neq 2$, $x\neq 4$ bolanda $(x-2)^2 \cdot (x-4)^2 > 0$ bolýar. Şu sebäpli deňsizligiň iki bölegini-de $(x-2)^2 \cdot (x-4)^2$ -a köpeltmek netijesinde berlen deňsizlige deňgüýçli aşakdaky deňsizlik emele gelýär: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

Ýaýlary nola deňläp, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ sanlary tapýarys. Netijede sanlar oky aşakdaky aralyklara bölünýär: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$,



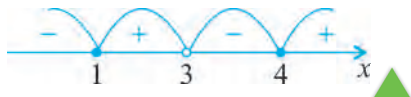
$(4; +\infty)$. Bu ýerde nol sany 2 gezek duşýar. Şonuň üçin deňsizlik nol sanynyň 2 ýanyndaky aralykda birmeňzeş alamatly. Ahyrky aralykdan araçäkde ýatmadyk $x=10$ sanyny alyp deňsizlige goýsak, dogry sanly deňsizlik emele gelýär. Diýmek, deňsizligiň çözüwi aşakdaky aralyklardyr: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$. ▲



3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3} \geq 0$.

△ Görnüşi ýaly, $x \neq 3$ sanawjyny nola deňläp, $x^2 - 5x + 4 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ sanlary alarys. $x_1 = 1$ we $x_2 = 4$ sanlar deňsizligi kanagatlandyrýar. Diýmek, sanlar oky aşakdaky aralyklara bölünýär: $(-\infty; 1]$, $[1; 3)$, $(3; 4]$, $[4; +\infty)$.

Ahyrky aralykdan araçäkde bolmadyk $x=5$ sanyny alsak, dogry sanly deňsizlik emele gelýär. Şonuň üçin $[1; 3) \cup [4; +\infty)$ aralyklar deňsizligiň çözüwi.



Ýönekeý rasional deňsizlikler ulgamy

4-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 3x - 8 \leq 1, \\ 4x + 3 > 5. \end{cases}$

△ Ulgamyň her bir deňsizligini ýönekeýleşdirsek, $\begin{cases} 3x \leq 1 + 8, \\ 4x > 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 9, \\ 4x > 2; \end{cases}$ ýagny, $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > 0,5. \end{cases}$ deňsizlikleri alarys. Diýmek, ulgamyň çözüwi $(-\infty; 3]$ we $(0,5; +\infty)$ aralyklaryň umumy bölegi, ýagny $(0,5; 3]$ aralykdan ybarat eken. ▲

5-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} (3 - x)(4 + x) \geq 0, \\ (2 + x)(5 - x) < 0. \end{cases}$

△ Ulgamdaky her bir deňsizligi çözüp, 1-nji deňsizligiň çözüwi $[-4; 3]$ aralyk, 2-nji deňsizligiň çözüwi bolsa $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ aralyklardygyny tapýarys. Diýmek, deňsizlikler ulgamynyň çözüwi bu çözüwleriň umumy bölegi, ýagny $[-4; 2)$ aralykdan ybarat bolýar. ▲

Soraglar we ýumuşlar



1. Deňsizligiň çözüwi näme, mysallarda düşündiriň.
2. Deň güýçli deňsizliklere mysallar getiriň.
3. Iň ýönekeý rasional deňsizlikler ulgamyny çözmegi bir mysalda düşündiriň.

Gönükmeler

Deñsizligi çözüñ (52–53):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8) \leq 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11) > 0$;
 3) $(3+5x)(2x^2-6x+4) < 0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1} \geq 0$;
 5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1) \geq 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x} < 0$;
 7) $\frac{x-1}{4x-1} < 1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x} \geq 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7} \leq 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1} > 1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8) \leq 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11) > 0$;
 3) $(3-5x)(2x^2-4x+4) < 0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1} \geq 0$;
 5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1) \geq 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x} < 0$;
 7) $\frac{x+1}{4x-1} < 1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x} \geq 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7} \leq 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1} > 1$.

54. Deñsizlikler ulgamyny çözüñ (54–55):

1) $\begin{cases} 3x-5 \leq 7x, \\ 2x+1 > -2x+3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} < 1, \\ -\frac{5x+1}{2} - \frac{7}{3} > \frac{x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5 \leq 7x, \\ 2x-1 > -3x+3. \end{cases}$

55. 1) $\begin{cases} 2(x-5) \leq 4(x+3), \\ 2x-1 > -5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2x}{4} \geq 3\frac{1}{3}, \\ 2 - \frac{5-4x}{2} < \frac{6x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x+5 \leq 7x, \\ 6x-4 > 3x+3. \end{cases}$

42-43

YÖNEKEY İRRASIONAL DEÑSİZLİKLER

Irrasional deñsizlik diýlende näbelli kök belgisi astynda bolan deñsizlik düşünilýär.

Deñsizlikleriň çözüwleri toplumy, adatda, sanlaryň çäksiz toplumlaryndan ybarat bolýar, şu sebäpli bu sanlary başlangyç deñsizlige gönüden-göni goýmak ýoly bilen çözüwler toplumyny barlamak, umuman aýdanda mümkin däl. Jogabyň dogrudygyny üpjün edýän ýeke-täk ýol – başlangyç deñsizligi islendik çalşyrmakda bu deñsizlige deňgüýçli deñsizlik emele gelyändigine gözegçilik etmeli.

Irrasional deñsizlikleri çözen mahalyňyzda deñsizligiň ik bölegini-de täl derejä göterende hemişe başlangyç deñsizlige deňgüýçli deñsizlik emele gelyändigini ýatdan çykarmaň. Eger deñsizligiň ik bölegi jübüt derejä göterilýän bolsa, onda

başlangıç deñsizlige deñgüçli we şonuñ ýaly deñsizlik alamatyna eýe bolan deñsizlik diñe başlangıç deñsizligiñ iki bölegi otirisatel däl bolan ýagdaýda emele gelýär.

Irrasional deñsizligiñ çözüwler toplumyny tapmak üçin, adadta, deñsizligiñ iki bölegini natural derejä götermäge dogry gelýär. Irrasional deñsizligi çözmegiñ esasy usullaryndan biri bu deñgüçli rasional deñsizliklere getirmek usulydyr.

Iñ ýönekeý irrational deñsizlikler aşakdaky görnüşe eýe:

- 1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$;
- 2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$;
- 3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ ýa-da $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ irrational deñsizlik aşakdaky deñsizlikler ulgamyna deñgüçli

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) ulgamdaky birinji deñsizlik berlen deñsizligi kwadrata götermek netijesinde emele gelen deñsizlik, ikinji deñsizligiñ köküniñ barlyk şertini aňladýar, üçünji deñsizlik bolsa kwadrata götermek mümkindigini aňladýar.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ irrational deñsizlik çözmek üçin aşakdaky ulgama garamak zerurdyr:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{ýa-da} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ irrational deñsizlik aşakdaky deñsizlikler ulgamyna deñgüçli:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Berlen deñsizligiñ iki bölegi ähli ýerlikli x -lar üçin otirisatel däl bolanlygy sebäpli ony kwadrata götermek mümkin. (3) ulgamdaky birinji deñsizlik berlen deñsizligi kwadrata götermek netijesinde emele gelen deñsizlikdir. Ikinji deñsizlik köküñ barlyk şertini aňladýar. Görnüşi ýaly, $A(x) \geq 0$ şert hökman ýerine ýetirilýär.

(1)–(3) düzgünler irrational deñsizligi çözmegiñ esasy usuly hasaplanýar. Onuñ mazmunyny birnäçe mysallarda görkezýäris.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△ Bu deňsizligiň sag bölegi otrisatel, şunuň bilen birlikde çep bölegi ýerlikli x lar üçin otrisatel däl. Şonuň üçin deňsizlik çözüwe eýe däl.

Jogaby: Çözüwi ýok. ▲

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△ Deňsizligiň sag bölegi otrisatel, şunuň bilen birlikde çep bölegi ýerlikli x -lar üçin otrisatel däl. Diýmek, bu deňsizlik $x \geq 3$ şerti kanagatlandyryýan ähli x -lar üçin ýerine ýetirilýär.

Jogaby: $x \in [3; +\infty)$. ▲

3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{2x-3} < 1$.

△ (1) düzgüne görä $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$ $B(x) = 1 \geq 0$ şert ähli x -lar üçin ýerine ýetirilenligi sebäpli, ony aýratyn ýazmak hökman däl.

Jogaby: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$. ▲

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{4x-3} > 1$.

△ Bu deňsizlik (2) düzgün boýunça çözülýär. Munda $B(x) = 1 \geq 0$ şert ähli x -lar üçin ýerine ýetirilenligi sebäpli-de bu deňsizlige deň güýçli deňsizligi gönüden-göni ýazyp bileris: $4x-3 > 1^2$.

Jogaby: $x > 1$. ▲

5-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{x+18} < 2-x$.

△ Bu deňsizlik (1) düzgün boýunça çözülýär:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2 \\ x < -2 \\ x > 7 \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Jogaby: $x \in [-18; -2)$. ▲

6-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{x^2+x-2} > x$.

△ Bu deňsizlik (2) düzgün boýunça çözülýär:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -2, \\ x \geq 1, \\ x \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x > 2. \end{cases}$$

Jogaby: $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. ▲

7-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

△ Bu deňsizlik (3) düzgün boýunça çözülýär:

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

Jogaby: $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$. ▲

8-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\frac{\sqrt{x^2-25}}{x+6} < 1$.

△ Näbelli x -iň deňsizlik mana eýe bolýan toplumyny tapýarys:

$$\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0, \\ x + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6, \\ -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Eger $x+6 > 0$ bolsa, şu deňsizligi kwadrata götermek mümkin:

$$\begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ \sqrt{x^2-25} < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x^2-25 < x^2+12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x > -\frac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{61}{12} < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

$x < -6$ bolsa, berlen deňsizlik hökman ýerine ýetirilýär.

Jogaby: $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$. ▲

Täze üýtgeýjini girizmek

Irrasional deňlemeler çözülende ulanylan täze üýtgeýjini girizmek usulyny, irrational deňsizliklere hem ulanmak mümkin.

9-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

△ Deňsizligi aşakdaky ýaly ýazyp alarys: $-9\sqrt[4]{x} + \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + 18 \geq 0$.

Täze üýtgeýjini girizýäris: $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$. Munda

$$\begin{cases} -9t + t^2 + 18 \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ t \leq 3, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Şeydip:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} \geq 6, \\ 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6^4, \\ 0 \leq x \leq 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1296, \\ 0 \leq x \leq 81. \end{cases}$$

Jogaby: $x \in [0; 81] \cup [1296; +\infty)$. ▲

10-njy mysal. Deňsizligi çözün: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

△ Täze üýtgeýjini girizýäris: $\sqrt{15-x} = t, t > 0$.

Munda $x = 15 - t^2$ we t üýtgeýjä görä rasional deňsizligi alarys:

$$\begin{cases} \frac{3-(15-t^2)}{t} < 1, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2-t-12}{t} < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-4)(t+3)}{t} < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4.$$

Mundan x -i tapýarys:

$$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15-x < 16 \Leftrightarrow -1 < x < 15.$$

Jogaby: $x \in (-1; 15)$. ▲

Soraglar we ýumuşlar



1. Irrasional deňsizlik diýip nämä aýdylýar?
2. Irrasional deňsizligi çözmek prosesinde deňgüýçli çalşyрма geçmäge degişli mysal getirin.
3. Çözüwi bolmadyk irrasional deňsizlige mysal getirin.

Gönükmeler

Näbellileriň haýsy bahalarynda deňsizlikler mana eýe? (56–59)

- | | | |
|------------|--|--|
| 56. | 1) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-6} > 10$; | 2) $\sqrt[4]{18-2x} < 3$. |
| 57. | 1) $\sqrt{10-\sqrt{x-5}} < 27$; | 2) $\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2$. |
| 58. | 1) $\sqrt[3]{x^2-x} > -x\sqrt[3]{2}$; | 2) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$. |
| 59. | 1) $\sqrt{x^2+3x+1} < x+1$; | 2) $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \geq 2$. |

Deňsizlikleri çözün (60–66):

- | | | |
|------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 60. | 1) $\sqrt{2x-1} < x+2$; | 2) $\sqrt{x^2-1} > x-2$. |
| 61. | 1) $\sqrt[4]{2x^2-1} \leq x$; | 2) $\sqrt{x^2-x-2} \geq 2x+3$. |

- 62.** 1) $x - 3 < \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; 2) $\sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$.
- 63.** 1) $\sqrt[3]{x^2 + 6x} > x$; 2) $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} \geq 2$.
- 64.** 1) $\sqrt{2x + 1} > \sqrt{3 - x}$; 2) $x > \sqrt{x(1 + \sqrt{x(x - 3)})}$.
- 65.** 1) $\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1} \geq 4 + \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$; 2) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x + 1} \geq 1$.
- 66.** 1) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x - 1} > 8$; 2) $\sqrt[3]{x + 1} \leq \sqrt[3]{5x}$.
- 67.** Tekizlikde $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.
- 68.** Tekizlikde $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.
- 69.** Tekizlikde $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.
- 70.** Tekizlikde $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.
- 71.** Tekizlikde $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.
- 72.** Tekizlikde $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ nuqtalar berlen. $AC > BC$ sharti kanagatlandyryan ya'ylany tapyň.

Barlag test ýumuşlary

Synag gönükmeleriniň her birine 4 sanydan "jogap" berlen. 4 "jogabyň" diňe biri dogry, galanlary bolsa nädogry. Okuwçylardan synag gönükmelerini ýerine ýetirip ýa-da başga pikir ýöretmeler kömeginde ine şu dogry jogaby tapmak (ony bellik etmek) talap edilýär.

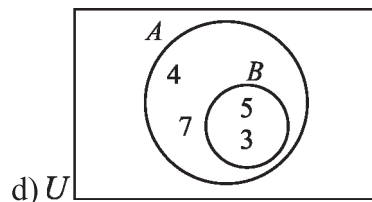
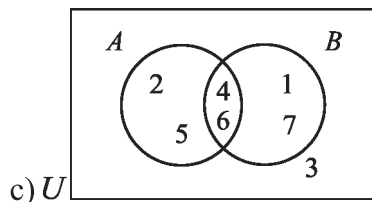
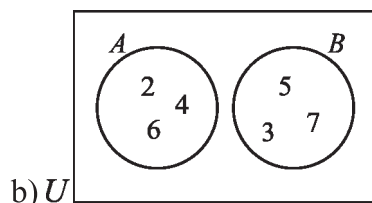
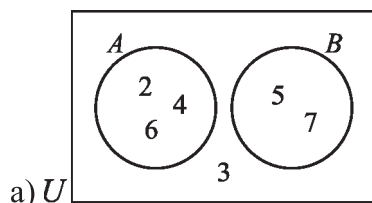
1. Deňgüçli deňlemeleri görkeziň:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A) 1 we 3; B) 2 we 3; C) 1 we 2; D) hemmesi.
2. Deňlemäniň uly köküni tapyň: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) -4; B) 5; C) 16; D) 11.
3. Bikwadrat deňlemäniň kökleri jemini tapyň: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) -1; C) 0; D) $11/3$.
4. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwi bar? $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.
5. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{5x+9} = 7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.
6. Deňlemeler ulgamynyň näçe çözüwi bar? $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 11, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.
7. Tekizlikde $A(3; 1)$ we $B(7; 3)$ nokatlardan deň uzaklykda ýerleşýän $C(5; x)$ nokady tapyň.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).
8. Deňlemäni çözüň: $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} = 68$.
A) 1; B) 2; C) -1; D) 0.
9. Deňlemäniň bitin köklerini tapyň: $11^{3x^2+23} = 11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) -1; C) 2; D) 1 we -1.
10. Haýsydyr bir döwletiň ilaty sany ýylyna 3% kemelse, näçe ýyldan soň ilat sany 20% kemeler?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.
11. Deňsizligi çözüň: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1) \leq 0$.
A) $[-7; 1]$; B) $[-7; -1]$; C) $[7; -1]$; D) $[7; 1]$.
12. $|x-2| \leq 5$ deňsizligiň näçe bitin çözüwi bar?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.
13. Deňsizligi çözüň: $|4x-1| \leq -2$.
A) $[-7; 1]$; B) $[-7; -1]$; C) $[7; -1]$; D) çözüwi ýok.
14. $\sqrt{x^2-13x+12} \leq 5-x$ deňsizligiň näçe bitin çözüwi bar?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

Jogaplar

I BAP.

1. a) $5 \in D$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 2. a) **I** $\{9\}$ **II** $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. b) **I** $\emptyset$ **II** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. c) **I** $\{1, 3, 5, 7\}$ **II** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 3. a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. 4. a) $\checkmark$ li; b) $\checkmark$ aksiz. 5. a) kesişmeyär; b) kesişyär. 6. a) $\checkmark$ li; b) $\checkmark$ aksiz; c) $\checkmark$ aksiz; d) $\checkmark$ aksiz. 7. a) **I** A toplum -1 -den uly $\acute{y}a$ -da deñ we 7-den kiçi $\acute{y}a$ -da deñ bolan bitin sanlar toplumy; **II** $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **III** 9. b) **I** A toplum -2-den uly we 8-den kiçi bolan natural sanlar toplumy; **II** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **III** 8. c) **I** A toplum 0-dan uly $\acute{y}a$ -da deñ we 1-den kiçi $\acute{y}a$ -da deñ bolan hakyky sanlar toplumy; **II** mümkin däl; **III** $\checkmark$ aksiz. d) **I** A toplum 5-den uly $\acute{y}a$ -da deñ we 6-dan kiçi $\acute{y}a$ -da deñ bolan hakyky sanlar toplumy; **II** mümkin däl; **III** $\checkmark$ aksiz. 8. a) $A = \{x | -100 < x < 100, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x | x > 1000, x \in \mathbb{R}\}$; c) $A = \{x | 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Q}\}$. 9. a) **I** 8 ta: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$; **II** 16 ta: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$; b) 2^n . 10. a) Hawa; b) Ýok; c) Hawa; d) Hawa; e) Ýok; f) Ýok. 11. b) $C' = \mathbb{N}$; c) $C' = \{x | x \geq -4, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $C' = \{x | 2 < x < 8, x \in \mathbb{Q}\}$. 12. a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{0, 1, 8\}$; c) $\{5, 6, 7, 8\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; e) $\{5, 6, 7\}$; f) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; g) $\{2, 3, 4\}$. 13. a) 9; b) 11. 14. a) $\{1, 2, 10, 11, 12\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 12\}$; c) $\{1, 8, 9, 10, 11, 12\}$; d) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; e) $\{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$; f) $\{8, 9, 10, 11\}$; g) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; h) $\{2, 10, 11\}$; 15. a) $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$; b) $\{2, 5, 11\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23\}$; d) $12 = 9 + 6 - 3 \checkmark$. 16. a) $P = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $Q = \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30\}$; b) $\{2, 5, 10\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40\}$; d) $12 = 8 + 8 - 4 \checkmark$. 17. a) $P = \{32, 36, 40, 44, 48, 52, 56\}$, $Q = \{36, 42, 48, 54\}$; b) $\{36, 48\}$; c) $\{32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56\}$; d) $9 = 7 + 4 - 2 \checkmark$. 18. a) $R = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; b) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; c) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; d) $9 = 7 + 7 - 5 \checkmark$. 19. a) $C = \{-4, -3, -2, -1\}$, $D = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $\{-4, -3, -2, -1\}$; c) $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; d) $7 = 4 + 7 - 4 \checkmark$. 20. a) $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q = \{1, 2, 3, 5, 9, 18\}$, $R = \{1, 3, 9, 27\}$. b) **I** $\{1, 2, 3, 6\}$; **II** $\{1, 3\}$; **III** $\{1, 3, 9\}$; **IV** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$; **V** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27\}$; **VI** $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$. c) **I** $\{1, 3\}$; **II** $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27\}$. 21. a) $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$, $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, $C = \{12, 24, 36\}$. b) **I** $\{12, 24, 36\}$; **II** $\{12, 24, 36\}$; **III** $\{12, 24, 36\}$; **IV** $\{12, 24, 36\}$. c) $\{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36\}$. d) $12 = 9 + 6 + 3 - 3 - 3 + 3 \checkmark$. 22. a) $A = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. b) **I** $\{6, 30\}$; **II** $\{2, 3, 5\}$; **III** $\emptyset$; **IV** $\emptyset$. c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30\}$. d) $18 = 5 + 8 + 10 - 2 - 3 - 0 + 0 \checkmark$.

23.



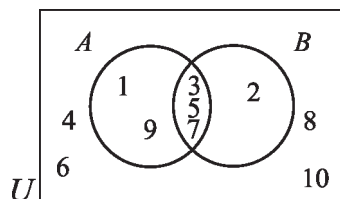
24.

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$;

b) $A \cap B = \{3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

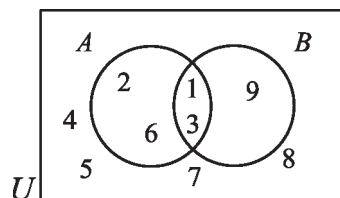


25. a) $A = \{1, 2, 3, 6\}$

$B = \{1, 3, 9\}$;

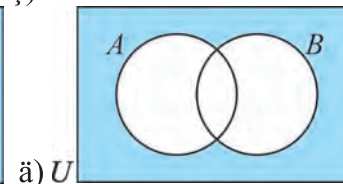
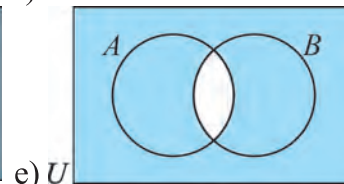
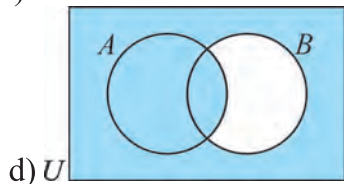
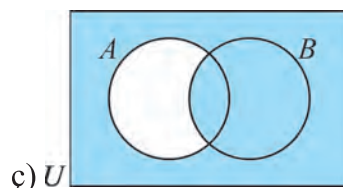
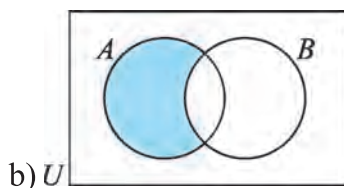
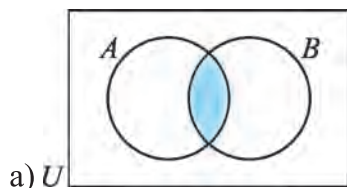
b) $A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$;

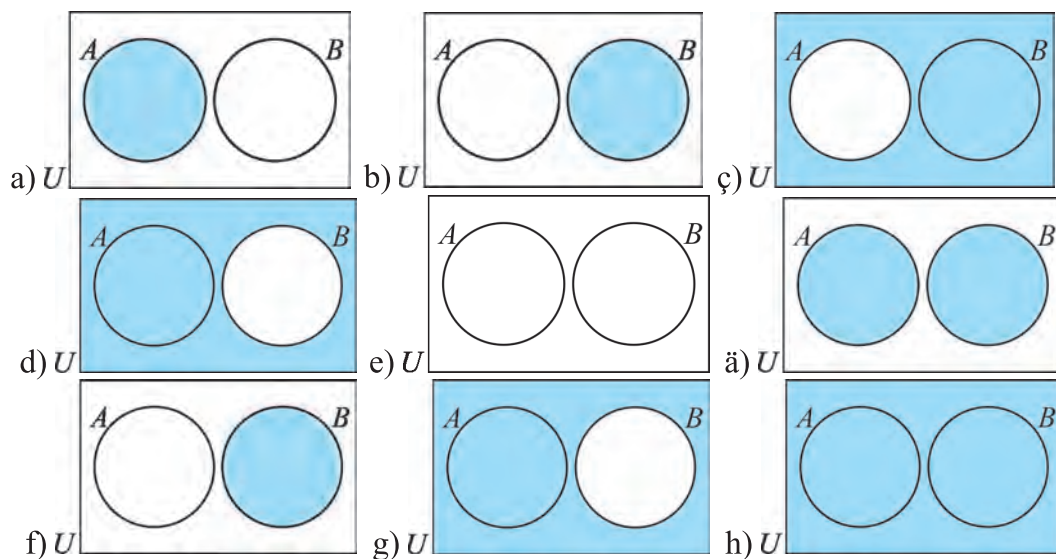


26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. 27. a) **I** $\{a, b, c, d, h, j\}$; **II** $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; **III** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **IV** $\{a, c, d\}$; **V** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **VI** $\{a, e, f\}$; **VII** $\{a\}$; **VIII** $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

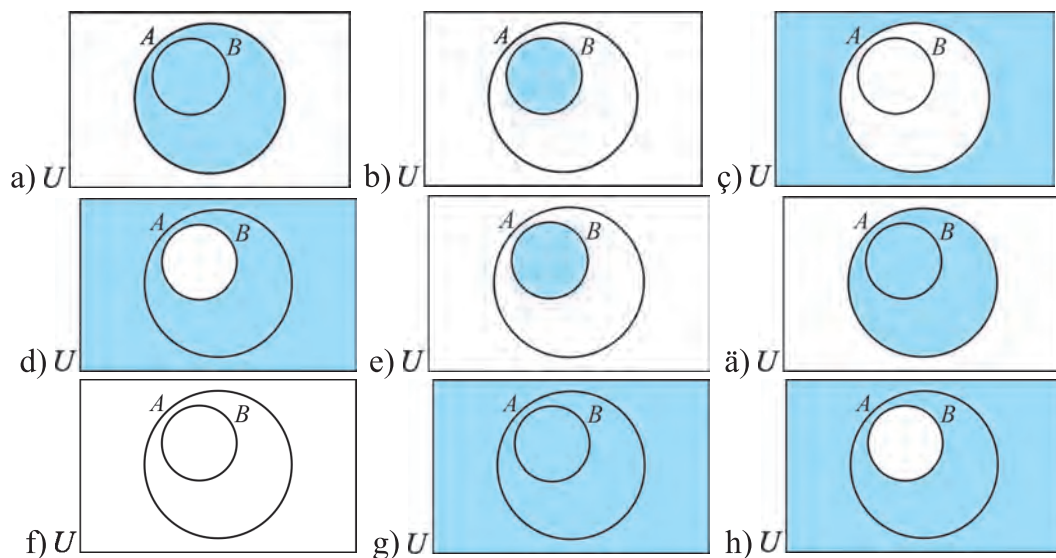
28.



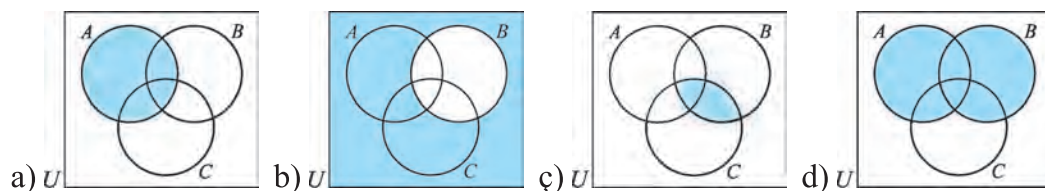
29.

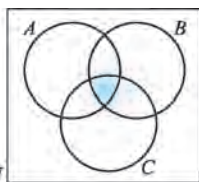


30.

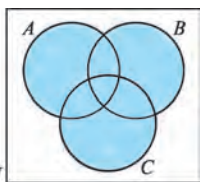


31.

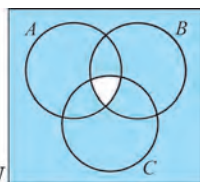




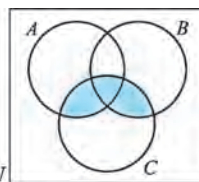
e) U



ä) U



f) U

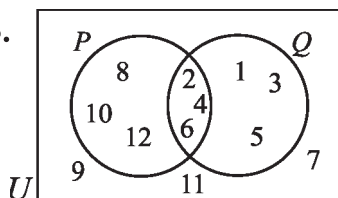


g) U

32. a) Hawa, ýalan; b) hawa, çyn; c) Hawa, çyn; d) Hawa, çyn; e) Hawa, çyn; f) Hawa, çyn; g) Ýok; h) Hawa, çyn; i) Ýok; j) Hawa, anyk däl; k) Hawa, anyk däl; l) Ýok; m) Hawa, anyk däl; n) Hawa, anyk däl; o) Hawa, anyk däl; p) Hawa, ýalan. 33. k) $\neg p$: Käbir dörtburçluklar parallelogram däl; m) $\neg r$: 7 – rasional san däl; n) $\neg s$: $23-14 \neq 12$; o) $\neg t$: $52:4 \neq 13$; p) $\neg u$: Käbir iki jübüt sanlaryň tapawudy jübüt bolýar; q) $\neg p$: Yzygider natural sanlaryň köpeltmek hasyly hemişe jübüt bolmaýar; r) $\neg q$: Käbir kütek burçlar özara deň däl; s) $\neg r$: Käbir trapesiýalar parallelogram däl; t) $\neg s$: Üçburçlukda iki burçy özara deň, emma ol deňýanly däl.

34. a) $x \geq 5$; b) $x < 3$; c) $y \geq 8$; d) $y > 10$; 35. e) Ýok, Medinäniň boýy 140 sm hem bolmagy mümkin; f) Ýok; g) Hawa. 36. f) $x \geq 5$, $x \in \mathbb{N}$; g) x – sygyr, $x \in \{\text{atlar, goýunlar, sygyrlar}\}$; h) $x < 0$, $x \in \mathbb{Z}$; i) x – okuwçy gyzy, $x \in \{\text{okuwçylar}\}$; j) x – okuwçy bolmadyk gyzy, $x \in \{\text{gyzlar}\}$. 41. e) $p \wedge q$: Medine – terapewt, Munisa bolsa stomatolog; f) $p \wedge q$: 15-den uly we 30-dan kiçi; g) $p \wedge q$: howa bulutly we ýagyş ýagýar; h) $p \wedge q$: Alymyň saçlary gara we gözleri mawy. 42. a) çyn; b) ýalan; c) ýalan; d) çyn; e) ýalan.

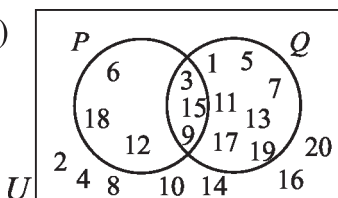
43.



44. a) çyn; b) ýalan.

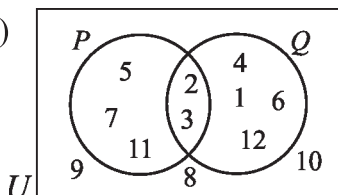
45. a) çyn; b) çyn.

46. a)



b) I) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$;
II) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$;
III) $\{3, 9, 15\}$;
IV) $\{1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$.

47. a)



b) I) $\{2, 3\}$;
II) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$;
III) $\{1, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. 50. a) Serdar ir turdy; b) Serdar agşamky nahara palaw iydi; c) Serdar ertirlige gaymak iydi we sport bilen meşgullandy; d) Serdar günortanlyga çorba içdi we agşamky nahara palaw iydi; e) Serdar ya günortanlyga ya agşamky nahara çorba içdi.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) tawtologiya däl; b) tawtologiya; c) tawtologiya däl.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) Gün çykrsa, men suwa düşmäge bararyn; e) x san 6-a bölünse, ol jübüt bolýar; f) sowadyjyda ýumurtgalar bolsa Medine tort bişirýär.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; 63.

a) Konwersiya: Eger Diýara ýylynsa, ol jemper geýýär; Inwersiya: Eger Diýara jemper geýmese, ol ýylynyp bilmeýär. b) Konwersiya: Eger iki üçburçlugyň degişli burçlary deň bolsa, olar meňzeş bolýar; Inwersiya: Eger iki üçburçluk meňzeş bolmasa, olaryň degişli burçlary deň bolmaýar. c) Eger $2x^2=12$ bolsa, onda $x = \pm\sqrt{6}$ bolýar; Konwersiya: Eger $x = \pm\sqrt{6}$ bolsa, onda $2x^2=12$ bolýar. Inwersiya: Eger $2x^2 \neq 12$ bolsa, onda $x \neq \pm\sqrt{6}$ bolýar. d) Konwersiya: Eger Alym hoşal bolsa, ol oýun oýnaýar; Inwersiya: Alym oýun oýnamasa, ol hoşal bolmaýar. e) Eger üçburçluk dogry bolsa, onda onuň taraplary deň bolýar; Konwersiya: Eger üçburçlugyň taraplary deň bolsa, ol dogry bolýar; Inwersiya: Eger üçburçluk dogry bolmasa, onda onuň taraplary deň bolmaýar. 64. a) Eger gül tikenli bolmasa ol bägül bolmaýar; b) Dogry karar çykaryp bilmedik adam sudya däl;

c) pökgini anyk nyşana depip bilmeýän adam gowy futbolçy bolup bilmeýär;

d) Eger madda guýlan gap şkilini kabul etmese ol suwuklyk däl;

e) Eger adam üstünlikli bolmasa, ol halal we sowatly däl; 65. a) matematikany öwrenmeýän adam 10-njy synp okuwçysy däl; b) Şawkat matematikany öwrenýär; Myrat 10-njy synp okuwçysy däl; Anyk netije çykaryp bilmeýäris. 66. a) x^2 sany 9-a bölünmese, x sany 3-e bölünmeýär; b) x –jübüt bolmasa, onuň ahyrky sifri 2 däl; c) $AB \parallel CD$ we $AD \parallel BC$ bolmasa, $ABCD$ – gönüburçluk däl; d) $\angle ACB \neq 60^\circ$ bolsa, ACB – dogry üçburçluk däl. 67. I) Eger öýüň daşary tüsse çykarýan turbasy

bolsa, in köpi bilen 3 aynaly bolýar; **II**) Eger öý 3 sanydan artyk aynaly bolsa, ol daşary түsse çykarýan turba eýe bolmaýar; **III**) Eger öý daşary түsse çykarýan turba eýe bolmasa, in köpi bilen 3 aynaly bolmaýar; **69.** a) $\exists x P(x)$; b) $\exists x P(x)$; c) $\forall x P(x)$; d) $\forall x P(x)$; e) $\forall x P(x)$; f) $\forall x P(x)$; g) $\forall x P(x)$; h) $\forall x P(x)$; i) $\exists x P(x)$; j) $\exists x P(x)$; k) $\forall x P(x)$; **70.** a) Sazan süýdemdiriji däl; b) Ähli gurallarda kemçilikler bar; f) Altyn togy gowy geçirýär; g) Käbir oňurgalylyr çaga digurýar; h) Bu adam kesellän. **71.** a) y x -in agtygy; b) Islendik adamda perzent bar; c) Islendik adam kimiňdir perzendi. **72.** a) Ähli adamlar üçin eger biri başgasyny dost diýip hasaplasa, ol hem ony dost diýip hasaplaýar; b) Islendik adam üçin ol dost diýip hasaplaýan adam bar; c) Şeýle adam bar bolup, ony hemme dost diýip hasaplaýar; d) Islendik adam üçin ony dost diýip hasaplaýan adamlar bar; e) Şeýle adam bar bolup, ol hemmāni dost diýip hasaplaýar; f) Şeýle adam bar bolup, ol hemme dost diýip hasaplaýar. **73.** a) Islendik bitin san üçin oňa bölünýän bitin san bar; b) Şeýle bitin san bar bolup, ol ähli bitin sanlara bölünýär; c) Islendik bitin san üçin onuň bölüjisi bar; d) Şeýle bitin san bar bolup, oňa ähli bitin sanlar bölünýär; e) Islendik bitin san üçin onuň bölüjisi bar; f) Şeýle bitin san bar bolup, ol ähli bitin sanlara bölünýär. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b ; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d . **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II BAP.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402.46. 3. \$2600. 4. £14 400. 5. €20219.78. 6. a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9.41%. 7. $11\frac{2}{3}\%$. 8. 15.4%. 9. a) 4; b) 7; 11. a) €5512.69; b) \$7293.04; c) £18938.83. 12. 787.50. 13. €1418.75. 14. £1660. 15. \$274.83. 16. a) €111.39; b) £763.31; c) ¥77157. 17. \$9021.58. 18. €301.26. 19. a) \$7650; b) \$8151.65; c) \$8243.81.

20.	Ýyllar	Amortizasiýa	Nyrhy
	0		€2500
	1	15% €2500 = €375	€2125
	2	15% €2125 = €318.75	€1806.25
	3	15% €1806.25 = €270.94	€1535.31

III BAP.

1. a) 5; b) -2; 50; c) 1; -9; d) $\emptyset$; e) -1; f) 1; -0,5; g) -1; -4,7; i) -4;7;
 2. a) 7; b) -0,25; c) kökleri ýok; e) -1;5; f) -1.
 3. a) we b); a) we d); a) we f); b) we d); b) we f); d) we f); c) we e); g) we h).
 4. a) $(81/11; -3/11)$; b) $(4;4)$; c) $(9;8)$. 6. b) $(1;1)$. 7. a) $8; -33/4$.
 9. 48 sany gyz we 60 sany oglan. 11. a) $19\frac{2}{3}$; b) $\emptyset$; c) 32; d) $\emptyset$; 13. a) $\emptyset$; b) $-\frac{23}{16}$.
 15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. 17. b) $\emptyset$; 19. a) 5. 21. a) $(9;4)$. 23. a) $(-5;9)$. 25. $\frac{21}{22}$.
 26. a) -0,25; b) $-4/9$; c) -2,5. 28. c) $\emptyset$. d) $\{0; -3,5\}$. 29. c) 0; d) 1. 31. a) 0; b) 0.
 37. 3 ýyl. 39. 8 ýyl. 41. a) $\left(\frac{69}{62}; \frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. 43. a) $(1;1)$; b) $(4/3; 2/3)$;
 53. 1) $\left[-4; \frac{3}{7}\right] \cup [5; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7}; -1\right) \cup (6; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$;
 4) $(-\infty; -0,5) \cup [5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$
 7) $(0,25;1)$; 8) $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{16}{23}; +\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7}; \frac{15-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{7}; \frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;
 10) $(0; 0,5) \cup (1; +\infty)$. 55. 1) $\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$; 2) $\emptyset$. 57. $(-\infty; -3]$; 59. 1) $\emptyset$. 2) $\emptyset$.
 61. 1) $[0;1)$. 63. 1) $(-\infty; -2) \cup (0;3)$. 65. 1) $[81; +\infty)$. 66. 2) $[0,25; +\infty)$.
 68. $y > 5x + 7$. 70. $y < (x-2)/9$. 72. $y > 15x - 3$.

MAZMUNY

I bap. TOPLUMLAR. MANTYK 3

1-4-nji dersler.	Toplum düşüncesi, toplumlar üstünde amallar. Dolduryjy toplum	3
5-7-nji dersler.	Pikir ýöretmeler. Inkär, konýunksiýa we dizýunksiýa	14
8-9-nji dersler.	Mantyky deňgüýçlilik. Mantyky kanunlar	21
10-11-nji dersler.	Implikasiýa, konwersiýa, inwersiýa we kontrapozisiýa ..	23
12-13-nji dersler.	Predikatlar we kwantorlar	29
14-15-nji dersler.	Dogry pikir ýöretmek (argumentasiýa) kanunlary. Sofizmler we paradokslar	33
16-18-nji dersler.	Meseleler çözmek	38

II bap. MALIÝE MATEMATIKASY ELEMENTLERI48

19-21-nji dersler.	Ýönekeý we çylşyrymly görterimler	48
22-24-nji dersler.	Meseleler çözmek	53

III bap. ELEMENTAR FUNKSIÝALAR WE DEŇLEMELER 58

25-28-nji dersler.	Ýönekeý rasional deňlemeler we olaryň ulgamlary	58
29-32-nji dersler.	Ýönekeý irrasional deňlemeler we olaryň ulgamlary	64
33-36-nji dersler.	Ýönekeý görkezijili deňlemeler we olaryň ulgamlary	69
37-38-nji dersler.	Deňlemeleri takmyny çözmek	74
39-41-nji dersler.	Ýönekeý rasional deňsizlikler we olaryň ulgamlary	77
42-43-nji dersler.	Ýönekeý irrasional deňsizlikler	79
	Jogaplar	86

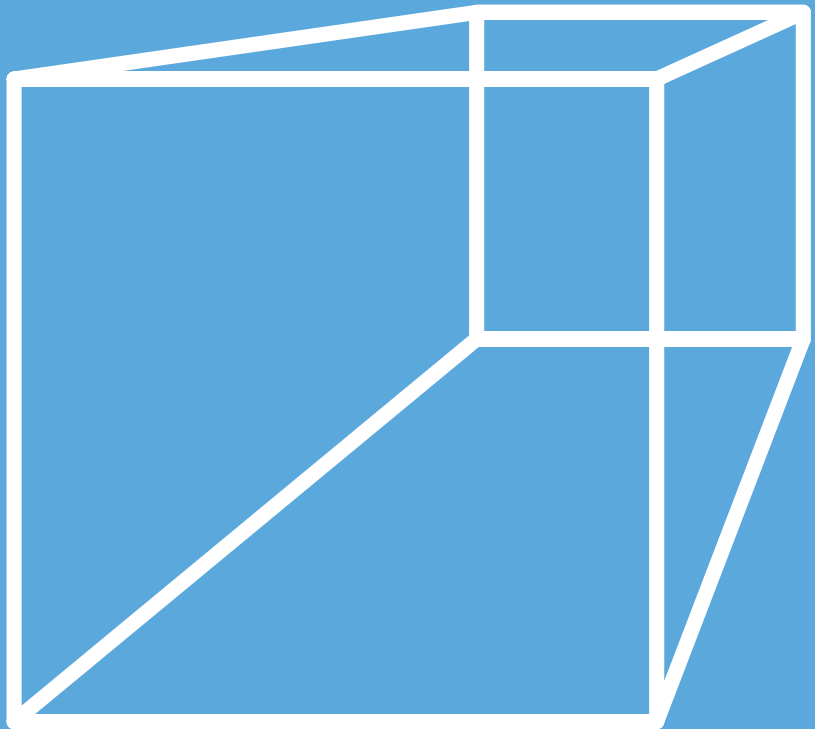
Peýdalanylan we hödürlenýän edebiýatlar

1. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. Toshkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2nd edition. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. A.U. Abduhamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari, 1-qism, Toshkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Н.П. Филичева Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань". 2009.
6. М.И. Исроилов Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Г.К. Муравин Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. Москва, "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, "Просвещение", 2004.
9. <http://www.ams.org/mathweb/> – Internetda matematika (ingliz tilida).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika va informatika. Ilmiy-uslubiy jurnal (2001 - yildan boshlab chiqa boshlagan).
12. M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Matematikadan qo'llanma, I va II qismlar. O'qituvchilar uchun qo'llanma. Prof. T.A. Azlarov tahriri ostida. Toshkent, "O'qituvchi", 1979.
14. M.A. Mirzaahmedov, D.A. Sotiboldiyev O'quvchilarni matematik olimpiadalarga tayyorlash. Toshkent, "O'qituvchi", 1993.
15. <http://www.uzedu.uz> – Xalq ta'limi vazirligining axborot ta'lim portali.
16. <http://www.eduportal.uz> – Multimedia markazi axborot ta'lim portali.
17. <http://www.problems.ru> – Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida).
18. <http://matholymp.zn.uz> – O'zbekistonda va dunyoda matematik oimpiadalar.

MATEMATIKA



GOMETRIYA



10-njy synp

10-njy synpda geometriýanyň stereometriýa bölümini – giňişlikdäki geometrik şekilleriň häsiýetlerini düzümlü öwrenmäge girişilýär. Derslikden esasy giňişlikdäki şekiller, köpgranlyklar we aýlanma jisimler we olaryň esasy häsiýetleri, giňişlikde parallel we perpendikulyar göni çyzyklar we tekizlikler hem-de olaryň häsiýetlerine degişli meseleler orun alan.

“Geometriýa-10” dersliginde nazary materiallar ýönekeý we rowan dilde beýan etmäge hereket edilen. Ähli temalar we düşüňjeler durmuşdan dürli mysallar arkaly açyp berlen. Her bir temadan soň getirilen soraglar, subut etmäge, hasaplamaga we gurmaga degişli ençeme meseleler we mysallar okuwçyny döredijilikli pikirlenmäge ündeýär, özleşdirilen bilimleri çuňlaşdyrmaga we berkidip barmaga kömek edýär.

“Geometriýa-10” dersligi umumy bilim berýän mekdepleriň 10-njy synp okuwçylaryna niýetlenen, ondan geometriýany özbaşdak öwrenmekçi we gaýtalamakçy bolan kitapsöýüjiler hem peýdalanyp bilerler.

MAZMUNY

I bölüm. Planimetriýany düzümlü gaýtalamak

1. Planimetriýanyň mantyky gurluşy97
2. Geometrik meseleler we olary çözmegiň metodlary102
3. Amaly gönükmeler we olaryň ulanylyşy108

II bölüm. Stereometriýa giriş

4. Giňişlikdäki geometrik şekiller. Köpgranlyklar112
5. Aýlanma jisimleriri: silindr, konus we şar116
6. Amaly gönükmeler we olaryň ulanylyşy119

III bölüm. Giňişlikde göni çyzyklar we tekizlikler

7. Giňişlikde göni çyzyklar we tekizlikler126
8. Köpgranlyklar we olaryň ýönekeý kesimlerini gurmak131
9. Amaly gönükmeler we olaryň ulanylyşy135

Dersligiň "Geometriýa" bölümünde ulanylan belgiler we olaryň düşündirişi:



– teoremanyň häsiýetnamasy



– teorema subudynyň ahyry



– aksiomanyň häsiýetnamasy



– amaly tatbiq



– tema boýunça soraglar



– Taryhy sahypalar



– ugrukdyryjy sapak



– geometrik tapmaçalar

I BÖLÜM



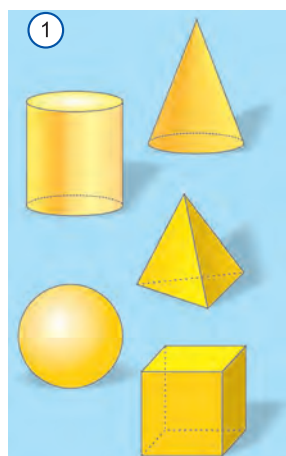
PLANIMETRIYANY DÜZÜMLI GAÝTALAMAK

1

PLANIMETRIYANYŇ MANTYKY GURLUŞY

Geometriya real durmuşdaky predmetleriň mukdar görkezijileri we giňişlikdäki şekilleri öwrenýän ylymdyr. Zatlaryň başga häsiýetlerini başga ylymlar öwrenýär. Eger haýsy-da bolsa zat öwrenilende, onuň diňe giňişlikdäki şekili we ölçegleri hasaba alynsa, onda *geometrik şekil* diýlip atlandyrylýan abstrakt obýekte eýe bolarys.

Geometriya – grekçe söz bolup, "ýer ölçemek" diýen manyny aňladýar. Mekdepde öwrenilýän geometriya gadymky grek alymy Ewklidiň ady bilen *Ewklidiň geometriyasyny* diýlip atlandyrylýar. Geometriya iki bölekden: planimetriyadan we stereometriyadan ybarat. *Planimetriya* – tekizlikdäki, *stereometriya* bolsa giňişlikdäki geometrik şekilleriň häsiýetlerini öwrenýär (1-nji surat).



Geometrik şekilleri bir-birinden tapawutlandyrmak üçin olaryň aýratynlyklary häsiýetlendirilýär, ýagny olara *kesgitleme* berilýär. Ýöne hemme şekillere-de kesgitleme berip bolmaýar. Olaryň deslapky birnäçesini kesgitlemesiz kabul etmäge mejburdys. Olary häsiýetlendirýän, *başlangyç (esasy) geometrik şekiller* diýip alarys.

Geometriyanyň mantyky gurluşy aşakdaky tertipde amala aşyrylýar:

1. Ilki esasy (başlangyç) geometrik şekiller kesgitlemesiz kabul edilýär;
2. Esasy geometrik şekilleriň esasy häsiýetleri subutsyz kabul edilýär;

3. Başga geometrik şekiller esasy şekiller we olaryň häsiýetlerine daýanyp kesgitlenýär hem-de olaryň häsiýetleri oňa çenli mälüm häsiýetlere daýanyp subut edilýär.

Ylmyň şeýle gurluşy *aksiomatik gurluş* diýlip atlandyrylýar. *Aksioma* diýip dogrudygyny subutsyz kabul edilýän häsiýete aýdylýar.

Şu wagta çenli biz öwrenen planimetriýanyň esasy şekilleri bu nokat we göni çyzykdy. Olary kesgitlemesiz kabul etdik. Kesim, şöhle, üçburçluk we başga geometrik şekillere bolsa kesgitleme berdik. Şonuň ýaly-da, aşakdaky häsiýetleri (tassyklamalary) subutsyz aksioma hökmünde kabul etdik:

I. Değişlilik aksiomalary topary

1.1. *Tekizlikde nähili göni çyzyk alynsa-da, onda bu göni çyzyga degişli bolan nokatlar hem, degişli bolmadyk nokatlar hem bar.*

1.2. *Islendik iki nokatdan diňe bir göni çyzyk geçýär.*

II. Tertip aksiomalary topary

2.1. *Bir göni çyzykda alnan islendik üç nokadyň diňe biri galan ikisiniň arasynda ýatýar.*

2.2. *Her bir göni çyzyk tekizligi iki bölege: iki ýarymtekizlige bölýär.*

III. Ölçeg aksiomalary topary

3.1. *Islendik kesim noldan tapawutly belli bir uzynlyga eýe bolup, ol položitel san bilen aňladylýar. Kesimiň uzynlygy onuň islendik nokady bölen bölekleriň uzynlyklarynyň jemine deň.*

3.2. *Islendik burç belli bir gradus ölçegine eýe bolup, onuň bahasy položitel san bilen aňladylýar. Ýazgyn burçuň gradus ölçegi 180° -a deň. Burçuň gradus ölçegi burçuň taraplarynyň arasyndan geçýän islendik şöhle bölen burçlaryň gradus ölçegleriniň jemine deň.*

IV. Deň şekili goýmak aksiomalary topary

4.1. *Islendik şöhlä onuň ujundan başlap, berlen kesime deň ýeke-täk kesimi goýmak mümkin.*

4.2. *Islendik şöhleden belli bir ýarymtekizlige berlen, ýazgyn bolmadyk burça deň ýeke-täk burçy goýmak mümkin.*

4.3. *Islendik üçburçluk üçin oňa deň üçburçluk bar we ony şöhleden belli bir ýarymtekizlige ýeke-täk ýagdaýda goýmak mümkin.*

V. Parallellik aksiomasy

4.1. *Tekizlikde göni çyzykdan daşarda alnan nokatdan bu göni çyzyga diňe bir parallel göni çyzyk geçirmek mümkin.*

Käbir tassyklamanyň dogrudygyny mantyky pikir ýöretmeleriň kömeginde getirip çykarmak *subut* diýlip atlandyrylýar. Dogrulygy subut etmek ýoly bilen

esaslandyrylýan tassyklama bolsa *teorema* diýilýär. Teorema, adatda, şert we netije böleklerden ybarat bolýar. Teoremanyň birinji – şert böleginde nämeler berlendigi beýan edilýär. Ikinji – netije böleginde bolsa nämäni subut etmelidigi aňladylýar.

Teoremany subut etmek – onuň şertinden peýdalanyňp, şon çenli subut edilen we kabul edilen häsiýetlere daýanyňp, pikir ýöredip, netije böleginde aňladylan jümläniň dogrudygyny getirip çykarmakdyr. Teoremanyň şert we netije böleklerini kesgitlep almak – teoremany aýdyňlaşdyrýar, ony düşüňmek we subut etmek prosesini ýeňilleşdirýar.

Grek alymy Platon geometriýada ajaýyp bir kanunalaýyklygy aňypdyr: ön öwrenilen, dogrudygyny subut edilen häsiýetlerden mantykly pikirlenme, pikir ýöretmek arkaly täze häsiýetleri getirip çykarsa bolar eken. Şeýle ajaýyp mümkinçilikden peýdalanyňp, galan häsiýetler teoremlar görnüşinde aňladylýar we aksiomalar hem-de şu wagta çenli dogrudygyny subut edilen häsiýetlere esaslanyp, mantykly pikir ýöretmeler arkaly subut edilýär.

Pikir ýöretmek prosesinde subut edilen häsiýetlerden (olaryň dogrudygyny açan görnüş duran bolsa-da) peýdalanmak gadagan.

Şeýdip, geometriýany bir bina diýip garaýan bolsak, başlangyç düşüňjeler we aksiomalar onuň esasyň düzýär. Bu esasyň üstüne örülen kerpiçler – häsiýetlendirilen täze düşüňjeler we teoremlar görnüşinde subut edilen häsiýetlerden ybarat bolýar.

Geometriýany özbaşdak ylym hökmünde düýbi tutulmagynda gadymky grek alymlary uly goşant goşupdyrlar. Meselem, Gippokrat Hiosskiý geometriýanyň esaslary baradaky başlangyç düşüňjeleri beýan edipdir. Bu ugur boýunça esasy işleri beýik grek alymy Ewklid (eramyza çenli 356 – 300-nji ýyllar) amala aşyrypdyr. Onuň esasy eseri "Esaslar" planimetriýa, stereometriýa we sanlar nazaryýetiniň käbir meselelerini, şonuň ýaly-da, algebra, gatnaşyklar umumy nazaryýeti, meýdanlary we göwrümleri hasaplamak usuly hem-de limitler nazaryýeti elementlerini öz içine alýar. "Esaslar"da Ewklid gadymky grek matematikasynyň ähli gazananlaryny jemleýär we onuň ösmegi üçin esas döredýär.

"Esaslar" 13 kitapdan ybarat bolup, bu eser eramyzdan önki V – IV asyrlaryň grek matematikleriniň eserleri gaýtadan işlenmesinden ybarat. Eserde 23 sany kesgitleme, 5 postulat we 9 aksioma berlen. Eserde gönüburçluga, kwadrata,



Ewklid
(eramyzdan önki
356–300-nji ýyllar)



*Omar Heýýam
(1048-1131)*

töwerege dogry kesgitlemeler berlen. Nokada we çyzyga aşakdaky kesgitlemeler berlen: "Nokat diýip şeýle zada aýdylýar, ýagny ol böleklere eýe däl", "Çyzyk diýip ini ýok uzynlyga aýdylýar".

"Esaslar"da 9 aksioma – subutsyz kabul edilýän pikir ýöretmeler beýan edilen. Geometrik guralary amala aşyrmak mümkinligini beýan ediji matematiki pikir ýöretmelerden (postulattan) aşakdaky baş sanysy beýan edilen:

I. Islendik iki nokatdan diňe bir göni çyzyk geçirmek mümkin.

II. Göni çyzyk kesimini çäksiz dowam etdirmek mümkin.

III. Islendik merkezden islendik aralykda töwerek gurmak mümkin.

IV. Hemme göni burçlar özara deň.

V. Bir tekizlikde ýatýan iki göni çyzygy üçünji göni çyzyk kesip, bir taraply içki burçlary emele getirse we burçlaryň jemi iki göni burçdan kiçi bolsa, şol göni çyzyklar dowam etdirilende olaryň jemi iki göni burçdan kiçi burçlaryň tarapynda kesişýär.

Bu eser uly we uzak şöhrata eýe boldy. Aýratynam, V postulat uly ylmy çekişmelere sebäp boldy. Eger V postuladaky içki atanak burçlary α we β diýsek (1-nji surat), göni çyzyklar a we b bolsa, onda postulatyň mazmunyna görä $\alpha + \beta < 180^\circ$ bolsa, a we b göni çyzyklar kesişýär.

Postulaty subut etmek ugrunda oňa deň güýçli ençeme pikir ýöretmeler peýda boldy. Meselem, inlis matematigi Ýan Pleýferiň (1748–1819) *parallellik aksiomasy* şolara degişlidir: tekizlikde göni çyzykdan daşarda alnan nokatdan şu göni çyzyga diňe bir parallel göni çyzyk geçirmek mümkin.

Matematik şahyr astronom we filosof Omar Giýasiddin Abul Faht ibn Ybrahym Heýýam hem bu mesele bilen meşgullanypdyr. Heýýam "Ewklidiň kitabyňyň giriş bölümündäki kynçylyklara düşündirişler" atly eserinde V postulata durup geçipdir. Ol Ewklidiň postulaty teorema bolýandygyny subut etmek üçin aşaky esasyndaky iki burçy göni bolan gönüburçluga garapdyr (2-nji surat) we eger onuň aşaky iki burçy göni bolsa, ýokardaky iki burçy hem göni bolmaly diýen netijä gelipdir. Omar Heýýam "Bir göni çyzyga perpendikulýar bolan iki göni çyzyk göni çyzygyň iki tarapynda-da kesişip bilmeýär ahyryn", – diýýär. Omar Heýýamyň bu işlerinden bihabar italiýaly matematik J. Sakkeri (1667–1733) hem V postulat bilen meşgullanyp, gönüburçluga ýüzlenipdir. Geometriýanyň esaslaryna bu gönüburçluk "Heýýam – Sakkeri dörtburçlugy" ady bilen giripdir.

Bu meseläni beýik rus matematigi Nikolaý Iwanowiç Lobaçewskiý (1792–1856) çözdü we ewklid däl geometriýasyny döretti. Lobaçewskiý birinji gezek Ewklidiň başınjy postulaty geometriýanyň başga aksiomalaryna bagly dældigini subut etdi. Bu geometriýa Ewklidiň geometriýasyndan бүтінлеý tapawutlanýardy. Ýöne, ol mantyky gapma-garşylyga duçar bolmalydy, çünki – iki geometriýanyň bir wagtda bar bolmagy mümkin däl. Şoňa seretmezden, Lobaçewskiý täze netijeler getirip çykaryberýär, olar mantyky gapma-garşylyklara duçar bolmady. Täze geometriýada we Ewklidiň geometriýasynda birinji dört topar aksiomalar üstme-üst düşýär. Bu aksiomalar toparlary we olaryň netijeleri absolýut geometriýa diýlip atlandyrylyp başlady.

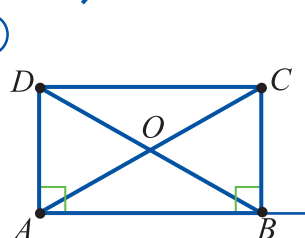
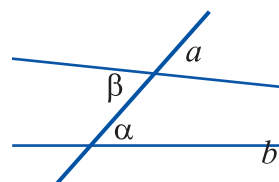


*N.I. Lobaçewskiý
(1792–1856)*

Ýöne, ewklid däl (Lobaçewskiý) geometriýa Ewklidiň geometriýasyndan gaty tapawutlanýar. Meselem, Lobaçewskiýniň geometriýasynda üçburçlugyň içki burçlarynyň jeminde π -den kiçi, onda meňzeş ýa-da deň bolmadyk üçburçluklar ýok, berlen göni çyzykdan birmeňzeş uzaklaşýan nokatlar toplumy göni çyzyk däl, eýsem egri çyzyk hasaplanýar we ş. m.

Ewklid däl geometriýany döretmäge wenger matematigi Ýanoş Bolýai (1802–1860) we nemes matematigi Karl Fridrih Gausslar (1777–1855) uly goşant goşupdyrlar. Şonuň ýaly-da, italýan matematigi Eujenio Beltrami (1835–1900) we nemes matematigi Bernhard Riman (1826–1866) täze geometriýa häsiýetnamasy boýunça uly işler edipdirler.

Ewklid başlap beren aksiomatika mälüm manyda nemes matematigi Dawid Gilbert (1862–1943) we rus matematigi Weniamin Fýodorowiç Kaganyň (1859–1953) işlerinde ahyryna ýetirilýär.



Tema degişli soraglar

1. *Geometriýany aksiomalar ulgamyny beýan eden Ewklid barada nämeleri bilýärsiňiz?*
2. *Ewklidiň "Esaslar" eseri barada aýdyp beriň.*
3. *Kesgitleme näme? Tekizlikde haýsy şekiller esasy (başlangyç) şekiller hökmünde kesgitlemesiz kabul edilen?*
4. *Teorema we aksioma bir-birinden näme bilen tapawutlanýar?*

5. *Planimetriya aksiomalarini sanañ we düşündiriñ.*
6. *Geometriya ylmy nahili düzülen?*
7. *Ewklidiñ V postulaty näme hakda we ony näme üçin subut etmäge synanyşypdyrlar?*
8. *Bu postulaty subut etmäge synanyşan alymlar we olaryñ işleri barada aydyp beriñ.*
9. *Lobaçewskiý täze geometriyanıñ döredilmegine nahili goşant goşupdyr?*
10. *Ewklid däl geometriyanı döreden alymlar we olaryñ işleri barada aydyp beriñ.*



GEOMETRIK MESELELER WE OLARY ÇÖZMEĞİ METODLARY

Yokarda nygtaýşymyz ýaly, geometriyanıñ iñ ajaýyp aýratynlygy bu öň öwrenilen, dogrudygı subut edilen häsiýetlerden mantyky pikirlenme, pikir ýöretmek arkaly täze häsiýetleri getirip çykarmak mümkin. Şeýle ajaýyp mümkinçilikden peýdalanyň, galan häsiýetler teoremlar ýa-da meseleler görnüşinde aňladylan we aksiomalar hem-de şu wagta çenli dogrudygı subut edilen häsiýetlere esaslanyp, mantyky pikir ýöretmeler arkaly subut edilen. Şeýlelikde matematiki ýa-da geometrik meseleler emele gelipdir.

Matematiki meselede nämelerdir (şertler) berlen bolýar. Olardan peýdalanyň, nämäni tapmak (hasaplamak) ýa-da subut etmek, ýa-da gurmak talap edilýär. Goýlan talaby ýerine ýetirmek meseläni çözmegi aňladýar.

Geometrik meseleler goýlan talaba görä hasaplamaga, subut etmäge, ulanmaga we gurmaga degişli meselelere bölünýär.

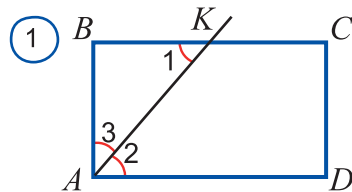
Matematiki meseläni çözmek üçin gury nazaryýeti bilmek ýeterli däl. Mesele çözmek endigine we tejribesine-de eýe bolmak talap edilýär. Şeýle endik öz gezeginde ýönekeý meselelerden başlap, gitdigiçe çylşyrymlyrak meseleleri çözmek arkaly gazanylýar. Şonuň ýaly-da, meseleleri çözmegiň dürli hili usullary hem bar bolup, olary diňe köp meseleler çözmek arkaly özleşdirmek mümkin. Her bir usul belli bir topara degişli meseleleri çözmek üçin ulanylýar. Näçe köp usullar özleşdirilse, şonça mesele çözmek endigi şekillenýär.

Aşakda geometrik meseleleri çözmegiň käbir möhüm usullarynyň üstünde durup geçýäris.

Mesele çözmegiň usullary gurluşyna görä, sintetik, analitik, tersini çak etmek we başga görnüşlere bölünýär. Matematiki apparatyň ulanylyşyna görä bolsa, algebraik, wektorly, koordinataly, meýdanlar usuly, meňzeşlik usuly, geometrik çalşyrmalar ýaly görnüşlere bölünýär.

Sintetik usul mazmun taʼdan meselaniʼn ŧertinde berlenlerden peʼdalanyp, pikir yʼoretmek arkaly mantyky pikirler zynjyryny emele getiriyar. Pikir yʼoretmeler zynjyry in ahyrky boʻlegi meselaniʼn talaby bilen ustme-ust duʼshyanche dowam etdirilyar.

1-nji mysal. Gonuburclugyn burcunyn bissektisasy onun tarapyny 7 we 9 uzynlykdaky kesimlere bolyar (1-nji surat). Gonuburclugyn perimetrini tapyň.



Çözülüŧi. Aydaly $ABCD$ – gonuburcluk, AK bissektisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bolsun.

1. $BC \parallel AD$ we AK kesiji bolany ucin: $\angle 1 = \angle 2$. (1)

bolyar, chunki bu burclar icki atanak burclardyr.

2. AK – bissektisa: $\angle 2 = \angle 3$. (2)

3. Onda (1) we (2)-a gorä $\angle 1 = \angle 3$.

4. Onda ABK deňyanly ucburcluk we $AB = BK$. (3)

5. Bu netijeden peʼdalanyp, hasaplamalary amala aŧyryarys: $AB = BK = 7$ sm.

$P = 2(AB + BC) = 2(7 + 16) = 46$ (sm). $\square$

Bu mesele daʼyanç meseleler hataryna giryar, chunki ençeme meseleler edil ŧu taglymyň toʻwereginde gurulyar. Parallelogramyň we trapesiyanyn burcunyn bissektisasy bu ŧekillerin tekizliginden deňyanly ucburclugy kesip alyar. ŧeyle daʼyanç faktlary hemiŧe yatda saklamaly. Olar baŧga meseleleri coʻzende-de uly koʻmek edyar.

Analitik usul mazmun taʼdan teoremayn (meselaniʼn) netije boʻleginden gelip cykyp, oʻnunden malim tassyklamalardan peʼdalanyp, pikir yʼoretmek arkaly mantyky pikirler zynjyry emele getirilyar. Pikir yʼoretmeler zynjyryny in ahyrky boʻlegi meselaniʼn ŧertini netijesi bolandygyny anyklanyanca dowam etdirilyar.

2-nji mysal. Islendik doʻrtburclugyn taraplaryny ortalary parallelogramy depeleri bolandygyny subut edin.

Subut. Aydaly $ABCD$ – doʻrtburcluk (2-nji surat), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsun.

Doʻrtburclugyn AC we BD diagonallaryny ge-
chiryaris.

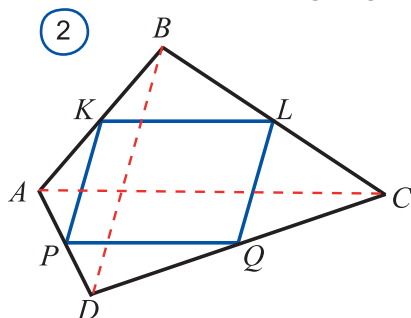
1. $\triangle ABC$ -da KL orta cyzyk: $KL \parallel AC$ (1);

2. $\triangle ADC$ -da PQ orta cyzyk: $AC \parallel PQ$ (2);

3. (1) we (2) dan: $KL \parallel PQ$ (3);

4. Yokardaka menzeŧ: $KP \parallel LQ$ (4);

5. (3) we (4) dan: $KLQP$ – parallelogram. $\square$



Yokarda garalan sintetik we analitik usullar **göni usullar** diýip hem atlandyrylýar. Meseläni göni usullar bilen çözendä, ilki bilen meseläniň mazmuny analiz edilýär. Analiz netijesine görä usuly saýlanýar. Şondan soň surat görnüşinde meseläni çözmek modeli (çyzgysy) düzülýär we çyzgynyň üstünde pikir ýöredilýär. Şeýdip pikir ýöretmeler ýöredilip, meseläniň şertinden onuň netije bölegine garap barylýar.

Mesele çözmegiň ters usuly hem bar. Oňa köp gezek duş gelendiris. Ol "**tersini çak edip subut etmek usuly**" diýlip atlandyrylýar. Bu usuly ulanmak algoritmini getirýäris.

Tersini çak edip subut etmek usulyny ulanmagyň algoritmi

Teorema (göni tassyklama)	Eger A ýerlikli bolsa, B ýerlikli bolýar. (A we B – nähilidir pikirler)
Subudy:	
Tersini çak edýäris:	Teoremada getirilen tassyklamanyň tersini çak edýäris, ýagny teoremanyň şerti ýerine ýetirilse-de, yöne netijesi ýerlikli bolmasyn: Eger A ýerlikli bolsa, B ýerlikli bolmaýar.
Pikir ýöredýäris:	Dogrudygy öň subut edilen teorema ýa-da kabul edilen aksiomalara daýanyp mantyky pikir ýöredýäris.
Gapma garşylyga gelyäris:	Dogrudygy öň subut edilen teorema ýa-da kabul edilen aksiomalaryň birine ters bolan tassyklama duşýarys.
Netije çykarýarys:	Diýmek, çakymyz nädogry, ýagny berlen teorema göni eken.
Teorema subut edildi	

3-nji mysal. Eger iki göni çyzygyň her biri üçünji göni çyzyga parallel bolsa, olar özara parallel bolýar.

Aýdaly, a we b göni çyzyklar berlen bolup, olaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsun. Teoremany tersini çak etmek usuly bilen subut edýäris.

Subut. Tersini çak edýäris: a we b göni çyzyklaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsun, emma olar özara parallel bolmasyn, ýagny haýsy-da bolsa bir A nokatda kesişsin (3- surata garaň). Onda A nokatdan c göni çyzyga iki a we b parallel göni çyzyklar geçýär. Bu parallellik aksiomasyna ters. Gapma-garşylyk çakymyzyň nädogry bolýandygyny görkezýär. Ýagny a we b göni çyzyklaryň her biri üçünji c göni çyzyga parallel bolsa, olar özara parallel bolýar. □



Bu usul aşakdaky mantyk kanunyna esaslanandyr: bir-birine ters iki tassyklamanyň diňe biri çyn, ikinjisi bolsa ýalan bolýar, üçünji ýagdaýyň bolmagy mümkin däl.

Indi geometrik meseleleri çözmegiň başga usullaryna durup geçýäris.

Algebraik usul

Geometrik meseläni algebraik usul bilen çözen mahalyňyzda aşakdaky algoritmi esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

- 1) meseläniň mazmunyny derňemek we onuň çyzgy modelini gurmak;
- 2) näbellini harplar bilen belgilemek;
- 3) meseläniň şertini aňladýan deňleme ýa-da deňlemeler ulgamyny düzmek;

4) düzülen deňleme ýa-da deňlemeler ulgamyny çözmek;

5) tapylan çözüwi derňemek;

6) jogabyňy ýazmak.

4-nji mysal. Gönüburçly üçburçlugyň perimetri 36 sm-e deň. Gipotenuzanyň katete gatnaşygy 5:3. Üçburçlugyň taraplaryny tapyň.

Aýdaly, $\triangle ABC$ berlen bolup, onda $\angle C = 90^\circ$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bolsun.

Çözmek. Proporsionallyk koeffisiýentini k bilen belgileýäris.

Onda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagoryň teoremasyna görä: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ýa-da $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Mundan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Şerte görä: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Jogaby: 15 sm, 9 sm, 12 sm. $\square$

Meýdanlar usuly

Käbir geometrik meseleleri çözende meýdanlary hasaplamagyň formulalaryndan peýdalanmak garaşylan netijäni çalt berýär. Bu ýagdaýda tapmak talap edilen näbelli meseledäki kömekçi şekilleriň meýdanlaryny deňleşdirmek netijesinde alnan deňlemeden tapylyar. Muny aşakdaky mysalda görkezýäris.

5-nji mysal. Üçburçlugyň taraplary 13 sm, 14 sm we 15 sm. Uzynlygy 14-e deň tarapa geçirilen beýikligi tapyň.

Aýdaly, $\triangle ABC$ berlen bolup, onda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bolsun.

Çözmek. $a < b$ we $b < c$, h_c – beýiklik bolsun.

Geron formulasyna görä: $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (sm²).

Başga formula bo'yunça: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $\frac{1}{2} b \cdot h_b = 84$, $h_b = 12$ (sm).

Jogaby: 12 sm. $\square$

Wektorlar usuly

Geometrik meselani wektorlar usuly bilen çözmek üçin aşakdaky algoritim esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

1) meselani wektorlar diline öwürmek, ýagny meseledäki käbir ululyklary wektor hökmünde garap, olara degişli wektorly deňlemeler düzmek;

2) wektorlaryň mälüm häsiýetlerinden peýdalanyň, wektorly deňlemeleriň şekilini çalşyrmak we näbellini tapmak;

3) wektorlar dilinden geometriýa diline dolanmak;

4) jogabyny ýazmak.

Wektor usuly bilen aşakdaky geometrik meseleleri çözmek maksada laýyk bolýar:

- a) göni çyzyklaryň (kesimleriniň) parallelligini kesgitlemek;
- b) kesimleri berlen gatnaşykda bölmek;
- c) üç nokadyň bir göni çyzykda ýatýandygyny görkezmek;
- d) dörtburçlugyň parallelogram (romb, trapesiýa, kwadrat, gönüburçluk) bolýandygyny görkezmek.

6-njy mysal. Güberçek dörtburçlugyň taraplarynyň ortalary parallelogramyň depeleri bolýandygyny subut ediň.

Aýdaly, $ABCD$ dörtburçluk berlen bolup, onda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsun (4-nji surat).

Subut. 1. Berlen kesimleri laýyklykda $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ wektorlar bilen çalşyryp, meselani wektor diline geçirýäris;

2. Wektorlary goşmagyň üçburçluk düzgüninden peýdalanýarys:

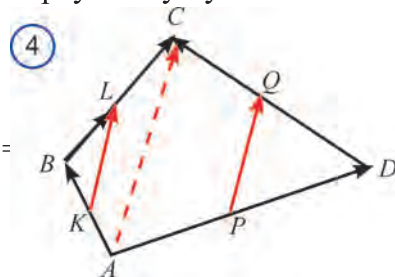
$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL};$$

$$\overline{KB} = \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ we } \overline{BL} = \frac{1}{2} \overline{BC} \text{ -den}$$

$$\text{peýdalanyň, } \overline{KL} = \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ -ni tapýarys.}$$

Şoňa meňzeş, $\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ bolýar.

3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, ýagny bu wektorlar birmeňzeş ýönelen we uzynlyklary deň. Bu $KLQP$ dörtburçlugyň parallelogram bolýandygyny aňladýar. $\square$



Koordinatalar usuly

Geometrik meselani koordinatalar usuly bilen çözen mahalyňyzda aşakdaky algoritim esasynda çemeleşmek maksada laýyk bolýar:

- 1) meseläniň mazmunyny derňemek we ony koordinatalar diline öwürmek;
- 2) aňlatmalaryň şekilini çalşyrmak we bahasyny hasaplamak;
- 3) netijäni geometriýa diline öwürmek;
- 4) jogabyny ýazmak.

Koordinatalar usuly bilen aşakdaky geometrik meseleleri çözmek maksada laýyk bolýar: a) nokatlaryň geometrik ýerleşişini tapmak; b) geometrik şekilleriň çyzykly elementleriniň arasyndaky baglanyşyklary subut etmek.

Meseläni koordinatalar usuly bilen çözen mahalyňyzda, koordinatalar başlangyjyny dogry saýlamak möhümdir. Berlen şekili koordinatalar tekizligine şeýle ýerleşdirmeli, ýagny mümkingadar nokatlaryň koordinatalary nola deň bolmaly.

7-nji mysal. Diagonallary deň parallelogramyň gönüburçluk bolýandygyny subut ediň.

Subut. Koordinatalar ulgamyny şeýle saýlaýarys, ýagny parallelogramyň depeleri aşakdaky koordinatalara eýe bolsun (5-nji surata garaň):

$A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a+b; c)$, $D(a; 0)$,
bu ýerde $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.

A , B , C , D nokatlaryň arasyndaky aralyklary olaryň koordinatalary arkaly aňladýarys:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}, \quad BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}.$$

$$\text{Onda } \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

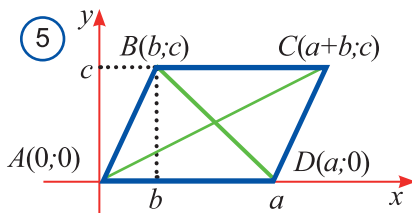
$$\text{ýa-da } (a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2. \quad \text{Mundan, } 4ab = 0.$$

Ýöne $a > 0$, onda $b = 0$. Bu bolsa, öz gezeginde, $B(b; c)$ nokat Oy okunda ýatýandygyny aňladýar. Şonuň üçin BAD göni burç bolýar.

Mundan $ABCD$ parallelogramyň gönüburçludygy gelip çykýar. $\square$

Geometrik çalşyрма usuly

Geometrik çalşyrmalar usulyna öwürmek, simmetrik şöhlelendirmeler, parallel orun üýtgetme we gomotetiýa ýaly çalşyrmalara esaslanan usullar girýär. Geometrik çalşyrmalaryň kömeginde meseleleri çözmek prosesinde berlen geometrik şekiller bilen bir hatarda täze, ulanylan geometrik çalşyrmanyň kömeginde alnan şekiller hem garalýar. Täze şekilleriň häsiýetleri anyklanylýar



we berlen şekile geçirilýär. Şondan soň meseläni çözmek ýoly tapylýar. Ýokarda getirilen ähli usullar bir umumy at bilen geometrik usullar diýlip atlandyrylýar.

Möhüm ýatlatma!

Bu bölümden orun alan materiallar planimetriýany gaýtalamak üçin getirilendir. Gaýtalamak üçin meseleler gereginden artyk getirilen. Olaryň ählisini synpda görmegiň mümkinçiligi bolmazlygy mümkin. Şuňa seretmezden, olary özbaşdak çözüp çykmagy maslahat berýäris. Bu size 10-njy synpda geometriýany öwrenmegi üstünlikli dowam etdirmegiňize esas döredýär.



Tema degişli soraglar

1. Matematik mesele diýende nämäni düşüňýärsiňiz?
2. Geometrik meseläniň nähili görnüşlerini bilýärsiňiz?
3. Mesele çözmegiň nähili usullaryny bilýärsiňiz?
4. Geometrik meseläni çözmegiň sintetik, analitik usullary barada aýdyp beriň.
5. Mesele çözmegiň göni we ters usullary barada näme bilýärsiňiz?
6. Tersinden çak edip subut etmek usulynyň mazmuny nämede?
7. Geometrik meseläni algebraik usulda çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.
8. Geometrik meseläni wektor usulynda çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.
9. Wektor usuly bilen adatda nähili meseleler çözülýär?
10. Geometrik meseläni koordinatalar usuly bilen çözmegiň algoritmini düşündirip beriň.
11. Koordinatalar usuly bilen adatda nähili meseleler çözülýär?
12. Geometrik çalşyrmalar usulyny düşündirip beriň.



3 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

1.1. Iki göni çyzygyň kesişmeginden dörtburçluk emele geldi (1-nji surat).

Aşakda getirilen jedwelde her bir şert ($A - E$) ga ondan kelib çykýan netije (1 – 5) -ni laýyklyk goýuň:

- | | |
|--|--|
| A) $\angle 1 = \angle 3$; | 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$; |
| B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$; | 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$; |
| C) $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$; | 3) $\angle 1$ we $\angle 4$ – goňşy; |
| D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$; | 4) $\angle 1$ we $\angle 3$ – ýiti; |
| E) $\angle 3 = 90^\circ$. | 5) $\angle 2$ we $\angle 4$ – wertikal. |

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Aşakda käbir burçlaryň gradus ölçegleri (1–7) berlen. Olardan haýsy jübütleriniň goňşy bolmagy mümkinligini anyklaň.

1) 18° ; | 2) 72° ; | 3) 128° ; | 4) 62° ; | 5) 28° ; | 6) 108° ; | 7) 38° .

A) 1 we 2; | B) 2 we 6; | C) 3 we 4; | D) 1 we 7; | E) 2 we 5.

1.3. Eger 2-nji suratda $\angle 1 = \angle 7$ bolsa, dogry tassyklamany tapyň.

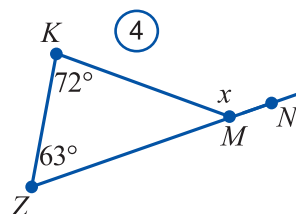
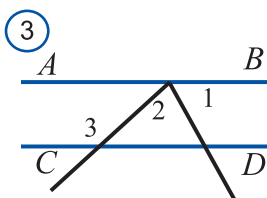
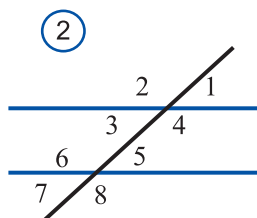
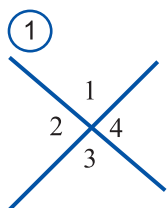
A) $a \parallel b$; | B) $a \perp b$; | C) a we b kesişmeýär;

1.4. Eger 3-nji suratda $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ we $\angle 2 = 72^\circ$ bolsa, $\angle 3 = ?$

A) 72° ; | B) 144° ; | C) 108° ; | D) 36° ; | E) 124° .

1.5. Eger deňýanly üçburçlugyň burçlary $3 : 4 : 3$ gatnaşykda bolsa, onuň depesiniň bissektrisasi bilen gapdal tarapyň arasyndaky burçy tapyň.

A) 18° ; | B) 36° ; | C) 72° ; | D) 60° ; | E) 30° .



1.6. 4-nji suratda görkezilen KMZ üçburçlugyň burçuna daşky bolan KMN burçuň gradus ölçegini tapyň.

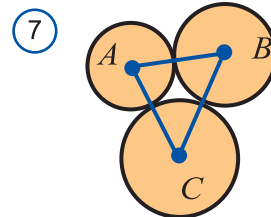
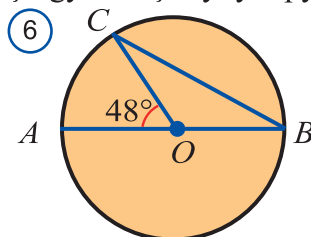
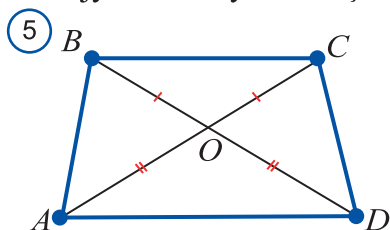
A) 135° ; | B) 108° ; | C) 45° ; | D) 125° ; | E) 117° .

1.7. Dogry deňlikleri anyklaň (5-nji surat).

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; | B) $BA = CD$; | C) $\triangle ABO = \triangle COD$;

D) $\angle AOB = \angle DOC$; | E) $\angle BAO = \angle DCO$; | F) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-njy suratdaky BOC üçburçlugyň burçlaryny tapyň.



A) $48^\circ, 48^\circ, 84^\circ$;

| B) $24^\circ, 132^\circ, 24^\circ$;

| C) $132^\circ, 48^\circ, 48^\circ$;

E) $42^\circ, 90^\circ, 48^\circ$;

| D) $48^\circ, 32^\circ, 20^\circ$.

1.9. Üçburçlugyň depeleriniň radiuslary 6 sm, 7 sm we 8 sm bolan we jübüt-jübüti bilen galtaşýan üç töweregiň merkezlerinde ýatyr (7-nji surat).

Şu üçburçlugyň perimetrini tapyň.

A) 28 sm;

| B) 29 sm;

| C) 27 sm;

| D) 42 sm;

| E) 21 sm.

1.10. Kwadratyň tarapy $20\sqrt{2}$ -ä deň. Bu kwadrata içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.

- A) 20; B) $10\sqrt{2}$; C) 10; D) $5\sqrt{2}$; E) 5.

1.11. Trapesiýanyň bir esasy ikinjisinden 8 sm uzyn, orta çyzygy bolsa 10 sm-e deň. Trapesiýanyň kiçi esasy tapyň.

- A) 2 sm; B) 4 sm; C) 6 sm; D) 8 sm; E) 10 sm.

1.12. Diagonallary 10 m we 36 m bolan rombuň meýdanyny tapyň.

- A) 90 m^2 ; B) 92 m^2 ; C) 180 m^2 ; D) 184 m^2 ; E) 36 m^2 .

1.13. 8-nji suratdaky m we n göni çyzyklar özara parallel bolsa, a we b göni çyzyklaryň arasyndaky burçy tapyň.

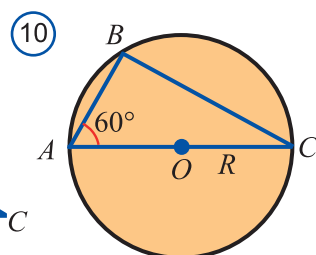
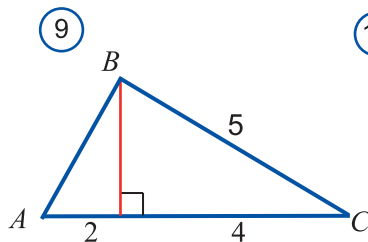
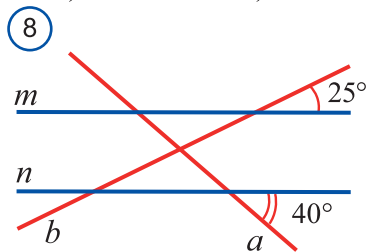
- A) 50° ; B) 80° ; C) 100° ; D) 65° ; E) 115° .

1.14. 9-njy suratdaky üçburçlugyň meýdanyny tapyň.

- A) 6; B) 9; C) 12; D) 24; E) 30.

1.15. 10-njy suratdaky R radiusly töweregiň içinden çyzylan ABC üçburçlugyň BC tarapyny tapyň.

- A) R ; B) $R\sqrt{2}/2$; C) $R\sqrt{2}$; D) $R\sqrt{3}$; E) $R\sqrt{3}/2$.



1.16. Meýdany $9\pi \text{ sm}^2$ bolan tegelegi gurşaýan töweregiň uzynlygyny tapyň.

- A) $3\pi \text{ sm}$; B) $9\pi \text{ sm}$; C) $12\pi \text{ sm}$; D) $18\pi \text{ sm}$; E) $6\pi \text{ sm}$.

1.17. Tarapy 6 sm-e deň bolan kwadrata içinden çyzylan tegelegiň meýdanyny tapyň.

- A) $9\pi \text{ sm}^2$; B) $144\pi \text{ sm}^2$; C) $36\pi \text{ sm}^2$; D) $72\pi \text{ sm}^2$; E) $18\pi \text{ sm}^2$.

1.18. Kwadrata içinden çyzylan töweregiň radiusy 5 sm. Kwadratyň diagonalyny tapyň.

- A) $5\sqrt{2}/2$; B) $5\sqrt{2}$; C) $5\sqrt{2}/4$; D) $10\sqrt{2}$; E) $20\sqrt{3}$.

1.19. Içki burçlarynyň jemi 1600° bolan dogry köpburçlugyň taraplarynyň sanyny tapyň.

- A) 12; B) 14; C) 16; D) 18; E) 20.

1.20. Diagonallary 24 sm we 18 sm bolan rombuň perimetrini tapyň.

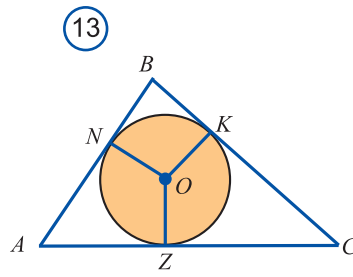
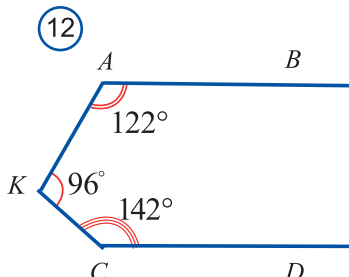
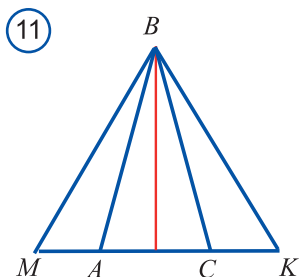
- A) 120 sm; B) 60 sm; C) 84 sm; D) 108 sm; E) 144 sm.

1.21. Parallelogramyň perimetri 48 dm bolup, bir tarapy ikinjisinden 8 dm-e uzyn.

Parallelogramyň kiçi tarapyny tapyň.

A) 8 dm; | B) 16 dm; | C) 6 dm; | D) 12 dm; | E) 10 dm.

- 1.22.** 11-nji suratdaky ABC deňýanly üçburçlugyň daşarsynda iki deň ABM we CBK burçlar guruldy. Bu burçlaryň taraplary AC tarapy, deňişlilikde, M we K nokatlarda kesip geçdi. MBC we KBA üçburçluklaryň deňligini subut ediň.
- 1.23.** 12-nji suratda görkezilen AB we CD göni çyzyklaryň özara ýerleşişini anyklaň. Jogabyňyzy esaslandyryň.
- 1.24.** 13-nji suratdaky ABC üçburçluga töweregiň içinden çyzylan. Töweregiň N we Z galtaşma nokatlary üçburçlugyň AB we AC taraplaryny tapawudyna deňişlilikde 3 sm we 4 sm bolan kesimlere bölýär ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Eger üçburçlugyň perimetri 28 sm bolsa, onuň taraplaryny tapyň.
- 1.25.** Deň taraply üçburçluk radiusy $3\sqrt{3}$ bolan töweregiň daşyndan çyzylan. İçinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.
- 1.26.** Esasyndaky burçy 30° bolan, deňýanly trapesiýa töweregiň daşyndan çyzylan. Trapesiýanyň beýikligi 7 sm-e deň bolsa, onuň orta çyzygyny tapyň.
- 1.27.** Esasyndaky burçy 150° bolan deňýanly trapesiýa töweregiň daşyndan çyzylan. Trapesiýanyň orta çyzygy $16\sqrt{3}$ -e deň bolsa, onuň beýikligini tapyň.
- 1.28.** Esasy 16 sm we bu esasa geçirilen beýikligi 15 sm bolan deňýanly üçburçlugyň gapdal tarapyny tapyň.
- 1.29.** ABC üçburçlugyň AO beýikligi onuň BC tarapyny BO we OC kesimlere bölýär. Eger $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm we $B = 45^\circ$ bolsa, OC kesim uzynlygyny tapyň.
- 1.30.** Rombuň tarapy 10 sm, diagonallaryndan biri 12 sm. Rombuň içinden çyzylan töweregiň radiusyny tapyň.



- 1.31.** Radiusy 15 sm bolan töwerekde onuň merkezinden 12 sm uzaklykda bolan horda geçirilen. Hordanyň uzynlygyny tapyň.

II Bölüm

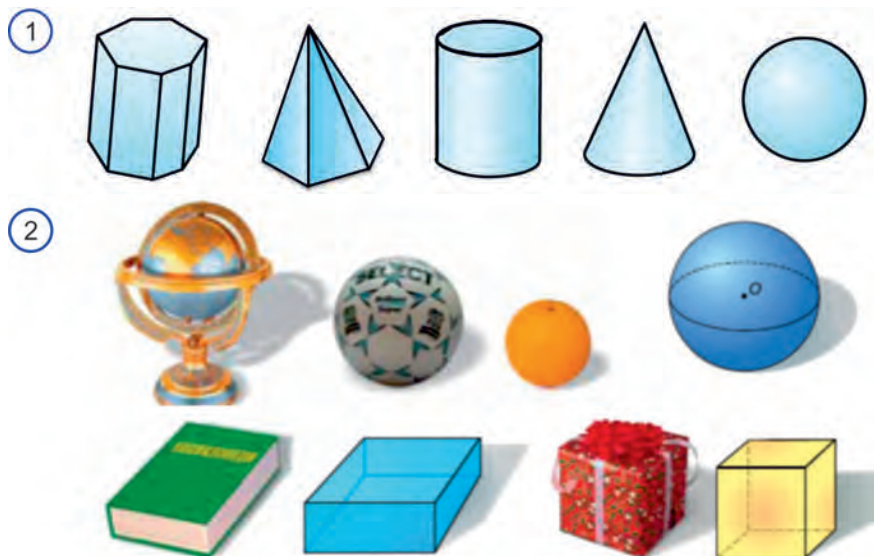


STEREOMETRIYA GIRISH



GIÑIŞLIKDAKI GEOMETRIK ŞEKILLER. KÖPGRANLYKLAR

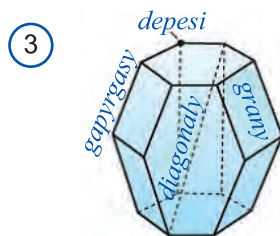
Mälim bolşy ýaly, geometrik şekiller tekizlikde doly ýatýan ýa-da ýatmaýandygyna garap, tekiz we giñişlikdäki şekillere bölünýär. Şu wagta çenli geometriya derslerinde esaslan tekiz geometrik şekilleriň häsiýetlerini öwrendik. 9-njy synpyň ahyrynda bolsa käbir giñişlikdäki şekiller: prizma, piramida, silindr, konus we şaryň (1-nji surat) häsiýetlerini garap çykypdyk. Geometriýanyň planimetriya bölümi tekiz geometrik şekilleri, *stereometriya* bölümi bolsa giñişlikdäki geometrik şekilleriň (ýa-da jisimleriň) häsiýetlerini öwrenýär. Stereometriya sözi grekçeden alnan bolup, "stereos"- giñişlikdäki, "metreo" - ölçeyärin diýen manyny aňladýar.



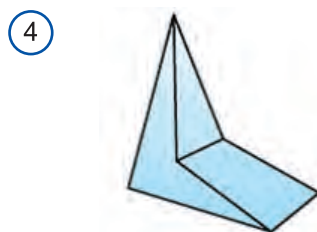
2-nji suratda daş-töwerekdäki käbir zatlar giňişlikdäki jisimleriniň nusgasy hökmünde olar barada düşünje berýär. Daş-töweregimizdäki ähli predmetler üç ölçegli bolup, olaryň şekili haýsydyr giňişlikdäki geometrik jisime meňzäp gidýär.

9-njy synpyň ahyrynda şeýle giňişlikdäki jisimler bilen tanşypdyňyz. Stereo-metriýa kursuny düzümlü ýagdaýda öwrenmäge başlaýarys. Ilki käbir giňişlikdäki jisimleriň elementleri baradaky maglumatlary gysgaça ýatladyp geçýäris.

Köpgranlyk diýip tekiz köpburçluklar bilen çäklenen jisime aýdylýar. Tekiz köpburçluklar bu **köpgranlygyň granlary**, köpburçluklaryň depeleri **köpgranlygyň depeleri**, taraplarynyň gapyrgalaryna bolsa **köpgranlygyň gapyrgalary** diýilýär. Bir grana degişli bolmadyk depeleri birleşdirýän kesim **köpgranlygyň diagonalyny** diýilýär (3-nji surat).

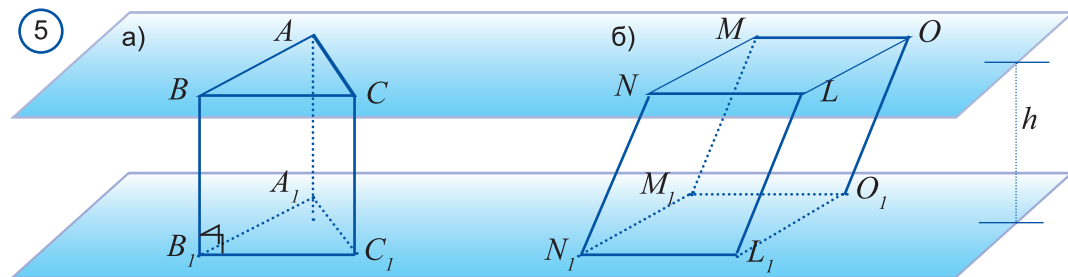


Köpgranlygyň araçäğine onuň **üsti** diýilýär. Üsti giňişligi iki bölege bölýär. Olardan çäksiz bölegine **köpgranlygyň daşky ýaýlasy**, çäkli bölegine bolsa **köpgranlygyň içki ýaýlasy** diýilýär.

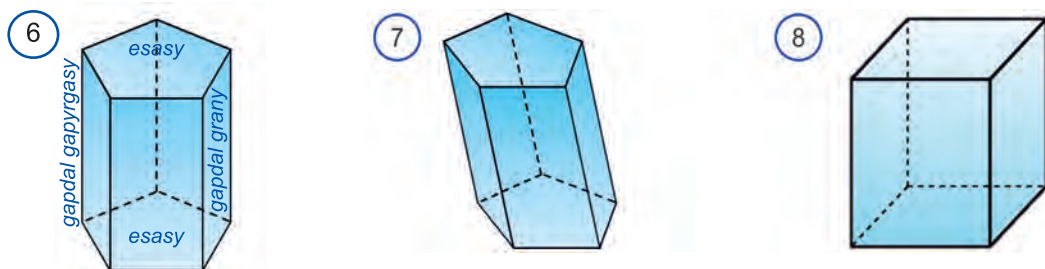


Köpgranlyk islendik grany ýatýan tekizligiň bir tarapynda ýatsa, şeýle köpgranlyga **güberçek köpgranlyk** diýilýär. Meselem, kub - güberçek köpgranlykdyr. 4-nji suratda bolsa güberçek bolmadyk köpgranlyk görkezilen. Indikide güberçek iň ýönekeý köpgranlyklar: prizmalary we piramidalary öwreneris.

Prizma diýip iki grany deň köpburçlukdan, galan granlary bolsa parallelogramlardan ybarat köpgranlyga aýdylýar (5-nji surat). Deň taraplar prizmanyň **esaslary**, parallelogramlara bolsa onuň **gadal granlary** diýilýär (6-njy surat). Esasynyň taraplarynyň sanyna garap olara **üçburçly, dörtburçly we başga n-burçly prizmalar** diýilýär. 5-nji a suratda üçburçly $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5-nji b suratda bolsa dörtburçly $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma şekillendirilen.



Prizma gapdal granlarynyň esasyna perpendikulýar ýa-da perpendikulýar



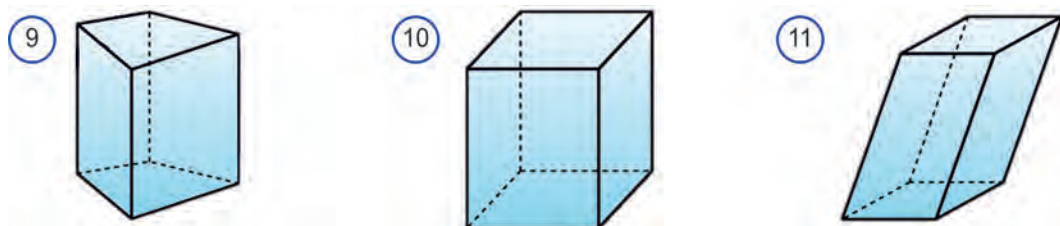
däldigine garap *göni prizma* (6-njy surat) ýa-da *ýapgyt prizma* (7-nji surat) diýilýär.

Esasy dogry köpburçlukdan ybarat prizma *göni prizma* diýilýär (8-nji surat).

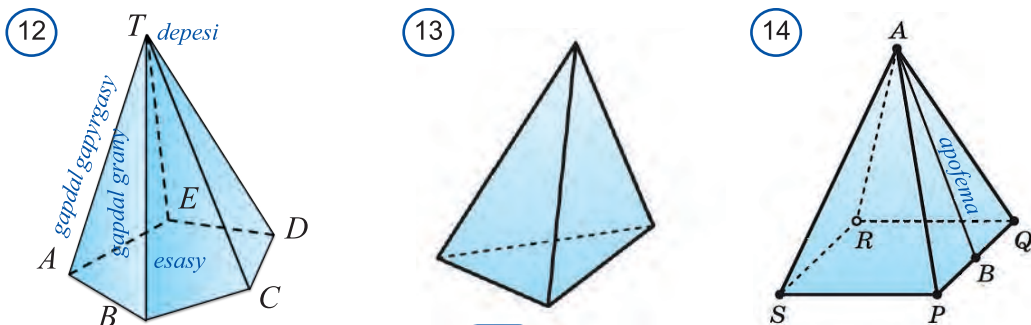
Esasy parallelogramdan ybarat prizma *parallelepiped* diýilýär (9-njy surat). Parallelepipedler hem prizma ýaly göni (10-njy surat) we ýapgyt (11-nji surat) bolmagy mümkin. Esasy gönüburçlukdan ybarat göni parallelepiped *gönüburçly parallelepiped* diýip atlandyrylýar (10-njy surat). Görnüşi ýaly, gönüburçly parallelepipediniň ähli granlary gönüburçluklardan ybarat bolýar.

Gönüburçly parallelepipediniň bir depesinden çykýan üç gapyrgasyne onuň ölçegleri diýip aýdylýar.

Ölçegleri deň bolan gönüburçly parallelepiped *kub* diýlip atlandyrylýar. Görnüşi ýaly kubuň ähli granlary deň kwadratlardan ybarat bolýar.



Piramida diýip bir grany köpburçlukdan, galan granlary bolsa bir depä eýe üçburçluklardan ybarat köpgranlyga aýdylýar. Köpburçluk piramidanyň *esasy*, üçburçluklara bolsa onuň *gapdal granlary* diýilýär. 12-nji suratda *TABCDE* başburçly piramida görkezilen. *ABCDE* başburçluk piramidanyň esasy, *ATB*, *BTC*, *CTD*, *DTE* we *ETA* üçburçluklar - onuň gapdal granlary, *T* - bolsa onuň depesi.



Esasynyň taraplarynyň sanyna garap piramidalara *üçburçly, dörtburçly we başga n-burçly piramidalar* diýlip aýdylýar.

13-nji suratda üçburçly, 14-nji suratda bolsa dörtburçly piramida görkezilen.

Piramidanyň gapdal granlarynyň esasa perpendikulýar ýa-da perpendikulýar dälidigine garap *dogry piramida* ýa-da *ýapgyt piramida* diýip atlandyrylýar.

Dogry piramida diýip esasy göni köpburçluk we depesinden esasyň merkezine geçirilen kesim şu merkezden geçýän we esasyň tekizliginde ýatýan göni çyzyga perpendikulýar bolan piramida aýdylýar.

Dogry piramida gapdal granynyň piramidanyň depesinden geçirilen beýiklige onuň *apofemasy* diýilýär. 14-nji suratda $APQRS$ dörtburçly dogry piramida şekillendirilen. Ondaky AB kesim piramidanyň apofemalaryndan biridir.

Teorema 1.1. *Dogry piramidanyň a) gapdal granlary; b) gapdal gapyrgalary; c) apofemalari özara deň.*

Subut. Aýdaly, $QA_1A_2...A_n$ dogry piramida, O bolsa piramidanyň esasyň merkezi bolsun (15-nji surat).

a) $OA_1, OA_2, ..., OA_n$ kesimler dogry köpburçluga daşyndan çyzylan töweregiň radiusyndan ybarat bolany üçin özara deň bolýar. Gönüburçly $QOA_1, QOA_2, ..., QOA_n$ üçburçluklarda iki katetler özara deň bolany üçin olar deň bolýar. Onda olaryň gipotenuzalary hem deň bolýar: $QA_1 = QA_2 = ... = QA_n$.

b) $QA_1A_2...A_n$ dogry piramidanyň gapdal gapyrgalary özara deň bolany üçin onuň gapdal granlary deňýanly üçburçluklardan ybarat bolýar. Bu üçburçluklaryň esaslary dogry köpburçlugyň tarapy bolany üçin özara deň bolýar.

Diýmek, dogry piramidanyň gapdal granlary üç taraplary boýunça özara deň.

c) dogry piramidanyň gapdal granlary deň bolany üçin, olaryň Q depesinden geçirilen beýiklikleri-de özara deň bolýar.

Diýmek, dogry piramidanyň apofemalary-da özara deň. $\square$

Teorema 1.2. *Dogry piramidanyň gapdal üsti onuň esasyň ýarym perimetrine we apofemasynyň köpeltmek hasylyna deň.*

Subut. Aýdaly, $QA_1A_2...A_n$ dogry piramida bolsun (15-nji surat).

Piramidanyň gapdal üsti onuň gapdal granlarynyň meýdanlarynyň jemine deň.

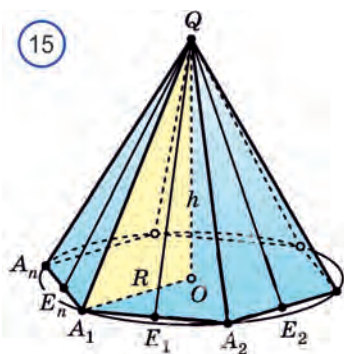
Onuň gapdal granlary bolsa özara deň bolan deňýanly üçburçluklardan ybarat.

Öz gezeginde bu üçburçluklaryň beýiklikleri-de özara deň apofemalardan ybarat:

$$QE_1 = QE_2 = ... = QE_n.$$

Bulardan

$$S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} =$$



$$= \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2 A_3 \cdot QE_2 + \dots + \frac{1}{2} A_n A_1 \cdot QE_n =$$

$$= \frac{1}{2} QE_1 (A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1) = p \cdot a, \text{ bu y\u00e9rde } p - \text{piramidany\u011f esasy\u011fny\u011f}$$

ýarym perimetri, a - piramidany\u011f apofemasy. $\square$



Tema bo\u015fun\u00e7a soraglar

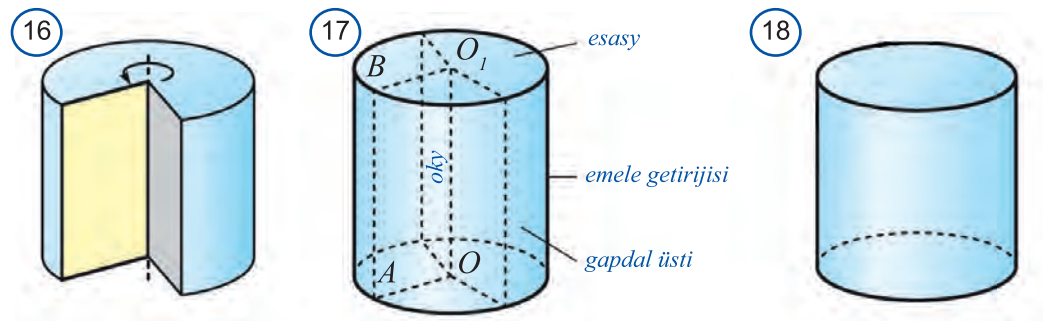
1. N\u00e4hili geometrik \u015fekiller a) tekiz; b) gi\u011f\u015flikd\u00e4ki di\u0131ip atlandyryly\u00e7ar?
2. N\u00e4hili jisime k\u00f6pgranlyk di\u0131ily\u00e7ar? Onu\u011f elementlerine kesgitleme beri\u011f.
3. N\u00e4hili jism prizma di\u0131ip atlandyryly\u00e7ar? Onu\u011f elementlerine kesgitleme beri\u011f.
4. N\u00e4hili prizma g\u00f6rn\u00f6\u015flerini bil\u0131\u00e7arsi\u011fiz?
5. G\u00f6n\u00f6bur\u00e7ly paralelepipedde kesgitleme beri\u011f.
6. N\u00e4hili jisime piramida di\u0131ily\u00e7ar? Onu\u011f elementlerine kesgitleme beri\u011f.
7. Piramidany\u011f n\u00e4hili g\u00f6rn\u00f6\u015flerini bil\u0131\u00e7arsi\u011fiz?
8. Dogry piramidany\u011f h\u00e4siyetlerini a\u0131dy\u011f.



A\u015LANMA JISIMLERI: SILINDR, KONUS WE \u015AR

Gi\u011f\u015flikd\u00e4ki \u015fekilleri\u011f y\u00eane m\u00f6h\u00fcm klaslaryndan biri – bu a\u015lanma jisimleridir. Olara silindr, konus we \u015ar gir\u0131\u00e7ar.

G\u00f6n\u00f6bur\u00e7lugu bir tarapy\u011fny\u011f da\u015fynda a\u015lamakdan alnan jisime *silindr* di\u0131lip a\u0131dyly\u00e7ar (16-18-nji suratlar).



\u015e\u00e4yle a\u015landa g\u00f6n\u00f6bur\u00e7lugu\u011f bir tarapy gozganman gal\u0131\u00e7ar. O\u011fa *silindri\u011f oky* di\u0131y\u00e7aris (17-nji surat).

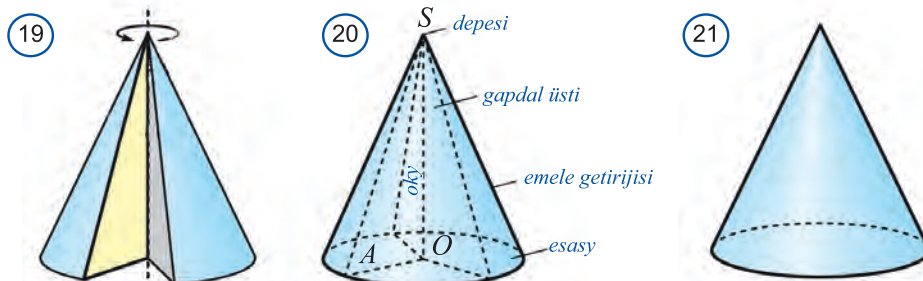
Oka gar\u015fylykly y\u00e7at\u0131\u00e7an tarap a\u015lanmadyndan alnan \u00fcst *silindri\u011f gapdal \u00fcsti* di\u0131ip, tarapy\u011f o\u0131i bolsa *silindri\u011f emele getirijisi* di\u0131ip a\u0131dyly\u00e7ar.

G\u00f6n\u00f6bur\u00e7lugu\u011f galan taraplary\u011fny\u011f her biri bu a\u015lanmada tegelek g\u00f6rn\u00f6\u015find\u00e4ki \u00fcsti emele getir\u0131\u00e7ar. Bu tegelekler *silindri\u011f esaslary* di\u0131ip atlandyryly\u00e7ar.

G\u00f6n\u00f6bur\u00e7ly \u00fc\u00e7bur\u00e7lugu bir katetini\u011f da\u015fynda a\u015lamakdan alnan jisime *konus* di\u0131ip a\u0131dyly\u00e7ar (19-21-nji suratlar). Bu katetine bolsa *konusy\u011f oky* di\u0131y\u00e7aris.

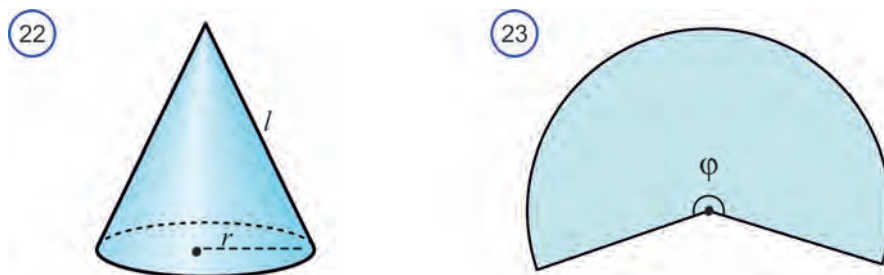
Bu a\u015landa ba\u015fqa katet emele getiren tegelek konusy\u011f *esasy*, gipotenuza emele getiren \u00fcst bolsa *konusy\u011f gapdal \u00fcsti* di\u0131ip, gipotenuzany\u011f o\u0131i bolsa *konusy\u011f*

emele getirijisi diýip aýdylýar. Şonuň ýaly-da, bu aýlanmada gozganmazdan galan üçburçlugyň depesine *konusyň depesi* diýilýär (20-nji surat).



Teorema 1.3. *Konusyň gapdal üsti onuň esasyň meýdanynyň ýarysyna we emele getirijisiniň köpeltmek hasylyna deň.*

Subut. Aýdaly, esasyň radiusy r we emele getirijisi l bolan konus berlen bolsun (22-nji surat). Konus gapdal üstüni tekizlige ýaýarays. Netijede, radiusy l -e deň bolan tegelek sektora eýe bolýarys (23-nji surat).



Bu sektoryň merkezi burçy j -ni tapýarys (surat). Bu merkezi burç, konus esasy töweregiň uzynlygy - $2\pi r$ ga deň bolan sektoryň töweregiň dugasyňa direlen.

Mälim bolşy ýaly, radiusy l bolan töweregiň uzynlygy $2\pi l$ -e deň bolup, ol 360° -ly merkezi burça direlen. Netijede proporsiýa eýe bolýarys:

j° -ly merkezi burç - $2\pi r$ -e deň duga;

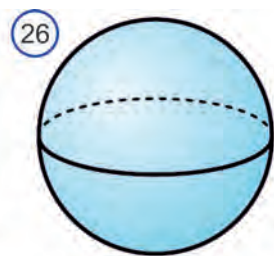
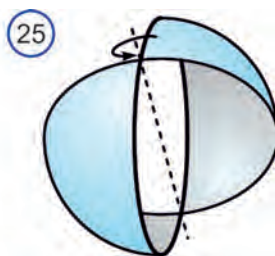
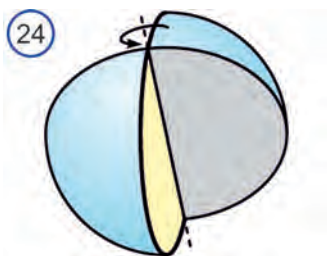
360° -ly merkezi burç - $2\pi l$ -e deň duga.

$$\text{Ondan } \varphi = \frac{360^\circ}{2\pi l} \cdot 2\pi r = \frac{360^\circ \cdot r}{l}.$$

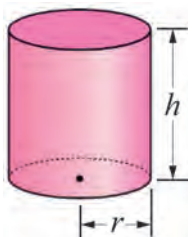
Indi radiusy l -e deň bolan, j burçly S sektoryň meýdanyny tapýarys:

$$S = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \varphi^\circ = \frac{\pi l^2}{360^\circ} \cdot \frac{360^\circ \cdot r}{l} = \pi r \cdot l. \quad \square$$

Tegelegiň öz diametriniň daşynda aýlanmasýndan emele gelen jisime *şar* diýip aýdylýar (24-nji surat). Bu aýlanda töwerek emele getiren üst *sfera* diýlip atlandyrylýar (25-nji surat). 26-njy suratda şar şekillendirilen. Görnüşi ýaly, şaryň üsti sferadan ybarat bolýar.

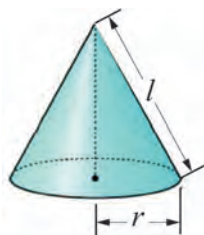


Aylanma jisimlarning gapdal we doly üstüniň meýdanynyň formulalary:



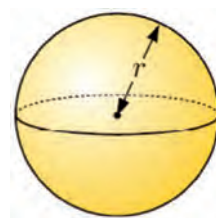
Silindr

$$\begin{aligned} S_{\text{gapd.}} &= 2\pi rh \\ S_{\text{doly}} &= 2S_{\text{esas}} + S_{\text{gapd.}} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{aligned}$$



Konus

$$\begin{aligned} S_{\text{gapd.}} &= \pi rl \\ S_{\text{doly}} &= S_{\text{esas}} + S_{\text{gapd.}} \\ &= \pi r^2 + \pi rl \end{aligned}$$

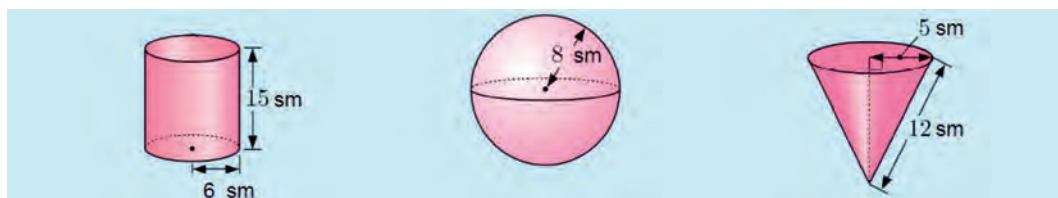


Şar

$$S = 4\pi r^2$$



Mysal. Aşakdaky jisimlarning gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.



$$S_{\text{gapd.}} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 5 = 565,5 \text{ sm}^2$$

$$S = 4\pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = 804,2 \text{ sm}^2$$

$$\begin{aligned} S_{\text{doly}} &= 2\pi rl + \pi r^2 = \\ &= 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 = \\ &= 267 \text{ sm}^2. \end{aligned}$$



Tema boýunça soraglar

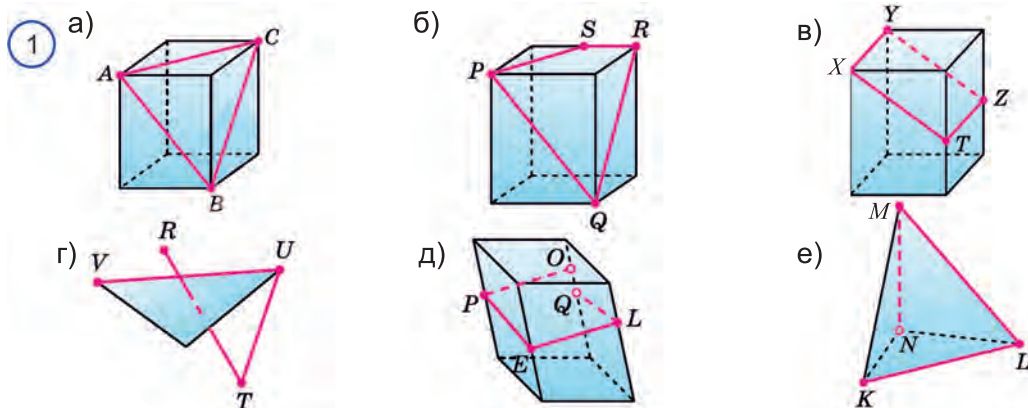
1. Aylanma jisimlere mysal getiriň.
2. Nähili jisim silindr diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
3. Nähili jisim konus diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.
4. Nähili jisim şar diýip atlandyrylýar? Onuň elementlerine kesgitleme beriň.

6 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

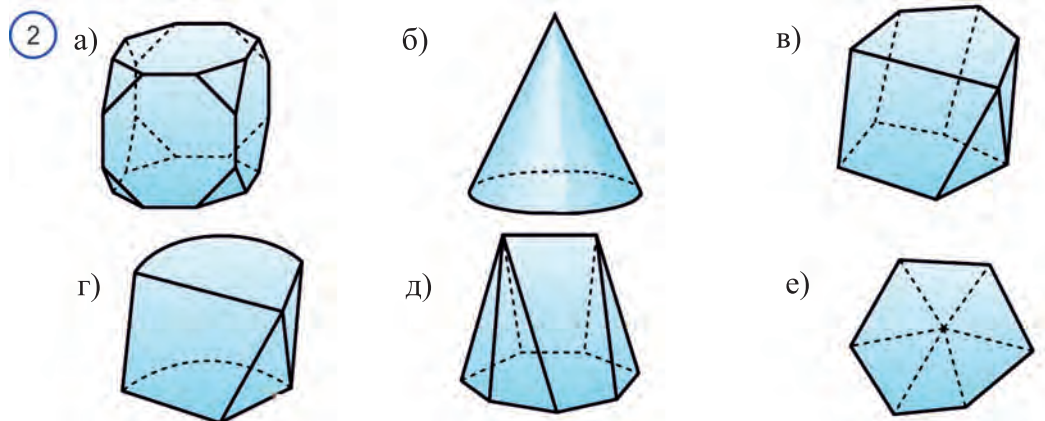
2.1. Dogry prizmanyň gapdal granlarynyň gönüburçlukdygyny subut ediň.

2.2. Dogry prizmanyň gapdal üstüniň esasyň perimetrine we gapdal gapyrgasynyň köpeltmek hasylyna deňdigini subut ediň.

2.3. 1-nji suratda nähili giňişlikdäki döwür çyzyk şekillendirilen?



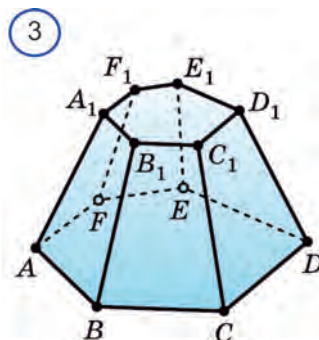
2.4. 2-nji suratdaky jisimlerin haýsylary köpgranlyk bolýar?



2.5. 3-njy suratda $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ köpgranlyk şekillendirilen. Ondaky

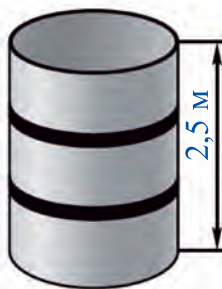
- a) CD gapyrga umumy bolan granlary; b) DD_1 gapyrga umumy bolan granlary; c) E üç umumy bolan granlary; d) C_1 üç umumy bolan granlary; e) A üç umumy bolan gapyrgalary; e) c) F_1 üç umumy bolan gapyrgalary aýdyň.

2.6. Göni parallelepipedniň esasy rombdan ybarat. Rombyň tarapy 8 m, diagonallary bolsa 10 m we 24 m-e deň. Parallelepipedniň doly üstüni tapyň.



- 2.7.** AB we AK göni çyzyklar näçe umumy nokada eýe bolmagy mümkin?
- 2.8.** Dogry üçburçly prizmanyň esasynyň tarapy 6 sm, gapdal gapyrgasy bolsa 11 sm-e deň. Prizmanyň doly üstüni tapyň.
- 2.9.** Dogry n -burçly prizma esasynyň tarapy a , gapdal gapyrgasy h -a deň. Eger
a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d)
 $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bolsa, prizmanyň gapdal üstüni we doly üstüni tapyň.
- 2.10.** Dogry üçburçly piramidanyň apofemasy 15-e, piramidanyň depesini esasyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 12-ä deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we esasynyň tarapyny; b) piramidanyň gapdal üstüni; c) piramidanyň doly üstüni tapyň.
- 2.11.** Dogry dörtburçly piramidanyň esasy 12 sm-e, piramidanyň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 16 sm-e deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we apofemasyny b) piramidanyň gapdal üstüni; c) piramidanyň doly üstüni tapyň.
- 2.12*.** $REFGH$ piramidanyň esasynyň taraplary 10 sm we 18 sm bolan we meýdany 90 sm^2 bolan $EFGH$ parallelogramdan ybarat. Piramidanyň depesi R -i esasyň diagonallarynyň kesişme nokady O bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 6 sm-e deň. a) onuň gapdal gapyrgalaryny; b) gapdal we doly üstüni tapyň.
- 2.13*.** Piramidanyň esasynyň taraplary 8 we 10 bolan we kiçi diagonalý 6-a deň bolan parallelogramdan ybarat. Piramidanyň depesini esasynyň diagonallarynyň kesişme nokady bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 4-e deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgalaryny; b) gapdal üstüni; c) doly üstüni tapyň.
- 2.14*.** Dogry altyburçly piramidanyň esasynyň tarapy 10 sm. Onuň depesini esasynyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy $\sqrt{69}$ -a deň. a) piramidanyň gapdal gapyrgasyny we apofemasyny; b) gapdal we doly üstüni tapyň.
- 2.15.** Dogry altyburçly piramidanyň gapdal üstüniň meýdany 150 m^2 -a, gapdal gapyrgasy bolsa 10 m-e deň. Piramidanyň esasynyň meýdanyny tapyň.
- 2.16.** Silindr gapdal üsti esasynyň töwereginiň uzynlygynyň silindr emele getirijisine köpeltmek hasyllyna deňdigini subut ediň.
- 2.17.** Silindriň esasynyň radiusyna we emele getirijisine görä onuň gapdal üstüni tapyň. a) 7 sm we 12 sm; b) 12 cm we 7 sm; c) 1 m we 12 m.
- 2.18.** Silindriň esasynyň meýdany $300\pi \text{ sm}^2$ -a, emele getirijisi 6 sm bolsa, silindriň esasynyň meýdanyny tapyň.
- 2.19.** Silindriň gapdal üstüniň meýdany $90\pi \text{ sm}^2$, emele getirijisi 5 sm, doly üstüniň meýdanyny tapyň.
- 2.20.** Silindriň esasynyň diametri 1 m, emele getirijisi bolsa esasynyň töwereginiň uzynlygyna deň. Silindriň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.

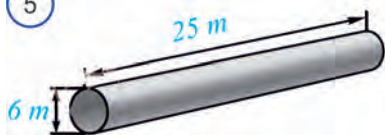
4



2.21. Silindriň emele getirijisi onuň esasyňyň radiusyndan 12 sm-e uzyn. Silindriň doly üstüniň meýdany bolsa 128p sm². Silindriň esasyňyň radiusyny we emele getirijisini tapyň.

2.22. 4-njy suratda görkezilen silindr şeklindäki bakyň iki tarapyňy hem boýamaly. Eger bakyň beýikligi 2,5 m, esasyňyň diametri 1,2 m we boýag gatlagynyň galyňlygy 0,1 mm bolsa, baky boýamak üçin näçe boýag gerek?

5



2.23. Uzynlygy 25 m we diametri 6 m bolan turbany taýýarlarda näçe bölek tünüke gerek bolar? (5-nji surat). Tünüke böleklerini bir-birine kebşirlände goşmaça 2,5% turbanyň gapdal üstüne deň tünüke ulanylýandygyny hasaba alyň.

2.24. Konusyň esasyňyň radiusy 12 mm, konusyň depesini esasyňyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 35 mm-e deň. Onuň gapdal üstüni tapyň.

2.25. Konusyň esasyňyň diametri 32 sm, konusyň depesini esasyňyň merkezi bilen utgaşdyrýan kesimiň uzynlygy 63 sm-e deň. Onuň gapdal üstüni tapyň.

2.26*. Konusyň emele getirijisi l -e deň bolup, ol esasyň tekisligi bilen α burçy düzýär. Eger a) $l = 10$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24$ dm, $\alpha = 45^\circ$;

c) $l = 5$ m, $\alpha = 60^\circ$ bolsa, konusyň esasyňyň meýdanyny tapyň.

2.27*. Konusyň emele getirijisi l -e deň bolup, ol esas radiusy bilen α burçy düzýär. Eger

a) $l = 18$ sm, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20$ dm, $\alpha = 45^\circ$;

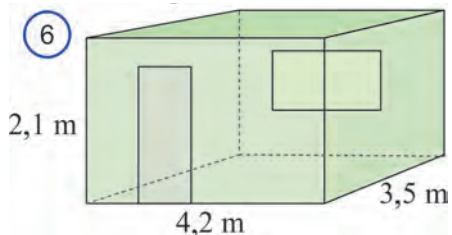
c) $l = 2,4$ m, $\alpha = 60^\circ$ bolsa, konusyň doly üstüni tapyň.

2.28*. Konusyň esasyňyň radiusy we emele getirijisi degişlilikde a) 11 sm we 8 sm; b) 8 mm we 11 mm; c) 3 m we 18 m; d) 2,7 m we 1,2 m-e deň bolsa, konusyň gapdal üstüni tapyň.

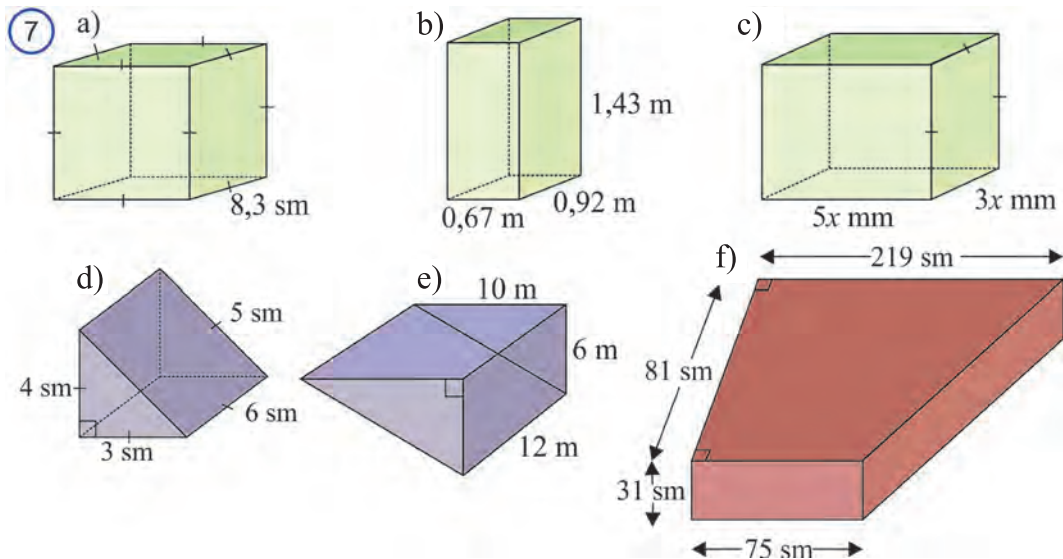
2.29. 6-njy suratda görkezilen otagy abatlamaly. Otagda ölçegleri 0,8 m we 2,2 m bolan gapy we ölçegleri 183 sm we 91 sm bolan äişge bor. Gapynyň iki tarapy-da boýalmaly. Jedwelde iki hili boýagyň bahasy berlen. Bu maglumatlardan peýdalanyň, tygşytly abatlamak üçin näçe serişde gerekdigini hasaplaň.

Boýag görnüşi	Görümi	Boýamaly meýdan	Bahasy
Diwar üçin	4 l	16 m ²	32450 s.
	2 l	8 m ²	20800 s.
Gapy üçin	2 l	10 m ²	23600 s.
	1 l	5 m ²	15400 s.

6

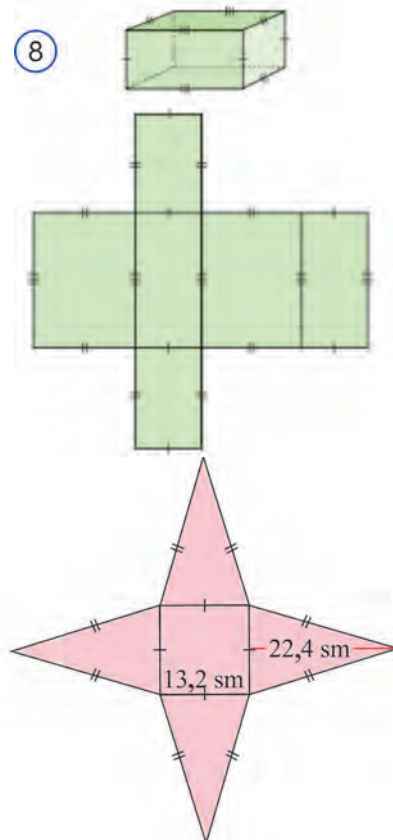
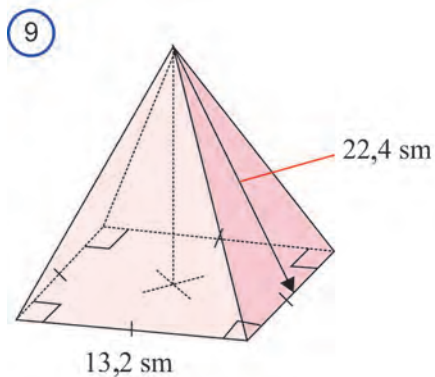


2.30. 7-nji suratda shakllendirilen gönüburçly parallelepipedniň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.

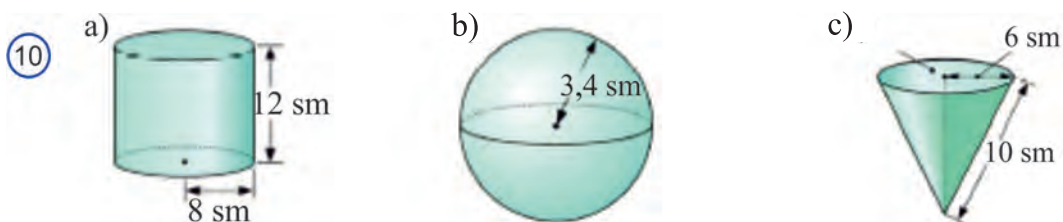


2.31. 8-nji suratda shakllendirilen gönüburçly parallelepipedniň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.

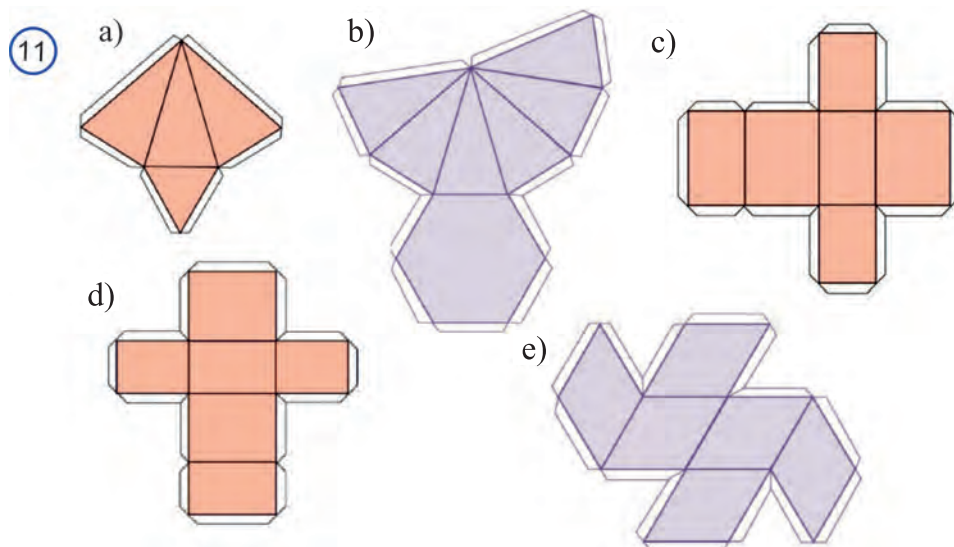
2.32. 9-njy suratda shakllendirilen dörtburçly dogry piramidanyň ýaýylmasyna görä onuň doly üstüniň formulasyny tapyň.



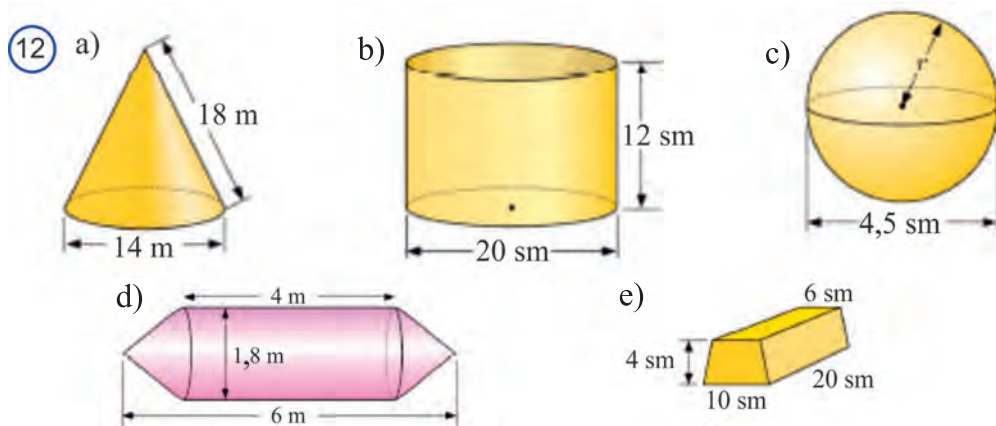
2.33. 10-njy suratda shakllendirilen aylanma jisimlariň doly üstüni tapyň.

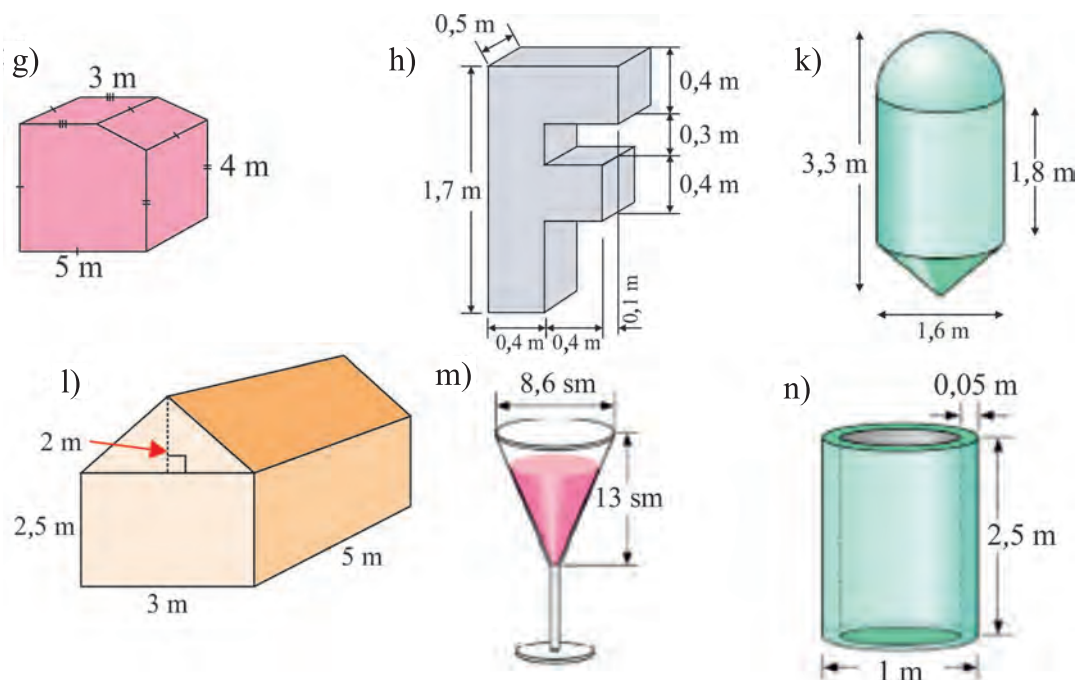


2.34. Giňişlikdäki jisimleri gowy göz önüne getirmek üçin olaryň modelinden peýdalanan makul. Giňişlikdäki jisimleriň modelini olaryň ýaýylmasýndan peýdalanyň gurmak mümkin (11-nji surat). Görşümüz ýaly, giňişlikdäki jisimleriň ýaýylmasy tekiz geometrik şekillerden ybarat. Aşakdaky ýaýylmalardan peýdalanyň, gönüburçly paralelepipedin, kub we piramidalaryň modelini gurun.



2.35. 12-nji suratda shakllendirilen jisimleriň doly üstüni tapyň.





Geometrik tüzinlik

Geçmişde gurlan gadymy arhitektura ýadygärliklerini guranda atabalarymyz uly geometrik bilime we başarnyga eýe bolupdyrlar. Muny ýekeje Samarkant şäherindäki Registan meýdanynda gurlan taryhy ýadygärliklerden hem bilmek mümkin (1-nji surat).



Hywa şäherindäki İçangalanyň suratynda (2-nji surat) nähili geometrik şekilleri görýärsiňiz?

Täç-Mahal - dünýäniň ýedi täsinliginden biri (3-nji surat). Hindistanyň Agra şäherinde Babury Şah-Jahan tarapyndan gurlan gadymy ýadygärlik. Ony guran ussalar geometriýadan kämil bilime eýe bolandyklary mese-mälim.



Sidney şäheriniň opera teatry (4-nji surat) – Awstraliýada gurlan döwrebap binagärçilik nusgasy. Özüniň täsin geometrik görnüşi bilen üns bererlikdir.

Gözel geometrik düşüňjäniň eýesi, yrakly meşhur arhitektör aýal Zaha Hadidiň taslamasy esasynda Hytaýyň paýtagty Pekin şäherinde gurlan “Galaxy Soho” dynç alyş kompleksiniň ajaýyp görnüşinden lezzetlenmän alaç ýok (5-nji surat).



Ýurdumyzyň paýtagtynda gurulýan "Tashkent city" toplumynyň taslamasyny görüp, haýran galaýmaly. Şeýle ajaýyp gözelligleri döretmekde inžener gurluşykçylara näçe-näçe geometrik bilimler gerek bolandygyny göz önüne getirmek mümkin (6-nji surat).



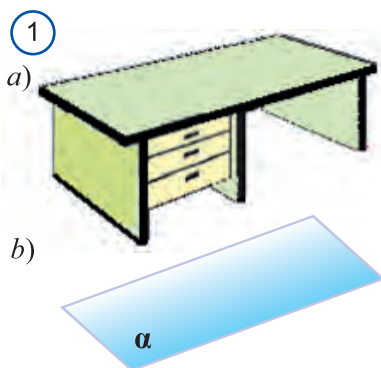
III BÖLÜM



GIÑIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLAR WE TEKIZLIKLER



GIÑIŞLIKDE GÖNI ÇYZYKLAR WE TEKIZLIKLER

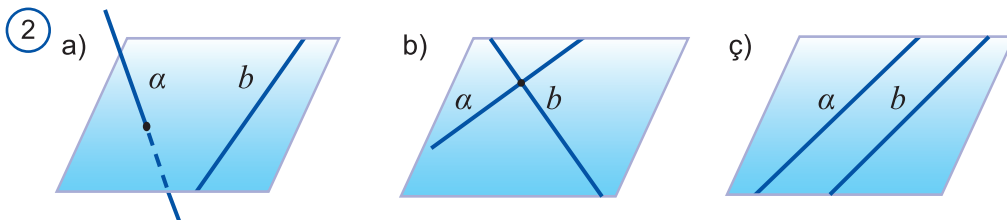


Giñiqlikdäki esasy geometrik şekiller: nokat, göni çzyk we tekizlikdir. Tekizligi stoluñ usti ýaly tekiz üst diýip göz önüne getirýäris (1-nji *a* surat). Tekizlik hem göni çzyk ýaly çäksizdir. Suratda tekizligiñ diñe bir bölegini (adatda parallelogram şeklinde) şekillendirýäris (1-nji *a* surat). Ýöne ony hemme tarapa çäksiz dowam eden diýip göz önüne getirýäris we çyzgyda parallelogram şeklinde şekillendirýäris (1-nji *b* surat). Tekizlikleri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ grek harplary bilen belgileýäris.

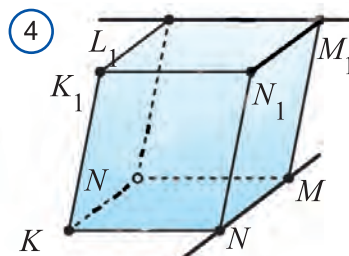
Giñiqlikde iki göni çzyk bir tekizlikde ýatmagy ýa-da ýatmazlygy mümkin (2-nji surat). Giñiqlikde bir tekizlikde ýatmaýan iki göni çzygy *atanaklaýyn göni çzyklar* diýilýär (2-nji *a* surat).

Bir tekizlikde ýatýan we diñe bir umumy nokada eýe bolan göni çzyklar *kesişýän göni çzyklar* diýlip atlandyrylýar (2-nji *b* surat).

Bir tekizlikde ýatýan we özara kesişmeýän göni çzyklar bolsa *parallel göni çzyklar* diýlip atlandyrylýar (2-nji *c* surat).

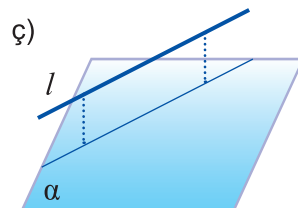
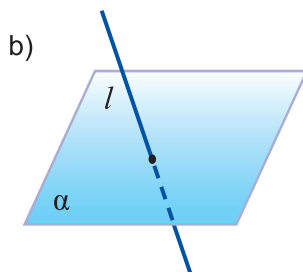
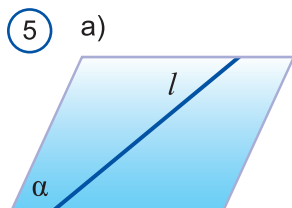


Atanaklaýyn göni çyzyklara biri köprüden, ikinjisi köprüniň astyndan geçýän ýollary mysal hökmünde getirmek mümkin (3-nji surat). Şonuň ýaly-da, 4-nji suratdaky parallelepipedniň MN we L_1M_1 gyraňlary ýatýan göni çyzyklar hem atanaklaýyn bolýar.

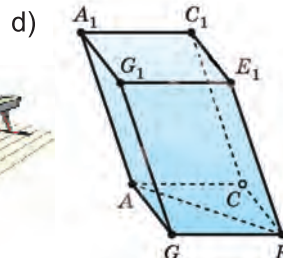
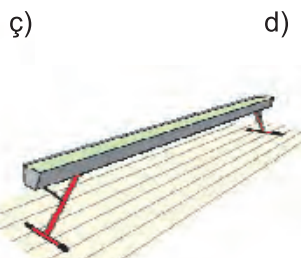
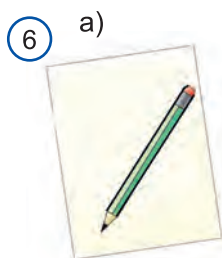


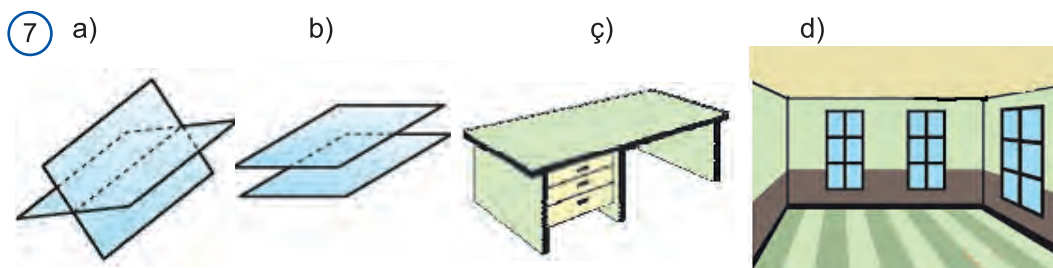
Giňşlikde göni çyzyk we tekizlik özara nähili ýerleşmegi mümkin?

Göni çyzyk tekizlikde ýatmagy (5-nji a surat), ony kesip geçmegi (5-nji b surat) ýa-da kesip geçmezligi, ýagny umumy nokada eýe bolmazlygy (5-nji ç surat) mümkin. Ahyrky ýagdaýda *göni çyzyk tekizlige parallel* diýlip atlandyrylýar.



Stoluň üstünde ýatan galam – tekizlikde ýatýan göni çyzyk barada (6-njy a surat), nyşana sanjylan ok (6-njy b surat) – tekizligi kesip geçýän göni çyzyk barada hem-de polda duran gimnastik agaç – tekizlige parallel göni çyzyk barada (6-njy c surat) düşünje berýär.





Şonuň ýaly-da, 6-njy d suratda görkezilen parallelepipedniň $AGEC$ esasynyň diagonaly AE ýatýan göni çyzyk esas tekizliginde ýatýar, AGA_1G_1 tarap ýatýan tekizligi kesip geçýär hem-de $A_1G_1E_1C_1$ ýokary esas tekizligine parallel bolýar.

Indi giňişlikde tekizlikleriň özara ýerleşişine aýdyňlyk girizeliň.

Giňişlikde tekizlikler haýsy-da bolsa bir göni çyzyk boýunça kesişmegi (7-nji a surat) ýa-da umumy nokada eýe bolmazlygy mümkin (7-nji b surat). Şondan gelip çykyp, bu tekizlikler, deňişlilikde, *kesişýän* ýa-da *parallel* tekizlikler diýlip atlandyrylýar.

7-nji c suratda görkezilen stoluň üstki bölegi we gapdal grany kesişýän tekizlikler barada, otagyň poly we petigi bolsa (7-nji d surat) parallel tekizlikler barada düşünje berýär.

Şonuň ýaly-da, 4-nji suratda görkezilen parallelepipedniň garşylykly bolmadyk gapdal granlary – kesişýän tekizlikler barada, aşaky we üstki esaslary hem-de garşylykly gapyrgalary bolsa parallel tekizlikler barada düşünje berýär.

Parallellik belgisi – “//” diňe bir parallel göni çyzyklary däl, eýsem tekizlige parallel göni çyzygy we parallel tekizlikleri belgilemekde-de ulanylýar:

$$a // b, a // \alpha \text{ we } \alpha // \beta.$$

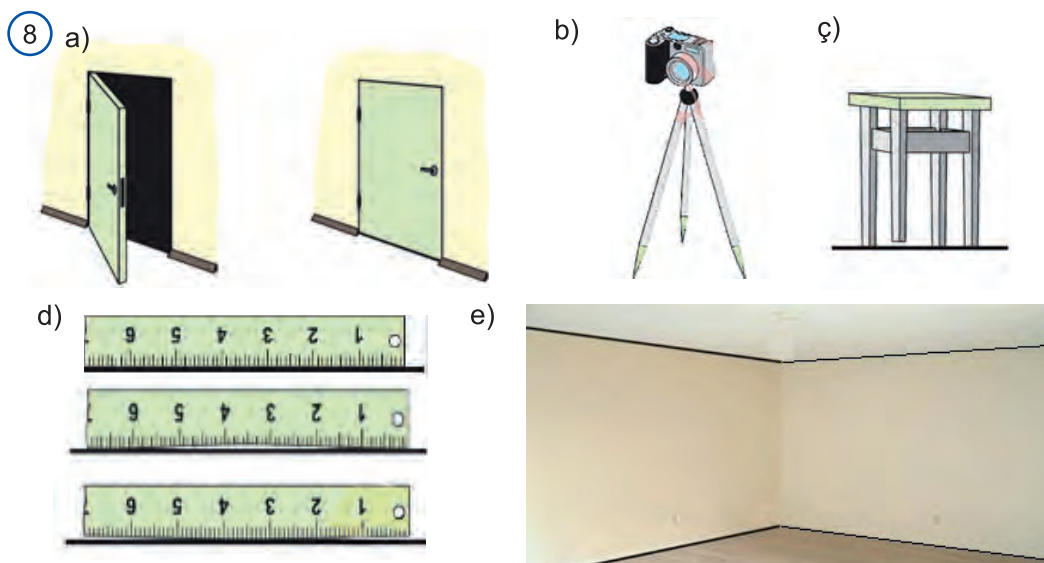
Planimetriýadaky ýaly, stereometriýada hem käbir geometrik şekilleriň häsiýetleri subutsyz kabul edilýär. Giňişlikde tekizlikleriň aşakdaky häsiýetlerini subutsyz, S topar aksiomalary hökmünde kabul edýäris:

S₁ *Eger üç nokat bir göni çyzykda ýatmasa, onda olar arkaly ýeke-täk tekizlik geçirmek mümkin.*

S₂ *Eger göni çyzygyň iki nokady bir tekizlikde ýatsa, onda onuň ähli nokatlary şu tekizlikde ýatýar.*

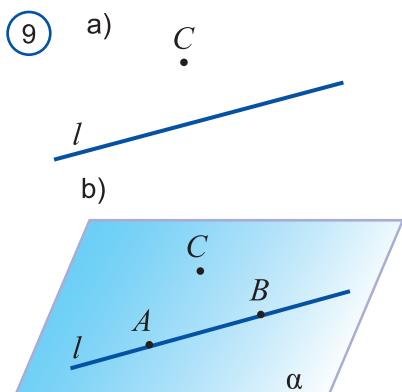
S₃ *Eger iki tekizlik umumy nokada eýe bolsa, onda bu tekizlikler şu nokatdan geçýän umumy göni çyzyga hem eýe bolýar.*

Ugrukdyryjy gönükmä. Aşakdaky 8-nji suratlardaky ýagdaýlary düşündirende haýsy aksiomalara daýanmak mümkin?



Planimetriýada girizilen aksiomalar bilen birlikde bu üç aksiomalar stereometriýanyň esasyny düzýär. Planimetriýada biz garaýan ähli şekiller ýerleşýän bir tekizlige eýedigimizi ýatladyp geçýäris. Stereometriýada bolsa beýle tekizlikler çäksiz köp bolup, olaryň ählisinde planimetriýa aksiomalary we planimetriýada subut edilen ähli häsiýetler ýerlikli bolýar, diýip garalýar. Şonuň ýaly-da, stereometriýa kursunda planimetriýanyň aksiomalaryna stereometriýa nukdaý nazaryndan garamaga dogry gelýär.

2.1-nji teorema *Göni çyzyk we onda ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin.*



Subut. l – berlen göni çyzyk, C bolsa onda ýatmadyk nokat bolsun (9-njy a surat).

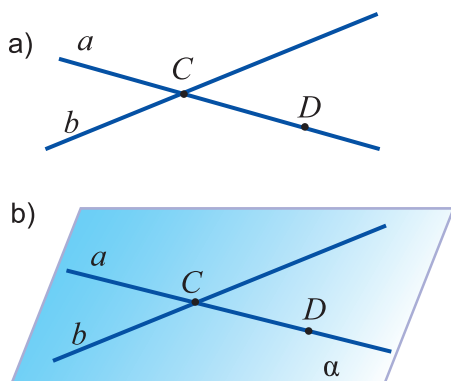
Ilki teoremanyň netije böleginde aýdylan tekizligiň bardygyny görkezýäris. l göni çyzykda A we B nokatlary alarys. Şerte görä, A , B we C nokatlar bir göni çyzykda ýatmaýar. Onda S_1 aksioma görä, A , B we C nokatlar arkaly α tekizligi geçirmek mümkin (9-njy b surat). S_2 aksioma görä bolsa, α tekizlik l göni çyzykdan geçýär.

Diýmek, α – gözlenýän tekizlik eken.

Indi bu tekizligiň ýeke-täkligini görkezýäris.

Tersini çak edýäris: l – berlen göni çyzyk we onda ýatmadyk C nokatdan ýene bir, β tekizlik geçirmek mümkin bolsun. Onda β tekizlik hem A , B we C nokatlardan geçýär. Ýöne, S_2 aksioma görä üç nokatdan diňe bir tekizlik geçirmek mümkin. Gapma-garşylyk. Diýmek, çakymyz nädogry. Göni çyzyk we onda ýatmaýan nokat arkaly bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin. $\square$

10



2.2-nji teorema: Berlen kesişýän iki göni çyzyk arkaly ýeke-täk tekizlik geçirmek mümkin.

Subut. Berlen a we b göni çyzyklar C nokatda kesişsin (10-njy a surat).

a göni çyzykda C nokatdan tapawutly ýene bir D nokady alarys. Onda, subut edilen 1-nji teorema görä, b göni çyzyk we onda ýatmadyk D nokat arkaly ýeke-täk α tekizlik geçýär (10-njy b surat). Bu tekizlik a göni çyzygyň C we D nokatlaryndan geçýär. Onda S_2 aksioma görä, α tekizlik a

göni çyzykdan hem geçýär.

Diýmek, α tekizlik berlen kesişýän iki göni çyzyk arkaly geçýär.

Bu tekizligiň ýeke-täkligini özbaşdak esaslandyryň. $\square$



Tema degişli soraglar

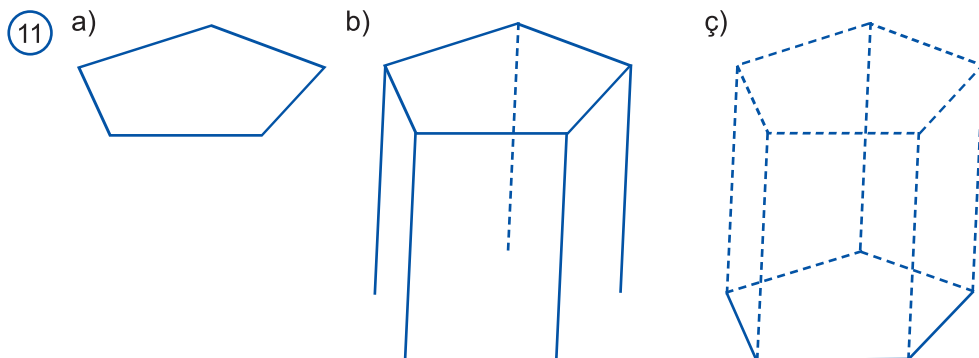
1. Giňişlikdäki esasy geometrik şekilleri aýdyň.
2. S topar aksiomalaryny aýdyň.
3. Tekizlikde ýatýan nähili göni çyzyklar: a) kesişýän; b) parallel diýlip atlandyrylýar?
4. Nähili göni çyzyklar atanaklaýyn diýlip atlandyrylýar? Mysallar getirin.
5. Giňişlikde iki göni çyzyk nähili ýerleşmegi mümkin?
6. Nähili göni çyzyklar: a) tekizlikde ýatýan; b) tekizlige parallel diýlip atlandyrylýar?
7. Giňişlikde göni çyzyk we tekizlik nähili ýerleşmegi mümkin?
8. Giňişlikde nähili tekizlikler: a) kesişýän; b) parallel diýlip atlandyrylýar?
9. Giňişlikde iki tekizlik nähili ýerleşmegi mümkin?
10. Giňişlikde göni çyzyklaryň we tekizlikleriň häsiýetlerini aňladýan aksiomalary aýdyň.
11. Üç nokatdan geçýän tekizligiň häsiýetini aýdyň.

8

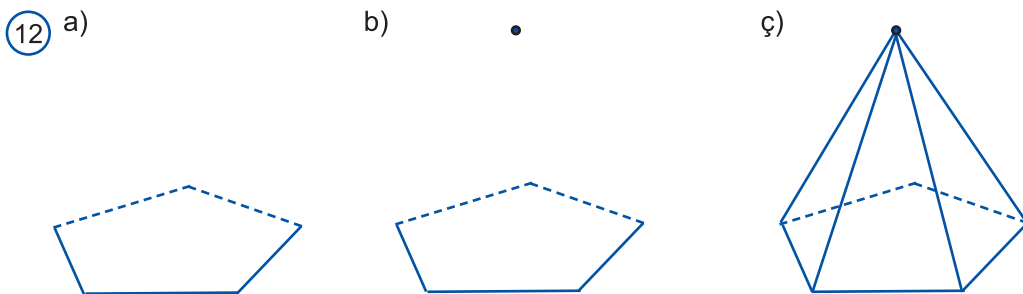
KÖPGRANLYKLAR WE OLARYŇ YÖNEKEÝ KESIMLERINI GURMAK

Geometrik meseleleri çözendä meseläniň şertine laýyk çyzgyny çyzmak örän möhüm hasaplanýar. Käte dogry çyzylan çyzgy – meseläniň "ýarym çözüwi" bilen deňleşdirilýär. Stereometriýada meseläniň çyzgysyny dogry çyzmak iňňän möhüm, örän jogapkärli we käte bolsa çylşyrymly iş hasaplanýar. Çünki stereometrik şekiller üç ölçegli bolup, olary tekizlikde, depderiň sahypasynda şekillendirmek gerek bolýar. Nädogry çyzylan çyzgy nädogry çözüwe ýa-da öňi ýapyk köçä eltýär.

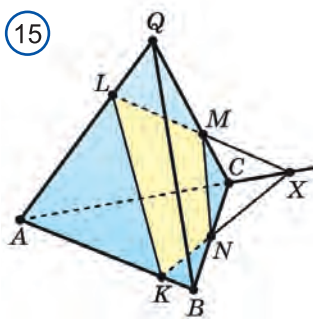
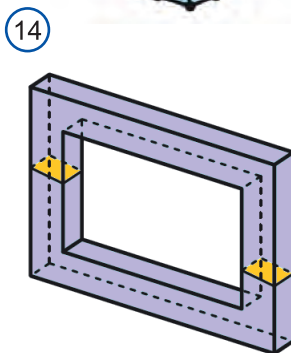
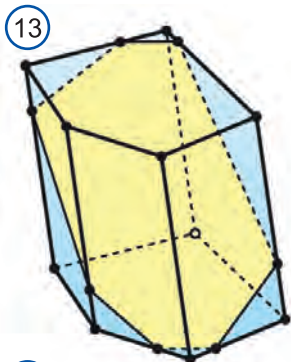
Prizmany şekillendirmek aşakdaky tertipde alnyp barylýar (11-nji surat). Ilki köpburçluk şklindäki esaslaryndan biri çyzylýar. Soňra onuň her bir depesinden özara parallel we deň kesimler, ýagny prizmanyň ýasaýjylary çyzylýar. Kesimiň ahylary deňişlilikde utgaşdyryp çykylýar. Munda ikinji esas peýda bolýar. Çyzgyda prizmanyň görünmeýän gapyrgalary ştrih-punktir çyzyklar bilen çyzylýar.



Piramidany şekillendirmek hem şoňa meňzeş tertipde alnyp barylýar (12-nji surat). Ilki köpburçluk şklindäki esasy çyzylýar. Soňra piramidanyň depesi belgilenip, bu nokat esasyň her bir depesi bilen utgaşdyryp çykylýar. Çyzgyda piramidanyň görünmeýän granlary punktir çyzyklar bilen çyzylýar.



Giňşlikdäki geometrik şekilleriň özara ýerleşişini diňe dogry göz önüne getirilende, onuň çyzgysyny dogry çyzmak mümkin bolýar. Giňşlikdäki şekilleriň biri köpgranlyk, ikinjisi bolsa tekizlik bolanda, dürli kesimleri şekillendirmäge dogry gelýär. Aşakda köpgranlyklaryň kesimlerini gurmak bilen meşgullanarys.



Aýdaly, köpgranlygy haýsy-da bolsa tekizlik kesip geçen bolsun. *Köpgranlygyň kesimi* diýip köpgranlygyň kesiji tekizlige degişli nokatlaryndan ybarat geometrik şekile aýdylýar.

Kesiji tekizlik köpgranlygyň üstüni kesimler boýunça kesip geçýär, köpgranlygyň kesimi bolsa bir ýa-da birnäçe köpburçluklardan ybarat bolýar. 13-nji suratda başburçly prizmanyň ýediburçlukdan ybarat kesimi görkezilen. 14-nji suratdaky ramy tekizlik bilen kesende emele gelen kesimi – iki dörtburçlukdan ybarat.

Köpgranlygyň kesimini şekillendirmek üçin onuň granlary kesiji tekizlik bilen umumy nokatlaryny kesgitlemek ýeterli.



1-nji mesele. $QABC$ üçburçlukly piramidanyň AB , AQ we CQ gapyrgalary, degişlilikde, K , L we M nokatlarda kesip geçýän α tekizlik bilen kesende emele gelen kesimi gurýarys (15 -nji surat).

Gurmak. Kesiji α tekizlik piramidanyň AQB grany bilen iki: K we L umumy nokatlara eýe. Onda kesiji tekizlik bu grany KL kesim boýunça kesip geçýär.

Edil şoňa meňzeş, α tekizlik piramidanyň AQC grany bilen iki: M we L umumy nokatlara eýe bolany üçin, bu grany ML kesim boýunça kesip geçýär.

Kesiji α tekizlik piramidanyň ABC grany bilen bir K umumy nokada eýe. Bu tekizligiň BC gapyrgasy kesip geçýän nokadyny tapýarys.

Bu tekizlige degişli LM we AC göni çyzyklary dowam etdirip, olaryň kesişme nokady X -i tapýarys. X nokat AQC we ABC tekizliklerde hem ýatýar.

Kesiji α tekizlik piramidanyň ABC grany bilen iki: K we X umumy nokatlara eýe. Onda kesiji tekizlik bu grany KX kesim boýunça kesip geçýär.

KX göni çyzyk we BC granyň kesişme nokady N hem α tekizlikde ýatýar.

Diýmek, α tekizlik ABC grany KN kesim boýunça, BQC grany bolsa MN kesim boýunça kesip geçýär.

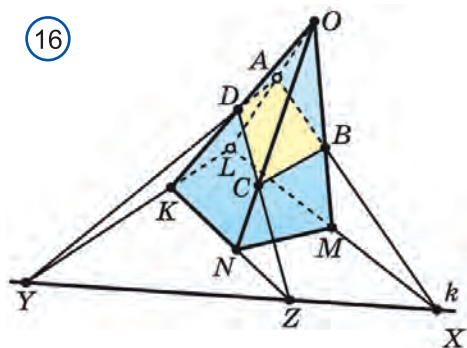
$KLMN$ dörtburçluk α tekizligiň piramida bilen kesiginden ybarat bolýar. KL we KN kesimler α tekizligiň ABQ we ABC granlardaky *yzlary* diýlip atlandyrylýar.

 **2-nji mesele.** $OKLMN$ piramidanyň OL gapyrgasynyň A nokady we piramidanyň $KLMN$ esasynyň tekizliginde ýatýan k göni çyzykdan geçýän b tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi gurýarys (16-njy surat).

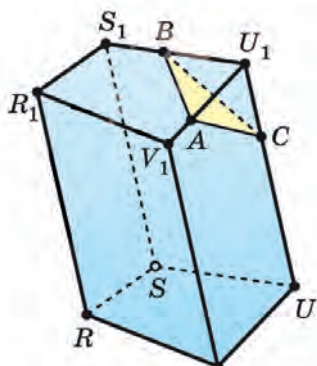
Gurmak. LM we k göni çyzyklar kesişýän nokady tapýarys. Bu nokat k göni çyzykda ýatýanlygy üçin b tekizlige degişli. Şonuň ýaly-da, bu nokat LM göni çyzykda ýatany üçin LOM grana hem degişli. Şonuň üçin, A nokat bu iki tekizligiň ikisine-de degişli. Şonuň üçin, b tekizlik LOM tekizligi AX göni çyzyk boýunça, LOM grany bolsa AB kesim boýunça kesip geçýär. Bu ýerde B nokat AX we OM göni çyzyklaryň kesişme nokady.

Edil şunuň ýaly, β tekizligiň OLK grany kesip geçýän Y we D nokatlary we AD kesigi anyklaýarys. Soňra Z we C nokatlary we DC we BC kesikleri anyklaýarys. Netijede, emele gelen $ABCD$ dörtburçluk gözlenýän kesikden ybarat bolýar.

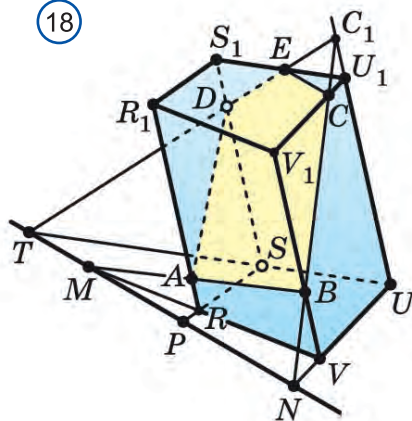
 **3-nji mesele.** A , B we C dörtburçly prizmanyň dürli granlaryndaky nokatlary.



(17)



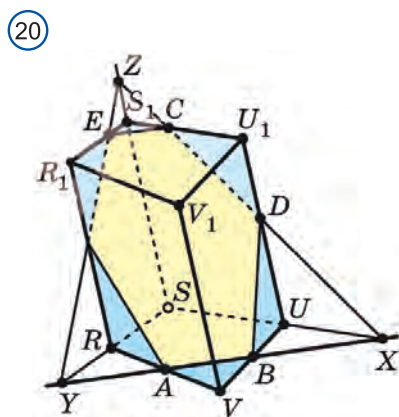
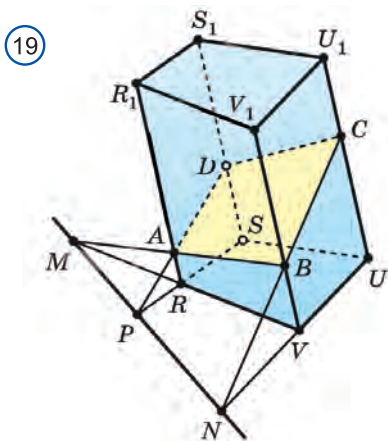
(18)



Prizmanyň ABC tekizlik bilen kesigini tapýarys (17-nji surat).

Gözlenýän kesik A, B we C nokatlaryň dörtburçly prizmanyň haýsy granlarynda we nähili ýatýanlygyna bagly bolýar. 17-nji suratda A, B we C nokatlaryň bir depesinden çykýan granlarda ýatýan in ýönekeý ýagdaý görkezilen.

18-nji suratda görkezilen ýagdaýda kesigi gurmak çylşyrymlyrak iş hasaplanýar. Galan ýagdaýlardaky kesikler aşadaky 19-njy we 20-nji suratlarda getirilen. Görşümüz ýaly, kesik üçburçluk, dörtburçluk, başburçluk we altyburçlukdan ybarat bolýar. Şu kesikleriň gurulyşyny özbaşdak derňň.



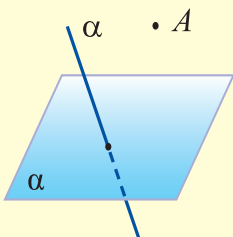
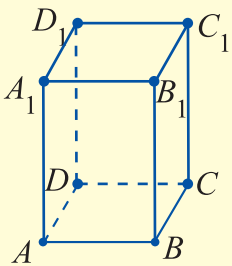
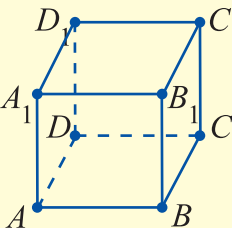
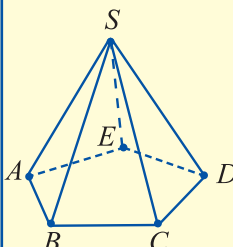
Tema degişli soraglar

1. Köpgranlygyň kesigi diýip nämä aýdylýar?
2. Köpgranlygyň kesigi nähili şekil bolmagy mümkin?
3. Bir tekizligiň ikinji tekizlikdäki yzy diýip nämä aýdylýar?
4. Dörtburçly köpgranlygyň kesigi nämeler bolmagy mümkin?

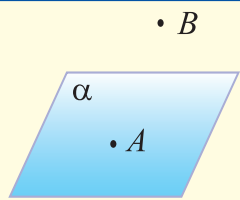
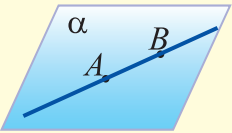
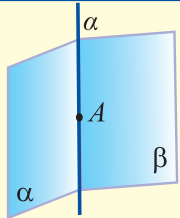


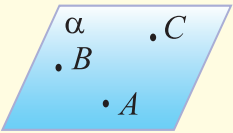
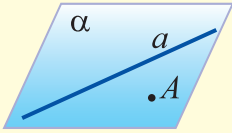
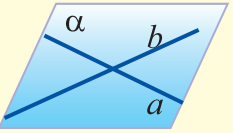
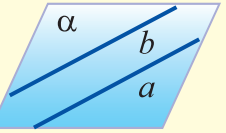
9 AMALY GÖNÜKMELER WE OLARYŇ ULANYLYŞY

3.0. Aşakdaky 3-nji bölüm boýunça daýanç nazary maglumatlary gaýtalaň. Olar size geçilenleri umumylaşdyrmak we amaly gönükmeleri ýerine ýetirmäge kömek edýär.

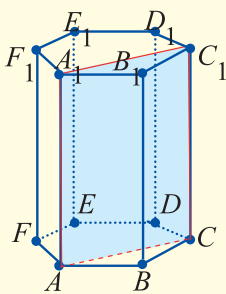
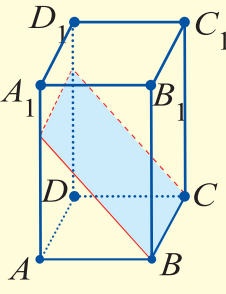
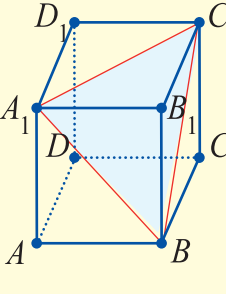
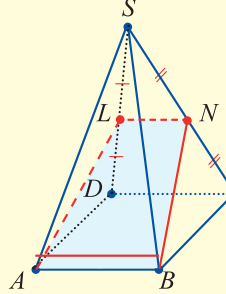
Esasy şekiller	Köpgranlyklar		
	Gönüburçly parallelepiped	Kub	Piramida
 A nokat, α göni çyzyk, a tekizlik	 Esaslary – gönüburçluklar, granlary – gönüburçluklar	 Esaslary – kwadratlar, granlary – kwadratlar	 Esasy – köpburçluk, granlary – üçburçluk

Stereometriýanyň aksiomalary we olardan gelip çykýan netijeler

 Tekizlikde oňa degişli bolan we degişli bolmadyk nokatlar bar.	 Eger göni çyzygyň iki nokady bir tekizlikde ýatsa, onda onuň ähli nokatlary şu tekizlikde ýatýar.	 Eger iki tekizlik umumy nokada eýe bolsa, onda olar şu nokatdan geçýän umumy göni çyzyga-da eýe bolýar.
---	--	---

 Bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokat arkaly	 Göni çyzyk we onda ýatmadyk nokat arkaly	 Kesişýän iki göni çyzyk arkaly	 Parallel iki göni çyzyk arkaly
... bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin			

a) jedwelde käbir köpgranlyklaryň ýönekeý kesikleri berlen. Olara ünsli garap, bu kesiklerň nähili alynýandygyny düşündiriň.

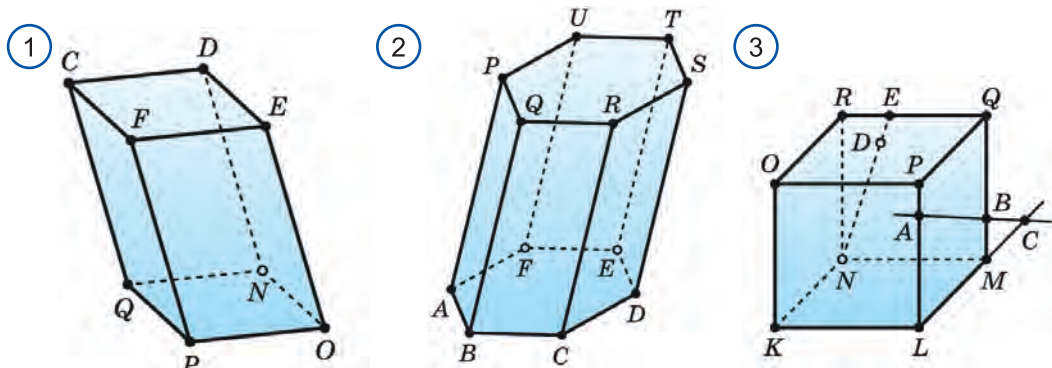
Köpgranlyklaryň ýönekeý kesimleri			
Köpburçlukly prizma	Gönüburçly paralelepiped	Kub	Piramida
 ACC_1 – A, C, C_1 nokatlardan geçýän, kesiji tekizlik. ACC_1CA_1 – kesik.	 CBK – K nokat we CB göni çyzykdan geçýän, kesiji tekizlik, $CBKM$ – kesim.	 A_1BC_1 – BC_1 we BA_1 göni çyzyklardan geçýän, kesiji tekizlik, ACC_1CA_1 – kesik.	 ABN – AB we LN parallel göni çyzyklardan geçýän, kesiji tekizlik, $ABNL$ – kesik.

b) jedweliň çep sütüninde tekizlikdäki, sag sütüninde bolsa giňişlikdäki geometrik şekilleriň bir-birine meňzeş käbir häsiýetleri getirilen. Olary göz önüňize

getiriň we nähili meňzeşlige eýe bolýandygyny anyklaň. Ýene tekizlikdäki we giňişlikdäki nähili meňzeşlikleri getirmek mümkin?

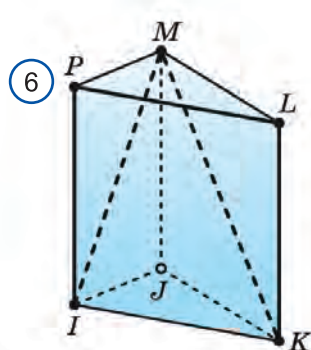
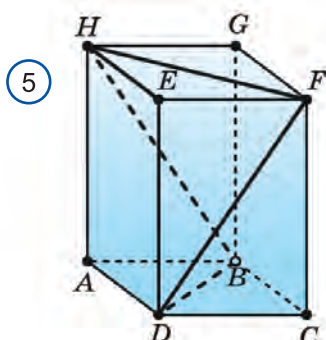
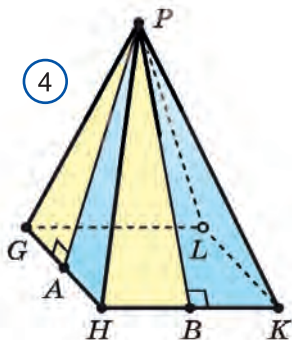
Tekizlikde	Giňişlikde
Eger göni çyzyklar umumy nokada eýe bolsa, olar şu nokatda kesişýär.	Eger tekizlikler umumy göni çyzyga eýe bolsa, olar şu göni çyzyk boýunça kesişýär.
Tekizligiň haýsy-da bolsa bir nokadyndan çäksiz köp göni çyzyk geçirmek mümkin.	Giňişligiň haýsy-da bolsa bir göni çyzygyndan çäksiz köp tekizlik geçirmek mümkin.
Göni çyzykda ýatmaýan nokat arkaly berlen göni çyzyga parallel bir we diňe bir göni çyzyk geçirmek mümkin.	Tekizlikde ýatmadyk göni çyzyk arkaly berlen tekizlige parallel bir we diňe bir tekizlik geçirmek mümkin.
Bir göni çyzyga parallel göni çyzyklar özara paralleldir.	Bir tekizlige parallel tekizlikler özara paralleldir.

- 3.1.** Giňişlikde a) iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik näçe umumy nokada eýe bolmagy mümkin?
- 3.2.** Giňişlikde a) iki göni çyzyk; b) göni çyzyk we tekizlik; ç) iki tekizlik; d) üç tekizlik ýeke-täk umumy nokada eýe bolmagy mümkinmi?
- 3.3.** 1-nji suratda $NOPQDEFC$ parallelepiped görkezilen. a) CD göni çyzyk bilen kesişýän göni çyzyklary; b) FP göni çyzyk bilen kesişýän göni çyzyklary; ç) CD göni çyzyga parallel göni çyzyklary; d) FP göni çyzyga parallel göni çyzyklary; e) CD göni çyzyk bilen atanaklaýyn göni çyzyklary; f) FP göni çyzyk bilen atanaklaýyn göni çyzyklary aýdyň.
- 3.4.** 2-nji suratda esasy altyburçluk bolan $ABCDEF PQRSTU$ parallelepiped görkezilen. a) ABC tekizlik bilen kesişýän göni çyzyklary; b) UTF tekizlik bilen kesişýän göni çyzyklary; ç) PTR tekizlikde ýatýan göni çyzyklary; d) CDR tekizlige degişli göni çyzyklary; e) FEC tekizlige parallel göni çyzyklary; f) AQB tekizlige papallel göni çyzyklary aýdyň.
- 3.5.** 1-nji suratdaky $NOPQDEFC$ parallelepipedde: a) CQ göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; b) OP göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; c) NO göni çyzyk ýatýan tekizlikleri; d) DN göni çyzyk degişli bolan tekizlikleri; e) CF göni çyzyga parallel tekizlikleri; f) EO göni çyzyga parallel tekizlikleri aýdyň.

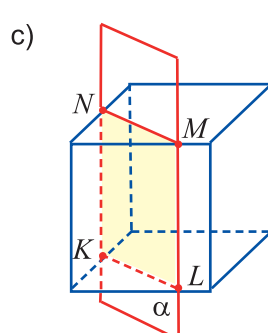
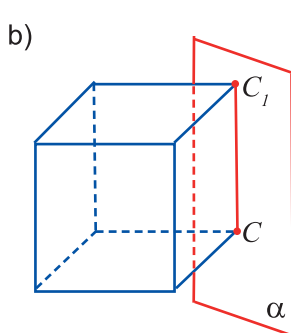
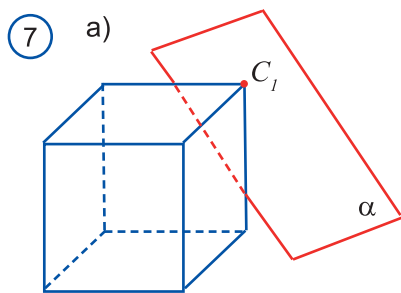


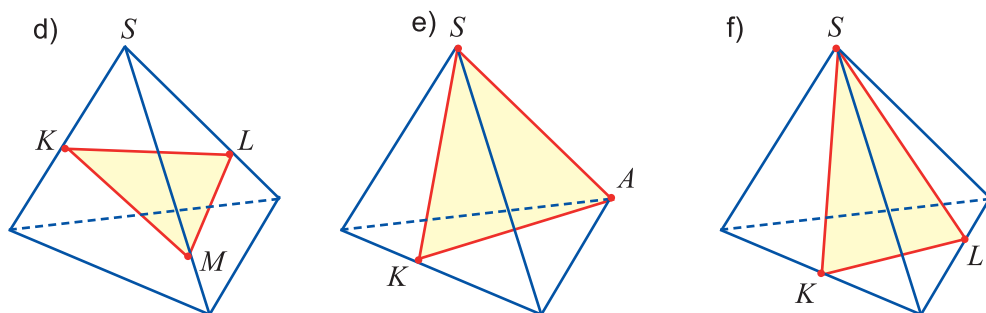
- 3.6.** 2-nji suratda esasy altyburçluk bolan $ABCDEF PQRSTU$ parallelepiped görkezilen. a) UQR tekizlik bilen kesişýän tekizlikleri; b) FT göni çyzyk bilen kesişýän tekizlikleri; c) ACE tekizlige parallel tekizlikleri; d) ETS tekizlige parallel tekizlikleri aýdyň.
- 3.7.** 3-nji suratdan peýdalanyň, a) LMQ we NME tekizliklerde ýatýan nokatlary; b) NR göni çyzyk ýatýan tekizlikleri; c) BC göni çyzygyň KLN tekizlik bilen kesişme nokatlaryny; d) PL we ND göni çyzyklaryň OPR tekizlik bilen kesişme nokatlaryny; e) KON we KLM tekizlikler kesişýän göni çyzygy; f) PDQ we MNK tekizlikler kesişýän göni çyzygy; g) AB we LM göni çyzyklaryň kesişme nokadyny; h) BQ we MC göni çyzyklaryň kesişme nokadyny aýdyň.
- 3.8.** Bir göni çyzykda ýatýan üç nokatdan tekizlik geçirmek mümkinligini subut ediň. Şeýle tekizlikleriň sany näçe?
- 3.9.** A, B, C we D nokatlar bir tekizlikde ýatmaýar. AB we CD göni çyzyklaryň kesişmeýändigini subut ediň.
- 3.10.** Berlen iki göni çyzygyň kesişen nokadyndan bu göni çyzyklar bilen bir tekizlikde ýatmaýan göni çyzyk geçirmek mümkinmi? Jogabyňyzy esaslandyryň.
- 3.11.** A, B, C nokatlar iki dürli tekizligiň her birinde ýatýar. Bu nokatlaryň bir göni çyzykda ýatýandygyny subut ediň.
- 3.12.** Göni çyzyk arkaly iki dürli tekizlik geçýändigini subut ediň.
- 3.13.** a we b göni çyzyklar bir tekizlikde ýatmaýar. a we b göni çyzyklara parallel c göni çyzyk geçirmek mümkinmi?
- 3.14.** Eger tekizlik iki parallel göni çyzykdan birini kesip geçse, ol ikinjisini hem kesip geçýändigini subut ediň.
- 3.15.** Iki atanaklaýyn göni çyzyklardan islendik biri arkaly ikinjisine parallel tekizlik geçirmek mümkinligini subut ediň.

- 3.16. ABC üçburçluk berlen. AB göni çyzyga parallel tekizlik bu üçburçlugyň AC tarapyny A_1 nokatda, BC tarapyny B_1 nokatda kesip geçýär. A_1B_1 kesimiň uzynlygyny tapyň. Munda: a) $AB = 15$ sm, $AA_1 : AC = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 : AC = 5 : 3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4 : 5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.

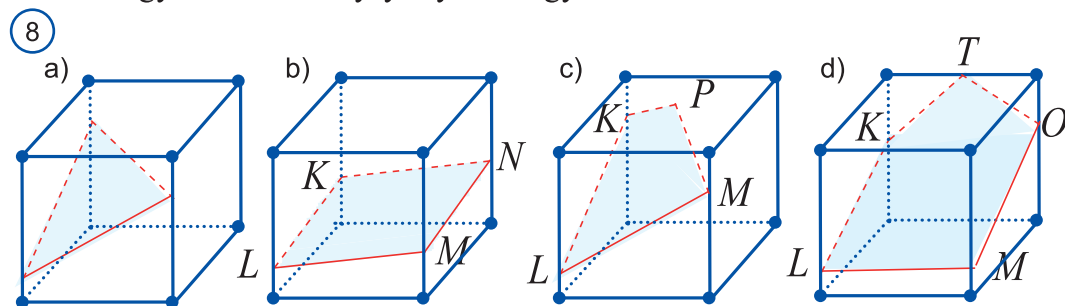


- 3.17. 4-nji suratda dörtburçly dogry piramida berlen. PA we PB – piramida PGH we PHK granlarynyň beýiklikleri bolsa, $\triangle PGA = \triangle PHB$ bolýandygyny subut ediň.
- 3.18. $ABCDHGFE$ gönüburçly parallelepiediň (5-nji surat) gapdal grany 8 sm -e, esasy tarapy 6 sm-e deň kwardatdan ybarat. Giňişlikdäki $HFDBH$ döwür çyzygyň uzynlygyny tapyň.
- 3.19. $IJKPML$ üçburçly dogry prizmanyň (6-njy surat) esasy grany we gapdal granynyň uzynlyklary 2:3 gatnaşykda. Eger $IPLKMI$ giňişlikdäki döwür çyzygyň uzynlygy $16 + 4\sqrt{13}$ -e deň bolsa, prizmanyň gapdal üstüniň meýdanyny tapyň.
- 3.20. Esasy kwadrat bolan gönüburçly parallelepiediň gapdal üsti 12 sm^2 -a deň. Esasynyň diagonalý $\sqrt{2}$ bolsa, gapdal granynyň diagonalyny tapyň.
- 3.21. 7-nji suratda getirilen ýagdaýlarda giňişlikdäki şekilleriň nähili kesimi görkezilenligini düşündiriň.



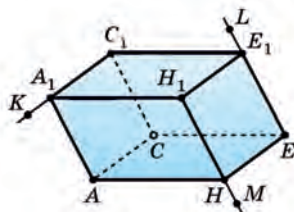


- 3.22.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubuñ AD we CD granlarynda M we N nokatlar berlen. Kuby MNB_1 tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi guruñ.
- 3.23.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kuby çyzyñ we AB , BC we BB_1 granlarynyñ ortalary bolan M , N we L nokatlary belgiläñ. a) kuby MNL tekizlik bilen kesende emele gelýän kesigi guruñ; b) MNL üçburçlugyñ dogry bolýandygyny subut ediñ; c) kubuñ grany 1 sm bolsa, MNL üçburçlugyñ meýdanyny tapyñ.
- 3.24.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ gönüburçly parallelepipediniñ granlary $AB = 6$ sm, $AD = 6$ sm we $AA_1 = 8$ sm. Parallelepipediniñ $BC_1 D$ tekizlik bilen kesigi deňýanly üçburçluk bolýandygyny subut ediñ we bu üçburçlugyñ beýikligini tapyñ.
- 3.25.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmany çyzyñ. Prizmanyñ AD , AA_1 we DD_1 granlarynyñ ortalary bolan M , N we L nokatlardan geçýän tekizlik bilen kesigini guruñ.
- 3.26.** Kuby tekizlik bilen kesende kesimde 8-nji suratda görkezilen haýsy ýagdaýlar bolmagy mümkin? Haýsylary bolmagy mümkin däl?

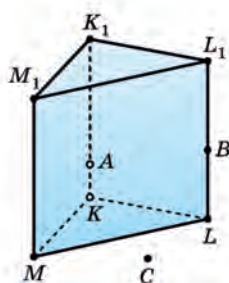


- 3.27.** 9-njy suratda berlen maglumatlar esasynda a) K , L we M ; b) A , B we C ; c) A , B we C nokatlardan geçýän giňişlikdäki şekilleriñ degişli kesiklerini guruñ.
- 3.28.** $MPQTM_1 P_1 Q_1 T_1$ prizmanyñ MM_1 , $M_1 P_1$ we $M_1 T_1$ granlarynda ýatýan A , B we C nokatlar alnan (10-njy surat). Prizmanyñ ABC tekizlik bilen kesigini guruñ.
- 3.29.** Berlen maglumat esasynda 11-nji suratda U , V we W , 12-nji suratda A we B nokatlardan geçýän giňişlikdäki şekilleriñ degişli kesiklerini guruñ.

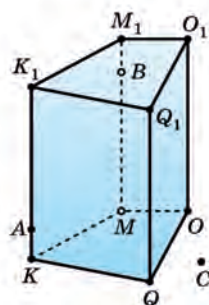
9 a)



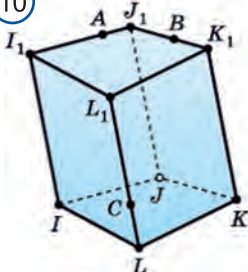
b)



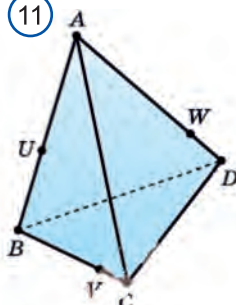
ç)



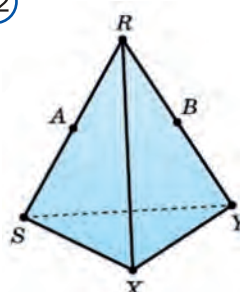
10



11



12



Ulanmalar we amaly kompetensiyalary şekillendirmek

1. Nämе sebäpden haýsy-da bolsa bir ymarat üçin çukur gazmazdan ön belgileme işleri dartyp çekilen ýüпüň kömeginde ýerine ýetirilýär?

Jogaby: iki tekizligiň kesişmesi göni çyzykdan ybarat bolýar.

2. Kerpiç guýmak prosesinde galyba laý salnyp, tekis agaç bölegi galybyň üstünde ýöredilip, laýyň artykmaç bölegi süpürip alyp taşlanýar. Munda nämе sebäpden kerpijiň üsti tekiz çykýar?

3. Ýасalan stuluň аýакlary bir tekizlikde ýatýandygyny barlamak üçin neçjarlar stuluň garşylykly аýакlaryna ýүп çekip barlaýar. Bu usuly ulanyp görüň we onuň nämä esaslanandygyny аýdyň.

Jogaby: iki kesişýän çyzyk ýеke-täk tekizligi anyklaýar.

4. Bir bölek agaç tagtany byçgylanda, neçjar byçgylanýan üstüň tekiz bolmagyny nähili gazanýar?

Jogaby: agaç tagtanyň iki goňsy granlaryna AB we AC kesimleri çyzyar we byçgynt mümkingadar şu kesimlerden geçýän edip byçgylamagy ýerine ýetirýär. Netijede, iki kesişýän göni çyzyklardan geçýän tekizlik ýеke-täk bolanlygy üçin byçgylanан üst tekiz çykýar.

5. Fotoapparaty ornaşdyrmak üçin niýetlenen gurluş nämе sebäpden üç аýакly edip ýасалýar?

Jogaby: bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokatdan diňe bir tekizlik geçýär.

6. Neçjar işläp taýýarlan tagtanyň üstüniň tekizligini nähili barlaýar. Bu usul nämä esaslanan?

Jogaby: eger göni çyzygyň iki nokady tekizlikde ýatsa, onuň özi-de бүтинligine şu tekizlikde ýatýar.

7. Nämе sebäpden üç aýakly motosikl iki aýaklysyna garanda ep-esli durnukly bolýar? *Jogaby: bir göni çyzykda ýatmadyk üç nokatdan diňe bir tekizlik geçýär.*

8. Nämе üçin ачык gapylar şemal aralygynda öz ýagdaýyça herekete gelýär? Nämе sebäpden bu ýapyк gapylar bilen şeýle bolmaýar?

Jogaby: göni çyzyк we onda ýatmadyк nokatdan diňe bir текizlik geçirmek mümkin.

9. Kesigi – tarapy 7 dm bolan kwadratdan ybarat, beýikligi 4 m bolan 18 sany sütünleri gurmak üçin näçe kerpiç gerek bolar? (Kerpijiň ölçegleri: 1:1,5:3 dm. Gurmak prosesinde 5 % kerpiç çykynda gidýär). *Jogaby: 8200 sany.*

Jogaplar we görkezmeler

1.23. $AB \parallel CD$. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm.
1.28. 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.
2.6. 256 m^2 . **2.8.** $(11+\sqrt{3}) \text{ sm}^2$. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; $2000+640 \text{ tg } 54^\circ$. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3} \text{ sm}^2$; c) $648\sqrt{3} \text{ sm}^2$. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73} \text{ sm}^2$; c) $144+48\sqrt{73} \text{ sm}^2$. **2.12.** a) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ m; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ m; b) 192 m^2 ; c) 282 m^2 ; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34}) \text{ m}^2$; c) $8(11+\sqrt{34}) \text{ m}^2$. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2 ; c) $30(12+5\sqrt{3}) \text{ sm}^2$. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3) \text{ sm}^2$. **2.17.** a) $168\pi \text{ sm}^2$; b) $168\pi \text{ sm}^2$; c) $2,4\pi \text{ m}^2$; d) $1,68\pi \text{ m}^2$. **2.18.** $625\pi \text{ sm}^2$. **2.19.** $252\pi \text{ m}^2$. **2.20.** $\pi^2 \text{ m}^2$. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** $4,83 \text{ m}^2$. **2.24.** 37 mm. **2.25.** $1040\pi \text{ sm}^2$. **2.26.** a) $75\pi \text{ sm}^2$; b) $288\pi \text{ dm}^2$; c) $6,25\pi \text{ m}^2$. **2.28.** a) $88\pi \text{ sm}^2$; b) $88\pi \text{ sm}^2$; c) $540\pi \text{ dm}^2$; d) $3,24\pi \text{ m}^2$;
3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2 . **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$.

Dersligi düzmekde peýdalanylan we goşmaça öwrenmäge hödürlenýän okuw-usuly edebiýatlar we elektron resurslar

1. A. A'zamov, B. Haydarov. "Matematika sayyorasi". Toshkent. «O'qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O'qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug'ati. Toshkent. «O'zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina Matematika va go'zallik, Toshkent, «O'qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O'qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzayev Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma.-Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashayev Geometriya. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. II qism. Toshkent, «O'qituvchi», 2005 y.
8. A.B. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. "Просвещение", 2002.
10. Я.И. Перельман Кизикарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2013.
16. С. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. <http://www.uzedu.uz> – Xalq ta'limi vazirligining axborot ta'lim portali.
20. <http://www.eduportal.uz> – Multimedia markazi axborot ta'lim portali.
21. <http://www.school.edu.ru> – Umumta'lim portali (rus tilida).
22. <http://mathc.chat.ru> – Matematik kaleydoskop (rus tilida).
23. <http://www.problems.ru> Matematikadan masalalar izlash tizimi (rus tilida);
24. <http://www.pdmi.ras.ru/~olymp> – Matematikadan olimpiada masalalari (rus tilida).
25. <http://www.ixl.com> – Masofadan turib o'qitish sayti (ingliz tilida).
26. <http://www.mathkang.ru> – "Kenguru" xalqaro matematik tanlov sayti (rus tilida).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

**MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM**

(Turkman tilida)

O'rta ta'lim muassasalarning 10-sinf o'quvchilari uchun darslik
1- nashr

Terjime eden

K.Hallyýew

Redaktor

J.Metýakubow

Ý. Inagomow

Tehredaktor

K. Madiarow

Kompýuterde sahaplaýjy:

S.Gofurow

Nashriyot litsenziyasi AI № 296. 22.05.2017

Çap etmäge 24.10.2017 da rugsat edildi. Möçberi $70 \times 100^{1/}_{16}$
«TimesNewRoman» garniturası. Göwrümi: 9,0 çap listi. Neşir listi.
9,0. 1018 nusgada çap edildi.

Original-maket «Extremum-press» JÇJ-de
taýýarlandy. 100053, Daşkent ş.
Bagışemal köçesi, 3. Tel: 234-44-05

Özbekistanyň Metbugat we habar agentliginiň «O'qituvchi»
neşirýat-çaphana döredijilik öýüniň çaphanasında çap edildi.
100206, Daşkent ş. Ýunusabat, Ýangişaher köçesi, 1.
Buýurma № 232-17.