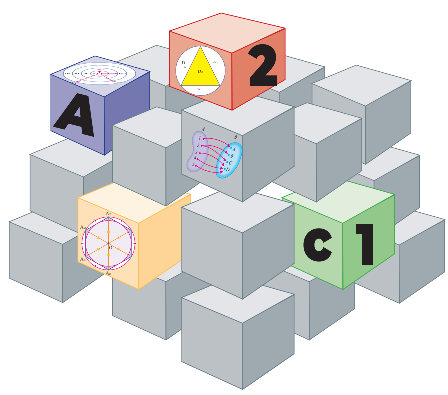
АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА
10



Учебник для 10 класса
школ общего среднего образования

Рекомендован Министерством народного образования Республики Узбекистан

Новое издание

ТАШКЕНТ – 2022

УДК 51(075.3)
ББК 22.14я72
А 45

Составители:

Адилбек Заитов, Раъно Хамраева, Бахтиёр Абдиев,
Калмурза Сагидуллаев, Умид Рахмонов, Балжан Уринбаева

Международный эксперт:

Марсело Старикофф

Рецензенты:

М. А. Мирзаахмедов – учитель математики специализированной школы имени аль-Хорезми, кандидат физико-математических наук, доцент;
Ж. А. Куйжанов – учитель математики школы №5 Хатирчинского района Навоийской области;
А. К. Кодиров – учитель математики школы №6 Аккурганского района Ташкентской области.

Алгебра и начала анализа 10 класс [Текст] /А.Заитов [и др.] – Ташкент: Республиканский центр образования, 2022. – 192 стр.

Подготовлен совместно с представительством
UNICEF в Узбекистане.

Усовершенствован на основе заключения Института математики им. В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан.

Оригинал-макет и концепция дизайна разработаны
Республиканским центром образования.

Издан за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

УСЛОВНЫЕ ЗНАКИ

– лёгкие задания

– задания средней сложности

– сложные задания

– подтемы

ISBN 978-9943-8454-4-2

Содержание

ПОВТОРЕНИЕ

Глава 1. ФУНКЦИИ

ГЛАВА 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

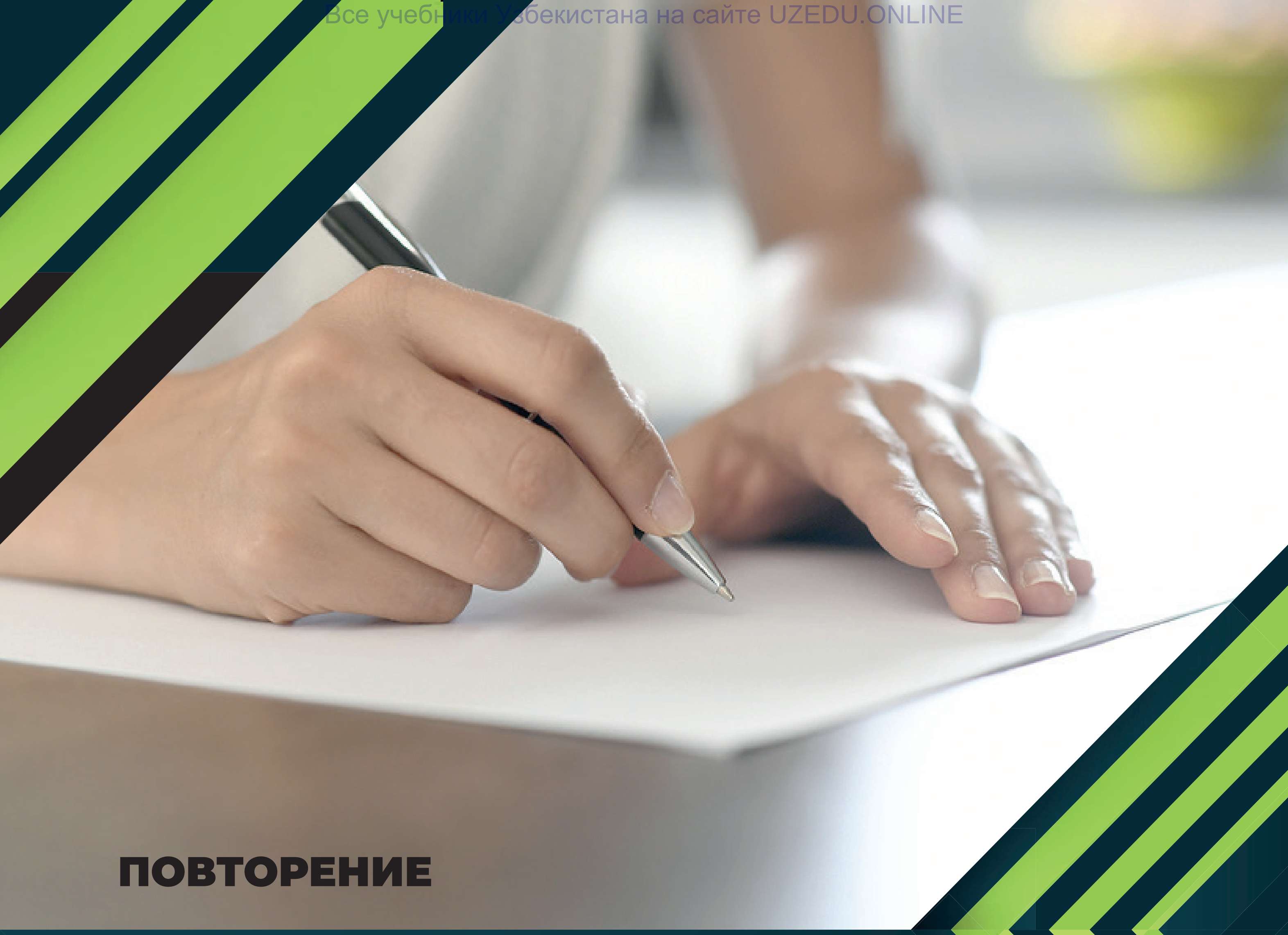
Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ УЧЕБНИКА «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» 10 КЛАСС

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА «АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА» 10 КЛАСС



ПОВТОРЕНИЕ

- КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ
- КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО
- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА
- АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

Рисунок 1

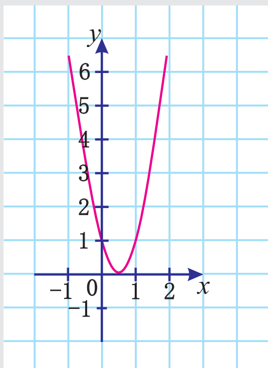


Рисунок 2

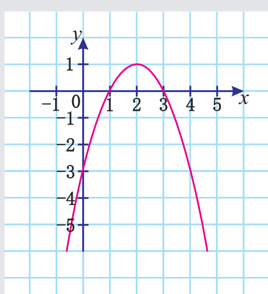


Рисунок 3

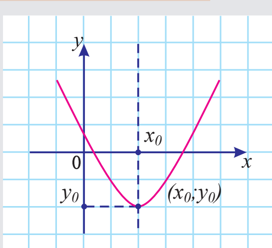
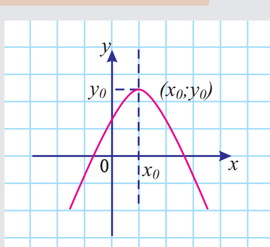


Рисунок 4



Определение квадратичной функции

Определение

Функция вида $y=ax^2+bx+c$ называется квадратичной функцией, где a, b, c – заданные действительные числа, $a\neq0$, x – действительная переменная.

Например, следующие функции являются квадратичными функциями:
$y=3x^2+2x-1$, $y=-4x^2-5x$, $y=6x^2-3$, $y=4x^2$, $y=2-x^2$.

График квадратичной функции

1. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является кривая, называемая параболой. Графики функций $y=4x^2-4x+1$ и $y=-x^2+4x-3$ изображены на рисунках 1 и 2, соответственно.
2. Ветви параболы $y=ax^2+bx+c$ направлены вверх при $a>0$ (рис. 3) и направлены вниз при $a<0$ (рис. 4) относительно оси ординат.
3. Координаты $y=ax^2+bx+c$ вершины параболы $(x_0;y_0)$ вычисляются по формулам: $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ или $y_0=-\frac{b^2-4ac}{4a}$.
4. Парабола $y=ax^2+bx+c$ симметрична относительно прямой, проходящей через её вершину, параллельной оси ординат.
5. Абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox являются нулями квадратичной функции. Для нахождения нулей квадратичной функции требуется решение уравнения $ax^2+bx+c=0$
6. Ордината точки пересечения графика квадратичной функции с осью ординат равна значению функции в точке $x = 0$.

Для построения графика квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ нужно выполнить следующие действия:

1. Определить направление ветвей параболы.
2. Найти координаты вершины параболы $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ формулами $x_0=-\frac{b}{2a}$ и $y_0 = ax^2+ bx_0+ c$ и отметить на координатной плоскости.
3. Найти нули параболы. Если парабола не имеет нулей, то есть если не пересекается с осью Ox, то обычно указывают какие-либо две точки параболы, симметричные относительно оси симметрии. Например, можно указать точки с координатами $(0; c)$ и $(2x_0; c)$.
4. Соединить построенные точки плавной кривой (можно построить ещё больше точек параболы, если это необходимо).

Свойства квадратичной функции

1. Область определения:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Множество значений:

a) если $a>0$, то $E(y)=[y_0;\infty)$.

b) если $a<0$, то $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Наибольшее и наименьшее значения:

a) если $a>0$, то при $x=x_0$ функция достигает своего наименьшего значения, равного $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. В этом случае функция не имеет наибольшего значения.

b) если $a<0$, то при $x=x_0$ функция достигает своего наибольшего значения, равного $y_0=ax_0^2+bx_0+c$. В этом случае функция не имеет наименьшего значения.

4. Нули функции:

a) если $D>0$, то квадратичная функция имеет два различных нуля: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

b) если $D=0$, то квадратичная функция имеет единственный ноль: $x=\dfrac{-b}{2a}$.

c) если $D<0$, то квадратичная функция не имеет нулей.

5. Интервалы монотонности:

a) если $a>0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ убывает на промежутке $(-\infty;x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0;\infty)$.

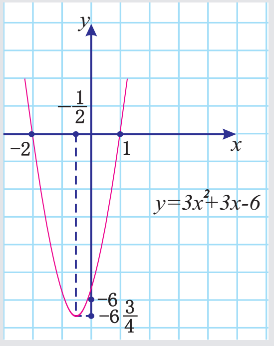
b) если $a<0$, то функция $y=ax^2+bx+c$ возрастает на промежутке $(-\infty;x_0]$ и убывает на промежутке $[x_0;\infty)$.

Пример 1. Пусть дана квадратичная функция $y=3x^2+3x-6$. Напишите её свойства и постройте график.

Решение.

1. Область определения: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. Найдём $x_0=-\dfrac{1}{2}$ и $y_0=-6,75$. Так как $a=3>0$, то множество значений $E(y)=[-6,75;\infty)$.
3. Функция достигает наименьшего значения при $x=-\dfrac{1}{2}$: $y=-6,75$. Функция не достигает наибольшего значения.
4. $D=81>0$. Следовательно, функция имеет два различных нуля: $x_1=1,\ x_2=-2$.
5. $y>0$ при $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ и $y<0$ при $x\in(-2;1)$.
6. Функция не является ни чётной, ни нечетной.
7. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$. График функции приведён на рисунке 5.

Рисунок 5



ПРИМЕРЫ

1. Какая из следующих функций является квадратичной?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y=-x^2+5x+1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y=x^2$

2. Чему равно значение функции $y=4x^2+7x-5$ при $x=-3$?

3. При каких значениях x значение функции $y=-3x^2+x+1$ равно -1?

4. При каких значениях x определена функция $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$?

5. Является ли нулем число -5 функции $y=x^2-5x$?

6. Постройте графики функций.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Найдите нули функций.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Найдите множество значений функций.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y=3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. Определите значение x, при котором функция принимает своё наибольшее (или наименьшее) значение. Вычислите значение функции.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. При каких значениях t функция $y=2x^2-tx+8$ не имеет нулей?

11. При каких значениях x значения функции $y=5x^2-4x-1$ отрицательны?

12. Принимает ли функция $y=x^2+6x+13$ отрицательные значения?

13. Принимает ли функция $y=-x^2-4x-5$ положительные значения?

14. Постройте график функции $y=6x^2+7x+1$ и по графику укажите те значения x, при которых функция принимает положительные (соответственно, отрицательные) значения.

15. Постройте график функции $y=-x^2+4x-3$. По графику укажите интервалы возрастания и убывания.

16. При каких значениях x значения функций $y=x^2-22x+27$ и $y=2x^2-20x+3$ равны?

17. Запишите уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку $(-1; 6)$, а точка $(1; 2)$ – её вершина.

18. Найдите p и q, если вершина параболы $y=x^2+px+q$ находится в точке $A(1; -2)$.

19. Найдите a, b, c, если вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке $M(-1; -7)$ и пересекается с осью ординат в точке $N(0; -4)$.

20. Найдите функцию $y=ax^2+bx+c$, если парабола проходит через точки $A(1; 4)$, $B(-1; 10)$, $C(2; 7)$.

КВАДРАТНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Определение

Если в левой части неравенства находится квадратичный трёхчлен, а в другой части – ноль, то такое неравенство называется квадратным (или неравенством второй степени одной переменной).

Неравенства $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ являются квадратичными, причём $a\neq 0$.

Решением неравенства называется множество значений переменной, при которых данное неравенство становится верным числовым неравенством.

Решить неравенство обозначает определить все его решения или обосновать, что решений нет.

Квадратичное уравнение может быть решено следующими способами.

Способ 1. Решение квадратного неравенства приведением в систему линейных неравенств

Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, то после разложения левой части на множители можно перейти к двум системам линейных неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $x^2-5x+6<0$.

Решение.

Разложим левую часть на множители

$$(x-2)(x-3)<0.$$

Случай 1: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3).$

Случай 2: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Ответ: (2; 3).

Способ 2. Решение квадратного неравенства графическим способом.

Для решения квадратного неравенства можно построить эскиз графика соответствующей квадратной функции, а затем указать промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Чтобы решить квадратное неравенство графически, нужно выполнить следующий алгоритм действий:

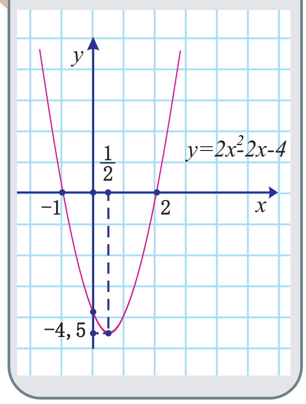
1) определить направление ветвей параболы;

2) найти нули функции (если они есть) или установить их отсутствие;

3) построить эскиз графика $y = ax^2 + bx + c$;

4) по графику определить промежутки, на которых график функции выше или ниже относительно оси абсцисс.

Рисунок 1



Пример 2. Решить неравенство $2x^2-2x-4\geq 0$ графически.

Решение. Построим график функции $y = 2x^2 - 2x - 4$ (рис. 1). Сперва найдём вершину параболы:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4,5.$$

Затем, вычисляя дискриминант $D=b^2-4ac=4+32=36$, находим нули параболы:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm 6}{4},$$

Так как график функции на интервале (–1; 2) расположен ниже оси абсцисс, а на области $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$ –выше оси абсцисс, то, принимая во внимание нестрогость неравенства, получим решение.

Ответ: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

При решении неравенства графическим способом вовсе не обязательно находить координаты вершины параболы, а также отображать на графике точки пересечения параболы с осью *Oy*. Достаточно определить нули функции, направление ветвей параболы и построить эскиз графика.

Способ 3. Решение квадратного неравенства методом интервалов

Если график функции $y = f(x)$ можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, на интервале $(a; b)$, то эта функция называется непрерывной на $(a; b)$.

Например, функции $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ являются непрерывными в своих областях определения.

Мы принимаем одно важное свойство непрерывных функций без доказательства.

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a; b)$ и не обращается в нуль, то значения функции на этом интервале имеют один и тот же знак, т. е. функция сохраняет свой знак на этом интервале.

Область определения квадратичной функции можно разбить не более чем на три интервала $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; \infty)$, здесь x_1 и x_2 –нули квадратичной функции, $x_1 < x_2$. На каждом из этих интервалов квадратичная функция непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет свой знак. На этом и основан так называемый интервальный метод решения квадратных неравенств с одной неизвестной.

Рассмотрим применение интервального метода при решении квадратных неравенств.

Случай 1. $D > 0$. В этом случае квадратичная функция имеет два нуля x_1 и x_2 (предполагаем, что $x_1 < x_2$). Они разделяют область определения квадратичной функции на три части $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; \infty)$, причём в каждом из этих промежутков значения функции имеют постоянный знак ("+" или "–").

Знак значений квадратичной функции на каждом из полученных интервалов можно найти разными способами:

1) знак значений функции $y = ax^2+bx+c$ на каждом из интервалов $(-\infty; x_1)$, $(x_2; \infty)$ совпадает со знаком коэффициента a; знак значений функции $(x_1; x_2)$ противоположен знаку коэффициента a;

2) знак значений функции можно определить в «удобной» точке на каждом интервале.

3) функцию $y = ax^2 + bx + c$ можно представить в виде $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, а затем найти знаки линейных множителей на каждом интервале.

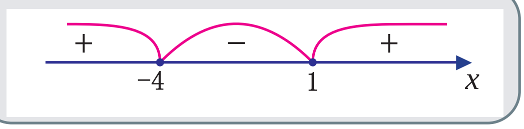
Пример 3. Решить неравенство $x^2 + 3x - 4 \le 0$ интервальным методом.

Решение. Разложим левую часть неравенства на множители

$$(x+4)(x-1) \le 0$$

и найдём её нули: –4 и 1.

Отмечаем найденные точки на числовой прямой и делим числовую прямую на интервалы. Определяем знак функции $y = x^2 + 3x - 4$ на каждом интервале.



Так как в условии заданного примера спрашивается промежуток, в котором функция принимает свои не положительные значения, то решением является [–4; 1].

Ответ: [–4; 1].

Случай 2. Пусть $D = 0$. Тогда функция $y = ax^2 + bx + c$ обращается в ноль только в одной точке x_0. Точка x_0 делит ось координат на два интервала: $(-\infty; x_0)$ и $(x_0; \infty)$. При каждом $x \ne x_0$ знак значений квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком коэффициента a (рис. 2, 3).

Случай 3. $D < 0$. Функция $y = ax^2 + bx + c$ не имеет нулей.

В этом случае при произвольных значениях x значения функции принимают одинаковый знак со знаком коэффициента a:

1) если $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ во всех значениях x;

2) если $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ во всех значениях x.

Важно знать и уметь применять следующие факты:

1) при $a > 0$ и $D < 0$ решение каждого из неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c \ge 0$ есть множество всех действительных чисел (рис. 4);

2) при $a > 0$ и $D < 0$ решение каждого из неравенств $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \le 0$ есть множество всех действительных чисел (рис.4);

3) при $a < 0$ и $D < 0$ решение каждого из неравенств $ax^2 + bx + c > 0$ и $ax^2 + bx + c \ge 0$ есть множество всех действительных чисел (рис. 5);

4) при $a < 0$ и $D < 0$ решение каждого из неравенств $ax^2 + bx + c < 0$ и $ax^2 + bx + c \le 0$ есть множество всех действительных чисел (рис. 5).

Рисунок 2

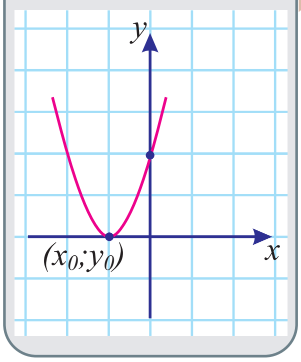


Рисунок 3

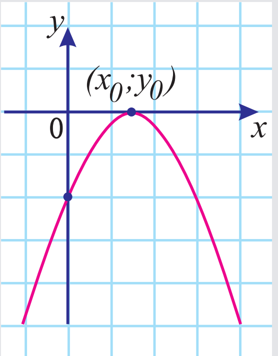


Рисунок 4

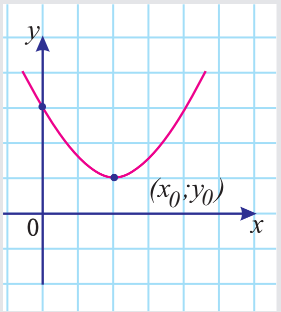
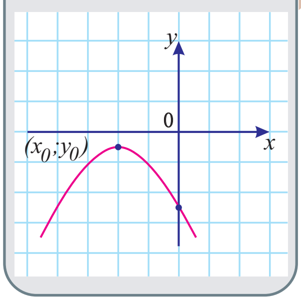


Рисунок 5



ПРИМЕРЫ

1. Какие из чисел 0, –2, 3 удовлетворяют неравенство $-4x^2+5x-5>0$?

2. Решите следующие неравенства приведением в систему линейных неравенств.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Равносильны ли неравенства?

a) $5x^2>2x$ и $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ и $3x<7$ c) $\dfrac{x^2-1}{x}>0$ и $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Решите неравенства.

a) $x^2>0$ b) $4x^2\ge 0$ c) $x^2<0$

d) $-x^2\le 0$ e) $x^2+7>0$ f) $5x^2+11\le 0$

g) $-x^2-5>0$ h) $3x^2-2x<0$ i) $-4x^2+11x<0$

j) $x^2-9x+20<0$ k) $x^2-10x+25>0$ l) $-x^2+6x-8>0$

m) $3x^2-x+2\ge 0$ n) $-9x^2+24x+20>0$ o) $-7\cdot(3-x)^2>0$

5. Составьте какое-нибудь квадратное неравенство, решением которого являются области:

a) $(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$ b) $(-\infty;\infty)$

6. Найдите длину отрезка на оси Ox, являющегося решением неравенства $x^2+9x\le -14$.

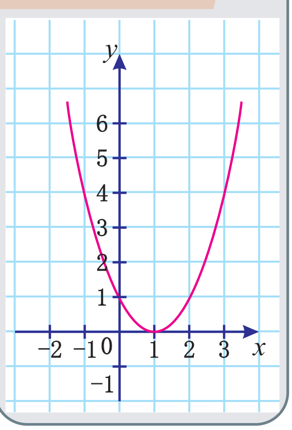
7. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $2x^2+7x-15<0$?

8. Решите неравенства интервальным методом.

a) $x^2+5x-6>0$ b) $-x^2+x+2<0$ c) $x^2+3x+7>0$ d) $x^2+3x+7\le 0$

e) $-2x^2+5x+3>0$ f) $6x^2-x-2<0$ g) $2x^2+5x+9\le 0$ h) $49x^2-28x+4\le 0$

Рисунок 6



9. Решите неравенства.

a) $8x^2+3x-5\ge 0$ b) $5x^2-12x+8\le 0$

c) $49x^2-70x+25>0$ d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\ge 0$

e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$

10. Решите неравенство графиком квадратичной функции.

a) $2x^2+5x-3>0$ b) $4x^2-9x-90>0$

11. На рисунке 6 изображен график функции $y=ax^2+bx+c$. Найдите решение следующих неравенств.

a) $ax^2+bx+c>0$ b) $ax^2+bx+c\le 0$

12. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

a) $2x^2-9x+4<0$ b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3-2x}{2}>\frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x+7)(x-2)\le 21x^2-11x+3$

13. Сколько целых чисел из отрезка $[0;9]$ удовлетворяют неравенству $3x(x-2)-2x(x+4)-(x-16)\le 0$?

14. Используя график функции $y=-x^2+4x-3$, найдите решение следующих неравенств.

a) $-x^2+4x-3>0$ b) $-x^2+4x-3\ge 0$ c) $-x^2+4x-3<0$ d) $-x^2+4x-3\le 0$

15. При каких значений *a* уравнение $ax^2+2ax+4=0$ не имеет корней?

16. Решите неравенство $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$.

17. Дана функция $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$. Найдите все значения *x*, при которых:

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\le 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\ge 0$

18. Решите неравенства:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, при этом a, b, c – стороны треугольника;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, при этом a, b, c – стороны треугольника.

19. Если $a^2+12b<0$, то решите неравенство $3x^2-b\le ax$.

20. Если $b>0{,}05a^2$, то решите неравенство $5x^2-ax+b>0$.

21. Если $b^2\le 4ac$ и $a+c>b$, то решите неравенство $ax^2+bx+c\le 0$.

22. При каких значениях *c* графики функций $y=cx^2+x+c$ и $y=cx+1-c$ не имеют общих точек?

23. При каких значениях *p* графики функций $y=px^2-24x+1$ и $y=12x^2-2px-1$ не пересекаются?

24. При каких значениях *a* корни уравнения $x^2+3x+a=0$ удовлетворят условию

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$?

25. При каких значениях *b* корни уравнения $x^2-2bx+b+6=0$:

a) отрицательны; b) положительны; c) имеют разные знаки?

26. При каких значениях *a* все действительные числа удовлетворяют неравенству?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. При каких значениях *b* неравенство не имеет решений?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\ge 0$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$ 3. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$

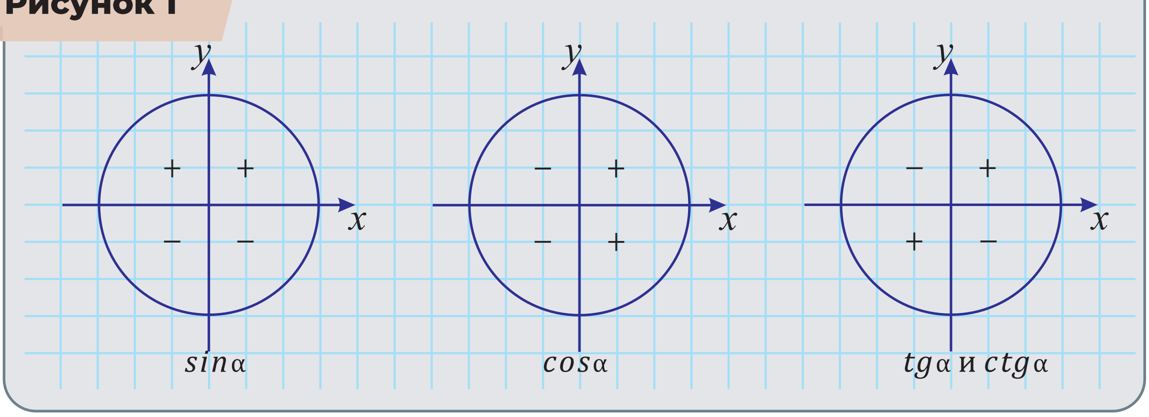
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ 5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$ 6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существует	0
$ctg\alpha$	не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не существует

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Рисунок 1



Синус, косинус, тангенс и котангенс углов α и (–α)

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ 3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ 4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Формулы приведения

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Обратите внимание на следующую закономерность в формулах приведения: если допустить α, принадлежащим I четверти, то для углов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ синус, косинус, тангенс, котангенс не меняются, а для углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ синус превращается в косинус, косинус – в синус, тангенс – в котангенс, котангенс – в тангенс. В общем случае, для углов $\frac{n\pi}{2}\pm\alpha$ при чётных n синус, косинус, тангенс, котангенс не меняются; при нечётных n синус превращается в косинус, косинус – в синус, тангенс – в котангенс, котангенс – в тангенс. Перед вновь полученным выражением ставится знак заданного выражения в четверти, которой принадлежит угол $\frac{n\pi}{2}\pm\alpha$.

Например, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$, поскольку количество величины $\frac{\pi}{2}$ – нечётное число, равное 3, угол $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ принадлежит третьей четверти, и знак заданного выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ отрицателен в этой четверти. Поэтому перед полученным косинусом ставится знак минус.

Пример 1. Вычислите .

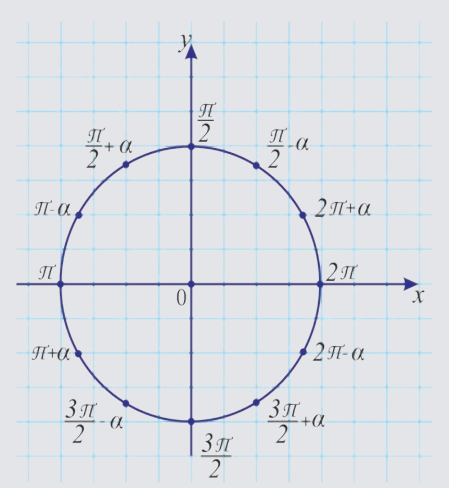
a) $\sin 855^\circ = \sin(9\cdot 90^\circ+45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 2025^\circ = \cos(22\cdot 90^\circ+45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $tg 1680^\circ = tg(18\cdot 90^\circ+60^\circ) = tg 60^\circ = \sqrt{3}$

d) $ctg 1200^\circ = ctg(13\cdot 90^\circ+30^\circ) = -tg 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Рисунок 2



Формулы сложения

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
7. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$
8. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Формулы двойного угла

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Формулы преобразования суммы и разности

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
6. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
7. $ctg\alpha+ctg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
8. $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Формулы преобразования произведения

1. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
3. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

Формулы понижения степени

1. $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
3. $tg^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
4. $ctg^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

Формулы половинного аргумента

1. $cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{2}$
2. $sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{2}$
3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$
4. $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}$
5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha}=\frac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$
6. $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\,\alpha}{1-cos\,\alpha}=\frac{1+cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$

Формулы выражения $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tg\alpha$ через $tg\frac{\alpha}{2}$

1. $sin\,\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
2. $cos\,\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

ПРИМЕРЫ

1. Если $ctg\alpha=-\frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то найдите $cos\alpha$.

2. Если $tg\alpha=-\sqrt{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, то найдите $sin\alpha$.

3. Если $tg\alpha=\frac{3}{2}$, то найдите $\frac{2sin\alpha+5cos\alpha}{3sin\alpha-4cos\alpha}$.

4. Упростите.

a) $\frac{2sin^2\alpha-1}{2cos^2\alpha-1}$ b) $\frac{ctg\alpha\left(2\,sin^2\alpha+tg\alpha\right)}{(sin\,\alpha+cos\,\alpha)^2}$ c) $\frac{1-cos^2\alpha}{sin^4\alpha}-ctg^2\alpha$ d) $2-\frac{1-sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$

5. Вычислите.

a) $4cos150°-sin240°-3tg210°$ b) $2cos135°+tg60°-ctg240°$

c) $sin300°-3cos135°+2cos210°$ d) $tg150°-ctg315°+5sin135°$

6. Вычислите.

a) $tg\frac{7\pi}{6}-2tg\frac{5\pi}{3}+3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2cos\frac{4\pi}{3}+sin\frac{5\pi}{4}-cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2}-sin\frac{2\pi}{3}+cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4}+2ctg\frac{4\pi}{3}-2cos\frac{5\pi}{6}$

7. Упростите.

a) $\frac{1-tg\,(360°-\alpha\,)tg\alpha}{tg\,(270°-\alpha\,)+tg\alpha}$ b) $\frac{cos\,(90°+\alpha\,)+sin\,(90°-\alpha\,)}{cos\,(270°-\alpha\,)+cos\,(180°+\alpha\,)}$

8. Упростите.

a) $\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)-ctg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}$ b) $\dfrac{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)}{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)}$

9. Докажите тождество.

a) $\dfrac{sin(\pi-2\alpha)-2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sin^2(\pi+\alpha)-cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2ctg\alpha$ b) $\dfrac{sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{sin^2\alpha}{2}$

10. Вычислите.

a) $sin(-43°)cos\,88°+cos(-43°)sin\,88°$ b) $cos\,11°\,cos\,19°-sin\,19°\,sin\,11°$

11. Вычислите.

a) $sin\dfrac{2\pi}{7}cos\dfrac{3\pi}{14}+cos\dfrac{2\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{1+tg33°tg78°}{tg78°-tg33°}$

12. Вычислите.

a) $cos\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)cos\dfrac{7\pi}{9}-sin\dfrac{7\pi}{9}sin\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)$ b) $\dfrac{1-tg\dfrac{\pi}{11}tg\dfrac{5\pi}{66}}{tg\dfrac{5\pi}{66}+tg\dfrac{\pi}{11}}$

13. Упростите.

a) $cos(\alpha-\beta)-sin\alpha\,sin\beta$ b) $sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)$

c) $sin\,4\alpha\,cos\,\alpha-cos\,4\alpha\,sin\,\alpha$ d) $cos\,\alpha\,cos\,2\alpha+sin\,2\alpha\,sin\,\alpha$

e) $\dfrac{1}{2}cos\,\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}cos\,\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\,\alpha$

14. a) Если $cos\,\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то найдите $cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Если $cos\,\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$, то найдите $sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

15. Вычислите.

a) $\dfrac{6sin10°cos10°}{sin20°}$ b) $\dfrac{sin88°}{sin22°cos22°cos44°}$ c) $sin\dfrac{\pi}{12}\left(2sin^2\dfrac{\pi}{24}-1\right)$

16. a) Если $cos\alpha=0,4$, то найдите $cos2\alpha$.

b) Если $sin\alpha=-0,7$, то найдите $cos2\alpha$.

17. a) Если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то найдите $\sin 2\alpha$.

b) Если $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то найдите $\sin 2\alpha$.

18. Упростите.

a) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - 1)$ b) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

19. Если $tg\alpha = -2$, то найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $tg 2\alpha$, $ctg 2\alpha$.

20. a) Определите знак выражения $\cos 123° tg 231° \sin 312°$.

b) Определите знак выражения $\sin\frac{1}{3}\cos\frac{7}{8}tg 4 ctg 5,7$.

21. Сравните $\sin 200°$ и $\sin(-200°)$.

22. Могут ли быть совместно верны равенства $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $\cos\alpha = \frac{5}{13}$?

23. Докажите тождество.

a) $\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(tg^2\alpha + ctg^2\alpha\right) = 7$ b) $\frac{tg 3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - ctg^2 3\alpha}{ctg 3\alpha} = 1$

24. Упростите выражение.

a) $\frac{1 - ctg^2(-\alpha)}{\cos\alpha + \sin(-\alpha)} \cdot \sin(-\alpha) + ctg(-\alpha)$ b) $\frac{\sin(\alpha-\beta) - \sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\alpha)}$

25. Докажите тождество.

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2\sin 2\alpha\cos 5\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha$.

26. Найдите $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $\sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, если $\cos(\alpha+\beta)$.

27. Докажите тождество: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

28. Вычислите: $\sin(-300^0)\cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$.

30. Найдите $\sin\alpha + \cos\alpha$, если $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Арифметическая прогрессия

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;
2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;
3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n, k \in N$, $n > k$;
4. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;
5. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n, k \in N$, $n > k$;
6. Для членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$ имеем $a_n + a_m = a_k + a_l$, здесь $n + m = k + l$;
7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;
8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Геометрическая прогрессия

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;
3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ и $n > k$;
4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;
5. Для членов геометрической прогрессии $\{b_n\}$ имеем $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$, здесь $n + m = k + l$;
6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$. Если $q = 1$ то $S_n = b_1 \cdot n$;
7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;
8. Сумма (всех членов) бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1, q \neq 0.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найдите восьмидесятый член арифметической прогрессии, если $a_1 = -3$ и $d = 6$.

2. Последовательность 2, 6, 10, 14, 18, ... составляет арифметическую прогрессию. Напишите формулу её n-члена.

3. В арифметической прогрессии:

a) найдите a_1 и d, если $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$;

b) найдите a_7, если $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$;

c) найдите a_{13}, если $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$;

d) найдите a_{10}, если $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$.

4. Если $b_2 = 4$ и $b_3 = 6$ в геометрической прогрессии, найдите b_7.

5. Если $b_1 = 3$ и $q = -2$ в геометрической прогрессии, найдите b_8.

6. В геометрической прогрессии:

a) если $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$, найдите b_2;

b) если $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, найдите b_7;

c) если $b_4 = 8$, $b_8 = 128$, найдите b_1 и q;

d) если $b_9 = -1$, $q = -1$, найдите b_1 и b_{17}.

7. Если $b_1 = 3$, $q = 2$ в геометрической прогрессии, найдите S_6.

8. Если $b_2 = 6$, $q = 3$ в геометрической прогрессии, найдите S_8.

9. В геометрической прогрессии $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Найдите сумму её первых 10 членов.

10. Первый член геометрической прогрессии равен 5, шестой член равен 1215. Найдите её знаменатель.

11. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. Найдите её сумму.

12. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии 12, 4, $\frac{4}{3}$, ...

13. В геометрической прогрессии:

a) если $b_1 = 24$, $b_2 = 36$, найдите q;

b) если $b_5 = 36$, $b_7 = 144$, найдите b_6;

c) если $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$, найдите b_7.

14. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 150. Если $q = \frac{1}{3}$, найдите b_1.

15. Если $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ в бесконечно убывающей геометрической прогрессии, найдите q.

16. В геометрической функции

a) если $b_1 = 3$, $q = 5$, найдите S_4;

b) если $b_2 = 8$, $b_3 = 4$, найдите S_6;

c) если $b_1 = -2$, $b_6 = -486$, найдите S_6.

17. Если $q=-\frac{1}{2}$, $S_8=\frac{85}{64}$ в геометрической прогрессии, найдите b_1.

18. Напишите формулу нахождения n-ого члена арифметической прогрессии.

a) $a_1=5,\ a_2=-5$ b) $a_1=-3,\ a_6=12$ c) $a_1=6,\ a_{10}=33$

19. Если четвёртый и шестой члены в арифметической прогрессии равны соответственно 16 и 19, найдите её первый член.

20. Найдите сумму первых 25 натуральных чисел.

21. Если $a_3+a_7=5$ и $a_4=1$ в арифметической прогрессии (a_n), найдите сумму её первых десяти членов.

22. Начиная с какого номера все члены арифметической прогрессии будут положительными, если $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$?

23. Если $a_{12}+a_{15}=20$ в арифметической прогрессии, найдите S_{26}.

24. Если $a_2+a_6=44$, $a_5-a_1=20$ в арифметической прогрессии, найдите a_{100}.

25. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых одиннадцати её членов.

26. Если $S_n=3n^2+n$ в арифметической прогрессии, найдите a_1 и d.

27. Если $b_{12}=4\cdot b_{10}$ и $b_3=6$ в возрастающей геометрической прогрессии, найдите b_7.

28. $b_5=\sqrt[3]{2}$ в геометрической прогрессии. Найдите произведение первых девяти её членов.

29. Если $S_4=10\frac{5}{8}$, $S_5=42\frac{5}{8}$, $b_1=\frac{1}{8}$ в геометрической прогрессии, найдите q.

30. Если $b_1=1$ и $b_3+b_5=90$ в геометрической прогрессии, найдите q.

31. Три числа x, y и 12 образуют убывающую геометрическую прогрессию. Если 12 заменить на 9, то полученная тройка чисел образует арифметическую прогрессию. Найдите $x+y$.

32. В геометрической прогрессии $b_2\cdot b_4\cdot b_6=216$ и $b_3=12$. Найдите сумму её первых шести членов.

33. Сумма всех членов с нечётными номерами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 36. Сумма всех членов с чётными номерами равна 12. Найдите знаменатель и второй член этой прогрессии.

34. Сумма первого и четвёртого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 54, сумма второго и третьего членов равна 36. Найдите сумму этой прогрессии.

35. В арифметической прогрессии:

a) найдите S_{12}, если $a_1=-3$, $a_3\cdot a_7=24$;
b) найдите S_{10}, если $a_2+a_9=20$;
c) найдите S_8, если $a_3+a_6=19$;
d) найдите S_{16}, если $S_4=-28$, $S_6=58$.

ГЛАВА 1. ФУНКЦИИ

- ФУНКЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ
- ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ
- АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ
- СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ
- СВОЙСТВА ФУНКЦИИ
- ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ
- ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
- ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

ФУНКЦИЯ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Функция

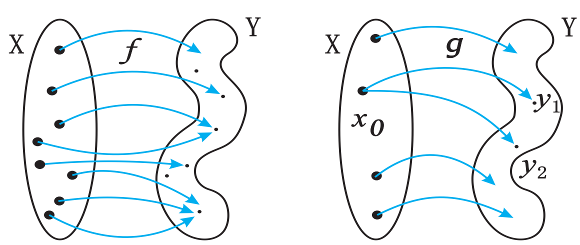
При изучении связи между величинами, рассматриваемыми в природе, производстве, экономике и других областях, значительную роль играет понятие, называемое функцией.

Пусть X и Y – числовые множества. Правило, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ единственную точку $y \in Y$, называется функцией.

Правила, определяющие функцию, обозначаются буквами f, g, ... Запись $y = f(x)$ означает, что правило f сопоставляет точке $x \in X$ точку $y \in Y$, и в этом случае говорят, что дана функция f, сопоставляющая точкам множества X точки множества Y. Здесь x называется свободной переменной или аргументом, а y – зависимой переменной или функцией. Функция f обычно выражается в виде $y = f(x)$ или $f(x)$

Ниже приведены некоторые функции:

Рисунок 1



Правило f является функцией: каждому элементу X множества X поставлен в соответствие единственный элемент Y множества.

Правило g не является функцией: элементу $x_0 \in X$ поставлены в соответствие два элемента $y_1, y_2 \in Y$.

Правило, являющееся функцией (f) и не являющееся функцией (g).

1) *линейная функция:* $y = kx + b$

2) *квадратичная функция:* $y = ax^2 + bx + c$

3) *степенная функция:* $y = x^n$

4) *иррациональная функция:* $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) *функция обратной пропорциональности:* $y = \dfrac{k}{x}$ (здесь $k \neq 0$)

6) *функция модуля:* $y = |x|$

Способы задания функции

Функции могут быть заданы следующими способами:

1. Аналитический способ задания функций. Если функция задана одной или несколькими формулами, или уравнениями, то говорят, что эта функция задана аналитически. Например, уравнение $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ движения материальной точки – функция, заданная аналитическим способом.

2. Табличный способ задания функции обычно устанавливает взаимосвязи между переменными в практических экспериментах.

Например, ежедневное изменение температуры можно привести в виде таблицы.

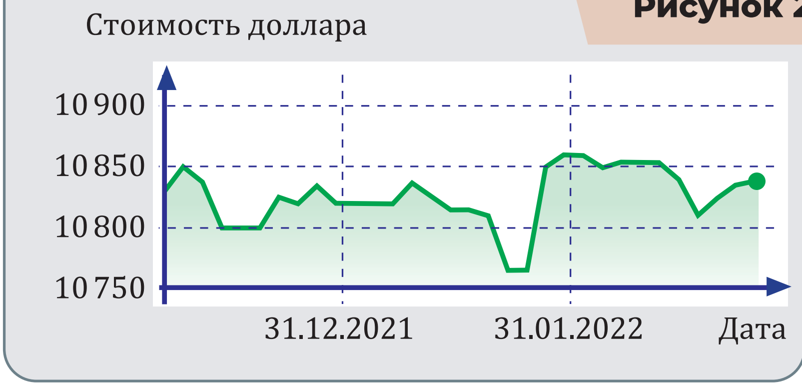
Здесь часы суток – свободная переменная (то есть аргумент), а температура – зависимая переменная (то есть функция).

Недельное изменение температуры воздуха в Ташкенте 20-26 января 2022 года представлено в следующей таблице.

Число		20.01	21.01	22.01	23.01	24.01	25.01	26.01
Температура, t °C	Днём	13	9	3	4	6	7	8
	Ночью	–2	–3	–1	–2	–3	–4	–3

3. В некоторых практических работах зависимость переменных даётся графически. Например, месячное и годовое изменение стоимости доллара по отношению к суму можно выразить графически. Здесь даты являются аргументом, а стоимость доллара по отношению к суму – функцией.

Рисунок 2



4. Функция может быть задана в виде словесного описания. Например, в задаче: «Семья, состоящая из 4 человек, использует 1 kg риса для приготовления плова. Сколько риса понадобится, если придут 2 гостя?» – количество риса является функцией от количества людей. Иными словами, количество людей – аргумент, а количество риса – функция.

ПРИМЕРЫ

1. Напишите в аналитическом виде функцию, заданную словесным описанием (например, функция, заданная текстом «вычесть 5 из квадрата аргумента», имеет следующий аналитический вид: $f(x) = x^2 - 5$).

a) умножьте аргумент на 3 и вычтите из него 5;

b) возведите аргумент в квадрат, а затем прибавьте к результату 2;

c) вычтите 1 из аргумента, а затем возведите его в квадрат;

d) прибавьте к аргументу 1, а затем извлеките из него квадратный корень и разделите на 2.

2. Задано текстовое правило функции. Найдите (a) аналитический, (b) табличный, (c) графический виды функции.

a) чтобы найти $f(x)$, разделите аргумент на 3, а затем прибавьте $\frac{2}{3}$;

b) чтобы найти $g(x)$, вычтите из аргумента 4, а затем умножьте на $\frac{3}{4}$;

c) пусть функция $T(x)$ – сумма налогов на продукт, купленный за x сумов. Вычислите 8% от цены товара, чтобы найти сумму налогов на продукт;

d) пусть функция $V(d)$ – правило нахождения объёма шара диаметром d. Чтобы найти объём, умножьте π на третью степень диаметра и разделите на 6.

3. Заполните таблицу значений заданной функции:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
–1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Вычислите значения функции в заданных аргументах.

a) $f(x) = x^2-6$ $\quad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\quad f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\quad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\quad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\quad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\quad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Определите, являются ли заданные уравнения функциями от переменной x.

a) $3x-5y=7$ $\quad$ b) $3x^2-y=5$ $\quad$ c) $x=y^2$ $\quad$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ $\quad$ f) $2x^2-4y^2=3$ $\quad$ g) $2xy-5y^2=4$ $\quad$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ $\quad$ j) $2x+|y|=0$ $\quad$ k) $x=y^3$ $\quad$ l) $x=y^4$

6. Какая из следующих таблиц является функцией от переменной x?

a)

x	y
–5	–12
9	2
11	2

b)

x	y
–10	–9
$3\frac{1}{2}$	–6
–10	–1

c)

x	y
2	0
–5	–3
–17	7
6	17
11	7

d)

x	y
–4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	–10

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Область определения и множество значений функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Множество элементов, которые может принимать аргумент x, называется областью определения функции $y = f(x)$. Множество значений, которые может принимать функция y, называется множеством значений функции $y = f(x)$. Обычно они обозначаются как $D(f)$ и $E(f)$, соответственно.

Таблица области определения и множества значений некоторых функций:

Функция	Область определения	Множество значений
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
3) $y = \|x\|$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
4) $y = \dfrac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
6) $y = \sqrt[2n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0; +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$
8) $y = \sqrt[2n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$

При любом значении аргумента x, не принадлежащем области определения функции $y = f(x)$, функция $y = f(x)$ будет неопределённой, или, другими словами, выражение $f(x)$ не будет иметь смысла. Например, при $x = -1$ для функции $y = \sqrt{x}$ и при $x = 0$ для функции $y = \dfrac{k}{x}$, соответственно, получаемые выражения не имеют смысла.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$.

Решение. Знаменатель рационального выражения не может быть равным нулю, т. е.

$$x^2 - x \neq 0$$
$$x(x-1) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ и } x \neq 1.$$

Значит, аргумент x не может принимать значения 0 и 1. Поэтому область определения функции – множество всех действительных чисел, кроме 0 и 1.

Ответ: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Найдите область определения функции $y=\sqrt{9-x^2}$.

Решение. Подкоренное выражение отрицательным быть не может. Иными словами,

$$9-x^2\geq 0$$
$$(3-x)(3+x)\geq 0$$
$$-3\leq x\leq 3.$$

Значит, аргумент x может принимать значения только из отрезка [–3; 3].

Ответ: $D(y)=[-3;3]$.

Пример 3. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Решение. В знаменателе заданной функции находится выражение под квадратным корнем. Это выражение не может быть равным нулю и отрицательным. Поэтому

$$x+1>0$$
$$x>-1.$$

Значит, область определения функции $D(y)=(-1;\infty)$.

Ответ: $D(y)=(-1;\infty)$.

График функции

У функции $y = f(x)$ каждому значению x из его области определения $D(f)$ соответствует единственное значение $f(x)$ из множества значений $E(f)$. В результате каждый элемент $x\in D(f)$ определяет в координатной плоскости Oxy единственную точку $(x, f(x))$.

Совокупность всех точек $(x, f(x))$, образованных в координатной плоскости Oxy, называется графиком функции $y=f(x)$.

На рисунках 1 и 2 показаны графики функций.

Рисунок 1

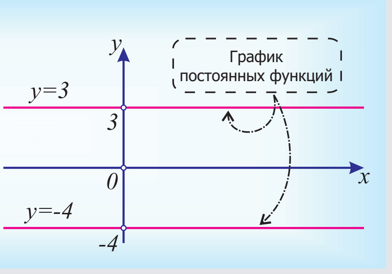


График функции f(x)

Рисунок 2

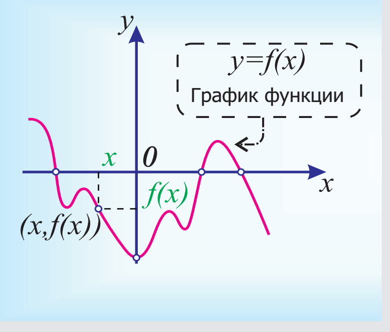


График функции f(x)

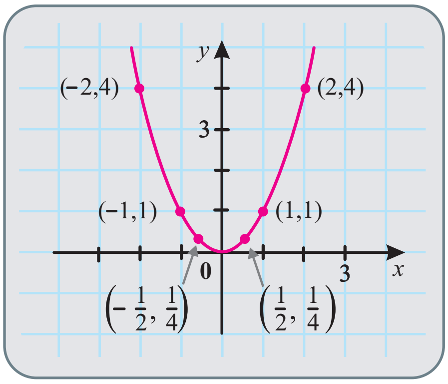
Пример 4. Постройте графики следующих функций

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = \sqrt{x}$

Решение. Чтобы построить графики этих функций, сначала составляем таблицу некоторых её значений. Затем отмечаем эти точки на координатной плоскости и соединяем их плавной кривой.

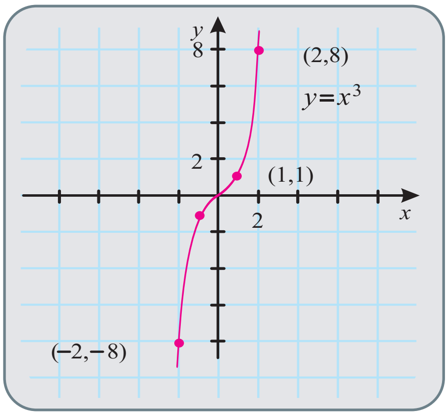
a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



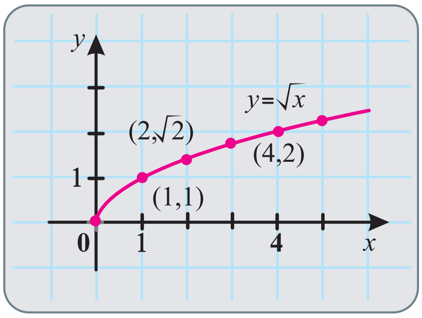
b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



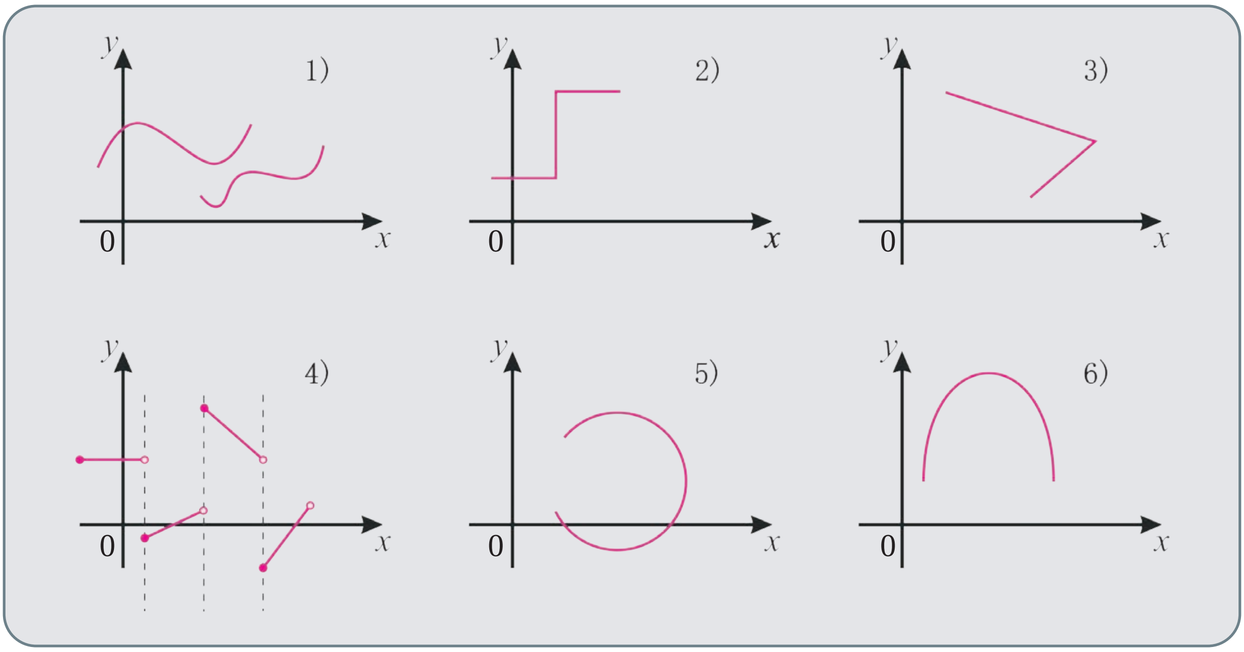
c)

x	0	1/4	1	2	4	9
$y=\sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3



Следует отметить, что для того чтобы кривая, изображённая на плоскости Oxy, была графиком функции $y = f(x)$, каждая прямая, параллельная оси Oy, должна пересекать данную линию не более чем в одной точке.

В противном случае, то есть если какая-то прямая, параллельная оси *Oy*, пересекает данную кривую более чем в одной точке, то эта кривая не может быть графиком функции. Из линий, показанных на рисунке ниже, линии 4) и 6) являются графиком функции, а линии 1), 2), 3) и 5) не являются графиком функции.



ПРИМЕРЫ

1. Найдите область определения и множество значений функции.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x$, $2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2,\ 0\le x\le 2$

2. Найдите область определения функции.

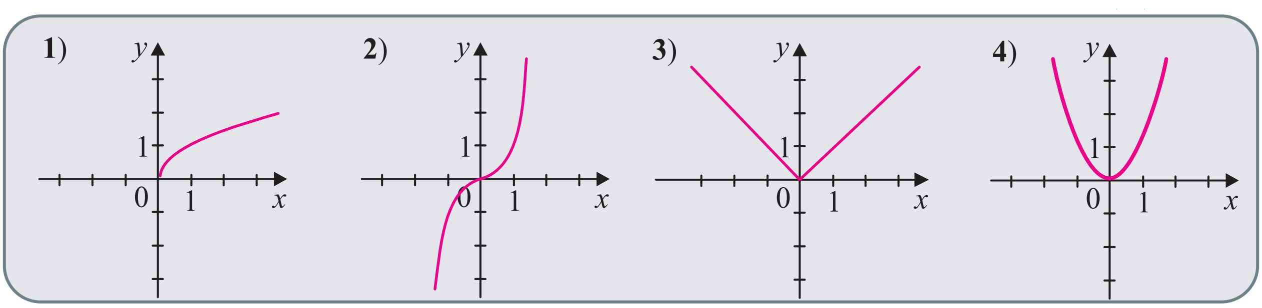
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

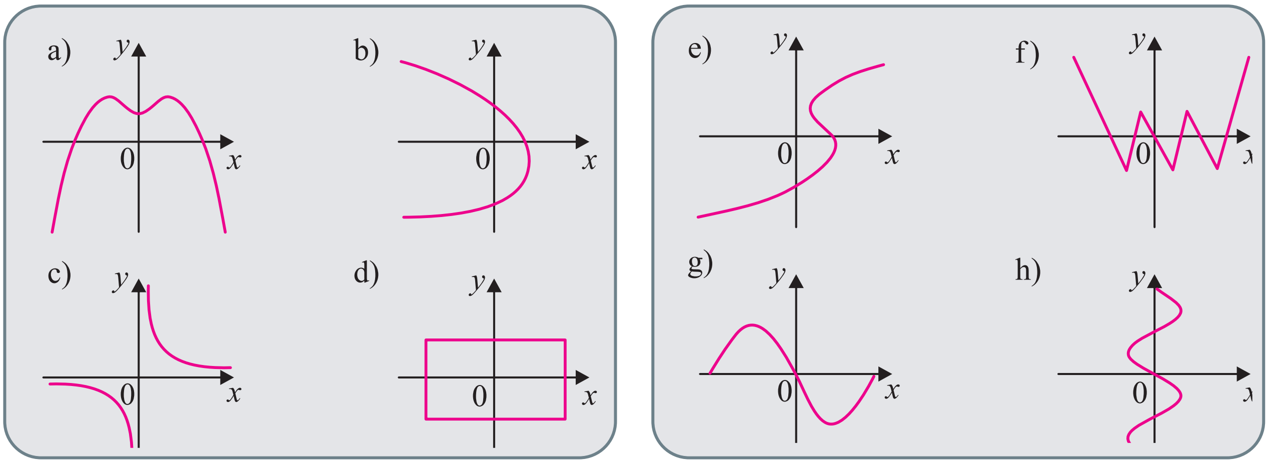
g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

3. Укажите график, соответствующей функции:

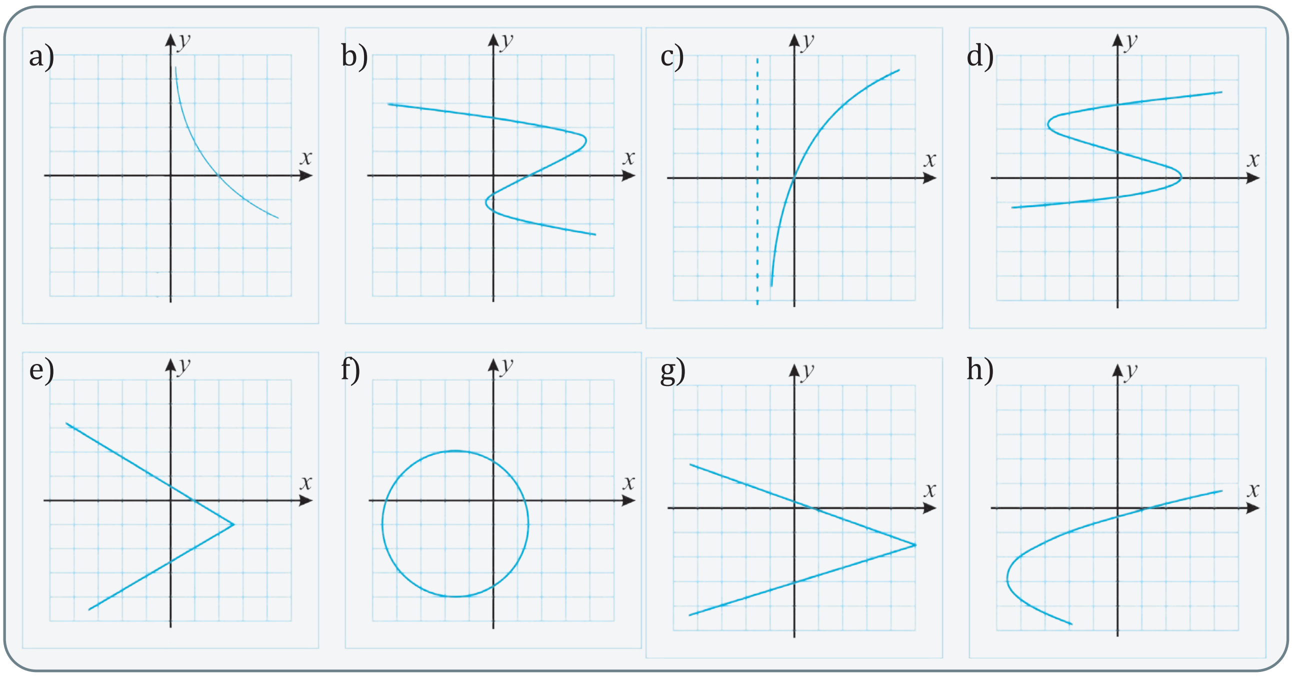
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Определите, какая из заданных линий является графиком функции.



5. Определите, какая из заданных линий не является графиком функции.



6. Постройте графики заданных функций.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

7. Составьте таблицу некоторых значений заданной функции и начертите её график.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$

d) $r(x)=3x^4$ e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$

g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$ i) $f(x)=1+\sqrt{x}$

j) $C(t)=\dfrac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\dfrac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФУНКЦИЯМИ

Арифметические операции над функциями

Над функциями можно выполнять арифметические операции: сложение (+), вычитание (–), умножение (×), деление (÷).

Пусть областью определения функций $f(x)$ и $g(x)$ являются множества A и B, соответственно. Суммой этих функций в множестве $A \cap B$ называется функция, принимающая значение $f(x) + g(x)$ в каждом элементе $x \in A \cap B$. Сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначается как $(f + g)(x)$. Значит,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Таким же образом можно определить разность, умножение и деление функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Обратите внимание!

1. Если $A \cap B = \varnothing$, эти операции не определены.

2. При определении деления двух функций $f(x)$ и $g(x)$ требуется, чтобы $g(x) \neq 0$ для каждого элемента x, взятого из A ∩ B.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Даны функции $f(x) = \frac{1}{x-2}$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Найдите функции $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ и их области определения.

b) Найдите значения $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

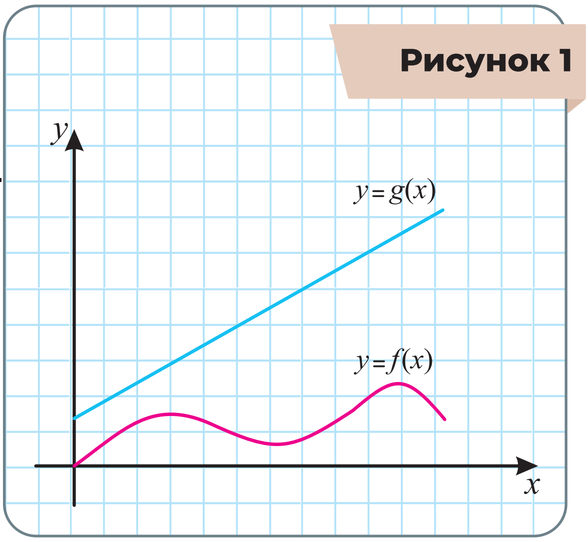
b) Поскольку значение $x = 4$ принадлежит области определения каждой новой функции, то определены следующие значения:

$$(f+g)(4)=f(4)+g(4)=\frac{1}{4-2}+\sqrt{4}=\frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4)=f(4)-g(4)=\frac{1}{4-2}-\sqrt{4}=-\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4)=f(4)g(4)=\left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4}=1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4)=\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{1}{(4-2)\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$



Пример 2. Сложите графически функции.

На рис. 1. изображены графики функций f и g. Постройте график функции $f + g$, используя графическое сложение.

Решение. Известно, что график функции f состоит из множества

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

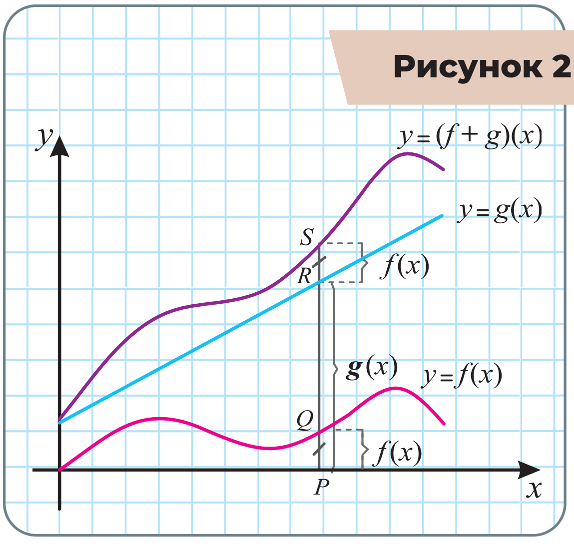
в плоскости Oxy. Точно так же множество

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

является графиком функции g. Под графическим способом сложения функций f и g подразумевается множество

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cap D(g)\}.$$

В этом случае для формирования точки S графика функции $f + g$ отрезок RS длиной отрезка PQ ставится над отрезком PR.



ПРИМЕРЫ

1. Сложите и вычтите функции.

a) $f(x)=5x+1,\ g(x)=-2x$

b) $f(x)=-3x+3,\ g(x)=-5x+4$

c) $f(x)=2x+1,\ g(x)=-5x+3$

d) $f(x)=-3x^2+7x,\ g(x)=2x+4$

2. Умножьте функции.

a) $f(x)=-x^2,\ g(x)=-3x+1$

b) $f(x)=-3x^2+3,\ g(x)=-x$

c) $f(x)=-x+3,\ g(x)=5x+6$

d) $f(x)=-4x+5,\ g(x)=-3x+1$

3. Найдите $(f+g)(x),(f-g)(x),(f\cdot g)(x)$ и $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ и их области определения.

a) $f(x)=x,\ \ g(x)=2x$

b) $f(x)=x,\ \ g(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^2+x,\ \ g(x)=x^2$

d) $f(x)=3-x^2,\ \ g(x)=x^2-4$

e) $f(x)=5-x,\ \ g(x)=x^2-3x$

f) $f(x)=x^2+2x,\ \ g(x)=3x^2-1$

g) $f(x)=\sqrt{25-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x+3}$

h) $f(x)=\sqrt{16-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x^2-1}$

i) $f(x)=\dfrac{2}{x},\ \ g(x)=\dfrac{4}{x+4}$

j) $f(x)=\dfrac{2}{x+1},\ \ g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

4. Найдите область определения функции.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

b) $f(x)=\sqrt{x+4}-\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$

c) $h(x)=(x-3)^{-\frac{1}{4}}$

d) $k(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

5. Пользуясь графиками (рис. 3-4), начертите график функции $f + g$ с помощью метода графического сложения.

Рисунок 3

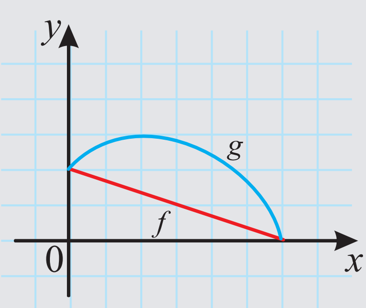
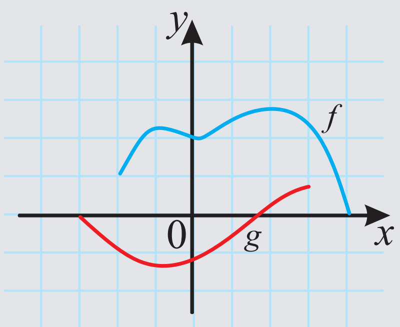


Рисунок 4



СЛОЖНАЯ, ОБРАТНАЯ, ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Сложная функция

В результате последовательного применения функций образуются новые зависимости переменных. Если на множестве X задана функция $y = f(x)$, а аргумент x есть функция $x = g(t)$, определённая на множестве T, то зависимость $y = f(g(t))$ называется сложной функцией, определённой на множестве T.

Например, рассмотрим функцию $y = 2x^2-3x$, заданную на множестве $X = (-\infty; +\infty)$, и функцию $x=\sqrt{t}$, заданную на множестве $T=[0;+\infty)$. Тогда функция $y=2t-3\sqrt{t}$ является сложной функцией функций $y=2x^2-3x$ и $x=\sqrt{t}$ на $T=[0;+\infty)$.

Пример 1. Даны функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=x-3$.

a) найдите сложные функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ и их области определения;

b) найдите $f(g(5))$ и $g(f(7))$.

Решение. а) Справедливы следующие равенства:

$f(g(x)) = f(x-3)$, по определению g;

$f(g(x)) = (x-3)^2$, по определению f;

$g(f(x)) = g(x^2)$, по определению f;

$g(f(x)) = x^2-3$, по определению g.

Обе функции $f(g(x))$ и $g(f(x))$ имеют область определения R.

b) В найденных сложных функциях вместо x подставим заданные значения:

$f(g(5)) = (5-3)^2 = 2^2 = 4$, $\quad g(f(7)) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$.

Пример 2. Если даны функции $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt{2-x}$, найдите следующие функции и их области определения (рис. 1).

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

Решение.

а) Имеем:

$f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right)$ по определению g,

$f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$ по определению f.

Область определения $2-x\geq 0$ для $\sqrt[4]{2-x}$, отсюда $x \leq 2$.

Рисунок 1

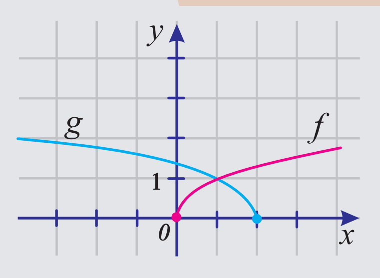
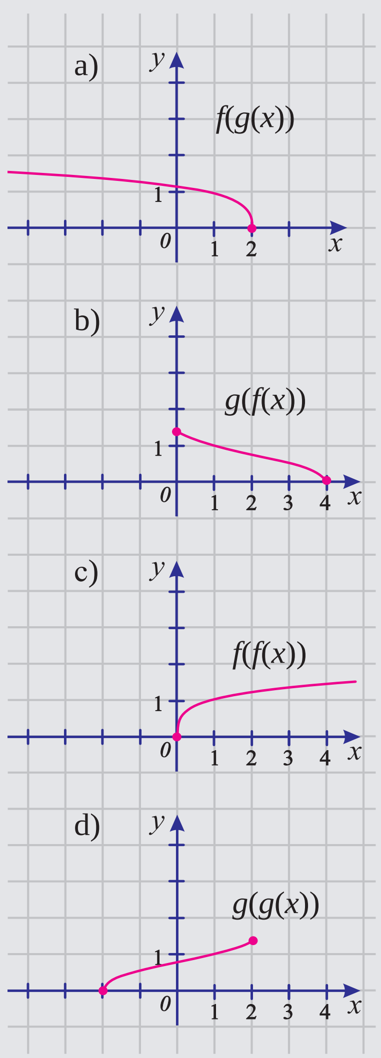


Рисунок 2



Таким образом, область определения функции $f(g(x))$ $\sqrt[4]{2-x}$ есть множество $(-\infty; 2]$ (рис. 2a).

b) $g(f(x)) = g(\sqrt{x})$ по определению f,

$g(\sqrt{x}) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ по определению g.

Область определения $x \geq 0$ для $\sqrt{x}$. Область определения $2-\sqrt{x} \geq 0$ для $\sqrt{2-\sqrt{x}}$, отсюда $\sqrt{x} \leq 2$ или $x \leq 4$. Итак, $0 \leq x \leq 4$ (рис. 2b).

c) $f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ по определению f.

Область определения $[0; +\infty)$ для $\sqrt[4]{x}$.

d) $g(g(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ по определению g.

Для $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ областью определения является множество тех значений x, для которых

$$2-\sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2-x \leq 4 \Rightarrow$$
$$-2 \leq -x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Итак, для $g(g(x))$ областью определения является отрезок $[-2; 2]$ (рис. 2d).

Пример 3. Найти $f(g(h(x)))$, если $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ и $h(x) = x+3$.

Решение.

$f(g(h(x))) = f(g(x+3))$ по определению h,

$f(g(h(x))) = f((x+3)^{10})$ по определению g,

$f(g(h(x))) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$ по определению f.

До сих пор мы рассматривали случаи построения сложных функций из заданных функций. Но в математическом анализе очень полезно выполнять «обратное действие» – уметь выделять составляющие функции из сложных. Рассмотрим это на следующем примере.

Пример 4.

Дана функция $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$. Приведите пример функций f и g, для которых $F = f(g(x))$.

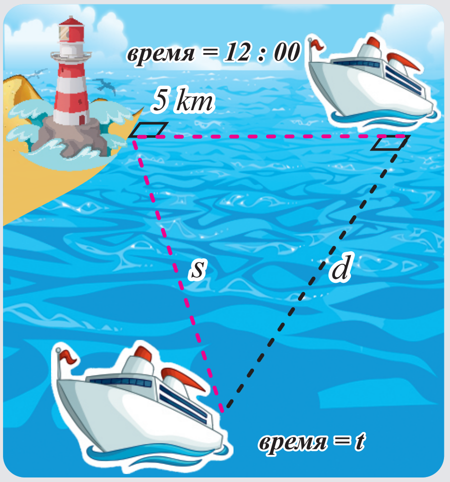
Решение.

Можно взять функции $g(x) = x+9$ и $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Тогда $f(g(x)) = f(x+9) = \sqrt[4]{x+9}$ по определению g и f.

Функции f и g могут быть выбраны другими способами. Например, $f(x)=\sqrt{x}$ и $g(x)=\sqrt{x+9}$.

Пример 5. Применение сложной функции.

Рисунок 3



Катер движется параллельно берегу с постоянной скоростью 20 km/h. Он прошёл перед маяком в 12:00 в 5 km от берега.

a) Запишите расстояние *s* между маяком и катером как функцию, зависящую от расстояния *d,* пройденного катером после 12:00, то есть в виде следующей функции:

$$s=f(d).$$

b) Запишите *d* в виде функции $d=g(t)$, зависящей от времени *t*, прошедшего после 12:00.

c) Найдите сложную функцию $f(g(t))$. Что означает эта функция?

Решение. Обратимся к рис. 3.

a) Применив теорему Пифагора, получим зависимость расстояния *s* от *d* следующим равенством:

$$s=f(d)=\sqrt{25+d^2}.$$

b) Поскольку катер движется с постоянной скоростью 20 km/h, то равенство

$$d=g(t)=20t$$

устанавливает зависимость расстояния *d* от *t*.

c) Итак,

$f(g(t))=f(20t)$ по определению *g,*

$f(g(t))=\sqrt{25+(20t)^2}$ по определению *f.*

Функция $f(g(t))$ представляет собой расстояние между катером и маяком, зависящее от времени.

Обратная функция

Если уравнение $f(x)=y$ разрешимо относительно x и для каждого y имеет единственный корень $g(y)$, то зависимость $x=g(y)$ называется обратной функцией для функции $y=f(x)$. Вместо записи $x=g(y)$ по правилу используется запись $y=g(x)$. Обычно обратная к $y=f(x)$ функция записывается в виде $y=f^{-1}(x)$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=3x-5$. Выразим x через y:

$$3x-5=y \Rightarrow 3x=y+5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{3}.$$

В последнем равенстве, меняя местами x и y, получим функцию

$$y=\frac{x+5}{3}.$$

Эта функция является обратной для функции $y=3x-5$.

Замечание. Для заданной функции $y=f(x)$ и её обратной функции $y=f^{-1}(x)$ имеет место $D\left(f^{-1}\right)=E(f)$ и $E\left(f^{-1}\right)=D(f)$.

Внимание! Отметим, что $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$, здесь (-1) означает показатель степени. В записи $f^{-1}(x)$ число (-1) означает обратную функцию, а не показатель степени. В общем случае, $(f(x))^{-1} \neq f^{-1}(x)$. Например:

для функции $f(x)=3x-5$ имеют место $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{3}$ и $(f(x))^{-1}=\dfrac{1}{3x-5}$.

Пример 2. Найдите функцию, обратную заданной. $f(x)=\dfrac{x^5-3}{2}$.

Решение. Перепишем функцию в виде $y=\dfrac{x^5-3}{2}$ и решим её относительно x:

$$y=\frac{x^5-3}{2}$$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}.$$

Теперь поменяем местами x и y: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Следовательно, обратная функция: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

Пример 3. Найдите функцию, обратную заданной: $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

Решение. Перепишем функцию в виде $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ и решим её относительно x:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$yx-y=2x+3$$

$$yx-2x=y+3$$

$$x\cdot(y-2)=y+3$$

$$x=\frac{y+3}{y-2}$$

Таким образом, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ – обратная функция.

Пример 4. Построение графика обратной функции

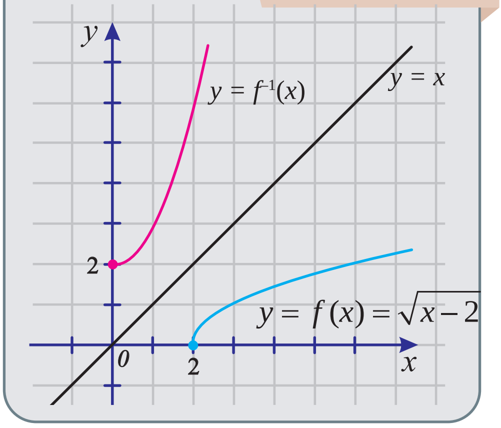
По графику функции $f(x)=\sqrt{x-2}$ постройте график функции f^{-1}. Напишите аналитический вид функции .

Решение.

1. График функции $y=\sqrt{x-2}$ приведён на рисунке 4.

2. График функции f^{-1} строится симметрическим отражением графика функции f относительно прямой $y=x$ (рис. 4).

Рисунок 4



3. Функция $y=\sqrt{x-2}$ решается относительно x с учётом того, что $y\ge 0$:

$$\sqrt{x-2}=y$$

$$x-2=y^2$$

$$x=y^2+2,\quad y\ge 0.$$

Теперь поменяем местами x и y: $y=x^2+2$, $x\ge 0$.

Итак, обратной является функция $f^{-1}(x)=x^2+2$, $x\ge 0$.

Графиком этой найденной обратной функции $f^{-1}(x)$ является правая ветвь параболы $y=x^2+2$. Это видно из рисунка 4.

Периодические функции

Пусть задана функция $y=f(x)$, а $D(f)$ её область определения. Функция $y=f(x)$ называется периодической функцией, если существует такое $T\neq 0$, что для каждого $x\in D(f)$:

1) значения $x-T$ и $x+T$ принадлежат $D(f)$,

2) выполнены равенства $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$.

Если число T является периодом периодической функции $y=f(x)$, то тогда для любого целого n число nT также является её периодом:

$$f(x+nT)=f(x),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Наименьший положительный период T периодической функции $f(x)$ называется её основным периодом.

Знание периодичности функции полезно при построении её графика. При этом достаточно построить фрагмент графика периодической функции в одном периоде, и этот фрагмент графика повторяется в других периодах.

Например, дробная часть числа $\{x\}$ – функция, ставящая в соответствие свою дробную часть заданному числу x, является периодической функцией (рис. 5). Её основной период равен $T_0 = 1$, т. е. $(x + 1) \in (-\infty; +\infty)$ для произвольного числа $x \in (-\infty; +\infty)$ и справедливо равенство $\{x+1\}=\{x\}$.

Если основной период функции $y = f(x)$ равен T_0, то основным периодом функции $y = kf(ax+b)+c$ будет число $T_1 = \dfrac{T_0}{|a|}$ $(a \neq 0)$.

Рисунок 5

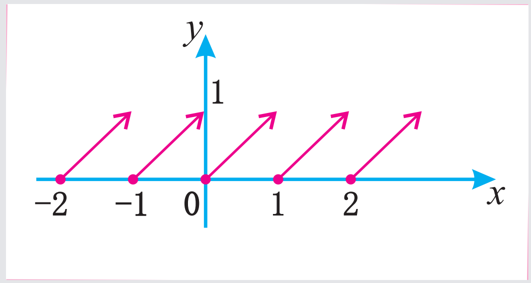


График функции $y = \{x\}$

ПРИМЕРЫ

1. Найдите значения сложных функций, используя $f(x)=2x-3$ и $g(x)=4-x^2$.

a) $f(g(0))$ b) $g(f(0))$ c) $f(f(2))$ d) $g(g(3))$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. Найдите функции $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ и $g(g(x))$ и их область определения.

a) $f(x)=2x+3$, $g(x)=4x-1$

b) $f(x)=6x-5$, $g(x)=\dfrac{x}{2}$

c) $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$

d) $f(x)=x^3+2$, $g(x)=\sqrt[3]{x}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=2x+4$

f) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x-3}$

g) $f(x)=|x|$, $g(x)=2x+3$

h) $f(x)=4-x$, $g(x)=|x+4|$

i) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=2x-1$

j) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x)=x^2-4x$

k) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$

l) $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x+2}$

3. Найдите функции, используя $f(x)=3-x$ и $g(x)=x^2+1$.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. Составьте сложную функцию $f(g(h(x)))$.

a) $f(x)=x-1$, $g(x)=\sqrt{x}$, $h(x)=x-1$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x^3$, $h(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1$, $g(x)=x-5$, $h(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $h(x)=\sqrt[3]{x}$

5. Из сложной функции вида $F(x) = f(g(x))$ выделите её составляющие функции f и g.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e) $F(x)=|1-x^3|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Найдите функцию, обратную заданной f.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6$, $x\ge 0$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$ n) $f(x)=4-x^2$, $x\ge 0$ o) $f(x)=x^2+x$, $x\ge -\dfrac{1}{2}$

7. Найдите функцию, обратную заданной. Нарисуйте график функции $f^{-1}(x)$, используя график функции f.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2$, $x\ge 0$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

8. Найдите функции, соответствующие графикам, приведённым на рис. 6, и начертите график их обратной функции:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=x^2$

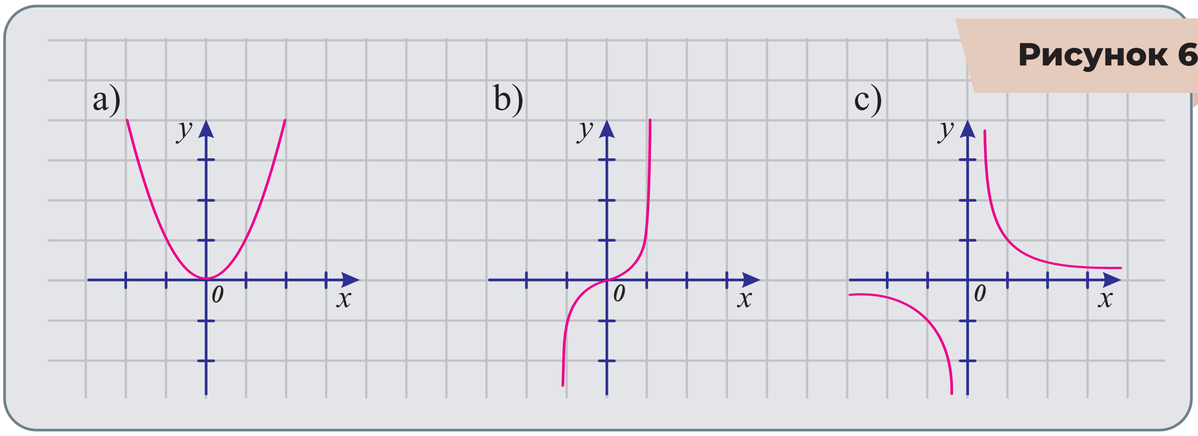


Рисунок 6

9. Докажите, что число $T=\sqrt{2}$ является периодом функции $f(x) = 5$,

10. Покажите, что следующие функции не являются периодическими.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x}$

d) $f(x)=x^2-4$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ

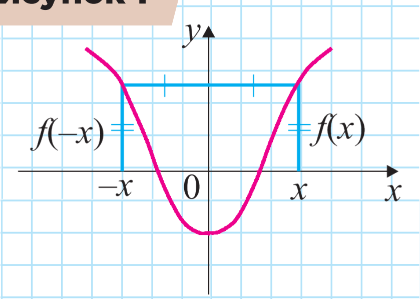
Чётные и нечётные функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, область определения которой $D(f)$ симметрична относительно нуля. Если для произвольной точки $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = f(x)$, то $y = f(x)$ называется **чётной функцией.** График чётной функции является симметричным относительно оси Oy (рис. 1).

Если для произвольного элемента $x \in D(f)$ выполнено равенство $f(-x) = -f(x)$, то $y = f(x)$ называется **нечётной функцией.** График нечётной функции является симметричным относительно начала координат $O(0; 0)$ (рис. 2).

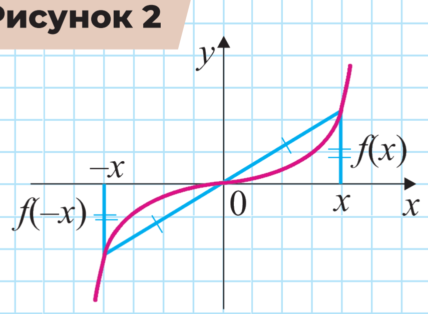
Если не выполнено ни одно из двух вышеуказанных равенств, то функция $y = f(x)$ не является **ни чётной, ни нечётной функцией.**

Рисунок 1



$f(x)$ – чётная функция

Рисунок 2



$f(x)$ – нечётная функция

Пример 1. Проверьте функцию $f(x) = 2x^2 + 5$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x),$$

то есть, поскольку $f(-x) = f(x)$, то функция $f(x) = 2x^2 + 5$ является чётной.

Пример 2. Проверить функцию $f(x) = 2x^3 + 5x$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -(2x^3 + 5x) = -f(x),$$

то есть $f(-x) = -f(x)$, следовательно, $f(x) = 2x^3 + 5$ является нечётной функцией.

Пример 3. Проверьте функцию $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ на чётность или нечётность.

Решение.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 = -2x^3 + 5x^2 + 3x + 1 =$$
$$= (2x^3 - 5x^2 - 3x - 1)$$

В этом случае $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

Поэтому заданная функция не является ни чётной, ни нечётной.

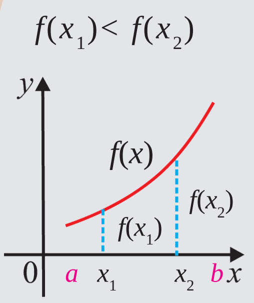
Возрастание и убывание функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$. Если для всех $x_1, x_2 \in (a;b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$ выполнено:

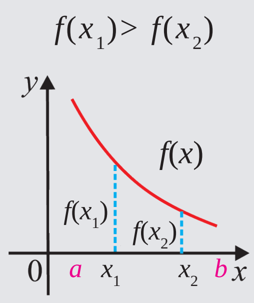
- $f(x_1) < f(x_2)$, то $y = f(x)$ называется возрастающей;
- $f(x_1) > f(x_2)$, то $y = f(x)$ – убывающей;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $y = f(x)$ – невозрастающей;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $y = f(x)$ – неубывающей функцией на интервале $(a; b)$.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие и неубывающие функции называются ***монотонными функциями***.

Рисунок 3



Возрастающая функция



Убывающая функция

Точки экстремума и экстремумы функции

- Если:

1) функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, которому принадлежит точка x_1;

2) неравенство $f(x) < f(x_1)$ выполнено во всех точках x интервала $(a; b)$, отличных от x_1, то точка x_1 называется **точкой максимума функции** $f(x)$ (рис. 4).

Если $x_1 \in D(f)$ точка максимума функции $f(x)$, то значение $f(x_1)$ функции называется **максимума функции** $f(x)$ и обозначается как $y_{\max}$. Итак,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

- Если:

1) функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, которому принадлежит точка x_2;

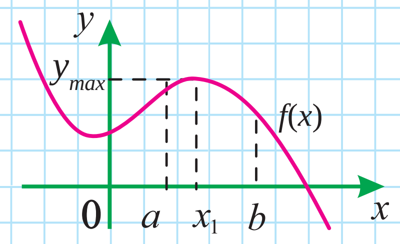
2) неравенство $f(x) > f(x_2)$ выполнено во всех точках x интервала $(a; b)$, отличных от x_2, то точка x_2 называется **точкой минимума функции** $f(x)$ (рис. 5).

Если $x_1 \in D(f)$ – точка минимума функции $f(x)$, то значение $f(x_2)$ функции называется **минимума функции** $f(x)$ и обозначается как $y_{\min}$. Итак,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

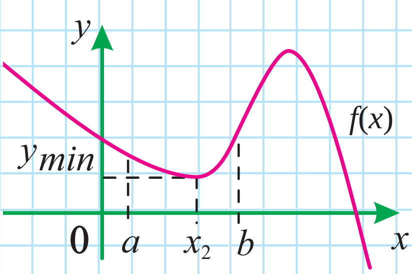
Точка максимума и точка минимума функции обобщаются под одним названием **точкой экстремума** функции. В свою очередь, максимум и минимум функции обобщаются под одним названием **экстремумом функции.**

Рисунок 4



для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$
x_1 – точка максимума функции;
$y_{max} = f(x_1)$ – максимум функции.

Рисунок 5



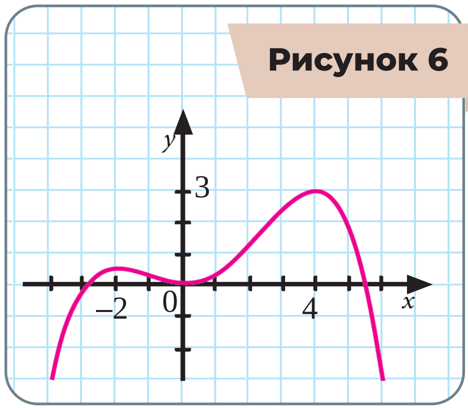
для функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$
x_2 – точка минимума функции;
$y_{\min} = f(x_2)$ – минимум функции.

Пример 4. График функции $f(x)$ приведён на рисунке 6. Покажите промежутки её возрастания и убывания.

Решение.

Из рисунка определим, что функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;-2]$ и $[0;4]$ и убывает на промежутках $[-2;0]$ и $[4;\infty)$.

Рисунок 6



ПРИМЕРЫ

1. Проверьте заданные функции на чётность или нечётность.

a) $f(x)=x^4$ b) $f(x)=x^3$

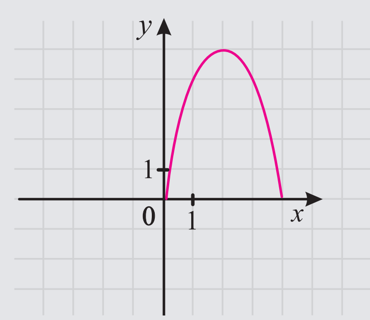
c) $f(x)=x^2+x$ d) $f(x)=x^4-4x^2$

e) $f(x)=x^3-x$ f) $f(x)=3x^3+2x^2+1$

g) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

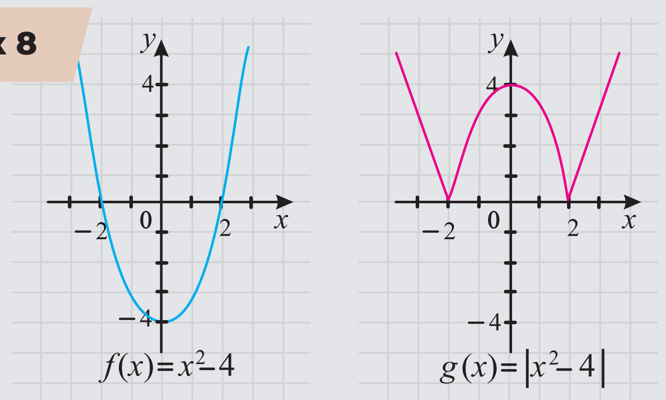
2. На рис. 7 приведён график функции для области $x\geq 0$. В области $x<0$ постройте график так, чтобы образовался график:
a) чётной функции;
b) нечётной функции.

Рисунок 7



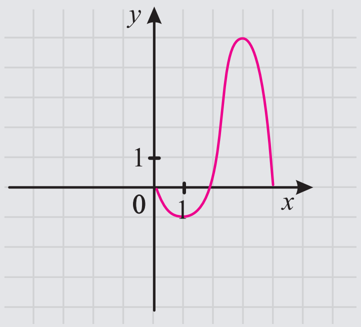
3. На рисунке 8 даны графики функций $f(x)=x^2-4$ и $g(x)=|x^2-4|$. Объясните, как график функции g получается из графика функции f.

Рисунок 8



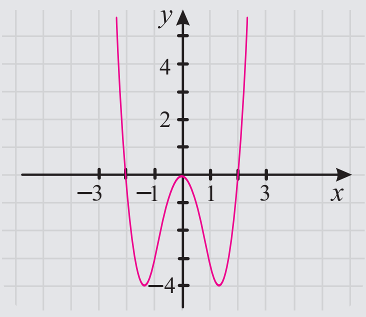
4. На рис. 9 показан график функции для области $x \geq 0$. В области $x<0$ постройте график так, чтобы получился график:
a) чётной функции;
b) нечётной функции.

Рисунок 9



5. Дан график функции $f(x)=x^4-4x^2$ (рис. 10). Используя этот график, постройте график функции $g(x)=\left|x^4-4x^2\right|$.

Рисунок 10



6. На рис. 11 дан график функции *f*. Используя его, определите:
1) область определения и множество значений;
2) интервалы возрастания и убывания функции *f*.

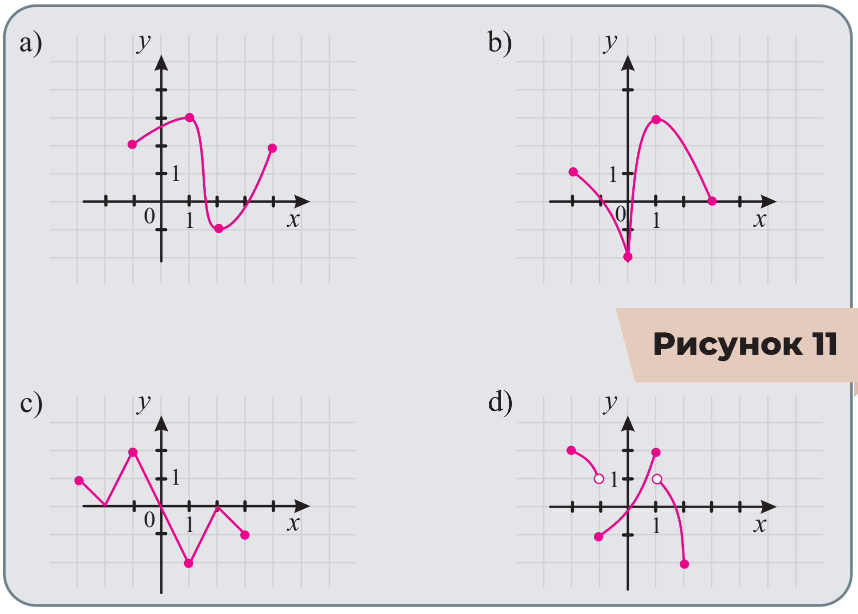


Рисунок 11

7. Постройте графики заданных функций, определите их область определения и множество значений, найдите приближённые промежутки возрастания и убывания.

a) $f(x)=x^2-5x$ b) $f(x)=x^3-4x$ c) $f(x)=x^4-16x^2$

8. Дан график функции f (рис. 12). Используя его, приближённо укажите:

1) все экстремальные точки и все экстремумы;

2) интервалы возрастания и убывания функции f.

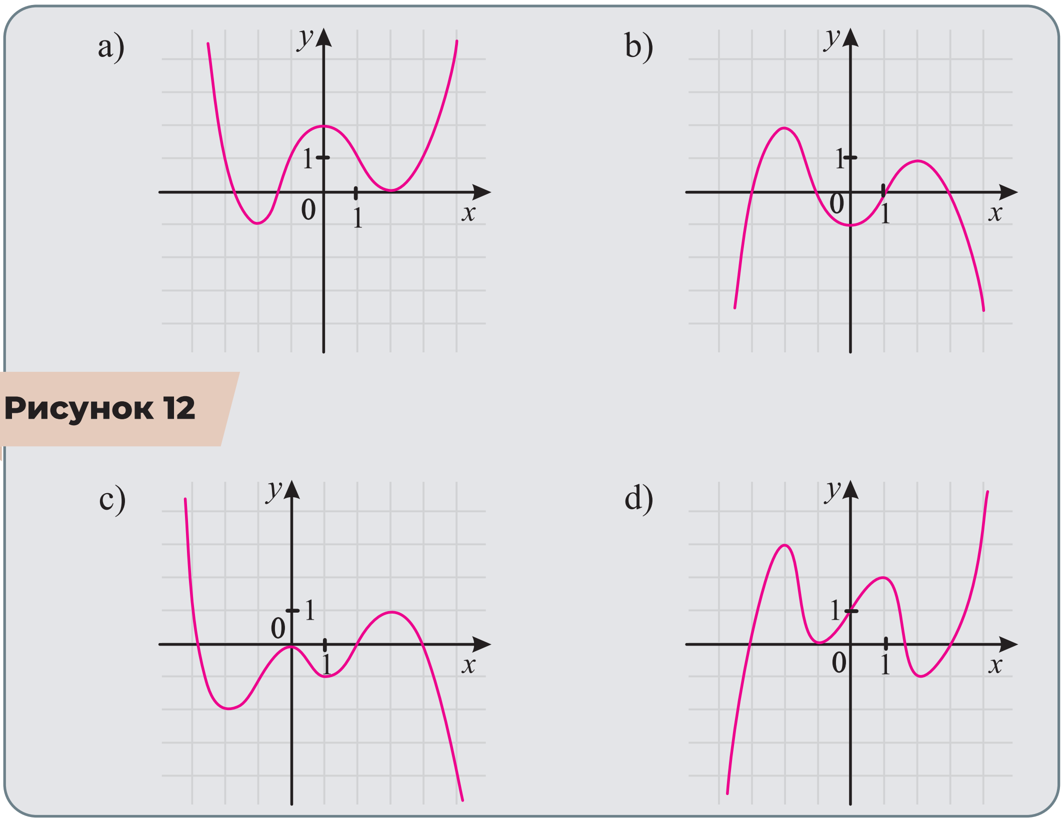


Рисунок 12

9. Постройте эскиз графика следующих функций:

a) функция убывает на $(-\infty;3]$, возрастает на $[3;+\infty)$;

b) функция убывает на $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, постоянна на $[0;1]$;

c) функция убывает на $(-\infty;-6]$, возрастает на $[-6;0]$ и постоянна на $[0;+\infty)$;

d) функция убывает на $[-5;10]$, постоянна на $[10;+\infty)$ и принимает наименьшее значение в точке $x=-5$.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Перемещение графика функции

График заданной функции $y = f(x)$ может быть перемещён в плоскости Oxy. Рассмотрим следующие сдвиги графика функции.

1. Перемещение графика функции по оси Ox.
2. Перемещение графика функции по оси Oy.
3. Перемещение графика функции по направлению некоторого вектора.

1. Перемещение графика функции по оси Ox на x_0 единиц (рис. 1).

При этом:

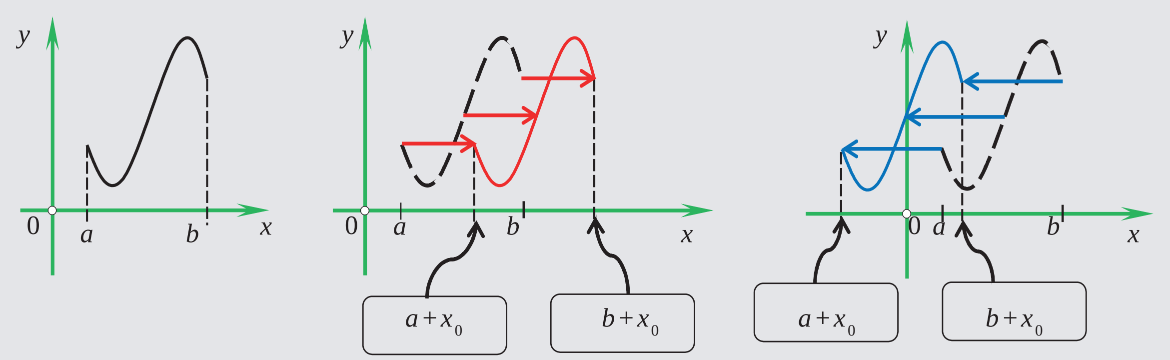
a) если $x_0>0$, то график перемещается на x_0 единиц в направлении оси Ox;

b) если $x_0<0$, то график перемещается на $|x_0|$ единиц против направления оси Ox.

Полученный график представляет собой функцию $y = f(x - x_0)$.

Рисунок 1

Перемещение графика функции $y = f(x)$ по оси Ox



a) График заданной функции $y = f(x)$

b) При $x_0>0$ график функции $y = f(x-x_0)$ перемещается на x_0 единиц направо.

c) При $x_0<0$ график функции $y = f(x)$ перемещается на $|x_0|$ единиц налево.

Пример 1. Постройте график следующих функций, используя график функции $f(x) = x^2$.

a) $g(x)=(x+4)^2$ b) $h(x)=(x-2)^2$

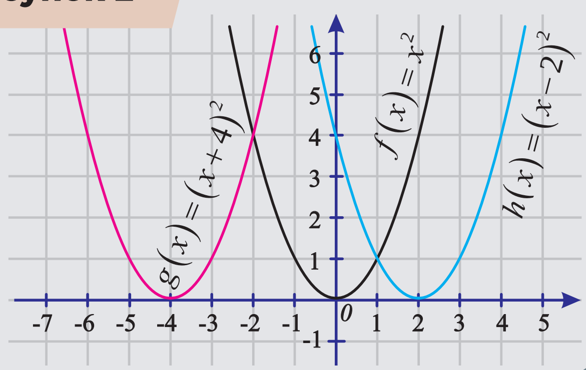
Решение.

Как показано на рис. 2,

a) перемещаем график функции f на 4 единицы влево для построения графика g,

b) перемещаем график функции f на 2 единицы вправо для построения графика h.

Рисунок 2



2. Перемещение графика функции по оси Oy на y_0 единиц (рис. 3).

При этом,

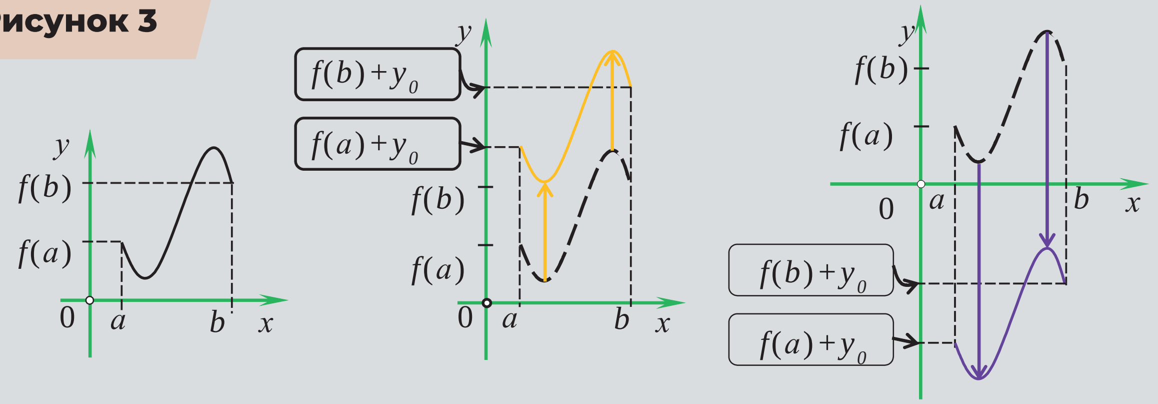
a) если $y_0 > 0$, то график перемещается на y_0 единиц по направлению оси Oy;

b) если $y_0 < 0$, то график перемещается против направления оси Oy на $|y_0|$ единиц (рис. 3).

Полученный график представляет собой функцию $y = f(x) + y_0$

Рисунок 3

Перемещение графика функции $y = f(x)$ по оси Oy



a) График заданной функции $y = f(x)$.

b) При $y_0>0$ график функции $y = f(x)$ перемещается на y_0 единиц вверх.

c) При $y_0<0$ график функции $y = f(x)$ перемещается на $|y_0|$ единиц вниз.

Пример 2. Постройте график следующих функций, используя график функции $f(x) = x^2$:

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

Решение.

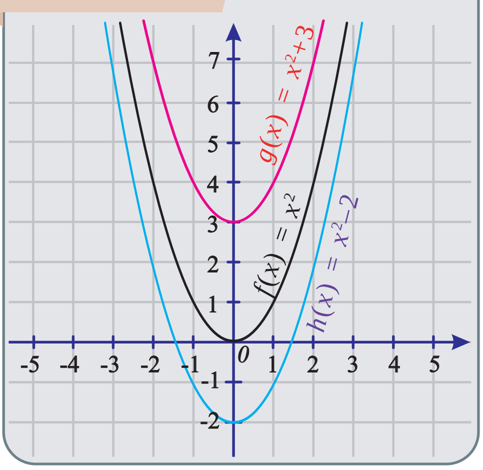
a) Обратим внимание на следующее:

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3.$$

Итак, чтобы нарисовать график функции g так, как показано на рисунке 4, перемещаем график функции f вверх на 3 единицы.

b) Аналогично, чтобы нарисовать график функции h, перемещаем график функции f вниз на 2 единицы.

Рисунок 4



3. Перемещение графика функции в направлении вектора $\vec{p} = (x_0; y_0)$ (рис. 5).

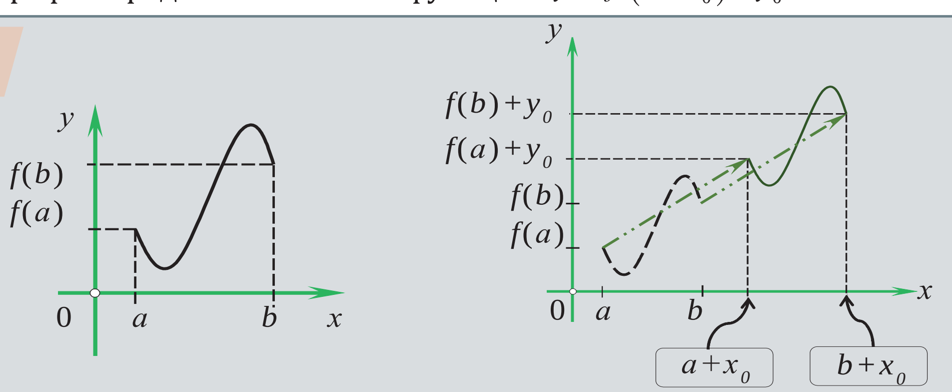
В этом случае график функции перемещается:

a) на $|x_0|$ единиц по направлению (если $|x_0 > 0|$) или против направления (если $|x_0 < 0|$) оси;

b) на $|y_0|$ единиц по направлению (если $|y_0 > 0|$) или против направления (если $|y_0 < 0|$) оси.

Полученный график представляет собой функцию $y = f(x - x_0) + y_0$.

Рисунок 5

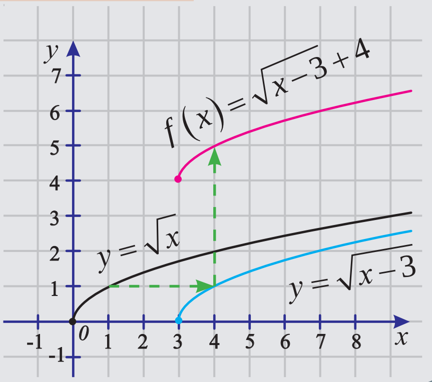


Пример 3. Постройте график функции $f(x)=\sqrt{x-3}+4$.

Решение.

Сначала построим график функции $y=\sqrt{x}$. Сдвинем его на 3 единицы вправо и построим график функции $y=\sqrt{x-3}$. Затем сдвинем этот график вверх на 4 единицы и получим график функции $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ (рис. 6).

Рисунок 6



Сжатие и растяжение графика функций

График заданной функции $y = f(x)$ можно деформировать (сжать или растянуть) в плоскости Oxy. Рассмотрим два важных случая.

Случай 1. В этом случае заданная функция $y = f(x)$ становится $y = kf(x)$ (рис. 7). При этом:

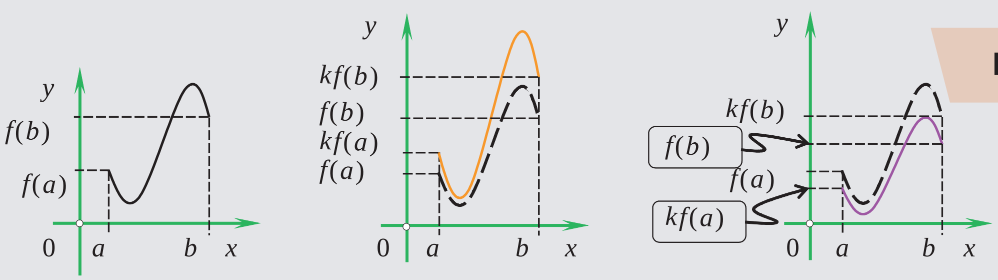
a) если $k > 1$, то график растягивается k раз от оси Ox вдоль оси Oy;

b) если $0<k<1$, то график сжимается k раз по оси Oy к оси Ox;

c) если $k<0$, то график функции $y = kf(x)$ симметричен графику функции $y = |k|f(x)$ относительно оси Ox.

Построение графика функции $y = kf(x)$

Рисунок 7



Случай 2. В этом случае заданная функция $y = f(x)$ становится $y = f(mx)$ (рис. 7). При этом:

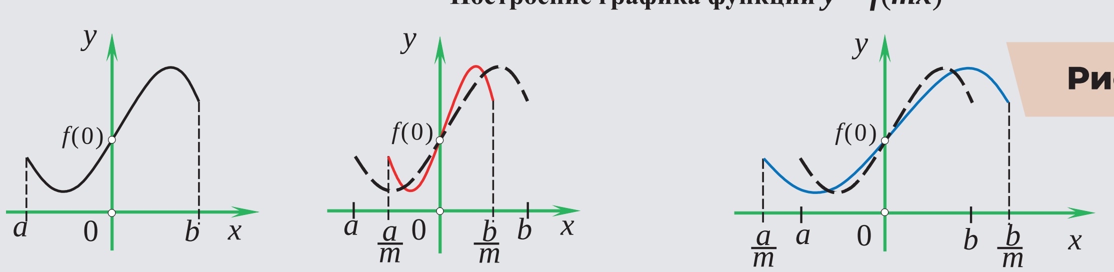
a) если $m>1$, то график сжимается m раз к оси Oy по оси Ox;

b) если $0<m<1$, то график растягивается m раз от оси Oy по оси Ox;

c) если $m<0$, то график функции $y = f(mx)$ симметричен графику функции $y = f(|m|x)$ относительно оси Oy.

Построение графика функции $y = f(mx)$

Рисунок 8



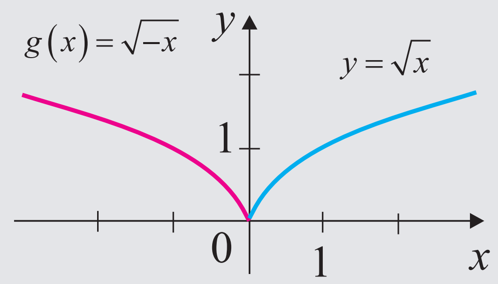
Пример 4. Нарисуйте графики функции $g(x)=\sqrt{-x}$

Решение.

На рисунке 9 сперва начертим график функции $y=\sqrt{x}$. Затем график функции $g(x)=\sqrt{-x}$ образуется симметричным отражением этого графика относительно оси Oy.

Обратите внимание: область определения функции $g(x)=\sqrt{-x}$ состоит из множества $x\le 0$.

Рисунок 9



Пример 5. Постройте графики следующих функций, используя график функции $f(x)=x^2$ на рисунке 10.

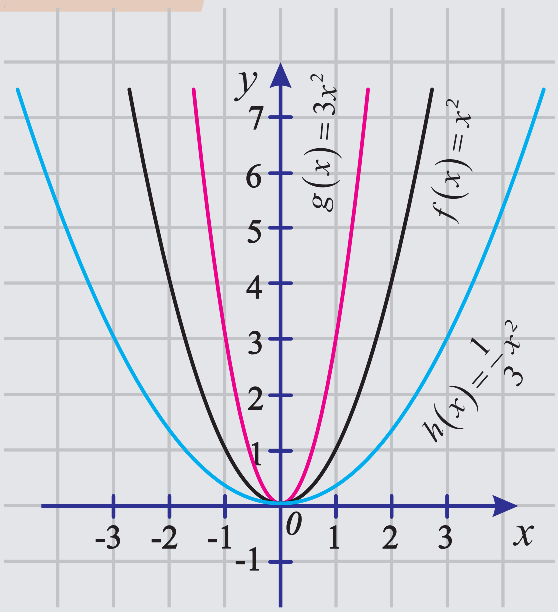
a) $g(x)=3x^2$; b) $h(x)=\frac{1}{3}x^2$.

Решение.

График функции g строится путём умножения координаты y каждой точки графика функции на 3. То есть для формирования графика функции g график функции f необходимо растянуть по вертикали 3 раза. Полученная парабола «тоньше» по сравнению с исходной параболой.

b) График функции h строится путём умножения координаты y каждой точки графика функции f на $\frac{1}{3}$. То есть для формирования графика функции h график функции f необходимо сжать в 3 раза по вертикали к оси x. Полученная парабола «толще», чем исходная парабола (Рисунок 10).

Рисунок 10

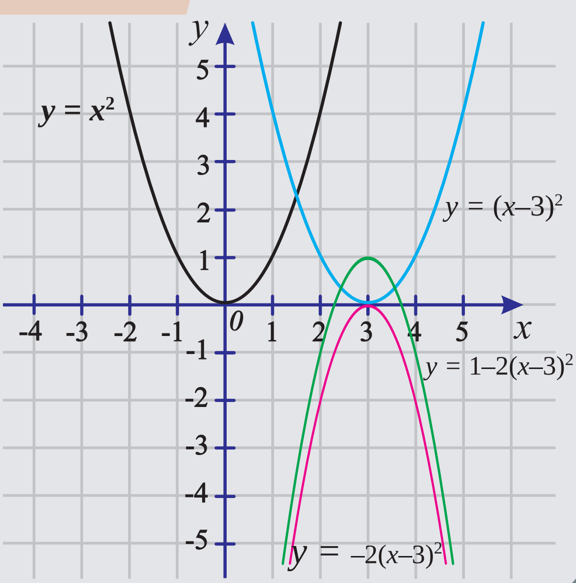


Пример 6. Нарисуйте график функции $f(x)=1-2(x-3)^2$.

Решение.

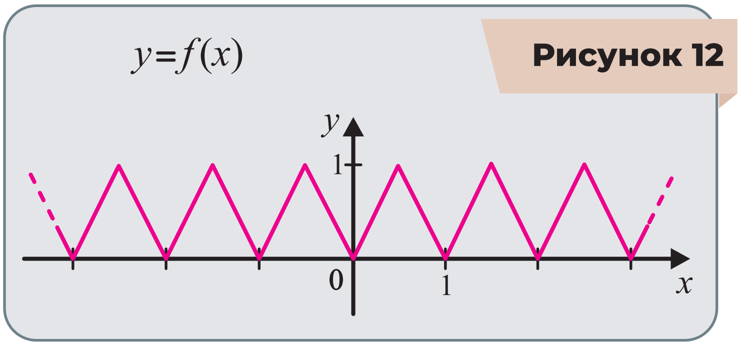
Сначала сдвинем график функции $y=x^2$ по горизонтали на 3 единицы вправо и получим график функции $y=(x-3)^2$. Затем симметрично относительно оси Ox отразим этот график, далее выполним двукратное растяжение и получим график функции $y=-2(x-3)^2$. Наконец сдвигаем этот график вверх на одну единицу и формируем график функции $f(x)=1-2(x-3)^2$ (рис. 11).

Рисунок 11



Пример 7. На рис. 12 изображён график функции $y=f(x)$. Используя этот график, нарисуйте графики следующих функций:

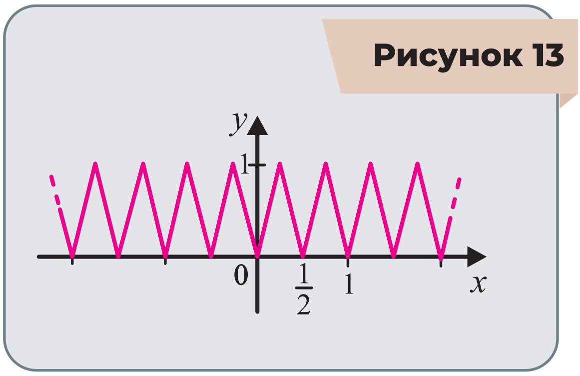
a) $y=f(2x)$; b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



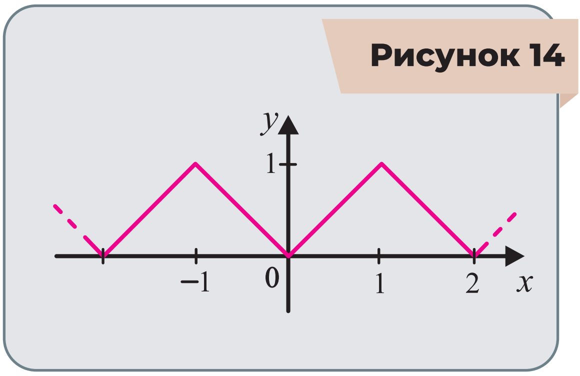
Решение.

a) Умножив координату x каждой точки на 2, сожмём график функции f в горизонтальном направлении (рис. 13).

b) Умножив координату x каждой точки на $\frac{1}{2}$, растянем график функции f в горизонтальном направлении (рис. 14).



$y=f(2x)$



$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

ПРИМЕРЫ

1. Зная график функции $f(x)$, объясните, как построить графики следующих функций.

a) $y=f(x)-1$ b) $y=f(x-2)$ c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$

d) $y=f(x)+4$ e) $y=f(-x)$ f) $y=3f(x)$

g) $y=-f(x)$ h) $y=\frac{1}{3}f(x)$ i) $y=f(x-5)+2$

j) $y=f(x+1)-1$ k) $y=4f(x+1)+3$ l) $y=f(4x)$

m) $y=-f(x)+5$ n) $y=3f(x)-5$ o) $y=1-f(-x)$

2. Объясните, с помощью каких преобразований график функции g формируется из графика функции f.

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$

b) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^3,\ g(x)=(x-4)^3$

d) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^3-4$

e) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|-2$

f) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x-2|+2$

g) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=-\sqrt{x}+1$

h) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. Постройте графики следующих функций, используя график функции $y=x^2$.

a) $g(x)=x^2+1$

b) $g(x)=(x-1)^2$

c) $g(x)=-x^2$

d) $g(x)=(x-1)^2+3$

4. Постройте графики следующих функций, используя график функции $y=\sqrt{x}$.

a) $g(x)=\sqrt{x-2}$

b) $g(x)=\sqrt{x}+1$

c) $g(x)=\sqrt{x+2}+2$

d) $g(x)=-\sqrt{x}+1$

5. Для заданных функций найдите соответствующие графики на рисунке 15.

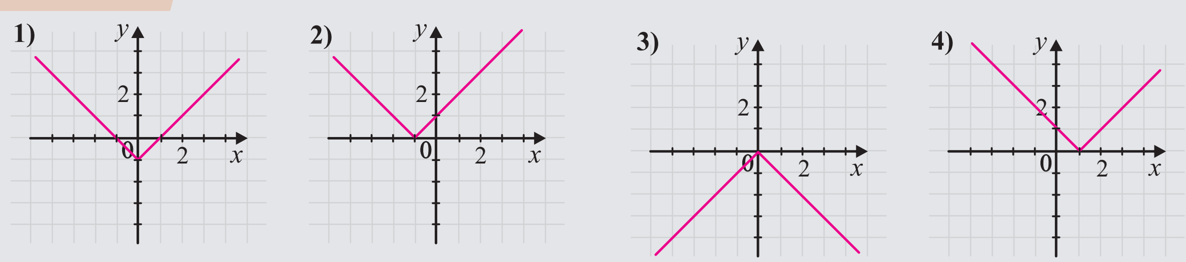
a) $y=|x+1|$

b) $y=|x|-1$

c) $y=|x-1|$

d) $y=-|x|$

Рисунок 15



6. Постройте графики следующих функций, сделав соответствующие преобразования на графике стандартной функции.

a) $f(x)=x^2+3$

b) $f(x)=\sqrt{x}+1$

c) $f(x)=|x|-1$

d) $f(x)=\sqrt{x}+1$

e) $f(x)=(x-5)^2$

f) $f(x)=(x+1)^2$

g) $f(x)=|x+2|$

h) $f(x)=\sqrt{x-4}$

i) $f(x)=-x^3$

j) $f(x)=-|x|$

k) $y=\sqrt[4]{-x}$

l) $y=\sqrt[3]{-x}$

m) $y=\dfrac{1}{4}x^2$

n) $y=-5\sqrt{x}$

o) $y=3|x|$

p) $y=\dfrac{1}{2}|x|$

q) $y=(x-3)^2+5$

r) $y=\sqrt{x+4}-3$

s) $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$

t) $y=2-\sqrt{x+1}$

u) $y=|x+2|+2$

v) $y=2-|x|$

w) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$

x) $y=3-2(x-1)^2$.

7. К графику данной функции f применяются преобразования в указанной последовательности. Напишите формулу полученной функции.

a) $f(x)=x^2$, переместите её график на 3 единицы вниз.

b) $f(x)=x^3$, переместите её график вверх на 5 единиц.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, переместите её график на 2 единицы влево.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, переместите её график вправо на 1 единицу.

e) $f(x)=|x|$, переместите её график на 2 единицы влево и на 5 единиц вниз.

f) $f(x)=|x|$, отразив симметрично её график относительно оси абсцисс, переместите на 4 единицы вправо и на 3 единицы вверх.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, отразив симметрично её график относительно оси Oy, переместите вверх на 1 единицу.

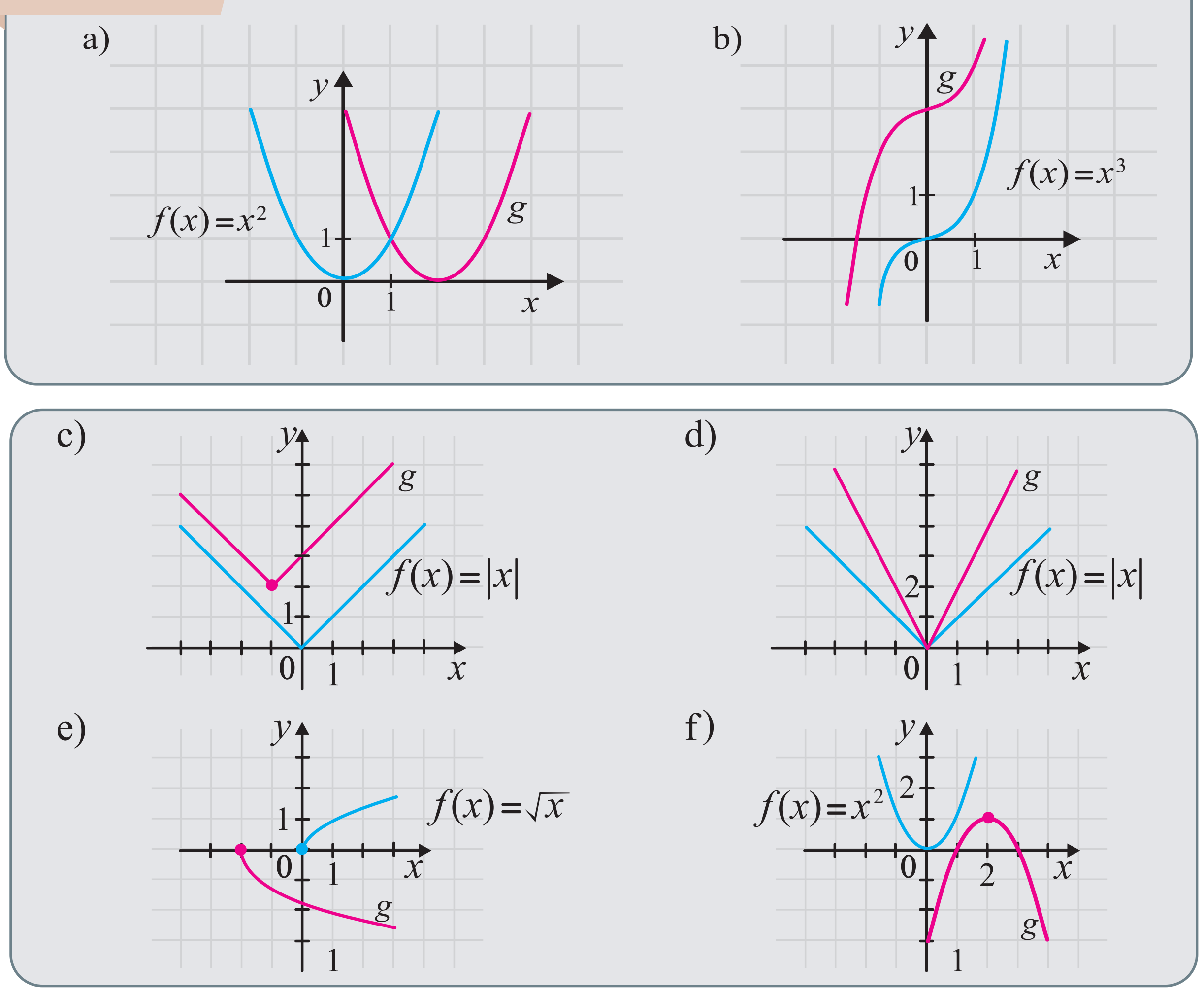
h) $f(x)=x^2$, переместите её график на 2 единицы влево и отразите симметрично относительно оси Ox.

i) $f(x)=x^2$, растяните её график 2 раза по вертикали, переместите на 2 единицы вниз и на 3 единицы вправо.

j) $f(x)=|x|$, сожмите её график на $\frac{1}{2}$ по вертикали, переместите на 1 единицу влево и на 3 единицы вверх.

8. Даны графики функций *f* и *g* (рис. 16). Найдите формулу функции *g*, используя функцию *f*.

Рисунок 16



9. Дана функция $y=f(x)$. Исходя из рисунка 17, найдите соответствующие графики следующих функций.

a) $y=f(x-4)$

b) $y=f(x)+3$

c) $y=2f(x+6)$

d) $y=-f(2x)$

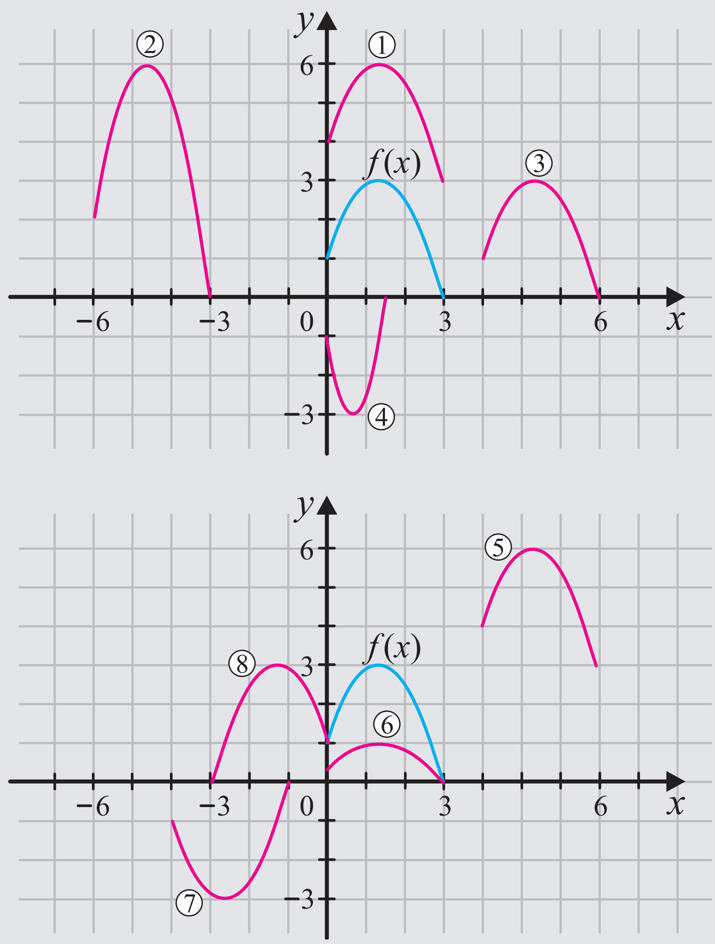
e) $y=\frac{1}{3}f(x)$

f) $y=-f(x+4)$

g) $y=f(x-4)+3$

h) $y= f(-x)$

Рисунок 17



ЛИНЕЙНОЕ И КВАДРАТИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическое моделирование является основным аналитическим инструментом изучения экономических процессов.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найдите наибольшую глубину, из которой поршневой насос может откачивать воду.

Решение.

Как известно, давление водяного столбика в трубе насоса вычисляется по формуле

$$p = \rho g h.$$

Здесь $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ – плотность воды, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ – ускорение свободного падения, h – высота водяного столбика.

Поскольку насос расположен на уровне земли, то высоту водяного столба можно называть глубиной. Итак, глубина воды может быть найдена формулой

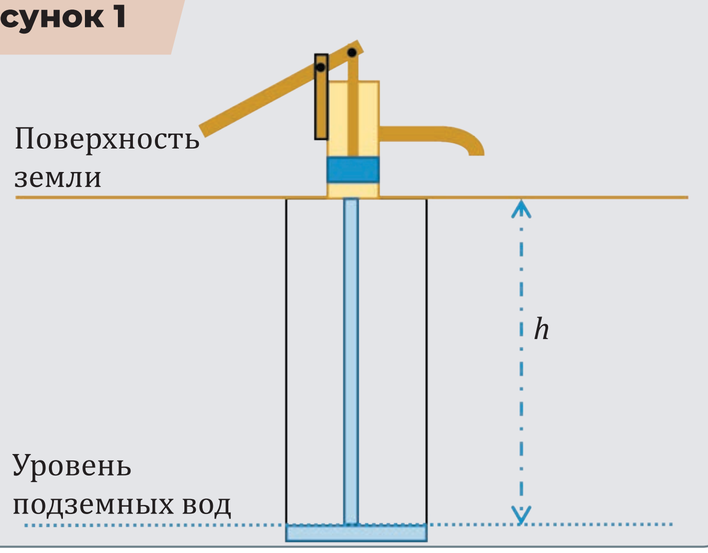
$$h = \frac{p}{\rho g}.$$

В 1643 году в опытах итальянского физика Эванджелиста Торричелли было доказано, что давление водяного столба не превышает атмосферное давление $p_0 = 100\ 000$ Pa, то есть $p \le p_0$. Поэтому глубина откачивания воды в поршневом насосе не может превышать

$$h = \frac{p}{\rho g} \le \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10\ \mathrm{m}.$$

Ответ: Поршневой насос может добывать воду с максимальной глубины 10 м.

Рисунок 1



Переменные, вошедшие в эту модель, первого порядка и все условия в ней наложены линейными операциями (сложением и умножением на число) этих переменных. Поэтому такая модель называется линейной математической моделью. Процесс приведения задачи к виду линейной модели называется линейным моделированием.

Пример 2. Ученик выбрал координатную плоскость Oxy таким образом, что он принял свой дом за начало координат $O(0;\ 0)$ (рис. 2). Затем выяснил, что школа, в которой он учится, находится в точке $C(4;\ 3)$. Он вычислил, что отрезок прямолинейного участка дороги между домом и школой пересекает ось Ox в точке $(6;\ 0)$ и ось Oy в точке $(0;\ 4)$.

Известно, что в школе установлена антенна компании мобильной связи. Ученик заинтересовался нахождением точки дороги, в которой сотовый телефон пассажира движущегося по дороге автомобиля будет лучше всего принимать волну, излучаемую антенной.

Задание. Как бы вы решили эту задачу?

Решение. Очевидно, что в ближайшей к школе точке дороги сотовый телефон имеет наилучший приём. Для решения этой задачи необходимо составить уравнение прямой, описывающей дорогу (AB), и найти координаты её ближайшей к школе точки. Для этого необходимо представить ситуацию графически (см. рис. 2).

Затем строится уравнение прямой, проходящей через точки $A(6;\ 0)$ и $B(0;\ 4)$. Для этого, подставив координаты точек $A(6;\ 0)$ и $B(0;\ 4)$ в уравнение прямой $y = kx+b$, составляются уравнения

$$0 = k\cdot 6+b$$
$$4 = k\cdot 0+b$$

Из них находятся коэффициенты

$$b = 4,\ \ k = -\frac{2}{3}.$$

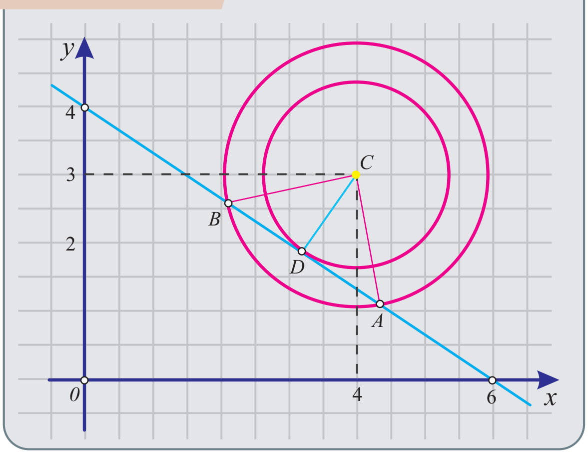
Итак, уравнение прямой (AB) имеет вид

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Решение задачи состоит в нахождении ближайшей точки $D(x;\ y)$ прямой (AB) к точке $C(4;\ 3)$. Математическая модель этой ситуации записывается следующим образом:

$$F = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \to min,$$
$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Рисунок 2



Математические модели такого типа называются ***квадратичными моделями***, потому что переменные в этой модели имеют первый и второй порядок. Процесс приведения данной задачи к форме квадратичной модели называется ***квадратичным моделированием***.

ПРИМЕРЫ

1. Запишите линейную модель каждого задания:

a) Вы арендовали велосипед с первоначальным взносом 10 000 сумов и тарифом 5 000 сумов в час.

b) Автомастерская установила базовую плату в размере 50 000 сумов и почасовую оплату в размере 15 000 сумов.

c) Длина свечи 30 cm, скорость горения 1,4 cm в час.

d) Специалист по программированию берет 75 долларов за консультацию и 35 долларов за каждый дополнительный час.

e) Текущая температура составляет 25 °C, и ожидается, что ночью она будет снижаться на 2 °C каждый час.

f) Население кишлака составляет 6791 человек и ежегодно уменьшается на 7 человек.

2. Определите, какой является функция в данной таблице – линейной или квадратичной.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Когда мяч подпрыгивает вверх и вниз, высота, которую он достигает, постоянно уменьшается. На приведённой ниже таблице показана высота прыжка с течением времени.

a) Найдите наиболее подходящую квадратичную функцию.

b) Найдите максимальную высоту, на которую подпрыгивает мяч.

c) Определите, на какой высоте был мяч через 2,5 секунды.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (дюйм)	42	33	26	16	2

4. Камень брошен с крыши 70-метрового здания, высота камня как функция времени определяется квадратичной функцией $h(t)= -5t^2+25t+70$ где t выражено в секундах, а высота указана в метрах. Через сколько секунд камень упадёт на землю?

5. Умиде требуется на уборку своей комнаты в два раза больше времени, чем Чарос. Мохичехре на уборку требуется на 10 минут больше, чем Чарос. В общей сложности они тратят 90 минут на уборку своих комнат. Сколько времени нужно Умиде, чтобы убрать свою комнату?

6. Дильшод нырнул в море за жемчугом. Глубина его погружения через t секунд составила $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ метра, $t \geq 0$.

a) На какой глубины находится жемчуг?

b) Сколько времени нужно Дильшоду, чтобы добыть жемчуг?

c) С какой высоты нырнул в воду Дильшод?

7. Зулайхо получила заказ на пошив рубашек. Если она сошьёт x рубашек за один день, то заработает $P(x) = -x^2 + 20x$ (тысяч) сумов.

a) Сколько рубашек она должна сшить, чтобы получить максимальную прибыль?

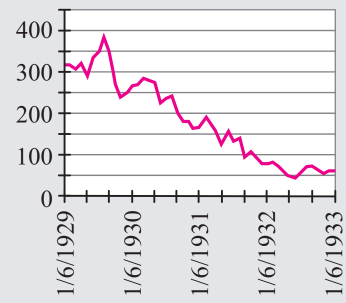
b) Каким может быть её наибольший доход?

8. В 2005 году население Зарафшана составляло около 55 000 человек. В то время население росло со скоростью около 2 000 человек в год. Постройте линейную модель, чтобы найти население Зарафшана для любого года. Какова была численность населения Зарафшана в 2010 году? Определите численность населения Зарафшана в 2025 году.

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

Любой график умеет рассказывать

Рисунок 1



Если картинка передаёт тысячи слов, то график объясняет хотя бы несколько предложений. На самом деле, график иногда может представить ситуацию быстрее и эффективнее, чем множество слов. Разрушительные последствия краха фондового рынка 1929 года чётко видны на графике промышленного индекса Доу Джонса (DJIA). Газеты того времени опубликовали такие графики как эффектный способ объяснения, насколько был велик размер ущерба.

Рисунок 2

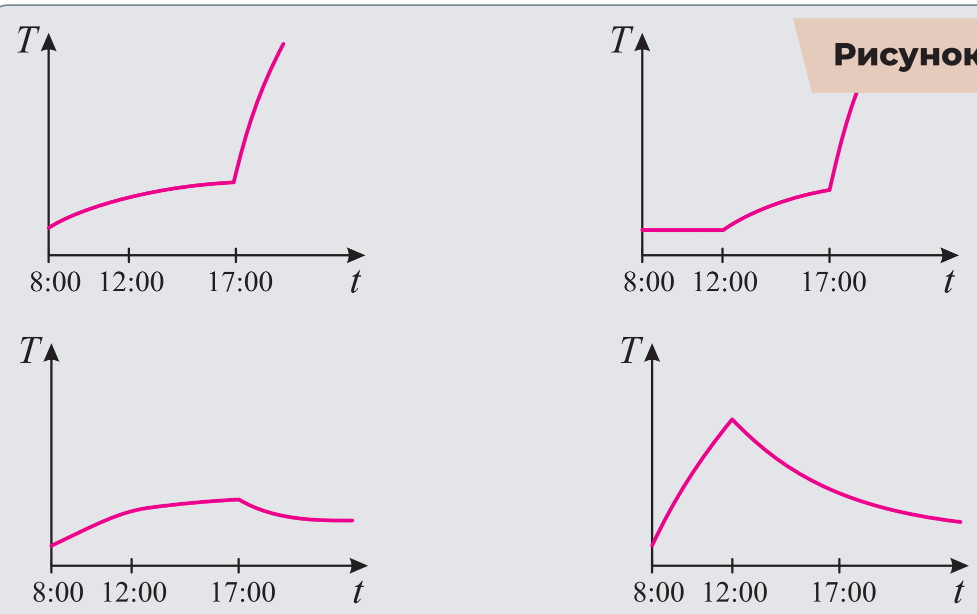
Не нужно слов, чтобы передать смысл изображения рис. 2. Диаграмма рассказывает простую историю. Произошёл спад чего-то: может быть, продаж, прибыли или производительности – и ответственное лицо этим очень обеспокоено.

В этом исследовательском проекте мы изучим истории, которые рассказывают нам графики, и, в свою очередь, создадим график, рассказывающий историю.

Чтение рассказа по графику

1. На рисунке 3 изображены четыре графика зависимости температуры от времени (начиная с 8:00), за которыми следуют три истории.

Рисунок 3



a) сопоставьте каждую из историй с одним из графиков;

b) напишите соответствующую историю для графика, не соответствующего ни одной истории.

История 1	В полдень я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Придя домой, я приготовила его в духовке.
История 2	Утром я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Придя домой, я приготовила его в духовке.
История 3	Утром я достала мясо из морозилки и положила на стол, чтобы разморозить. Но забыла об этом и поела в кафе по дороге домой с работы. Когда я вернулась домой, то положила мясо обратно в морозилку.

2. В беге с препятствиями на 100 метров приняли участие трое бегунов. График на рис. 4 показывает пройденную дистанцию как функцию времени для каждого бегуна. Опишите, что график говорит вам об этой гонке. Кто её выиграл? Все ли бегуны дошли до финиша? Как вы думаете, что случилось со спортсменом B?

3. Составьте историю (о любой ситуации), соответствующую графику на рис. 5.

Рисунок 4

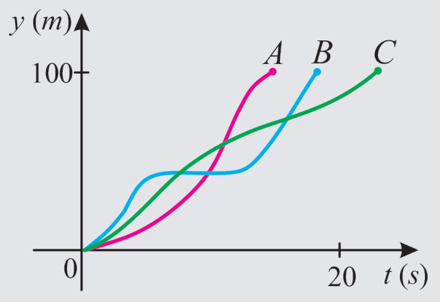
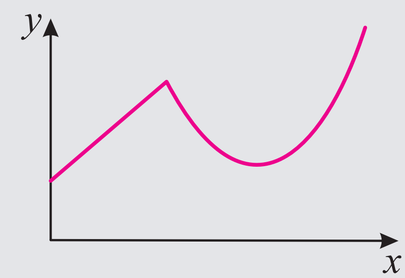


Рисунок 5



ГЛАВА 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
- РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
- СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ
- ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные определения и понятия

Определение

Равенство вида $f(x)=g(x)$ называется ***уравнением с одной неизвестной*** (здесь $f(x)$ и $g(x)$ функции, зависящие от переменной x).

Если при подстановке значения $x = a$ в уравнение образуется правильное числовое равенство $f(a) = g(a)$, то значение a называется ***корнем уравнения*** $f(x) = g(x)$.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что не существует ни одного корня. Совокупность всех корней уравнения называется решением уравнения.

Если не существует ни одного значения неизвестного x, являющегося корнем уравнения, то используется выражение «***Уравнение не имеет корня***» или «***Решением уравнения является пустое множество***», которое также можно записать как $x \in \varnothing$.

Пример 1. Решите уравнение $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$.

Решение. Правая часть этого уравнения равна нулю, а левая часть является произведением трёх выражений. Поскольку произведение равно нулю только тогда, когда хотя бы один из его множителей равен нулю, то приравниваем в отдельности каждый множитель нулю: $x+3=0,\ 2x-1=0,\ x-2=0$. Из этих полученных уравнений мы можем определить корни уравнения:

Ответ: $x_1=-3,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=2$.

Пример 2. Составьте уравнение, корнями которого являются $0, -1$ и $\sqrt{2}$.

Решение. В качестве ответов могут быть даны уравнения разного вида. Напоминаем, что простейшее уравнение имеет вид $x(x+1)(x-\sqrt{2})=0$.

Эти числа также могут быть корнями следующего уравнения

$$(x^2+x^3)(x-\sqrt{2})(x^2+3)=0.$$

Определение.

Если все корни уравнения $f(x)=g(x)$ являются корнями уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и наоборот, все корни уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ являются корнями уравнения $f(x) = g(x)$, то есть если их решения совпадают, то такие уравнения называются ***эквивалентными уравнениями***.

Пример 3. Проверьте эквивалентность уравнений $3x - 6 = 0$ и $2x - 1 = 3$.

Решение. Уравнения $3x - 6 = 0$ и $2x - 1 = 3$ эквивалентны, поскольку $x = 2$ является единственным корнем каждого из этих уравнений.

Любые два уравнения, решением которых является пустое множество, эквивалентны.

Эквивалентные уравнения обозначаются следующим образом: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Уравнение переходит в эквивалентное в следующих случаях:

a) когда какое-нибудь слагаемое уравнения переносится из одной его части в другую с противоположным знаком. Например $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) когда обе части уравнения умножаются или делятся на число, отличное от нуля.

Целые рациональные уравнения

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то уравнение $f(x)=g(x)$ называется целым рациональным уравнением.

Областью определения такого уравнения является множество всех действительных чисел.

Определение

Уравнение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq 0$, называется ***рациональным уравнением n-ой степени стандартного вида***. Здесь $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ коэффициенты, a_n свободный член, $n \in N$.

Если $a_0=1$, то $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ называется ***приведённым целым рациональным уравнением n-ой степени***.

Известно, что многочлен n -й степени может иметь не более n корней, следовательно, каждое целое рациональное уравнение n -ой степени стандартного вида также имеет не более n корней.

Теорема. Если корни приведённого целого рационального уравнения с целыми коэффициентами – целые числа, то они являются делителями свободного члена.

Пример 4. Решите уравнение $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$.

Решение. Сначала приведём уравнение к стандартному виду $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Чтобы убедиться, что это уравнение имеет целые корни, запишем делители свободного члена 4: $\pm1, \pm2, \pm4$. Подставив эти числа в уравнение, определим, что $x_1=1$ и $x_2=2$ будут корнями уравнения. Следовательно, многочлен $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ делится на многочлен $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ без остатка.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\
\cline{2-2}
-\;x^4-3x^3+2x^2 & x^2+5x+2 \\
\cline{1-1}
5x^3-13x^2+4x+4 & \\
-\;5x^3-15x^2+10x & \\
\cline{1-1}
2x^2-6x+4 & \\
-\;2x^2-6x+4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Уравнение перепишем в виде $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$.

Следовательно, полученное уравнение равносильно заданному. Приравняв каждый множитель нулю, найдём корни уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Пример 5. Решите уравнение $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение является (симметричным) уравнением четвёртого порядка. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и получим равносильное ему уравнение:

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Сгруппировав слагаемые, приведем уравнение к виду

$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$. Введем обозначение $x + \frac{1}{x} = t$.

Тогда $t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Отсюда получим уравнение $t^2 - 2 - 5t + 8 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$. Корни этого уравнения $t_2 = 3$ и $t_2 = 3$. Подставляя эти значения в обозначение, мы видим, что решение заданного уравнения есть объединение решений уравнений $x + \frac{1}{x} = 2$ и $x + \frac{1}{x} = 3$. Решая эти уравнения, находим $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Пример 6. Решите уравнение $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$.

Решение. Заданное уравнение является возвратным (т. е. со симметричными коэффициентами) уравнением третьего порядка. Для решения нужно разложить его левую часть на множители, и тогда получим равносильное ему уравнение:

$$3(x^3 + 1) + 4x\,(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(\,3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(\,3x^2 + x + 3) = 0.$$

Решением последнего уравнения является объединение решений следующих двух уравнений $x + 1 = 0$ и $3x^2 + x + 3 = 0$.

Корень первого уравнения $x = -1$, а второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = -1$.

Дробно-рациональные уравнения

Уравнения, которые можно привести к виду $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, называются ***дробно-рациональными уравнениями*** (здесь $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены от переменной x).

Область определения дробно-рационального уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ состоит из всех значений x, при которых $g(x) \neq 0$.

Этапы решения рациональных уравнений:

- Все выражения в уравнении переносятся в левую его часть;
- Все выражения приводятся к общему знаменателю;
- Уравнение приводится к виду $\frac{f(x)}{g(x)}=0$;
- Находятся нули числителя;
- Находится область определения;
- Корнями уравнения являются нули числителя, входящие в область определения.

Чтобы найти решение рационального уравнения $\frac{f(x)}{g(x)}=0$, иногда оно записывается в виде равносильной ему системы $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$, и решается система.

При решении дробно-рациональных уравнений в виде системы требование, чтобы знаменатель не был равен нулю, является важным. Иначе в некоторых случаях могут появиться посторонние корни. Например, рассмотрим уравнение $\frac{x^2+x-2}{x-1}=0.$

Приравниваем числитель нулю и решаем полученное уравнение:

$$x^2+x-2=0 \;\Rightarrow\; x_1=-2,\; x_2=1.$$

Значение $x = 1$ неизвестного не входит в область определения заданного уравнения, т. е. $x = 1$ – посторонний корень.

Пример 8. Найдите корни уравнения $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

Решение. $\begin{cases} 2x+3=0 \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=-3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,5 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Ответ: $x=-1,5$.

Пример 9. Решите уравнение: $\frac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Решение. $\begin{cases} 4x+4=0 \\ 3(x+2)-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=-4 \\ 3x+6-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\neq -1 \end{cases}$

Ясно, что значение x не может быть равно – 1. Поэтому

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 10. Найдите корни уравнения: $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$.

Решение. Переносим все выражения в равенстве в левую часть и приводим к общему знаменателю.

$$\frac{x+5}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4}=\frac{x^2+9x+14}{x^2-4}=0.$$

Приравниваем числитель дробно-рационального выражения к нулю и находим его корни:

$$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2;x=-7.$$

Проверяем, не превращают ли эти корни знаменатель в ноль. Обнаруживаем, что значение $x = -2$ является посторонним корнем.

Ответ: $x=-7$.

Внимание! При решении дробно-рационального уравнения приравниванием числителя нулю всегда проверяйте принадлежность его корней области определения уравнения!

Пример 11. Решите уравнение $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6}=0$.

Решение. Данное уравнение является дробно-рациональным. Сначала найдём нули его числителя:

$$(x^2-x-56)(x-3)=0\Rightarrow x=3;\ \ x^2-x-56=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-56)=225=15^2$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm15}{2}\Rightarrow x_1=8;\ x_2=-7.$$

Получили 3 нуля числителя $x_1 = 8$; $x_2 = -7$; $x_3 = 3$.

Подставляя эти нули в знаменатель, убеждаемся в том, что они не являются нулями знаменателя.

Ответ: $x_1 = 8$; $x_2 = -7$; $x_3 = 3$.

Пример 12. Найдите корни уравнения.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$$

Решение. Переносим выражение из правой части уравнения в левую часть

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0$$

и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0.$$

Раскрываем скобки в числителе и получаем квадратное уравнение:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0\Rightarrow\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0.$$

Находим нули числителя:

$$x^2-5x+6=0\Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot6=1,\ x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}\ \Rightarrow x_1=2;\ \ x_2=3.$$

Вычисляем значение знаменателя в этих точках. Так как $x = 2$ превращает знаменатель в ноль, то оно является посторонним корнем. Следовательно, уравнение имеет один корень $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 13. Решите уравнение: $x^2 + x + 1 = \dfrac{15}{x^2 + x + 3}$.

Решение. Вводим обозначение $x^2 + x + 1 = t$, после чего уравнение примет следующий вид:

$$t = \frac{15}{t+2}$$

Принимая во внимание $t \neq -2$, решим следующее уравнение:

$$t(t+2) = 15$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1 = -5;\ t_2 = 3$$

Подставляя вместо t эти значения, получим уравнения $x^2 + x + 1 = -5$ и $x^2 + x + 1 = 3$. Решаем каждое из них по отдельности:

уравнение $x^2 + x + 6 = 0$ не имеет корней; уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет два корня $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Эти корни не являются нулями знаменателя.

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

Рациональные уравнения также используются при решении текстовых задач. Ниже смоделированы и решены в виде рационального уравнения задачи о движении и работе.

Задача на действие

Вертолёт пролетел 120 km по ветру и затем вернулся. Он потратил на это 6 часов времени. Найдите скорость ветра, если скорость вертолета в безветренную погоду 45 km/h.

Решение. Пусть x km/h – скорость ветра. Тогда скорость вертолёта по направлению ветра равна $(45 + x)$ km/h, а против направления ветра равна $(45 - x)$ km/h. По условию вертолёт потратил всего 6 часов. Если разделить расстояние на каждую скорость и сложить полученное время полёта по ветру и против ветра, то получим общее время полёта:

$$\frac{120}{45+x} + \frac{120}{45-x} = 6$$

Получилось дробно-рациональное уравнение $\dfrac{120}{45+x} + \dfrac{120}{45-x} - 6 = 0$. Приводим его к общему знаменателю

$$\frac{120(45-x) + 120(45+x) - 6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)} = 0$$

Упрощаем числитель и находим его нули

$$6x^2 - 1350 = 0$$

$$x^2 = 225$$

$$x_1 = -15;\ x_2 = 15$$

Так как скорость ветра отрицательной (относительно своего направления) быть не может, то $x = -15$ km/h не является корнем. Тогда искомая скорость ветра будет равна 15 km/h.

Ответ: Скорость ветра 15 km/h.

Задача на работу

Два тракториста вместе вспахивают поле за 4 дня. Если первый тракторист обрабатывает один это поле на 6 дней меньше, чем второй тракторист, сколько дней потребуется каждому трактористу по отдельности?

Решение. Пусть 1-й тракторист вспашет поле за x дней. Тогда 2-му трактористу требуется $(x + 6)$ дней. Значит, 1-й тракторист может за 1 день вспахать $\frac{1}{x}$ часть поля, а 2-й тракторист вспашет $\frac{1}{x+6}$ часть. По условию за 1 день они вместе обрабатывают $\frac{1}{4}$ часть поля. Таким образом,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+6} = \frac{1}{4}$$

Преобразуем это уравнение в рациональное уравнение

$$\frac{4(x+6) + 4x - x(x+6)}{4x(x+6)} = 0$$

$$\frac{-x^2 + 2x + 24}{4x(x+6)} = 0$$

Полученное рациональное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 24 = 0 \\ 4x(x+6) \neq 0; \end{cases}$$

Решаем её $D = (-2)^2 - 4 \cdot (-24) = 100;\ x_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2} \Rightarrow x_1 = 6;\ \ x_2 = -4$

Значение $x = -4$ не может быть корнем, хотя оно является корнем уравнения. Это связано с тем, что область определения составленного уравнения состоит из неотрицательных значений неизвестного (дни не могут быть отрицательными). Итак, $x + 6 = 6 + 6 = 12$.

Ответ: 1-й тракторист вспашет поле за 6 дней, а 2-й тракторист – за $x + 6 = 6 + 6 = 12$ дней.

ПРИМЕРЫ

Решите дробно-рациональные уравнения (1–10).

1. $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$
2. $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$
3. $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$
4. $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$
5. $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$
6. $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$
7. $\frac{7}{2x+9}-6=5x$
8. $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$
9. $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$
10. $\frac{3x}{x^2-1}=2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Решите дробно-рациональные уравнения (11–30).

11. $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$
12. $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$
13. $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$
14. $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$
15. $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$
16. $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$
17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$
18. $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\frac{x-4}{2x-3}-\frac{2x-3}{x+4}$
19. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$
20. $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$
21. $\frac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$
22. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x+2)(x-7)}=1$
23. $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$
24. $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$
25. $x^2-5x+\frac{24}{x^2-5x}+10=0$
26. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$
27. $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$
28. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

29. $\dfrac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\dfrac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\dfrac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Расстояние между двумя пристанями составляет 80 km по реке. Катеру потребовалось 8 часов 20 минут, чтобы пройти от одной пристани до другой. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки 4 km/h.

32. Если два рабочих работают вместе, то они выполнят работу за 12 дней. Если один из них выполняет первую половину, а затем отставшую половину выполняет другой, то работа будет выполнена за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий выполнит эту работу, если они будут работать по отдельности?

33. Трактор «Беларусь» может вспахать 7 ha земли за 3 дня, а трактор «Case» – 17 ha за 2 дня. В фермерском хозяйстве «Dehqon qudrati» имеются 2 трактора «Беларусь» и 1 трактор «Case». Если эти тракторы будут работать вместе, за сколько дней можно вспахать 237 ha земли?

34. Автомобиль двигался со скоростью 120 km/h на 80-километровом участке дороги, где не было радара, 70 km/h на 35-километровом и 50 km/h на 25-километровом участках с радарами. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

35. Работа выполняется первым рабочим в одиночку за a дней, второй рабочий выполняет работу на b дней дольше, а третий рабочий – на b дней быстрее. За сколько дней трое рабочих выполнят работу вместе?

36. Группа путешественников отправилась в плавание по реке на катере против течения. Они должны вернуться через 4 часа 40 минут. Если скорость катера в стоячей воде 12 km/h, а скорость течения 3 km/h, сколько километров должны пройти путешественники от пристани, чтобы они смогли отдохнуть 2 часа и вернуться вовремя?

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение **систем двух уравнений с двумя неизвестными** основано на хорошо известных вам методах, таких как алгебраическое сложение, подстановка и замена переменных. Заметим, что во всех входящих в систему дробно-рациональных выражениях знаменатели не равны нулю.

Метод подстановки

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$ методом подстановки.

Решение. Из второго уравнения системы получим $x = 8y - 1$. Подставляя полученное выражение вместо x в первом уравнении, получим: $3(8y-1)y = 21$. Решаем это уравнение.

$$y_1 = -\frac{7}{8};\ y_2 = 1$$

Подставляя значения $y_1 = -\frac{7}{8}, y_2 = 1$ в $x = 8y - 1$, находим, что $x_1 = -8$, $x_2 = 7$

Ответ: $\left(-8; -\frac{7}{8}\right), (7;1)$.

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^4 + y^2 = 16 \end{cases}$ методом подстановки.

Решение.

$$y = 4 - 2x^2$$

$$x^4 + \left(4 - 2x^2\right)^2 = 16$$

$$x^4 + 16 - 16x^2 + 4x^4 = 16$$

$$5x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2\left(5x^2 - 16\right) = 0, \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}},\ x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow\ y_1 = 4;\ \ y_2 = -\frac{12}{5};\ \ y_3 = -\frac{12}{5}$$

Ответ: $(0;4)$, $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right)$.

Метод алгебраического сложения

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Решение. Оба уравнения в системе содержат неизвестный y с противоположными коэффициентами. При сложении этих уравнений получится уравнение с одним неизвестным.

$$+\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$x^2+x=30$$

Решая квадратное уравнение $x^2+x-30=0$, получим:

$$x_1=\frac{-1-11}{2}=-6$$

$$x_2=\frac{-1+11}{2}=5$$

Подставляя эти корни во второе уравнение системы, находим соответствующие значения неизвестного y: $y_1=-9$, $y_2=2$.

Ответ: (–6; –9), (5; 2).

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^{2x}=-2, \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$ методом алгебраического сложения.

Решение.

Если мы умножим второе уравнение на 3 и добавим его к первому уравнению, то получим:

$$+\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2, \\ 3x^2-3x^2y=3 \end{cases}$$
$$x^3-y^3-3x^2y+3xy^2=1$$

Применяя формулу сокращённого умножения в левой части полученного уравнения, имеем:

Отсюда последовательно получим: $\begin{cases} (x-y)^3=1, \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x^2-x^2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x^2-x^2(x-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2-x-1)=0, \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=1 \vee x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ y_1=0 \vee y_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee y_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(1;0)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Метод замены переменных

Пример 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

Решение. Вводим обозначения

$$x+y=a \quad \text{и} \quad xy=b$$

Тогда система будет выглядеть так:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a_1=6,\ b_1=5$ и $a_2=5,\ b_2=6$. Подставляя эти значения в обозначения, получим системы уравнений:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Совокупность всех их корней есть решение данной системы уравнений.

Ответ: $(5;1),\ (1;5),\ (2;3),\ (3;2)$.

ПРИМЕРЫ

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3)=160 \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решение рациональных неравенств, как и решение рациональных уравнений, можно выполнять путём приведения неравенства к более простому равносильному неравенству. При этом соблюдаются следующие правила:

Правило 1. Произвольный член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Правило 2. Обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же самое положительное число, при этом неравенство не меняет свой знак.

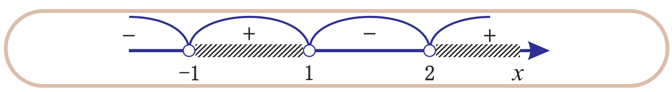
Правило 3. Обе части неравенства можно умножать или разделить на одно и то же самое отрицательное число, в этом случае неравенство меняет свой знак на противоположный.

При решении рационального неравенства можно использовать ***метод интервалов.***

Пример 1. Решите неравенство: $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

Решение. 1. Правая часть неравенства состоит из нуля, поэтому находим нули выражения в левой части: $x=1, x=-1, x=2$.

2. Отмечая эти значения x на числовой оси, определим знаки левой части неравенства на полученных интервалах.



3. Так как левая часть неравенства больше нуля, то интервалы, отмеченные с положительным знаком являются решением неравенства.

Ответ: $x \in (-1;1) \cup (2;\infty)$

Пример 2. Решите неравенство: $x^4-3<2x(2x^2-x-2)$.

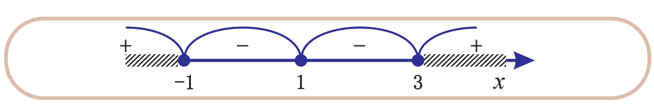
Решение. 1. Дано целое рациональное неравенство. Для его решения перенесём сначала все выражения в левую часть неравенства:

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3<0$$

2. Находя нули $x_1=-1,\ x_2=1$ и $x_3=3$ левой части, разложим её на множители.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3)\geq 0$$

3. Отмечая эти значения на числовой оси, уточним знаки левой части на полученных интервалах:



4. Показатель множителя $(x-1)$ равен двум (чётному числу), поэтому его знак при переходе через 1 на числовой оси не меняется.

5. Так как знак неравенства (≥) больше или равен нулю, то решением неравенства будут промежутки, отмеченные с положительным знаком и число 1.

Ответ: $x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty) \cup \{1\}$

Дробно-рациональные неравенства

Неравенства, приводимые к виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$, называются дробно-рациональными неравенствами. Здесь $f(x)$ и $g(x)$ -многочлены от переменной x.

Этапы решения дробно-рациональных неравенств:

- Находятся нули числителя;
- Находятся нули знаменателя;
- На числовой оси отмечаются нули. При этом числовая ось разбивается на интервалы;
- Отмечаются знаки (+ или –) частного $\frac{f(x)}{g(x)}$ на полученных интервалах;
- Интервалы, знаки (+ или –) которых соответствуют знаку ($>, \geq$ или $<, \leq$) неравенства, являются решением неравенства.

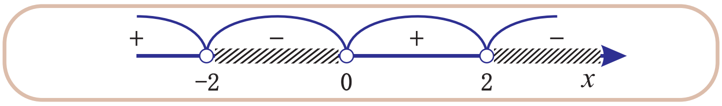
Пример 3. Решите неравенство: $\frac{4}{x} - x < 0$.

Решение.

1. Приводим левую часть к общему знаменателю $\frac{4-x^2}{x} < 0$.

2.Находим нули числителя и знаменателя $x = 2$, $x = -2$, $x = 0$.

3. Отмечаем нули на числовой оси и определяем знаки левой части на интервалах.



Поскольку знак неравенства меньше нуля, то интервалы, отмеченные с отрицательным знаком являются решением неравенства.

Ответ: $x \in (-2;0) \cup (2;\infty)$.

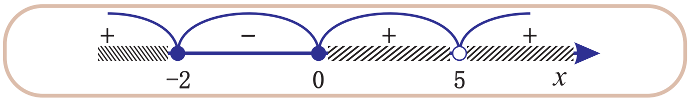
Пример 4. Решите неравенство: $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2} \geq 0$.

Решение.

1. Нули числителя: $x = 0$ и $x = -2$.

2. Ноль знаменателя: $x = 5$.

3. Отмечаем эти значения на числовой оси и определяем знаки левой части на интервалах. Обратим внимание на выражение $(x-5)$, показатель которого – чётное число (равное 2), поэтому интервалы, расположенные по обе стороны от числа 5 на числовой оси, имеют одинаковый знак.



Так как знак неравенства больше или равен нулю, то промежутки, отмеченные с положительным знаком являются решениями неравенства.

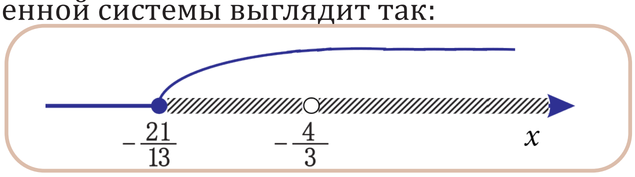
Ответ: $x \in (-\infty;-2] \cup [0;5) \cup (5;\infty)$.

Обратите внимание! При решении неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ не начинайте его решение с умножения обеих частей на $g(x)$, предполагая $g(x) \neq 0$. Такие действия могут привести к неправильному решению.

Например, пусть неравенство $\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5$ решается умножением обеих частей на $(3x+4)$ в предположении $(3x+4) \neq 0$.

Тогда $\begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4} \cdot (3x+4) \leq 5 \cdot (3x+4) \\ 3x \neq -4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-1 \leq 15x+20 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -\frac{21}{13} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$

Изображение полученной системы выглядит так:



Отсюда можно сделать вывод, что решением неравенства является множество $\left[-\frac{21}{13}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$, которое неправильно.

Задание. Работая самостоятельно с неравенством шаг за шагом, как это было сделано в предыдущих примерах, объясните, почему в последнем примере не получилось правильное решение.

ПРИМЕРЫ

Решите неравенства

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5$

6. $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. Укажите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$

10. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$

11. Сколько целых чисел из (–3; 3) удовлетворяют неравенству $\frac{1}{x} < 1$?

12. Найдите разность между наибольшим и наименьшим отрицательными значениями целых чисел, входящих в решение неравенства $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1} \geq 0$

13. Сколько целых чисел, входящих в решение неравенства $\frac{(x+4)^2 - 8x - 25}{(x-6)^2} \geq 0$, расположены в отрезке [–5; 6]?

14. $\frac{6x-1}{4x+3} \leq \frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3} + \frac{6x}{1-2x} \geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3} \leq \frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2} - \frac{5x}{1-2x} \leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x} \leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9} - \frac{3x+1}{3x-12} \leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \frac{3x+7}{3x-6} \leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x} - \frac{2}{25+10x} + \frac{4}{25-4x^2} \geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2} - \frac{2}{x^2-4x} + \frac{x}{x^2-16} \geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x} + \frac{32-3x}{x^3+64}\right) : \frac{x+8}{x^3-4x^2+16x} \geq \frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x}{-x^3+8} - \frac{2-x}{2x^2+x}\right) : \frac{4}{x^2-2x} \geq \frac{4-x}{x+2x^2}$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Этапы решения систем рациональных неравенств:

- Решается каждое неравенство в отдельности;
- Находится общее решение неравенств, входящих в систему (этот этап можно осуществить изображением на числовой оси).

Пример 1. Решите систему неравенств: $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\ge 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

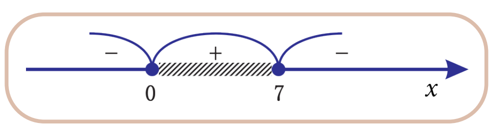
Ответ: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

Пример 2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 7x-x^2\ge 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

Решение.

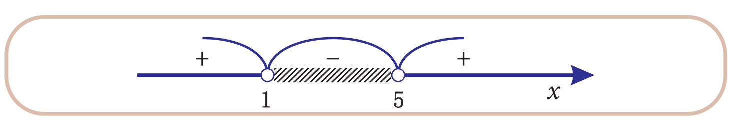
Решаем первое неравенство системы $x(7-x)\ge 0$.

Отмечаем на числовой оси нули $x=0$ и $x=7$ и определяем знаки на полученных интервалах.

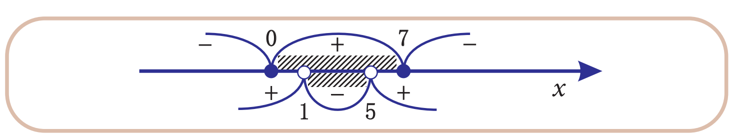


Решаем второе неравенство системы $x^2-6x+5<0$.

Нули равны x = 1 и x = 5. Отмечаем их на числовой оси и определяем знаки на полученных интервалах.



Найдём общую часть полученных решений. Общая часть состоит из заштрихованного и сверху, и снизу интервала.



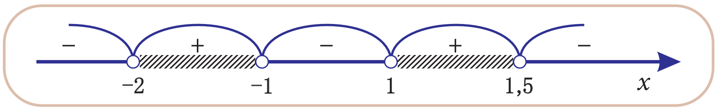
Ответ: $x\in(1;5)$.

Пример 3. Решите систему неравенств. $\begin{cases} \dfrac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0 \\ 1+2x\le\dfrac{3}{x} \end{cases}$

Решаем первое неравенство системы

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0.$$

Отмечаем на числовой оси нули числителя и знаменателя $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ и $x=1{,}5$ и определяем знаки на полученных интервалах.

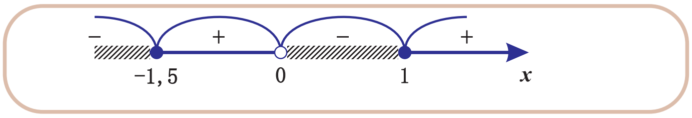


Решаем второе неравенство системы $1+2x\le\frac{3}{x}$.

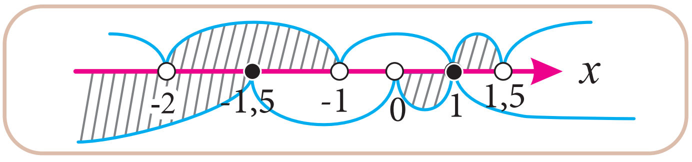
Перенесём все выражения в левую часть неравенства и приведём их к общему знаменателю

$$\frac{2x^2+x-3}{x}\le 0.$$

Нули числителя $x=1$ и $x=-1{,}5$, и область определения состоит из всех значений x, для которых $x\ne 0$. Отмечаем их на числовой оси и определяем знаки на полученных интервалах.



Изображаем решения обоих неравенств на одной числовой оси. Решением системы является общая часть этих решений.



Ответ: $x\in(-2;-1{,}5]$.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите все целые числа, входящие в решение системы неравенств.

a) $\begin{cases}0{,}2x>-1\\ -\frac{x}{3}\ge 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x}{3}\\ \frac{x+1}{2}\ge\frac{x}{5}\end{cases}$ c) $\begin{cases}1-\frac{x}{4}>x\\ x-\frac{x-4}{5}>1\end{cases}$ d) $\begin{cases}x-\frac{x}{4}\ge 2\\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1\end{cases}$

2. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases}\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge\frac{x-3}{4}-x\\ 1-x>0{,}5x-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12}\\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\ge\frac{x}{6}-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}\frac{2x-1}{6}+\frac{x+2}{3}-\frac{x-8}{2}>x-1\\ 2-2x>0{,}5+0{,}5\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{8x+1}{3}>\frac{4x+9}{2}-\frac{x-1}{3}\\ \frac{5x-2}{3}<\frac{2x+13}{2}-\frac{x+2}{3}\end{cases}$

3. Найдите область определения выражения.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-7}}$

4. Найдите область определения функции.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-2}<1\\ \dfrac{3x+2}{2x-3}>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{7-3x}{2-5x}\le 2\\ \dfrac{2x+1}{3x-3}>4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x-2}<2\\ \dfrac{5x+1}{4x-5}\ge 3\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \dfrac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}$

6. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases}x^2\le 9\\ x>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+7x-6\le 0\\ 6(x+4)-3(4-3x)<2\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x^2-2x+1\le 0\\ 2(x+3)-(x-8)<4\end{cases}$

d) $\begin{cases}-2x^2+3x-2<0\\ -3(6x-1)-2x<x\end{cases}$ e) $\begin{cases}12(x+2)-5(5-4x)<2\\ 9x^2-6x-8\le 0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-1<0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$

7. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в решение системы.

a) $\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0\\ 20x\ge 20\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\le 35\end{cases}$

8. Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases}3x^2-5x-2<0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+x+2>0\\ x^2<9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}-7x^2+5x-2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\ge 0\\ (5-x)^2\le 4\end{cases}$ f) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ g) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\ge 0\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2-7x+12\ge 0\end{cases}$

i) $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ 2x^2-5x+2\le 0\end{cases}$ j) $\begin{cases}x^2-9x+14<0\\ x^2-7x-8\le 0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x^2+4x+3\le 0\\ 2x^2+5x<0\end{cases}$ l) $\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\\ (x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В уравнениях $\sqrt{2x-5}=7$, $2\sqrt{x}+5=8$, $\sqrt[3]{x+3}=-1-x$ неизвестные находятся под знаком корня. Такие уравнения называются иррациональными уравнениями.

Другими примерами иррациональных уравнений являются, например, уравнения $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2}-\sqrt[5]{(x-1)^2}=\sqrt[5]{x^2-1}$.

Во многих случаях иррациональные уравнения решаются путём приведения к рациональным уравнениям, являющимся их результатами. Для этого выполняются следующие этапы:

- Чтобы преобразовать иррациональное уравнение в рациональное, обе части данного уравнения возводятся в натуральную степень один или несколько раз.
- Решается получившееся рациональное уравнение.
- Уточняются посторонние корни.

Образование посторонних корней связано с возведением в степень. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема. Решение уравнения $f_1(x)=f_2(x)$, образованного возведением в квадрат обеих частей уравнения $f_1^2(x)=f_2^2(x)$, состоит из объединения корней уравнений $f_1(x)=f_2(x)$ и $f_1(x)=-f_2(x)$

Эта теорема показывает, что при возведении в квадрат уравнения его корни не исчезают, наоборот, могут образовываться посторонние корни.

Если в иррациональном уравнении участвует только один корень, оставляем этот корень в одной части уравнения, а остальные члены уравнения переносим в другую часть. Потом обе части возводим в такую степень, чтобы уравнение избавлялось от корня. В результате формируется рациональное уравнение. Далее необходимо решить полученное уравнение и проверить, подставив его корни в данное иррациональное уравнение. Если какой-либо из найденных корней не удовлетворяет заданному уравнению, то он является посторонним корнем.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{2x-1}=5$.

Решение.

Возведём обе части уравнения в квадрат $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=5^2$. Отсюда $x = 13$.

Теперь проверим, не является ли этот корень посторонним: $\sqrt{2\cdot 13-1}=\sqrt{25}=5$. Получилось правильное равенство.

Ответ: $x = 13$.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$.

Решение. Возведём обе части уравнения в квадрат $x^2 - x - 2 = x^2 - 6x + 9$. Отсюда $x = 2{,}2$,

Теперь проверим, не является ли этот корень посторонним. В левой части уравнения получим $\sqrt{2{,}2^2-2{,}2-2}=2{,}2-3$, $\sqrt{0{,}64}=-0{,}8$; а в правой части уравнения $2{,}2 - 3 = -0{,}8$. Получилось равенство $0{,}8 = -0{,}8$, которое не верно.

Таким образом, корень образованного рационального уравнения является посторонним корнем для заданного иррационального уравнения. Заданное иррациональное уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Решение иррациональных уравнений

I. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ можно решить приведением его в равносильную ему систему $\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1$.

Решение.

$$\sqrt{3x^2-6x+16}=2x-1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16=(2x-1)^2, \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16=4x^2-4x+1, \\ 2x\ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0, \\ x\ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решаем уравнение $x^2+2x-15=0$: $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\dfrac{-2\pm 8}{2} \Rightarrow x_1=3,\ x_2=5$. Так как $x\ge\dfrac{1}{2}$, то корнем уравнения является $x=3$.

Ответ: $x=3$.

II. Для решения уравнений вида $\sqrt{f(x)}\cdot g(x)=0$ решают сперва систему $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ потом уравнение $f(x)=0$. Объединение решений двух последних даёт решение заданного уравнения.

Пример 4. Решите уравнение $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$.

Решение.

Этап 1: $\begin{cases} x^2-25=0 \\ 6-2x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 5 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x=-5$

Этап 2: $6-2x=0 \Rightarrow x=3$

Ответ: $x_1=-5$; $x_2=3$.

III. Уравнение вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ решается приведением его в одну из следующих систем:

$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$

Пример 5. Решите уравнение $\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-3}$.

Решение.

$\begin{cases} x+1=2x-3 \\ 2x-3\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x\ge 1{,}5 \end{cases} \Rightarrow x=4$

Ответ: $x=4$.

Пример 6. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

Решение.

Возведём в квадрат обе части уравнения и решим полученное уравнение.

$$\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=\left(\sqrt{14-x}\right)^2 \Rightarrow x^2+4x=14-x \Rightarrow x_1=-7\ ,\ x_1=2.$$

Непосредственная проверка, т. е. проверка подстановкой этих значений в заданное иррациональное уравнение, показывает, что ни одно из них не является посторонним корнем.

Ответ: $x_1=-7\ ,\ x_1=2$.

IV. Решение уравнений вида $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$ состоит из объединения решений систем:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

Пример 7. Решите уравнение: $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x+5}=0$.

Решение.

1) $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x+5\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 2 \\ x\geq -5 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=2$

2) $\begin{cases} x+5=0 \\ x^2-4\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=-5$

Ответ: $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=-5$.

Область определения уравнения – это множество всех значений неизвестного, при которых все части уравнения имеют смысл. Иррациональное уравнение можно решить правильно, не находя область. Суть последнего опирается на проверку. В некоторых уравнениях полезно найти область определения.

Например, можете самостоятельно проверить, что:

1) нахождение области определения уравнения $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$ достаточно сложно и бесполезно (лучше возвести обе части уравнения в квадрат);

2) для решения уравнения $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$ достаточно найти его область определения.

Пример 8. Решите уравнение: $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$.

Решение.

Находим область определения уравнения:

$$\begin{cases} 1-x^2\geq 0, \\ x^2-9\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\leq 1, \\ x^2\geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\leq x\leq 1, \\ x\leq -3,\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Так как область определения пустое множество, то уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 9. Решите уравнение $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

Решение.

Возведём обе части уравнения в квадрат.

$$\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$$

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4$$

$$\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$$

Уравнение $\sqrt{(3x+7)(x+1)}=2x+2$ снова возводим в квадрат и получаем:

$(3x+7)(x+1)=4x^2+8x+4$. Отсюда $x^2-2x-3=0$. Его корни $x_1=-1,\ x_2=3$.

Проверим эти корни.

При $x=-1$ имеем $\sqrt{3(-1)+7}$ – $\sqrt{-1+1}$ $=2-0=2$.

При $x=3$ имеем $\sqrt{3\cdot 3+7}$ – $\sqrt{3+1}$ $=4-2=2$.

Значит, оба корня удовлетворяют заданному уравнению.

Ответ: $x_1=-1$; $x_2=3$.

Пример 10. Решите уравнение: $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-7}=5$.

Решение.

Находим область определения уравнения.

$$\begin{cases}3-2x\ge 0\\ x-7\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1{,}5\\ x\ge 7\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$$

Так как область определения пустое множество, то уравнение не имеет корней.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 11. Решите уравнение $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$

Решение.

$\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}=2 \Rightarrow 25+\sqrt{x+13}=2^5 \Rightarrow \sqrt{x+13}=7$

$\sqrt{x+13}=7,\ x+13=7^2,\ x=49-13=36$

Проверим эти корни. $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{49}}=\sqrt[5]{25+7}=\sqrt[5]{32}=2$

Значит, найденный корень удовлетворяет заданному уравнению.

Ответ: $x=36$.

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{5}{2}$.

Решение.

1. Если вводим обозначение $\sqrt{\frac{3x+2}{x}}=a$, то $\sqrt{\frac{x}{3x+2}}=\frac{1}{a}$, и уравнение примет вид $a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2}$. Находим его корни $a_1=2$, $a_2=\frac{1}{2}$.

2. Теперь, вместо a подставляя найденные её значения в $\sqrt{\frac{3x+2}{x}}=a$, находим $x_1=2$ и $x_2=-\frac{8}{11}$.

Ответ: $x_1=2$ и $x_2=-\frac{8}{11}$.

Пример 13. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1$.

Решение.

$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1 \Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=(x+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow x^2-4=0$.

$x^2=4$, $x_{1,2}=\pm 2$.

Проверим эти корни. При $x=2$ имеем $\sqrt[3]{2^3+4\cdot 2^2+3\cdot 2-3}=2+1$, $\sqrt[3]{27}=3$.

При $x=-2$ имеем $\sqrt[3]{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-3}=-2+1$, $\sqrt[3]{-1}=-1$.

Ответ: $x=\pm 2$.

Пример 14. Решите уравнение $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$.

Решение.

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

Если вводим обозначение $\sqrt{x^2-3x+5}=a$, то получится квадратное уравнение $a^2+a-12=0$. Его корни $a_1=3$; $a_2=-4$.

При $a=3$ имеем $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, $x^2-3x+5=9$, $x^2-3x-4=0$. Его корни: $x_1=4$; $x_2=-1$.

При $a=-4$ так как $-4\notin[0;\infty)$, то уравнение $\sqrt{x^2-3x+5}=-4$ не имеет корней.

Ответ: $x_1=4$; $x_2=-1$.

V. Уравнение $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ равносильно неравенству $f(x)\geq 0$.

Уравнение $\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ равносильно неравенству $f(x)\leq 0$.

ПРИМЕРЫ

Решите уравнения.

1. $\sqrt{5x+2}=10$

2. $\sqrt{4x-6}=12$

3. $\sqrt{10-2x}=4$

4. $\sqrt{-12+7x}=x$

5. $\sqrt{x+12}+x=0$

6. $\sqrt{4+3x}=-x$

7. $x-3=\sqrt{9-x}$

8. $-x=\sqrt{15-2x}$

9. $x-6=\sqrt{8-x}$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}}=4$

11 $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}}=\dfrac{1}{2}$

12. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1$

13. $\sqrt{5x-3}=\sqrt{2x}$

14 $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x-1}$

15. $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{2x-5}$

16. $3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=12$

17. $3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x$

18. $\sqrt{15x^2-7x+8}=4x$

19. $\sqrt{x^2+x}=2-x$

20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$

21. $(4-x^2)\sqrt{-1-3x}=0$

22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x}=0$

23. $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0$

24. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$

25. $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$

26. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$

27. $\sqrt{x-13}+\sqrt{10-x}=4$

28. $\sqrt{(2x-3)^2}=2x-3$

29. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$

30. $2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{3x+1}$

31. $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$

32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

33. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$

34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$

35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$

36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$

38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$

39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение систем иррациональных уравнений основано на правилах перехода к равносильным системам или следствиям. Используются различные методы решения системы иррациональных уравнений: разложение на множители, исключение переменных, алгебраическое сложение, замена переменных и др.

Пример 1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{xy}=7\end{cases}$.

Решение.

Находим область определения системы уравнений: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Введём обозначения $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$.

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{xy}=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=8\\ ab=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=8-b\\ (8-b)b=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=8-b\\ b^2-8b+7=0\end{cases}$$

Решаем уравнение $b^2-8b+7=0$, $b_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}$, $\Rightarrow b_1=7,\ b_2=1$.

$a_1=8-b_1 = 8-7=1, \Rightarrow a_1=1.$

$a_2=8-b_2 = 8-1=7, \Rightarrow a_2=7.$

при $a_1=1,\ b_1=7$ имеем $\sqrt{x}=1,\ \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1,\ y=49.$

При $a_2=7,\ b_2=1$ имеем $\sqrt{x}=7,\ \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49,\ y=1.$

Проверим: при $x=1,\ y=49$ имеем

$$\begin{cases}\sqrt{1}+\sqrt{49}=8\\ \sqrt{49}=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1+7=8\\ 7=7\end{cases}$$

$x=49,\ y=1$ da

$$\begin{cases}\sqrt{49}+\sqrt{1}=8\\ \sqrt{49}=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7+1=8\\ 7=7\end{cases}$$

Ответ: (1; 49), (49; 1).

Пример 2. Решите систему уравнений $\begin{cases}x-y=21\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3\end{cases}$.

Решение.

Находим область определения системы уравнений: $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Применяем формулу короткого умножения $x-y=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Проверим: при $x=25,\ y=4$ имеем $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Ответ: (25; 4).

Пример 3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$.

Решение.

Сначала решаем первое уравнение системы $x+y+\sqrt{x+y}=20$. Если ввести обозначение $\sqrt{x+y}=a$, то образуется квадратное уравнение $a^2+a-20=0$. Так как $\sqrt{x+y}\ge 0$, то $a\ge 0$.

Решаем уравнение $a^2+a-20=0$, $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, $a_1=4$, $a_2=-5$, $a_2=4$.

Так как $-5\notin[0;\infty)$ и $4\in[0;\infty)$, то $\sqrt{x+y}=4$. Отсюда $x+y=16$. Следовательно,

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)^2+y^2=136 \end{cases}$$

Решаем уравнение $(16-y)^2+y^2=136 \Rightarrow y^2-16y+60=0$.

$$y_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\frac{16\pm 4}{2},\ \Rightarrow y_1=10,\ y_2=6.$$

При $y_1=10$, $y_2=6$ из $x+y=16$ вытекает $x_1=6$, $x_2=10$. Корни образованной системы рациональных уравнений (10;6) и (6;10).

Проверим, являются ли они корнями исходной системы иррациональных уравнений:

$$\begin{cases} 10+6+\sqrt{10+6}=16+4=20 \\ 10^2+6^2=100+36=136 \end{cases}$$

Ответ: (10; 6), (6; 10).

Пример 4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases}$.

Решение.

Находим область определения системы уравнений: $x\in R, y\in R$.

Обозначим $\sqrt[3]{x}=a,\ \sqrt[3]{y}=b$. Тогда : $x=a^3,\ y=b^3$.

$$\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3+b^3=28 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=28 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(a^2-ab+b^2\right)=28 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-ab+b^2=7 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2-3ab=7 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^2-3ab=7 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ab=9 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$$

Из системы уравнений $\begin{cases} ab=3 \\ a+b=4 \end{cases}$ получим $a_1=1,\ b_1=3$ и $a_2=3,\ b_2=1$.

При $a_1=1,\ b_1=3$ имеем $\sqrt[3]{x}=1,\ \sqrt[3]{y}=3 \Rightarrow x=1,\ y=27$.

При $a_2=3,\ b_2=1$ имеем $\sqrt[3]{x}=3,\ \sqrt[3]{y}=1 \Rightarrow x=27, y=1$.

Проверка: $x=1$, $y=27$ или $x=27$, $y=1$ имеем $\begin{cases} 1+27=28 \\ \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{27}=1+3=4 \end{cases}$

Ответ: (1; 27), (27; 1).

Пример 5. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases}$.

Решение. 1) $\begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y+3x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{y+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{5-3x+2x}=1 \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x}=3x-1 \\ y=5-3x \end{cases}$$

2) Решаем уравнение $\sqrt{5-x}=3x-1$. Так как $\sqrt{5-x}\ge 0$, то

$$3x-1\ge 0 \Rightarrow 3x\ge 1 \Rightarrow x\ge \frac{1}{3} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right).$$

Возведя обе части уравнения $\sqrt{5-x}=3x-1$, получим квадратное уравнение.

$$5-x=(3x-1)^2 \Rightarrow 5-x=9x^2-6x+1 \Rightarrow 9x^2-5x-4=0$$

Находим корни уравнения.

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm13}{18}\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

Так как $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ и $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$. Поэтому $x=1$ – корень уравнения.

При $x=1$ имеем $y=2$. Итак, пара $(1;2)$ – корень образованной системы. Остаётся проверить, является ли эта пара корнем исходной системы. При $x=1$ и $y=2$ имеем:

$\begin{cases}3\cdot1-\sqrt{2+2\cdot1}=3-\sqrt{4}=1,\\ 2+3\cdot1=5.\end{cases}$ Получились правильные числовые равенства.

Ответ: $(1;2)$.

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}$.

Решение.

Из $\sqrt{y-2x+11}\ge0$ имеем $x-5\ge0\ \Rightarrow\ x\ge5$ или $x\in[5;\infty)$. Теперь заданную систему иррациональных уравнений приведём в систему рациональных уравнений последовательным преобразованием.

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x-2y+2}\right)^2=4\\ \left(\sqrt{y-2x+11}\right)^2=(x-5)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2y+2=4,\\ y-2x+11=x^2-10x+25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2(x^2-8x+14)=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-17x+30=0,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

Решаем уравнение $2x^2-17x+30$. Его корни $x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{4}=\frac{17\pm7}{4}\Rightarrow$ $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=6$. Поскольку $\frac{5}{2}\notin[5;\infty)$, то это значение $x=\frac{5}{2}$ приводит к постороннему корню заданной системы. При $6\in[5;\infty)$ имеем $y=6^2-8\cdot6+14=2$. Проверим теперь пару $(6;2)$, подставляя её в исходную систему: $\begin{cases}\sqrt{6-2\cdot2+2}=2,\\ \sqrt{2-2\cdot6+11}=6-5.\end{cases}$ Получились правильные числовые равенства.

Ответ: (6; 2).

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\ 3x+2y=23\end{cases}$.

Решение.

Введя обозначения $\sqrt{x+y}=a$ и $\sqrt{2x+y+2}=b$, обнаружим, что $a \ge 0$ и $b \ge 0$. Возведя в квадрат эти два равенства, имеем

$$x+y=a^2 \text{ и } 2x+y+2=b^2.$$

Сложим эти равенства:

$$+\begin{cases} x+y=a^2, \\ 2x+y+2=b^2 \end{cases}$$
$$\overline{3x+2y+2=a^2+b^2}.$$

Учитывая второе уравнение заданной системы, т. е. $3x+2y=23$, из последнего равенства получим $a^2+b^2=25$. Таким образом, мы можем заменить исходную систему на следующую:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7, \\ a^2+b^2=25. \end{cases}$$

Корнями второй системы являются пары $(3;\,4)$ и $(4;\,3)$.

При $a=3$ и $b=4$ имеем

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=3, \\ \sqrt{2x+y+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y+2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=5,\ y=4.$$

При $a=4$ и $b=3$ имеем

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{2x+y+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y+2=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9,\ y=25.$$

Итак, пары $(5;\,4)$ и $(-9;\,25)$ – системы рациональных уравнений, являющихся следствиями заданной системы иррациональных уравнений. Для окончательного ответа мы должны установить, что они не являются посторонними корнями исходной системы .

При $(5;\,4)$ имеем $\begin{cases} \sqrt{5+4}+\sqrt{2\cdot 5+4+2}=7, \\ 3\cdot 5+2\cdot 4=23 \end{cases}$ – правильные числовые равенства;

При $(-9;\,25)$ имеем $\begin{cases} \sqrt{-9+25}+\sqrt{2\cdot(-9)+25+2}=7, \\ 3\cdot(-9)+2\cdot 25=23 \end{cases}$ – правильные числовые равенства.

Ответ: $(5;\,4)$ и $(-9;\,25)$.

ПРИМЕРЫ

Решите систему уравнений.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x\cdot y=216 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ x\cdot y=27 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

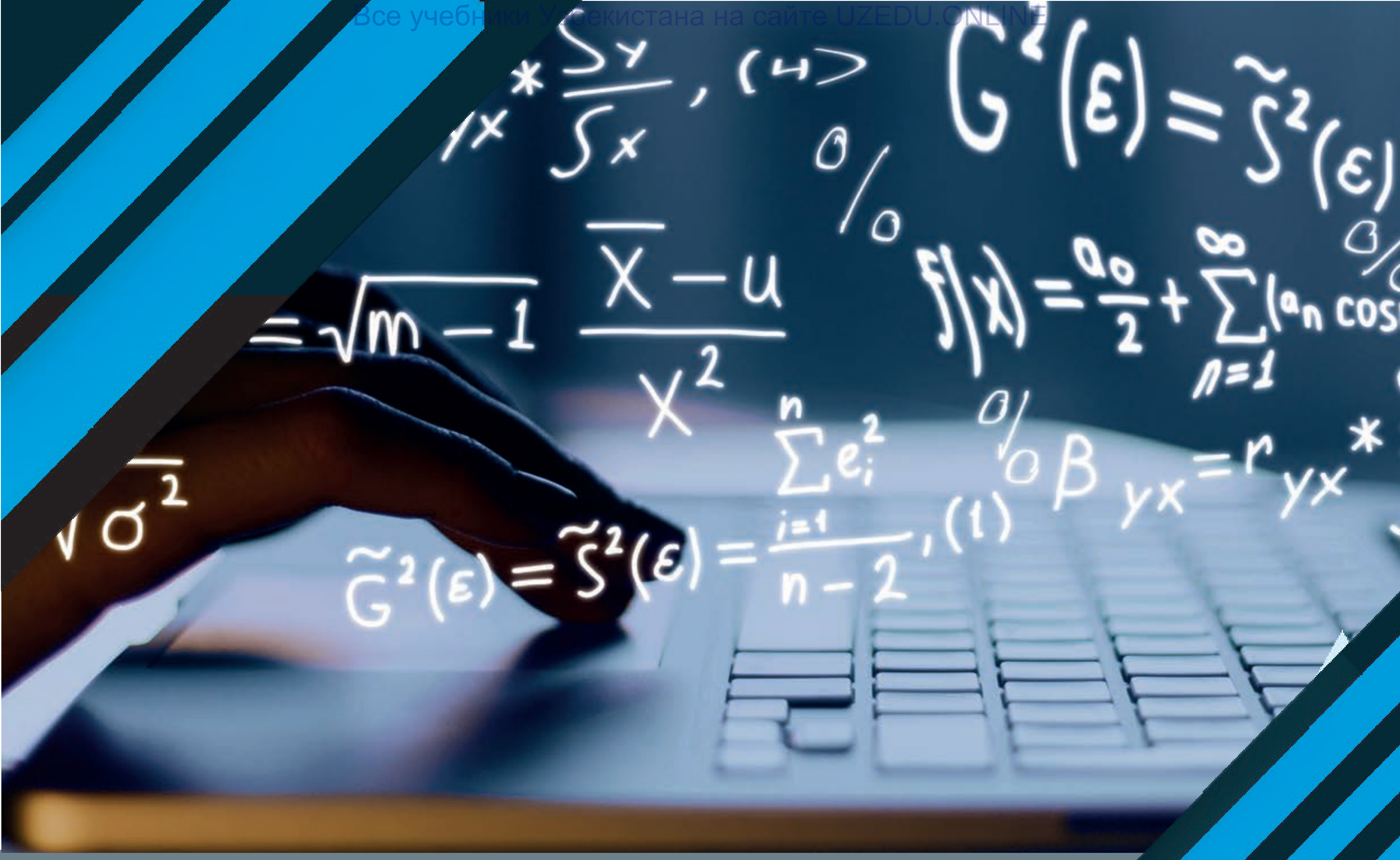
13. a) $\begin{cases} y + x - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = -1 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 9 \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$



ГЛАВА 3. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ
- ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
- ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ
- ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ
- ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
- СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
- ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА
- ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

В последнее время воздух больше загрязняется, и всё чаще наблюдается подъём пыли с поверхности земли. Доказано, что с увеличением высоты количество пыли уменьшается. Зависимость количества пыли от высоты выражается показательной функцией. Кроме того, показательными функциями описываются такие явления, как размножение вирусов и распад радиоактивных веществ.

Если обозначить количество пыли в единичном объёме воздуха через y, а величину высоты – через x, то тогда зависимость количества пыли от высоты будет выражаться формулой $y = p \cdot e^{-qx}$. Здесь p, q – известные величины, называемые параметрами, e – иррациональное число, называемое числом Эйлера. Его приближенное значение равно 2,71.

Для изучения показательных функций нужно знать следующие их свойства:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ n \in N,\ m \in Z$

Как известно, можно рассматривать степени $a^{\frac{m}{n}}$ с дробным показателем $\frac{m}{n}$ или a^p с действительным показателем p. При некоторых значениях показателя p степень a^p может стать бессмысленной. Например, выражение $(-3)^{\frac{1}{2}}$ не имеет смысла на множестве действительных чисел. Кроме того, выражение $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ также не определено. Чтобы предотвратить такие случаи, накладывается условие $a > 0$ на основание a степени a^p с вещественным p. Поскольку $1^p = 1$ для любого действительного числа p, степень с основанием 1 не даёт никакой новой информации.

Итак, на основании вышеизложенного можно сделать следующий вывод.

Заключение. Чтобы степень a^p с произвольным вещественным показателем p принимала определённое значение, основание   должно удовлетворять условиям $a > 0$ и $a \neq 1$.

Рассмотрим вещественное число a, удовлетворяющее условиям $a > 0$ и $a \neq 1$. Функция вида $\boldsymbol{y = a^x}$ называется **показательной функцией** (показатель степени – переменная величина).

Показательная функция $\boldsymbol{y = a^x}$ обладает следующими свойствами:

● Область определения показательной функции $\boldsymbol{y = a^x}$ состоит из множества всех действительных чисел:

$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

● Множество значений показательной функции $\boldsymbol{y = a^x}$ состоит из множества всех положительных действительных чисел:

$$E(y) = (0; +\infty)$$

● Показательная функция $\boldsymbol{y = a^x}$ не пересекается с осью Ox.

Рисунок 1

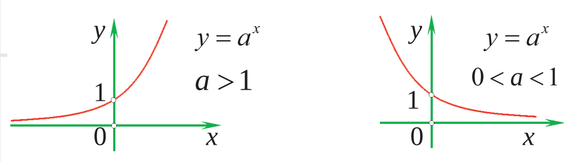


График показательной функции

- Показательная функция $y = a^x$ пересекается с осью Oy в точке $(0,1)$.
- Показательная функция не является ни периодической, ни чётной, ни нечётной.
- Функция $y = a^x$ убывает при a, $0 < a < 1$. Интервал убывания $(-\infty; +\infty)$.
- Функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$. Интервал возрастания $(-\infty; +\infty)$.

Пример 1. Сравните $(0{,}1)^{\sqrt{2}}$ и 1.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = (0{,}1)^x$, основание которой заключено между нулем и единицей. Поэтому она – убывающая. Следовательно, $(0{,}1)^0 = f(0) > f\left(\sqrt{2}\right) = (0{,}1)^{\sqrt{2}}$, поскольку $0 < \sqrt{2}$.

Ответ: $(0{,}1)^{\sqrt{2}} < 1$.

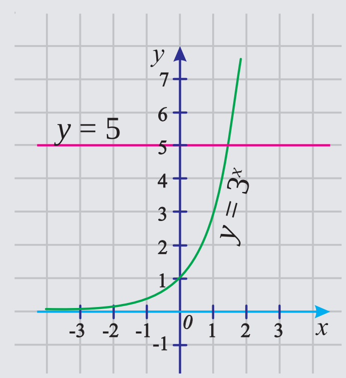
Пример 2. Какие из функций убывающая: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = e^x$, $y = 2{,}6^x$?

Решение.

Из трёх заданных функций только у первой основание лежит между 0 и 1, а у остальных основание больше 1. Поэтому только первая функция – убывающая.

Ответ: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Рисунок 2



Пример 3. Покажите, что уравнение $3^x = 5$ имеет единственное решение.

Решение.

Построим графики функций $y = 3^x$ и $y = 5$ на одной плоскости (рис. 2).

Из рисунка видно, что графики пересекаются в единственной точке. Этим установлено, что уравнение имеет единственное решение.

ПРИМЕРЫ

1. Приведите свойства функции и постройте её график.

a) $y = 3^x$ b) $y = 0{,}4^x$ c) $y = 0{,}8^x$ d) $y = 1{,}5^x$

2. Найдите множество значений функции.

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$;

c) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y = 4^x + 2$

3. Сравните выражения.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ и 1   b) $3{,}2^{-\sqrt{2}}$ и 1   c) $0{,}7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ и $0{,}7^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Вычислите.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}}:64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Упростите выражения.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2:6x^{4\pi}}$ d) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,5}:6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Какие из функций $y=\left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y=\pi^x$, $y=1{,}7^x$ возрастающие?

7. Постройте эскизы графиков следующих функций.

a) $y=2^{|x|}$ b) $y=-2^{|x|+1}$ c) $y=2^{-|x|}-1$

8. Упростите выражения.

a) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$ b) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$

9. Определите, какие из следующих двух функций возрастающая, а какая убывающая.

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$

c) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$ d) $y=\left(3-\sqrt{7}\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^x}$

10. Найдите множество значений функции.

a) $y=3^{x+1}-3$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$ c) $y=\left|2^x-2\right|$ d) $y=4^{|x|}$

11. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{sinx}$ b) $y=4^{cosx}$ c) $y=5+3^{|cosx|}$ d) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|sinx|}-2$

12. Определите знак показателя.

a) $3^a=10$ b) $10^a=4$ c) $0{,}3^a=0{,}1$ d) $0{,}7^a=5$

13. Найдите значение выражения.

a) если $6^{x-1}=12$, найдите 6^x;
b) если $5^{x-3}=4$, найдите 5^{4-x};
c) если $12^{x+5}=6$, найдите 12^{-3-x}.

14. В каких случаях выполняется неравенство $3^{x_1} > 3^{x_2}$?

15. Установите, что функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, когда x принимает натуральные значения.

Применение показательной функции в жизни

Когда кипящий чайник снимают с огня, он сначала быстро остывает, а затем скорость остывания замедляется. Это связано с тем, что скорость охлаждения пропорциональна разнице между температурой чайника и температурой внешней среды. Чем меньше эта разница, тем медленнее остывает чайник. Если начальная температура чайника T_0, а температура воздуха T_1, то температура чайника через t секунд определяется по формуле $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$, где k – постоянная.

Применение в физике

Когда предмет свободно падает в безвоздушном пространстве (вакууме), его скорость увеличивается. Даже в воздухе скорость падающих предметов увеличивается, но не превышает определённого значения. Если сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости падения парашютиста, т. е. $F = kv$, то через t секунд его скорость падения будет равна $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$, где m — масса парашютиста.

Рост населения

Изменение численности населения в стране за определённый период времени показывается формулой $N = N_0 e^{kt}$, где N_0 – численность населения в момент времени $t = 0$, а N – численность населения в момент времени t, и, наконец, k – постоянная.

Применение в биологии

Закон воспроизводства органического мира: в благоприятной для организма среде (число хищников мало, количество пищи достаточно) живые организмы размножаются по закону показательной функции. Например, одна муха производит за лето $8 \cdot 10^{14}$ новых поколений. Их вес составлял бы несколько миллионов тонн (а потомки двух мух превысили бы массу нашей планеты), и занимали бы они очень большую площадь. Если бы они были расположены цепочкой, то длина этой цепочки была бы больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Однако наличие в природе множества животных и растений, являющихся естественными «врагами» мухи, не позволяет до такой степени увеличивать численность мух.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Показательные уравнения

Уравнение, в котором неизвестная величина находится в показателе степени, называется показательным уравнением. Например, $3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ являются показательными уравнениями.

Значение неизвестной величины, превращающее уравнение в правильное численное равенство, называется корнем показательного уравнения.

Показательные уравнения и их решение

Корнем уравнения $a^x = a^p$ с неизвестным x является его значение $x = p$.

При решении показательных уравнений применяется следующее правило:

При $a > 0$, $a \neq 1$ корни уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ состоят из корней уравнения $f(x) = g(x)$.

Пример 1. Решите уравнение $2^{x-1} = 16$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $2^{x-1} = 2^4$. Тогда $x - 1 = 4$. Отсюда $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

Пример 2. Решите уравнение $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $3^{2x+x^2} = 3^{15}$. Тогда $x^2 + 2x = 15$ или $x^2 + 2x - 15 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются $x_1 = -5; x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

Пример 3. Решите уравнение $\left(5^{x+1}\right)^x = \left(\frac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде: $5^{x^2+x} = 5^{24-x}$. Тогда $x^2 + x = 24 - x$ или $x^2 + 2x - 24 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются $x_1 = -4$ и $x_2 = 6$.

Ответ: $x_1 = -4$ и $x_2 = 6$.

Пример 4. Найдите произведение корней уравнения $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 12^{x^2}$.

Решение.

Используя $12^{x^2} = (2 \cdot 6)^{x^2} = 2^{x^2} \cdot 6^{x^2}$, перепишем уравнение в виде $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 2^{x^2} \cdot 6^{x^2}$ и решаем его.

$$6^{x^2}-2\cdot 6^{x^2}+36=0 \quad \Rightarrow 6^{x^2}=36 \Rightarrow x^2=2 \quad \Rightarrow x_1=-\sqrt{2}\,, x_2=\sqrt{2}\,.$$

Теперь находим произведение корней $x_1\cdot x_2=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$.

Ответ: –2.

Пример 5. Решите уравнение $3^{2x-1}=7^{2x-1}$.

Решение.

Так как показатели выражений обеих частей уравнения одинаковы, разделим обе части равенства на 7^{2x-1}, и решим полученное уравнение.

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}}=\frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0} \quad \Rightarrow 2x-1=0 \quad \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x=\frac{1}{2}$.

Пример 6. Найдите сумму корней уравнения $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{9}\cdot 9^{x^2}-\frac{36}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0 \text{ или } 9^{x^2}-12\cdot 3^{x^2}+27=0.$$

Обозначим $3^{x^2}=t$ и при условии $t>0$ решим полученное квадратное уравнение:

$t^2-12t+27=0 \Rightarrow t_1=3,\ t_2=9$. Учитывая обозначения, получим

$$3^{x^2}=3 \Rightarrow 3^{x^2}=3^1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=-1\ x_2=1$$

$$3^{x^2}=9 \Rightarrow 3^{x^2}=3^2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_2=-\sqrt{2}\ x_3=\sqrt{2}.$$

Теперь можем найти сумму корней:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+1=0.$$

Ответ: 0.

ПРИМЕРЫ

1. Решите показательные уравнения.

a) $3^x\cdot 3=81$ b) $4^{3x}\cdot 2^x=128$ c) $5^{x+1}-4\cdot 5^x=25$ d) $7^x\cdot 8^x=1$

e) $4^{x^2-3x-4}=1$ f) $0,3^{2x-1}=0,09$ g) $2^{2x}=4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=9$

i) $27^x=\frac{1}{3}$ j) $400^x=\frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3}=0,6^{2x-5}$

2. Решите уравнения.

a) $3^x = 81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ c) $7^x = -49$ d) $13^x = -169$

e) $5^x = 0$ f) $8^{2x} = 0$ g) $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15} = 2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x} = 13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x} = \left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3} = \left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x} = 1$

7. $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1} = 5^{x+1}$

9. $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$

10. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$

11. $5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x+4} = 651$

12. $4 \cdot 7^{x+3} - 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x+1} = 1302$

13. $6 \cdot 2^{x+4} - 4 \cdot 2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} = 152$

14. $7^{3x} - 7^{3x-1} = 6$

15. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

16. $5 \cdot 25^x - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$

17. $9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

18. $3^{2x+3} - 4 \cdot 3^{x+1} + 1 = 0$

19. $(0,25)^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

21. $9 \cdot 16^x + 2 \cdot 12^x - 32 \cdot 9^x = 0$

22. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$

23. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

24. $4^{x^2} + 6^{x^2} = 2 \cdot 9^{x^2}$

25. $8^x - 6 \cdot 12^x + 11 \cdot 18^x = 2 \cdot 27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{2+x} = 16 \cdot 2^{2\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} + 2^{x-3} = 80 + \sqrt{4^{x-4}}$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Неравенства $4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \le 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ являются примерами показательных неравенств.

При этом, в неравенстве $2^{x-2} \le 2^{5+3x}$ основания его обеих частей одинаковы (и равны 2).

Показательные неравенства, в обеих частях которых находятся степени с одинаковыми основаниями, решаются приведением их в рациональные неравенства.

В следующей таблице показаны способы приведения показательных неравенств с одинаковыми основаниями в рациональные неравенства.

Виды показательных неравенств / Основание	$a^{f(x)} \le a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \ge a^{g(x)}$
При $0 < a < 1$	$f(x) \ge g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \le g(x)$
При $a > 1$	$f(x) \le g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \ge g(x)$

Пример 1. Решите неравенство $2^x > 32$.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $2^x > 2^5$. Так как основание больше единицы, т. е. 2>1, то x>5.

Ответ: $(5;\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \frac{16}{9}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $\left(\frac{3}{4}\right)^x \ge \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$. Так как $0 < \frac{3}{4} < 1$, то $x \le -2$.

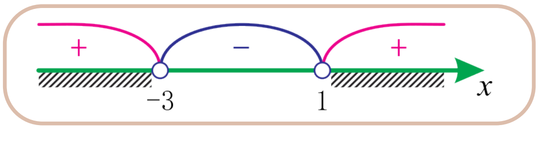
Ответ: $(-\infty;-2]$.

Пример 3. Решите неравенство. $3^{x^2+2x} > 3^3$.

Решение.

Так как основание больше единицы, т. е. 3 > 1, то решение заданного неравенства состоит из решения неравенства $x^2 + 2x > 3$.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,\ (x+3)(x-1) > 0,$$



Ответ: $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Решение неравенств с разными основаниями

При $a \ne b$, $a > 0$, $a \ne 1$ и $b > 0$, $b \ne 1$ показательное неравенство $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ решается приведением к равносильному ему неравенству $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$.

ПРИМЕРЫ

Решите неравенства.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \le 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. При каких натуральных n справедливо двойное неравенство $9 \le 3^n \le 79$?

12. При каких значениях x функция $y = 5^x - 5$ принимает положительные значения?

13. Найдите наибольшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \le 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \le 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \ge 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

29. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. Найдите сумму всех целых чисел, удовлетворяющих неравенству $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \le -3$.

31. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$?

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Логарифмы широко используются в различных аспектах повседневной жизни. Например, чтобы определить, сколько времени потребуется, чтобы банковский депозит увеличился на определённую сумму. Или логарифмическая зависимость используется для оценки высоты тона звука.

Для того, чтобы изучить логарифм и логарифмическую функцию, нужно знать:

1) показательную функцию;
2) свойства показательных функций.

Понятие логарифма

Пример 1. Решите уравнение $3^x = 27$.

Решение.

$3^x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2. Решите уравнение $2^x = 5$.

Это уравнение имеет корень. Но значение этого корня не является рациональным. Для выражения корней уравнений такого вида введено понятие логарифма. Корень заданного уравнения есть величина, обозначаемая как $\log_2 5$ и называемая логарифмом числа 5 по основанию 2. Значит, корень $x = \log_2 5$.

Ответ: $x = \log_2 5$.

В общем случае, корень уравнения $a^x = b$ равен $x = \log_a b$. Здесь $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Определение

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в который нужно возвести a, чтобы получить b. Логарифм числа b по основанию a (для краткости, логарифм b по a) обозначается через $\log_a b$. При этом a называется основанием логарифма, b – подлогарифмическим выражением.

Выражение $\log_{10} b$ для краткости обозначается через $\lg b$ и называется десятичным логарифмом.

Выражение $log_e b$ для краткости обозначается через $\ln b$ и называется натуральным логарифмом.

Итак, $\lg b = \log_{10} b$ и $\ln b = \log_e b$.

Если подставить корень $\log_a b$ вместо неизвестного x в уравнении $a^x = b$, то получается равенство

$$a^{\log_a b} = b, \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

называемое ***основным логарифмическим тождеством.***

Пример 3. Вычислите по определению значения выражений.

a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\lg 100$; d) $\ln e^3$.

Решение.

a) $\log_2 32 = 5$; $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$; $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) $\lg 100 = 2$; $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$; $e^3 = e^3$

Ответ: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3.

Пример 4. Вычислить $\log_{64} 32$.

Решение. Значение выражения можно найти, приведя его в уравнение $\log_{64} 32 = x$ и решая его:

$$64^x = 32 \quad \Rightarrow \quad 2^{6x} = 2^5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Пример 5. Вычислите $64^{\log_8 3}$, применяя основное логарифмическое тождество.

Решение.

$$64^{\log_8 3} = \left(8^2\right)^{\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Ответ: 9.

Логарифмическая функция и её свойства, график

Рассмотрим действительное число a, удовлетворяющее условиям $a > 0$ и $a \neq 1$. Функция вида

$$y = \log_a x$$

называется логарифмической функцией.

Например, функции вида $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ являются логарифмическими функциями.

Логарифмические функции обладают следующими свойствами:

- Область определения логарифмической функции $y = \log_a x$ состоит из множества всех положительных действительных чисел:

$$D(y) = (0; +\infty).$$

- Множество значений логарифмической функции $y = \log_a x$ состоит из множества всех положительных действительных чисел:

$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ пересекает ось Ox в точке (1;0).
- Логарифмическая функция $y = \log_a x$ не пересекается с осью Oy.
- Логарифмическая функция не является периодической.
- Логарифмическая функция не является ни чётной, ни нечётной.
- Функция $y = \log_a x$ убывает при a, $0<a<1$: Интервал убывания $(0; +\infty)$.
- Функция $y = \log_a x$ возрастает при a, $a > 1$: Интервал возрастания $(0; +\infty)$.

Пример 6. Сравните a) $\log_{0,3}7$ и $\log_{0,3}8$
b) $\log_7 0{,}28$ и $\log_7 0{,}31$.

Решение.

a) Так как функция $y=\log_{0,3}x$ – убывающая и $7<8$, то $\log_{0,3}7>\log_{0,3}8$.

b) Поскольку функция $y=log_7 x$ – возрастающая и $0{,}28<0{,}31$, то $\log_7 0{,}28<\log_7 0{,}31$.

Рисунок 1

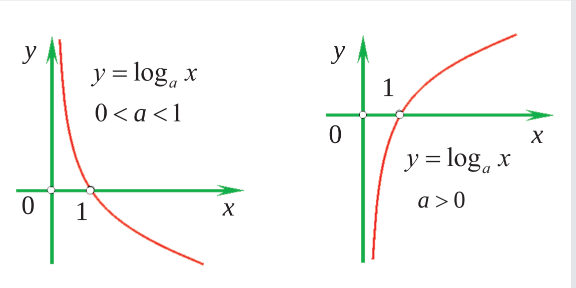


График логарифмической функции

Пример 7. Определите область определения функции

$$y=\log_7\left(x^2-5x+6\right).$$

Решение. Подлогарифмическое выражение должно быть положительным. Поэтому

$$x^2-5x+6>0\Rightarrow(x-2)(x-3)>0\Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$$

Ответ: $D(y)=(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

Пример 8. Найдите область определения функции $y=\log_{4-x}\left(x^2-9\right)$.

Решение.

$$\begin{cases}4-x>0\\4-x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<4\\x\neq3\end{cases}\qquad x^2-9>0\Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$$

Ответ: $D(y)=(-\infty;-3)\cup(3;4)$.

Пример 9. Постройте график функции

$$y=-1+\log_2(x-1).$$

Решение.

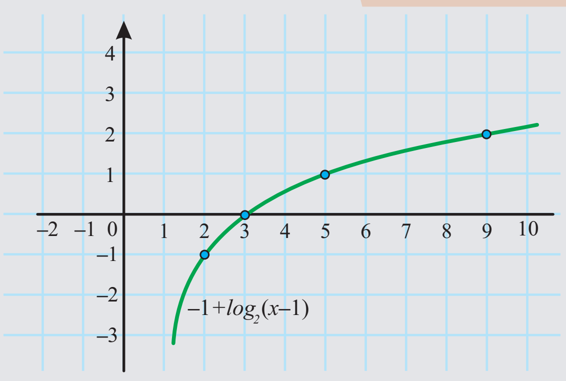
Укажем область определения.

$$x-1>0\Rightarrow x>1$$

Составим таблицу некоторых значений.

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

Рисунок 2



Обозначая найденные точки на координатной плоскости, проведём через них плавную кривую (рис. 2).

ПРИМЕРЫ

1. Определите, являются ли данные функции возрастающими или убывающими.

a) $y=\log_{0,075} x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11} x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}} x$ f) $y=-\log_{\pi} x$

2. Сравните.

a) $\log_e 0,5$ и $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1} 100$ и $\log_{0,1} 101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} \sqrt{37}$ и $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Расположите числа в порядке возрастания.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}} 10,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 15,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}} 3,\ c=\log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}} 4,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 6,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Проверьте правильность утверждений, подставляя числа.

a) Если $a > 1$ и $b > 1$, то $\log_a b > 0$.

b) Если $0 < a < 1$ и $0 < b < 1$, то $\log_a b > 0$.

c) Если $a > 1$ и $0 < b < 1$, то $\log_a b < 0$.

d) Если $0 < a < 1$ и $b > 1$, то $\log_a b < 0$.

5. Какие из данных чисел положительны?

a) $a=\log_{0,2} 8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9} 9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9} 0,6$ f) $l=\log_{1,2} \frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02} 0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|} 2022$ i) $q=\log_{|-3|} 3$

6. Покажите, что графики функций $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ симметричны относительно оси абсцисс.

7. Найдите область определения функции.

a) $y = \log_4 x$ b) $y = \log_2(x-1)$

c) $y = \log_3(x^2-2x-3)$ d) $y = \log_4(x^2-4)$

e) $y = \lg(3-x)$ f) $y = -\log_2(x^2+5x-6)$

8. Постройте график функции.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \lg x$ d) $y = \ln x$

9. Найдите область определения функции.

a) $y = \log_{x^2}(4 - x)$ b) $f(x) = \log_{x^2}(x - 1) + \sqrt{2 - x}$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x - 1) - \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sqrt{x + 4} + \log_2(x^2 - 4)$

e) $f(x) = \dfrac{\log_{x^2+1}(6 - x)}{\sqrt{x + 2}}$ f) $y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)}$

10. Постройте график функции.

a) $y = \log_2(x - 1)$ b) $y = \log_3(5x + 1)$ c) $y = \log_4(1 - x)$

d) $y = \lg(x - 3)$ e) $y = \log_6(3x - 2)$ f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \log_8 x - 4$ h) $y = \lg x + 3$ i) $y = \log_6(x - 2) - 1$

11. Во скольких точках пересекаются графики функций?

a) $y = \log_2 x;\quad y = -x + 1$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 2x - 5$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x;\quad y = 4x^2$

d) $y = \log_3 x;\quad y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ e) $y = 2^x;\quad y = \log_{0,5} x$ f) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x;\quad y = \log_3 x$

ТОЖДЕСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Следующие тождественные преобразования используются при выполнении операций над логарифмическими выражениями и их упрощении. Предположим, что выражения в следующих свойствах удовлетворяют условиям определённости логарифма.

Из определения логарифма вытекают следующие его свойства:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b$.

4°. Логарифм произведения равен сумме логарифмов множителей:

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания:

$$\log_a b^p = p \log_a b.$$

7°. Формула перехода из одного основания в другое: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

8°. Из свойств 1 и 7 вытекает равенство: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

9°. Из свойств 7 и 8 вытекает равенство: $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k} \log_a b$.

10°. Из свойств 5 и 8 вытекает равенство: $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k} \log_a b$.

Упрощение показательных и логарифмических выражений

Мы познакомились со свойствами логарифма и логарифмической функции, а также степени и показательной функции. Эти свойства используются для преобразования логарифмических и показательных выражений.

Пример 1. Вычислите $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$.

Решение.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3 \left(18 \cdot \frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Ответ: –1.

Пример 2. Вычислите $3\log_2 8-2\log_3 9$.

Решение.

$$3\log_2 8-2\log_3 9=3\log_2 2^3-2\log_3 3^2=3\cdot 3\cdot\log_2 2-2\cdot 2\cdot\log_3 3=9\cdot 1-4\cdot 1=5$$

Ответ: 5.

Пример 3. Вычислите $10^{1+\lg 5}$.

Решение.

$$10^{1+\lg 5}=10^1\cdot 10^{\lg 5}=10\cdot 5=50$$

Ответ: 50.

Пример 4. Вычислите $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$.

Решение.

$$\log_2\log_5\sqrt[8]{5}=\log_2\log_5 5^{\frac{1}{8}}=\log_2\left(\frac{1}{8}\cdot\log_5 5\right)=\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3$$

Ответ: –3.

Пример 5. Вычислите $2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

Решение.

$$2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\log_{2^2}\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_{3^2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=2^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}==2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$$

Ответ: 4.

Пример 6. Вычислите $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}$.

Решение.

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{2\log_5 3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{\log_5 3^2}+2^{\log_2 7}}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$$

Ответ: 4.

Пример 7. Вычислите $\dfrac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25$.

Решение.

$$\frac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 2+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2\left(2\cdot 5\right)}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 10}+\lg 25=$$

$$=2\lg 2+\lg 25=\lg 2^2+\lg 25=\lg\left(4\cdot 25\right)=\lg 100=2$$

Ответ: 2.

Пример 8. Вычислите $3^{2+\log_3 2}$.

Решение. Применим формулы $a^{m+n}=a^n\cdot a^m$ и $a^{\log_a b}=b$. В результате получим

$$3^{2+\log_3 2}=3^2\cdot 3^{\log_3 2}=9\cdot 2=18.$$

Ответ: 18.

Напомним, что действие, обратное логарифмированию, называется потенцированием. Другими словами, процесс нахождения неизвестного x из уравнения $\log_a x=b$, называется потенцированием (здесь $a>0$, $a\neq 1$ и $b>0$). В этом случае результатом потенцирования будет $x=a^b$.
Докажем равенство

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a},$$

широко применяемое при доказательствах показательных и логарифмических выражений. Здесь требуется выполнение условий $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $b\neq 1$. При выполнении этих условий выражения $\log_b a$ и $\log_b c$ имеют смысл. Очевидно, что

$$\log_b c\,\log_b a=\log_b a\,\log_b c.$$

По свойству $n\log_p q=\log_p q^n$ логарифма из последнего тождества вытекает

$$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}.$$

Потенцируя его обе части, получим равенство

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}.$$

Пример 9. Если $a=sin\dfrac{\pi}{6}$, то найдите $\log_4 a$.

Решение. $\dfrac{1}{2}$

$$a=sin\frac{\pi}{6}= \qquad \log_4 a=\log_4\frac{1}{2}=\log_{2^2}2^1=-\frac{1}{2}\log_2 2=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

Пример 10. Вычислите $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$.

Решение.

Разложив числитель на множители, получим:

$$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=\frac{(\log_2 14+2\log_2 7)(\log_2 14-\log_2 7)}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{\cancel{(\log_2 14+2\log_2 7)}(\log_2 14-\log_2 7)}{\cancel{\log_2 14+2\log_2 7}}=\log_2 14-\log_2 7=\log_2\frac{14}{7}=\log_2 2=1$$

Ответ: 1.

Пример 11. Упростите выражение $fx=\log_4\dfrac{x^2}{4}-2\log_4\left(4x^4\right)$ и найдите его значение при $x=-2$.

Решение.

Требуется $x \neq 0$, чтобы заданное выражение имело смысл. Обозначим

$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$. Следующие уравнения вытекают из свойств логарифмов:

$$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2\left(\log_4 4 + \log_4 x^4\right) =$$
$$= 2\log_4 |x| - 1 - 2\left(1 + 4\log_4 |x|\right) = -6\log_4 |x| - 3.$$

$$f(-2) = -6\log_4 |-2| - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -6.$$

Ответ: Значение выражения $\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4$ при $x = -2$ равно -6.

Пример 12. Выразите $\log_2 7$ через a, если $\log_{98} 112$.

Решение.

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7\left(7 \cdot 2^4\right)}{\log_7\left(7^2 \cdot 2\right)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2},$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a, \quad 1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2,$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1, \quad (4 - a)\log_7 2 = 2a - 1, \quad \log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

ПРИМЕРЫ

1. Найдите значения логарифмических выражений.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Найдите значения логарифмических выражений.

a) $\log_5 25$ b) $\log_{324} 18$ c) $\log_{128} 4$ d) $\log_{10}(0{,}001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Вычислите.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Какое из следующих чисел не равно остальным трём?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Какие из чисел меньше 2?

a) $M=\log_5 100-\log_5 4$ b) $N=4\log_2 3-\log_2 9$

c) $P=\log_6 72-\log_6 2$ d) $Q=\log_4 16+\log_4 \frac{1}{8}$

6. Вычислите.

a) $3-\lg 50+\frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_2 32+\log_{32} 2$ c) $\frac{\log_4 13+\log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11+\log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12}+\frac{1}{\log_{18} 12}$. f) $\frac{1}{\log_{45} 15}+\frac{1}{\log_5 15}$

7. Вычислите.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2+2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4+4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. Вычислите значение выражения в заданном значении a.

a) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Вычислите.

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$ b) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$ c) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

10. Вычислите.

a) $\frac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$

b) $\frac{\log_2^2 28+\log_2 28\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 28+2\log_2 7}$

c) $\frac{\log_{35}^2 7-2\log_{35} 7\cdot\log_{35} 5-3\log_{35}^2 7}{2\left(\log_{35} 7-3\log_{35} 5\right)}$

d) $\frac{\log_2^2 12-2\log_2 12+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\log_2 12+4\log_2 3}{\log_2 12-2\log_2 3}$

11. Найдите область определения функции

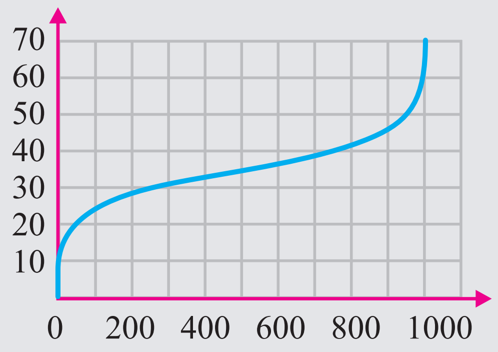
a) $y=\log_2(x+3)$ b) $y=\log_{0,2}(x^2-4x)$

c) $y=\log_{0,7}\left(2x-\dfrac{1}{8}\right)$ d) $y=\log_2(5-3x)$

12. Если одна из 1000 коров в стаде пастуха болеет инфекционной болезнью, то зависимость дней t заболеваемости n коров моделируется по формуле $t=-5\cdot\ln\left(\dfrac{1000-n}{999n}\right)$.

Найдите, через сколько дней заболеют 100, 800, 1000 коров. Сделайте вывод с помощью рисунка (рис. 1).

Рисунок 1



13. Постройте график функции на основе таблиц.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

14. Найдите обратные данным функциям.

a) $f(x)=10^x$ b) $f(x)=\log_3(x+1)$

c) $f(x)=2+e^{x+4}$ d) $f(x)=5+\log_2(x-3)$

15. Найдите значения a и b.

a) $\log_3 b=2$ b) $\log_a 8=3$ c) $\log b^2=\lg 4$ d) $\log_a 36=2$

16. Постройте графики функций $y=\ln e^x$ и $y=e^{\ln x}$. Объясните сходство и разницу.

18. Объясните, какие преобразования выполнены над функциями на рис. 2.

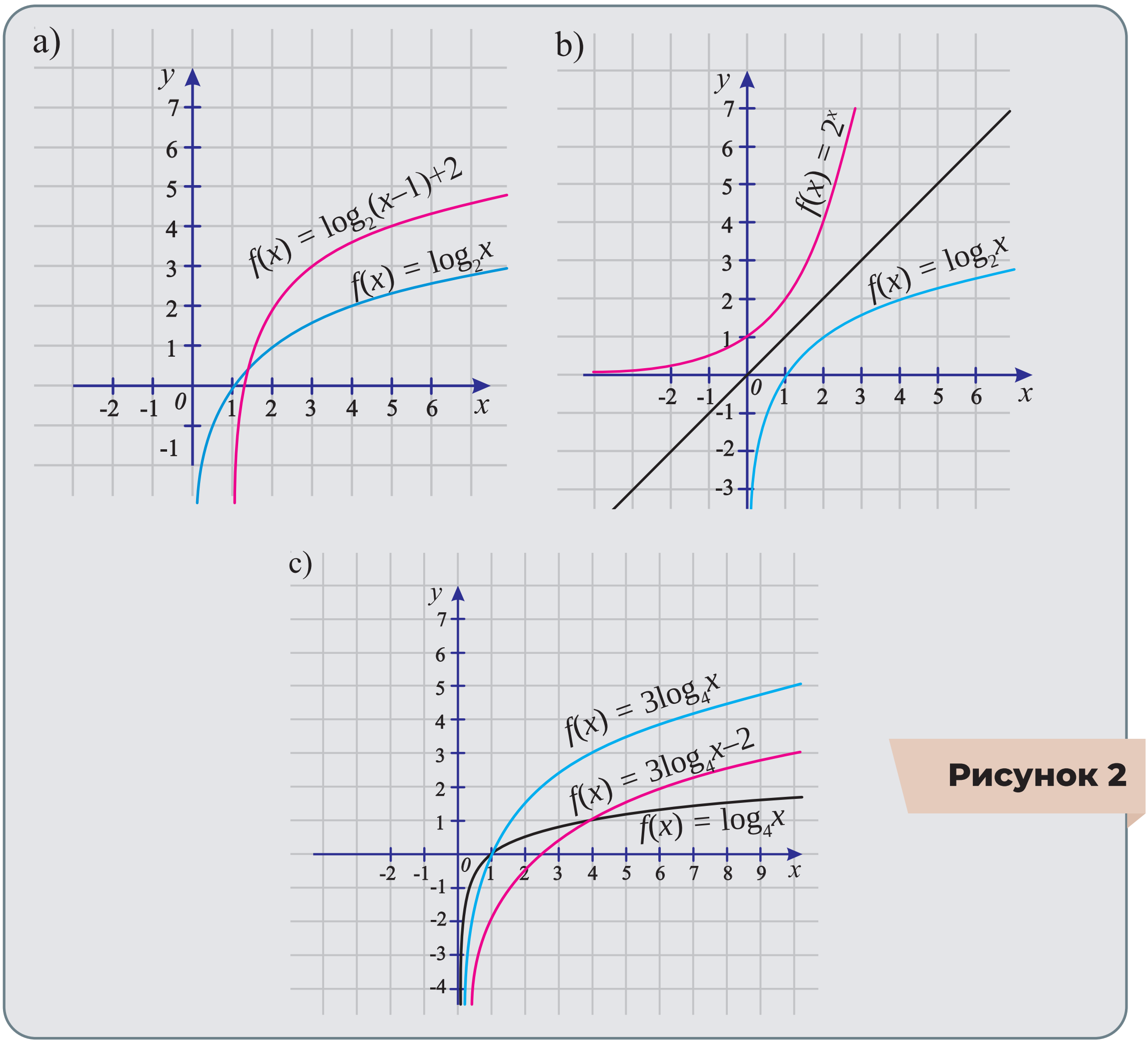


Рисунок 2

Применение логарифмической функции в жизни

Уровень интенсивности звука

Энергия, переносимая звуковой волной за единицу времени через единицу площади поверхности, называется интенсивностью звука. Когда звук распространяется через упругую среду, создаётся избыточное давление по сравнению с тем, когда он не распространяется, что называется звуковым давлением. Интенсивность звука зависит от амплитуды звуковой волны и свойств среды. Интенсивность громкости звука измеряется в децибелах (дБ).

I – интенсивность звука,

I_0 – относительная интенсивность звука,

L – высота интенсивности звука.

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) dB$$

Интенсивность звука, передаваемого смартфоном в наушники, может превышать 100 децибел. Для человеческого уха безопасным считается уровень звука не более 80 децибел. Чрезмерно громкое прослушивание звуков может привести к потере или повреждению слуха.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестную в подлогарифмическом выражении или в основании, называется логарифмическим уравнением. Например, $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x(x+2) = 2$, $\lg(2x-2) = \lg(x+2)$ являются примерами логарифмических уравнений.

Значение неизвестной, которое превращает данное логарифмическое уравнение в правильное равенство, называется корнем этого логарифмического уравнения.

Решение простейших логарифмических уравнений

При $a > 0$, $a \neq 1$ уравнение вида $\log_a x = b$ будет простейшим логарифмическим уравнением. Корнем этого уравнения будет $x = a^b$.

Для решения логарифмических уравнений используется правило:

При $a > 0$, $a \neq 1$ корни уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ состоят из корней уравнения $f(x) = g(x)$, удовлетворяющих условию $f(x) > 0$ (или $g(x) > 0$).

Ниже приведены примеры решения логарифмических уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\log_5 x = -2$.

Решение.

При решении уравнения используем определение логарифма под условием $x > 0$

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

Так как $x = \frac{1}{25} > 0$, найденное значение неизвестной будет корнем заданного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{25}$.

Пример 2. Решите логарифмическое уравнение $\log_3(x^2 - 4) = \log_3(5x - 8)$.

Решение.

Находим область определения.

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Теперь решаем уравнение $x^2 - 4 = 5x - 8$:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \ x_2 = 4.$$

Значение $x = x_1 = 1$ неизвестной не принадлежит интервалу $(2; \infty)$, а значение $x = x_2 = 4$ принадлежит. Таким образом значение $x_1 = 1$ – посторонний корень, $x_2 = 4$ – корень.

Ответ: $x = 4$.

Пример 3. Решите логарифмическое уравнение $\log_5^2 x - 3\log_5 x - 4 = 0$.

Решение.

Сначала отметим, что область определения задаётся неравенством $x > 0$, а затем, вводя обозначение $\log_5 x = t$, получим

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \;\Rightarrow\; (t+1)(t-4) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -1,\;\; t_2 = 4.$$

Значит, $\log_5 x = -1$ и $\log_5 x = 4$. Отсюда $x_1 = \dfrac{1}{5} = 0,2$; $x_2 = 5^4 = 625$.

Ответ: $x_1 = 0,2$; $x_2 = 625$.

Пример 4. Решите уравнение $\log_{x-1} 16 = 2$.

Решение.

Прежде уточняем область, в которую должны входить корни уравнения.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (1;\, 2) \cup (2;\, \infty)$$

Потом используем определение логарифма.

$$\log_{x-1} 16 = 2 \quad\Rightarrow\; (x-1)^2 = 16$$

Теперь находим корни последнего уравнения. Ясно, что:

$$x-1=4 \quad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x-1=-4 \quad \Rightarrow x_2 = -3$$

Ответ: $x = 5$.

Пример 5. Решите уравнение $\log_5 \log_2 \log_7 x = 0$.

Решение.

При решении уравнения используем определение логарифма.

$$\log_2 \log_7 x = 5^0 \Rightarrow \log_2 \log_7 x = 1 \;\Rightarrow\; \log_7 x = 2^1 \;\Rightarrow\; x = 7^2 = 49$$

Ответ: $x = 49$.

Пример 6. Решите уравнение $\lg\left(x^2 - 3\right) \cdot \lg x = 0$.

Решение.

Найдём область определения

$$\begin{cases} x^2-3>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)>0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty;\, -\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\, +\infty\right), \\ x\in(0;\, +\infty). \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\sqrt{3};\, +\infty\right)$$

Далее каждый из множителей приравниваем к нулю и решаем полученные уравнения:

$\log_3\left(x^2 - 3\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $\lg x = 0 \Rightarrow x_3 = 10^0 \Rightarrow$ $x_3 = 1$

Ясно, что значения $x = -2$ и $x = 1$ являются посторонними корнями, а $x = 2$ – корень.

Ответ: $x = 2$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите логарифмические уравнения.

a) $\log_2 x = -3$ b) $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2} = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ e) $\log_3(3x-1) = 2$ f) $\log_7(x+3) = 2$

g) $\log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$ h) $\log_4(2x-3) = 4$ i) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

2. Решите логарифмические уравнения.

a) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = 2$

c) $\log_2 x + \log_8 x = 0$ d) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ f) $\log_{0,2}(x+3) = -1$

g) $\log_{0,25}(x+30) = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}}(1-2x) = 4$

i) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ j) $\log_3(x^2-4x+3) = \log_3(3x+21)$

k) $\log_3(2x-5) = \log_3(20-3x)$ l) $\log_7(9x-1) = \log_7 x$

m) $\log_3(2x^2-3x) = 2\log_3 x$ n) $\lg(2x) = 2\lg(4x-15)$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_\pi(\log_2(\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1) = 0$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7(x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9} + \log_5\sqrt{2x-1} = \log_5 10$

СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Система показательных уравнений и её решение

Система уравнений, в которую входят уравнения с показательным выражением, называется системой показательных уравнений. Система показательных уравнений бывает в различных формах. Решение каждой такой системы требует индивидуального подхода. При этом широко используются свойства показательных и логарифмических выражений.

Пример 1. Решите систему $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$.

Решение.

Воспользуемся из $9 = 3^2$. Тогда $3^x = 3^{2(y+1)}$, отсюда $x = 2y + 2$. Во втором уравнении в системе, вместо x подставляя $2y + 2$, найдём значение y:

$$4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Теперь в равенстве $x = 2y + 2$, вместо y подставив его значение, найдём значение $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$.

Ответ: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

Пример 2. Решите систему $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$.

Решение.

Воспользуемся $729 = 9^3$ и $1 = 3^0$. Тогда

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Ответ: (2; 1).

Пример 3. Решите систему $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Решение.

Из уравнений системы следует, что $x > 0$, $x \neq 1$. Следовательно, выражения в левых и правых частях первого и второго уравнений можно логарифмировать. Логарифмируем эти выражения по основанию 3 и получаем следующее:

$$\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x^{y+1} = \log_3 27, \\ \log_3 x^{2y-5} = \log_3 \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \frac{3}{y+1}, \\ (2y-5) \cdot \frac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ. (3; 2).

Пример 4. Решите систему $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$.

Решение.

Из первого уравнения находим зависимость $2^y = 5 - 2^x$. Учитывая равенство $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$, из второго уравнения получим $2^x \cdot 2^y = 4$, отсюда $2^x\left(5 - 2^x\right) = 4$, и наконец, получаем уравнение $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$. Полагая $t = 2^x$ и учитывая $2^{2x} = t^2$, получим квадратное уравнение $t^2 - 5t + 4 = 0$. Здесь $t > 0$.

Корнями этого квадратного уравнения являются $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, а соответствующие значения неизвестных x и y будут:

при $t_1 = 1$: $1 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = 0$; $\quad 2^{y_1} = 5 - 2^0 = 4, \Rightarrow y_1 = 2$;

при $t_2 = 4$: $4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2$; $\quad 2^{y_2} = 5 - 2^2 = 1, \Rightarrow y_2 = 0$.

Ответ: (0; 2) va (2; 0).

Замечание. Приведённые выше примеры показывают, что при решении каждой системы показательных уравнений требуется своеобразный творческий подход.

Система логарифмических уравнений и её решение

Система, содержащая уравнения с логарифмическим выражением, называется системой логарифмических уравнений. Система логарифмических уравнений, как и система показательных уравнений, имеет множество видов. При решении каждого из них применяются свойства показательных и логарифмических выражений и требуется особый подход.

Пример 5. Решите систему $\begin{cases} \log_9 \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$.

Решение.

Для того чтобы логарифмические выражения в системе имели смысл, требуется решение следующих неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}.$$

Неравенство $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ справедливо только в том случае, когда $y > 0$ и $x \neq 0$. Следовательно, из второго неравенства $xy > 0$ вытекает, что $x > 0$ и $y > 0$.

Теперь при $x > 0$ и $y > 0$, применяя свойства логарифма, заданную систему можно записывать как

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}.$$

Из равенств $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ и $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}\log_3 y$ система будет иметь вид

$$\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим: $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$, из него $\log_3 y = 2$. Из последнего равенства вытекает, что $y = 3^2 = 9$. Наконец, во втором уравнении, вместо y подставив его значение, находим неизвестное x:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: (3; 9).

Пример 6. Решите систему $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3. \end{cases}$

Решение.

Для того чтобы логарифмические выражения в системе имели смысл, требуется выполнение условий $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$. Прологарифмируем равенство $x^{\lg y} = 1000$ по основанию 10:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3.$$

Заменим основание y логарифма во втором уравнении на десятичное основание:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3\lg y.$$

В результате получим уравнение $\lg^2 y = 1$. Решаем его:

$$\lg y_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 10^{-1} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{10}; \ \lg y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 10^1 \Rightarrow y_2 = 10.$$

Из равенства $\lg x = 3\lg y$, получая зависимость $x = y^3$, найдём соответствующие значения:

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$

$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Ответ: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ и (1000; 10).

Пример 7. Решите систему $\begin{cases} \log_2(x-y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}.$

Решение.

Для того чтобы система была определённой, необходимо, чтобы выполнялось условие $x - y > 0$, т. е. $x > y$. Тогда из первого уравнения вытекает зависимость

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2.$$

Во втором уравнении системы, подставляя вместо y выражение $x - 2$, найдём значение неизвестной x:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3.$$

Отсюда $y = 1$.

Ответ: (3; 1).

ПРИМЕРЫ

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

2. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2 \left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \left(\dfrac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \left(\dfrac{y}{2}\right) = -1 \\ x - y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

3. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x(\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$

4. Найдите расстояние между точками, выражающими корни системы $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$.

5. Найдите xy, если $(x; y)$ – корень системы $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$.

6. Найдите $x + y$, если $(x; y)$ – корень системы $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Логарифмические неравенства

Пусть $a>0$ и $a\neq 1$. Тогда неравенства

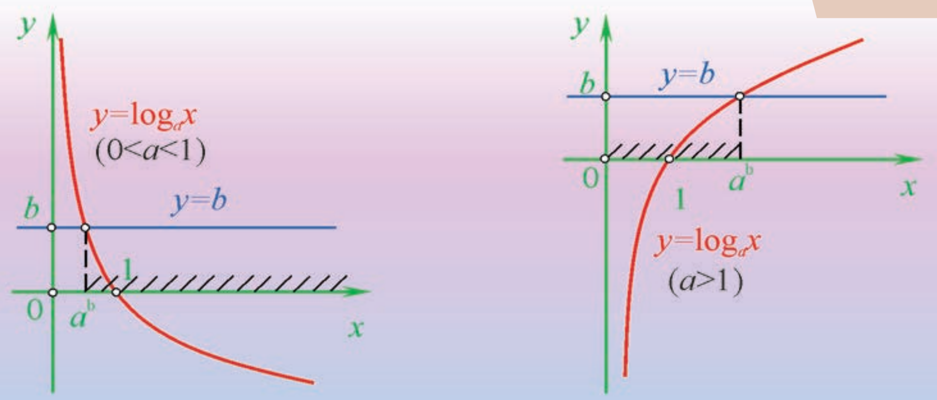
$$\log_a x<b,\ \ \log_a x>b,\ \ \log_a x\le b,\ \ \log_a x\ge b$$

являются логарифмическими неравенствами. При их решениях применяется монотонность функции $y=\log_a x$.

Рассмотрим неравенство $\log_a x<b$. Решением этого неравенства является множество значений переменной *x*, при которых график функции $y=\log_a x$ в системе координат Oxy лежит ниже прямо $y=b$.

Геометрическая интерпретация решения неравенства

Рисунок 1



***a**) Решением неравенства* $\log_a x<b$ *при* $0<a<1$ *является интервал* $(a^b;\ +\infty)$.

***b**) Решением неравенства* $\log_a x<b$ *при* $a>1$ *является интервал* $(0;\ a^b)$.

Приведите самостоятельно геометрические интерпретации решений неравенств $\log_a x>b$, $\log_a x\le b$, $\log_a x\ge b$.

Решение. логарифмических неравенств

Решением логарифмического неравенства $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ является:

решение системы $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$ при $0<a<1$.

решение системы $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ при $a>1$.

Решения неравенств $\log_a f(x)\le\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ и $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)$ можно увидеть в следующей таблице:

Виды логарифмических неравенств / Основание	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
При $0<a<1$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
При $a>1$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Пример 1. Решите неравенство $\log_{27} x > \frac{1}{3}$.

Решение.

Область определения $x>0$. Основание больше 1. Из определения логарифма:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3;\ \infty).$$

Все значения неизвестной из этого интервала лежат в области определения.
Ответ: $x \in (3;\ \infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$.

Решение.

Учитывая, что основание меньше 1, приведём неравенство к равносильной ему системе, а затем решим систему:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Ответ: (1,5; 4).

Пример 3. Решите неравенство $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \ge 0$.

Решение.

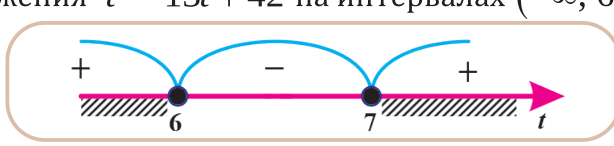
Введём обозначение $t = \log_7 x$. При этом учитываем $t^2 = \log_7^2 x$. Тогда получаем неравенство

$$t^2 - 13t + 42 \ge 0.$$

Нули левой части неравенства:

$$t_1 = 6,\ t_2 = 7.$$

Определим знаки выражения $t^2 - 13t + 42$ на интервалах $(-\infty;\ 6)$, $(6;\ 7)$ и $(7;\ +\infty)$



Таким образом, либо $t \le 6$, либо $t \ge 7$. Отсюда, либо $\log_7 x \le 6$, либо $\log_7 x \ge 7$. Тогда $x \le 7^6$ или $x \ge 7^7$. Принимая условие $x > 0$, получим

$$x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right).$$

Ответ: $x \in \left(0;\ 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$.

Неравенство вида $A \cdot \log_a^2 x + B \cdot \log_a x + C < 0$ решается приведением его в квадратное уравнение введением обозначения $log_a\, x = t$.

Пример 4. Решите неравенство $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \leq 0$.

Решение.

Область определения $x > 0$. Введём обозначение $\log_3 x = t$. Тогда получится квадратное неравенство

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0.$$

Решаем его: $(t-1)(t-2) \leq 0, \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Согласно обозначению $1 \leq \log_3 x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq x \leq 9$.

Ответ: $[3;9]$

Пример 5. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(x^2 + 2x + 1\right)^{x^2+2x+5} > 4x + 28$.

Решение.

Перепишем неравенство как

$$\log_{x+1}(x+1)^{2(x^2+2x+5)} > 4x + 28.$$

Возможны два случая.

Случай 1. $0 < x + 1 < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$

При этом $2\left(x^2 + 2x + 5\right) < 4x + 28 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 < 2x + 14 \Rightarrow x^2 - 9 < 0 \Rightarrow$ $x \in (-3;\, 3)$. Но, учитывая $-1 < x < 0$, заключаем, что в этом случае заданное неравенство верно при $x \in (-1;\, 0)$.

Случай 2. $x + 1 > 1 \Rightarrow x > 0$

При этом $2\left(x^2 + 2x + 5\right) < 4x + 28 \Rightarrow x^2 - 9 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\, -3) \cup (3;\, +\infty)$. Но, учитывая $x > 0$, заключаем, что в этом случае заданное неравенство верно при $x \in (3;\, +\infty)$.

Объединяя случаи 1 и 2, обнаруживаем, что заданное неравенство справедливо при $x \in (-1;\, 0) \cup (3;\, +\infty)$.

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (3;\, \infty)$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите неравенства

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \ge \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$ i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \le 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. Сколько целых чисел удовлетворяют неравенству $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$?

3. Решите неравенства.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$ b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \ge \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \ge -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$ f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \le 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$ h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$ j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \le \lg x^2$

4. Решите неравенства.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \le 2,5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \ge -2$ d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}(\sqrt{6} - 2x) > 0$

e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0,1^{-2}$ f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

5. Найдите отрицательное решение неравенства $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формула сложных процентов

Допустим, клиент хочет занять некоторую сумму Q_0 денег. Кредитор может потребовать погашения первоначальной суммы с прибылью P в течение определённого срока. За срок можно взять один день, два дня, ..., одну неделю, две недели, ..., один месяц, два месяца и т. д. Следовательно, сумма, которую заёмщик погасит в указанный период, составит

$$Q_1 = Q_0 + P.$$

В этом случае величина

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\%$$

называется ***процентом погашения*** заемного долга.

1. Формула простых процентов. Если процент p применяется только к взятому долгу Q_0, сумма, причитающаяся в конце первого срока, будет

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0.$$

При этом формула

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

– это прибыль кредитора в конце первого срока.
Сумма долга в конце второго срока будет

$$Q_2 = Q_1 + P_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0 + \frac{p}{100} Q_0 = \left(1 + \frac{2p}{100}\right) Q_0,$$

а прибыль кредитора в конце второго срока будет

$$P_2 = \frac{2p}{100} \cdot Q_0 \text{ (очевидно, что } P_2 = 2P\text{)}.$$

Повторяя этот процесс n раз, выясняется, что сумма долга в конце n-го срока будет

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0,$$

а прибыль кредитора в конце n-го срока будет

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \text{ (очевидно, что } P_n = nP\text{)}.$$

Проценты, рассчитанные таким образом, называются **простыми процентами**, а формула

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

называется **формулой простых процентов.**

2. Формула сложных процентов. Проценты могут быть рассчитаны путём добавления прибыли, полученной за каждый срок, к полученному долгу. В конце первого срока сумма долга составит

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0.$$

Здесь

$$P_1 = Q_1 - Q_0 = \frac{p}{100} \cdot Q_0$$

– прибыль кредитора в конце первого срока.
Сумма долга в конце второго срока будет

$$Q_2 = Q_1 + \frac{p}{100} Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 Q_0,$$

а прибыль кредитора в конце второго срока будет

$$P_2 = Q_2 - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 - 1\right) Q_0.$$

Повторяя этот процесс n раз, выясняется, что сумма долга на конец n-го срока равна

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0,$$

а прибыль кредитора на конец n-го срока равна

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right) Q_0.$$

Проценты, рассчитанные таким образом, называются сложными процентами, а формула

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

называется ***формулой сложных процентов.***

Существует множество практических примеров и проблем, связанных с использованием простых и сложных формул процентов. В настоящее время распространены такие выражения, как кредит и ипотечный долг. Приведём пример решения задачи расчёта ипотечного долга.

Обычно кредитором выступает банк, а заёмщиком – клиент. Банки выдают кредиты на жильё (ипотеку), транспортные средства или предметы домашнего обихода (телевизор, холодильник, мобильный телефон и т. д.) на длительный срок до нескольких лет и требуют от клиента ежемесячной выплаты определённой суммы кредита.

Пример 1. Молодая семья купила квартиру начальной ценой 360 000 000 сумов по ипотеке сроком на 15 лет с годовой процентной ставкой 20%. Сколько денег вернётся в банк за 15 лет? Насколько это выгодно банку?

Решение.

Первоначальная сумма в 360 000 000 сумов на банковском языке называется основным долгом. 1 год состоит из 12 месяцев. Таким образом, клиент должен ежемесячно возвращать банку основной долг в размере $\frac{360\ 000\ 000}{15 \cdot 12} = 2\ 000\ 000$ сумов. Проценты, начисленные в первый месяц погашения, вычисляются следующим образом:

$$a_1 = 360\ 000\ 000 \cdot \frac{20\%}{100\%} \cdot \frac{1}{12} = 6\ 000\ 000 \text{ сумов.}$$

Итак, в конце первого месяца клиент должен вернуть в общей сложности

$$2\ 000\ 000 + 6\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000 \text{ сумов.}$$

После этого оставшаяся задолженность составит

$$360\ 000\ 000-2\ 000\ 000=358\ 000\ 000 \text{ сумов}$$

В конце второго месяца клиент должен вернуть из основного долга в размере 2 000 000 сумов и процентную сумму в размере

$$a_2=358000000\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12}=5966667 \text{ сумов}$$

А общая сумма в конце второго месяца составляет

$$2\ 000\ 000+5\ 966\ 667=7\ 966\ 667 \text{ сумов.}$$

После оплаты $(n-1)$-го месяца останется основная сумма

$$360\ 000\ 000-2\ 000\ 000\cdot(n-1) \text{ сумов.}$$

В конце n -го месяца клиент платит банку $2\ 000\ 000+a_n$ сумов. Здесь a_n – процентная сумма n -го месяца, которая вычисляется по формуле

$$a_n=\left(360\ 000\ 000-2\ 000\ 000\cdot(n-1)\right)\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12}=(181-n)\cdot\frac{100\ 000}{3} \text{ т. е. } d=-\frac{100000}{3}.$$

Очевидно, что 15 лет состоят из 180 месяцев, поэтому $1 \le n \le 180$. Итак, $a_1=6000000$ $a_{180}=\frac{100000}{3}$, а сумма 180 членов арифметической прогрессии равна

$$S_{180}=\frac{a_1+a_{180}}{2}\cdot 180=\left(6000000+\frac{100000}{3}\right)\cdot 90=543000000 \text{ сумов.}$$

Итак, клиент должен вернуть банку всего 360 000 000+543 000 000=903 000 000 сумов. Прибыль банка составит 543 000 000 сумов.

Радиоактивный распад

Период полураспада. Некоторые химические элементы испускают частицы из своих ядер. Такие элементы называются радиоактивными элементами, процесс испускания частиц из их ядер называется радиоактивным распадом. В результате радиоактивного распада исходный химический элемент превращается в другой химический элемент.

Пусть масса исходного химического элемента равна m_0, а время, за которое её половина распадается, равно T_1. Тогда $m_1=\frac{m_0}{2}$ – масса элемента, не распавшегося в течение времени $t_1 = T_1$. Пусть для распада половины массы m_1 требуется время T_2. Ясно, что после времени $t_2 = T_1 + T_2$ масса нераспавшегося элемента равна $m_2=\frac{m_1}{2}=\frac{m_0}{2^2}$. Пусть требуется время T_3 для распада половины массы m_2. Далее $m_3=\frac{m_2}{2}=\frac{m_0}{2^3}$ – масса элемента, не распавшегося в течение времени $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$, и пусть требуется время T_4 для распада половины массы m_3. Этот процесс может продолжаться бесконечно.

В результате многолетнего опыта доказано, что $T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots$. Таким образом, время, за которое распадается половина массы одного элемента, является постоянной величиной. Эта величина называется периодом полураспада элемента и обозначается через T:

$$T=T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots.$$

В результате получаются равенства:

$$t_1 = T_1 = T\,,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T\,,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T\,,\ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT.$$

Итак, масса элемента с начальной массой m_0, не распавшегося за время $t_n = nT$, равна $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$. Если учесть здесь, что $n = \frac{t_n}{T}$, то имеем равенство $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$. Эта формула справедлива и для произвольного момента времени t:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0.$$

Таким образом, масса нераспавшегося радиоактивного элемента является показательной функцией времени.

Пример 2. В первые 8 часов активность радиоактивного вещества уменьшилась в 4 раза. Во сколько раз активность вещества уменьшается в течение суток?

Решение. Пусть начальная масса рассматриваемого вещества равна m_0, а период полураспада равен T. Через 8 часов его масса составит $m(8) = \frac{m_0}{4}$. Учитывая эти данные, период полураспада вещества находится по формуле $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$.

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = 4 \text{ часа}.$$

Теперь, снова используя формулу $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ для $t = 24$ (одни сутки = 24 часа), находим, во сколько раз уменьшилась активность радиоактивного вещества в течение суток:

$$m(24) = 2^{-\frac{24}{T}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64}.$$

Таким образом, в течение суток активность радиоактивного вещества снижается в 64 раза.

Налог на добавленную стоимость (сокращенно НДС)

Вы знакомы с понятием налога. Производитель или импортёр товара (оптовый или розничный торговец) должен уплатить налог с продаж государству. Налог на добавленную стоимость – это налог, взимаемый государством во многих точках цепочки поставок, от производителя до розничного продавца. На каждом этапе налогом с продаж облагается только добавленная к товару стоимость. Окончательная ситуация с налогом с продаж остаётся за потребителем.

НДС – это налог на добавленную стоимость при каждой передаче товара от первоначального производителя продавцу.

Допустим, ставка НДС 10%. Предположим, что предприниматель купил товар на 8 000 000 сумов. Тогда с него удерживается 800 000 сумов (10% от 8 000 000 сумов). Затем он продал тот же товар за 11 500 000 сумов. При этом ему выплачивается 1 150 000 сумов (10% от 11 500 000 сумов).

Тогда ему придётся платить НДС в размере 1 150 000 – 800 000=350 000 сумов.

ПРИМЕРЫ

1. Сколько денег семья вернёт банку в конце срока, взяв дом начальной ценой 360 000 000 сум через ипотеку на 20 лет под 18% годовых? Какую прибыль получит банк?

2. Найдите сложные проценты по долгу в размере 5000 долларов на 3 года по ставке 8% годовых.

3. Вахид занял 50 млн сумов и согласился выплатить проценты по ставкам 10%, 12% и 14% за первый, второй и третий год соответственно. Найдите общую сумму долга через 3 года.

4. Вкладчик вложил в банк 100 миллионов сумов. Взамен он получил 133,1 млн сумов. Банк давал 10% годовых. Как долго он хранил деньги в банке?

5. Вкладчик перечислил на банковский счет 26 млн сумов. Через 18 месяцев на его счету было 32 млн сумов. Какова годовая процентная ставка?

6. У меня есть 400 долларов. Мой друг предложил мне инвестировать в банк. Я могу вкладывать мои сбережения в валютный счет под 13% годовых или в сумовой счёт под 1% в месяц.

а) Сколько я получу через год, если положу деньги на валютный счёт?

б) Какую сумму долларов я получу через год, если переведу эти деньги в сумы и положу на сумовой счёт? Учитывайте курс доллара и сума. Принимать, что инфляция составляет 10% в год.

7. Мурад платит налог в размере 7%, если покупает товар на 10 миллионов сумов. Если он продаст тот же товар за 13 млн сумов, то потребитель платит налог в размере 9%. Узнайте НДС, подлежащий уплате Мурадом.

8. Если бизнесмен продаёт товар за 7 500 000 сумов, с него будет взиматься налог с продаж по ставке 12%. Рассчитайте начальную цену товара, включая налог, уплаченный предпринимателем, если он платит НДС в размере 180 000 сумов.

9. Производитель объявил цену своего продукта 12 000 000 за одну единицу. Он предоставил оптовику скидку 30%, а оптовик, в свою очередь, предоставил розничному продавцу скидку 20% от рекламируемой цены. Если ставка налога с продаж для продукта составляет 10% и розничный торговец продаёт его потребителю по рекламируемой цене, найдите налог на добавленную стоимость, уплачиваемый оптовым и розничным торговцами.

10. Розничный торговец покупает товар у оптового торговца на сумму 80 000 сумов, а у оптовика удерживается налог с продаж по фиксированной ставке 8%. Розничный торговец устанавливает цену в размере 100 000 сумов, и с неё взимается потребительский налог с продаж по той же ставке. Сколько НДС платит розничный торговец государству?

ГЛАВА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ
- ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Тригонометрические функции. Периодические процессы

В природе, технике, производстве и других сферах существует множество повторяющихся по времени событий и процессов. Например, восход солнца, смена времён года, движение поршня в двигателе внутреннего сгорания и т. д., повторяются по времени. Такие процессы называются периодическими процессами. Периодические процессы описываются тригонометрическими функциями.

При изучении тригонометрических функций требуется знать:

1) градусное измерение величины угла;

2) 60-я часть угла 1° равна 1 минуте (обозначение 1'), 60-я часть 1' равна 1 секунде (обозначение 1''), т. е.

$$1' = \frac{1^\circ}{60}, \quad 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

3) радианную меру величины угла;

4) радиан – безразмерная величина;

5) формулу перехода от радианной меры угла к градусной мере, т. е.

$$\alpha^\circ = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha\right)^\circ;$$

6) формулу перехода от градусов к радианам,

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha^\circ\right) rad;$$

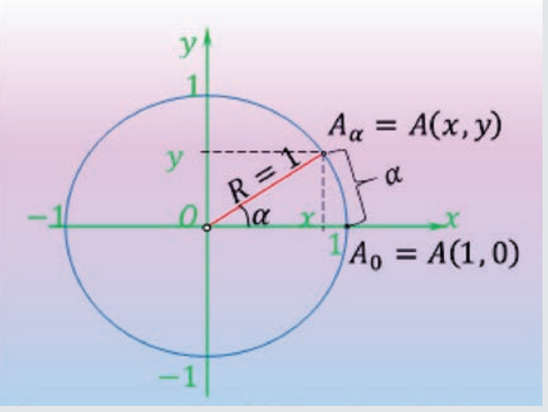
7) формулы приведения.

Синус, косинус, тангенс и котангенс угла

В плоскость введена декартова система координат Oxy. На ней рассмотрим единичную окружность (то есть окружность с радиусом, равным 1) с центром в начале координат. Отметим точку $A_0 = A\ (1;\ 0)$. В окружности из точки A_0 в направлении против часовой стрелки (т. е. в положительном направлении) проводим дугу длиной, равной α, и отмечаем её конец дуги через A_α (рис. 1). Согласно определению радианной меры угла, угол A_0OA_α равен α радиану:

$$\alpha = \angle A_0OA_\alpha.$$

Рисунок 1



α – величина угла центральной дуги A_0A_α, длиной α

Внимание! Точка A_α будет иметь некоторые координаты в плоскости Oxy. Предположим, что координатами точки A_α на плоскости Oxy является пара $(x; y)$.

Определение

1) Величина x называется косинусом угла α и обозначается через $cos\alpha$.

2) Величина y называется синусом угла α и обозначается через $sin\alpha$.

3) Отношение $\frac{y}{x}$ называется тангенсом угла α и обозначается через $tg\alpha$.

4) Отношение $\frac{x}{y}$ называется котангенсом угла α и обозначается через $ctg\alpha$.

Итак, по определению

$$cos\alpha = x, \qquad sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y}. \tag{1}$$

Внимание! Если вместо единичной окружности рассматривать произвольную окружность радиуса R, то образуются равенства:

$$cos\,\alpha = \frac{x}{R}, \qquad sin\,\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y}. \tag{1'}$$

Ясно, что на окружности имеются лишь два центральных вращения точки A_0 на заданный угол:

Положительное вращение: вращение производится против движения часовой стрелки.

Отрицательное вращение: вращение производится по движению часовой стрелки.

Функции $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ и их свойства, графики

Каждой точке x числовой оси Ox ставим в соответствие точку A_x единичной окружности, образованную вращением точки A_0 на угол x (если $x > 0$, то вращение – положительное, если $x < 0$, то вращение – отрицательное). В этом случае можно вычислить значения $cosx$, $sinx$, tgx, $ctgx$ для точки A_x на окружности. В результате получим функции

$$y = sinx,\ y = cosx,\ y = tgx,\ y = ctgx,$$

называемые тригонометрическими функциями, сопоставляющие в соответствие числу x значения $cosx$, $sinx$, tgx, $ctgx$, соответственно.

Эти функции являются периодическими, т. е. для каждого $k \in Z$ выполняются равенства:

$$f(x+2\pi k) = cos(x+2\pi k) = cosx = f(x),$$

$$f(x+2\pi k) = sin(x+2\pi k) = sinx = f(x),$$

$$f(x+2\pi k) = tg(x+2\pi k) = tgx = f(x),$$

$$f(x+2\pi k) = ctg(x+2\pi k) = ctgx = f(x).$$

Итак, основной период функций $y = cosx$ и $y = sinx$ равен $T_0 = 2\pi$, а основной период функций $y = tgx$ и $y = ctgx$ равен $T_0 = \pi$.

Области определения и множества значений тригонометрических функций:

для $y = cosx$ и $y = sinx$ имеем $D(y)=(-\infty;+\infty)$, $E(y)=[-1;1]$;

для $y = tgx$ имеем $D(y)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, $E(y)=(-\infty;+\infty)$;

для $y = ctgx$ имеем $D(y)=(\pi k,\pi(k+1))$, $k\in Z$; $E(y)=(-\infty;+\infty)$.

Функция $y = cosx$ – чётная: $f(-x)=cos(-x)=cos\,x=f(x)$.

Функции $y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ являются нечётными:

$$f(-x)=sin(-x)=-sin\,x=-f(x),$$

$$f(-x)=tg(-x)=-tg\,x=-f(x),$$

$$f(-x)=ctg(-x)=-ctg\,x=-f(x).$$

Графики тригонометрических функций показаны на следующих рисунках.

Из этих графиков следуют важные выводы:

1) функция $y = sinx$ возрастает на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и каждому x из этого промежутка ставит в соответствие единственное значение y из отрезка [–1; 1];

Рисунок 2

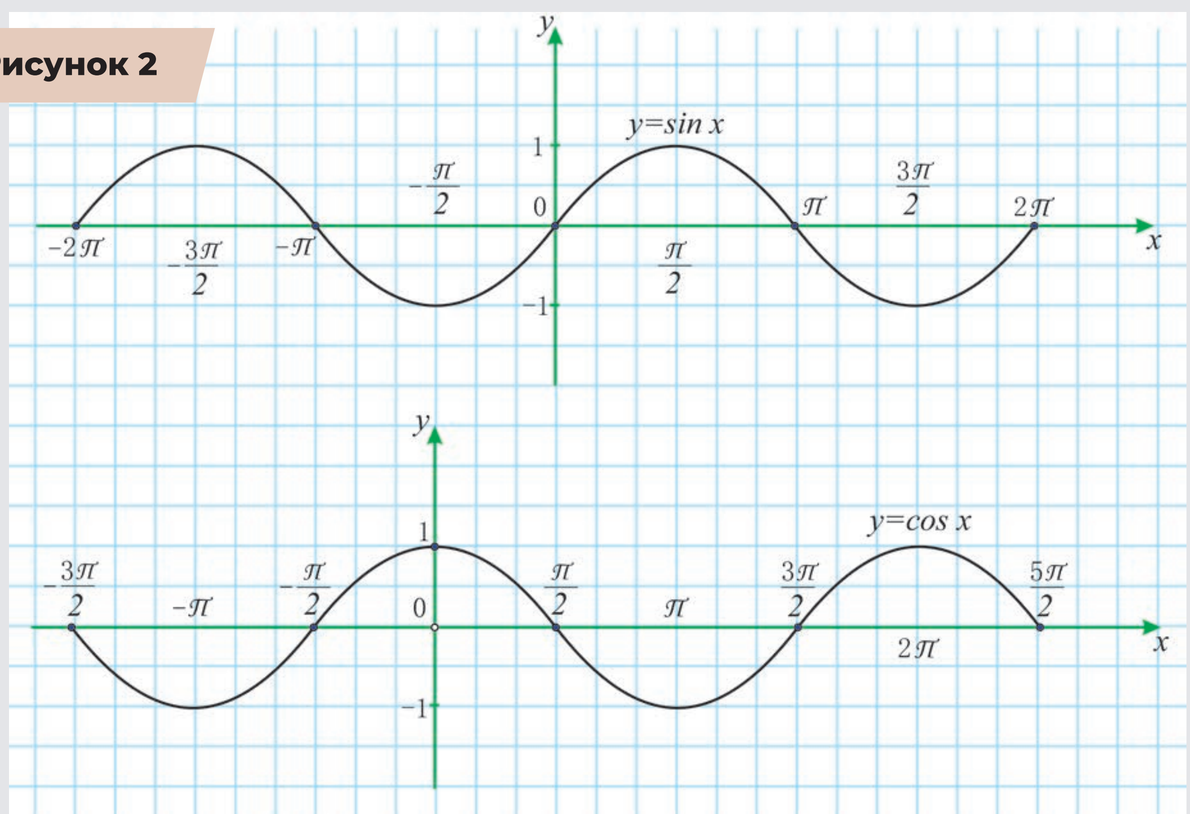
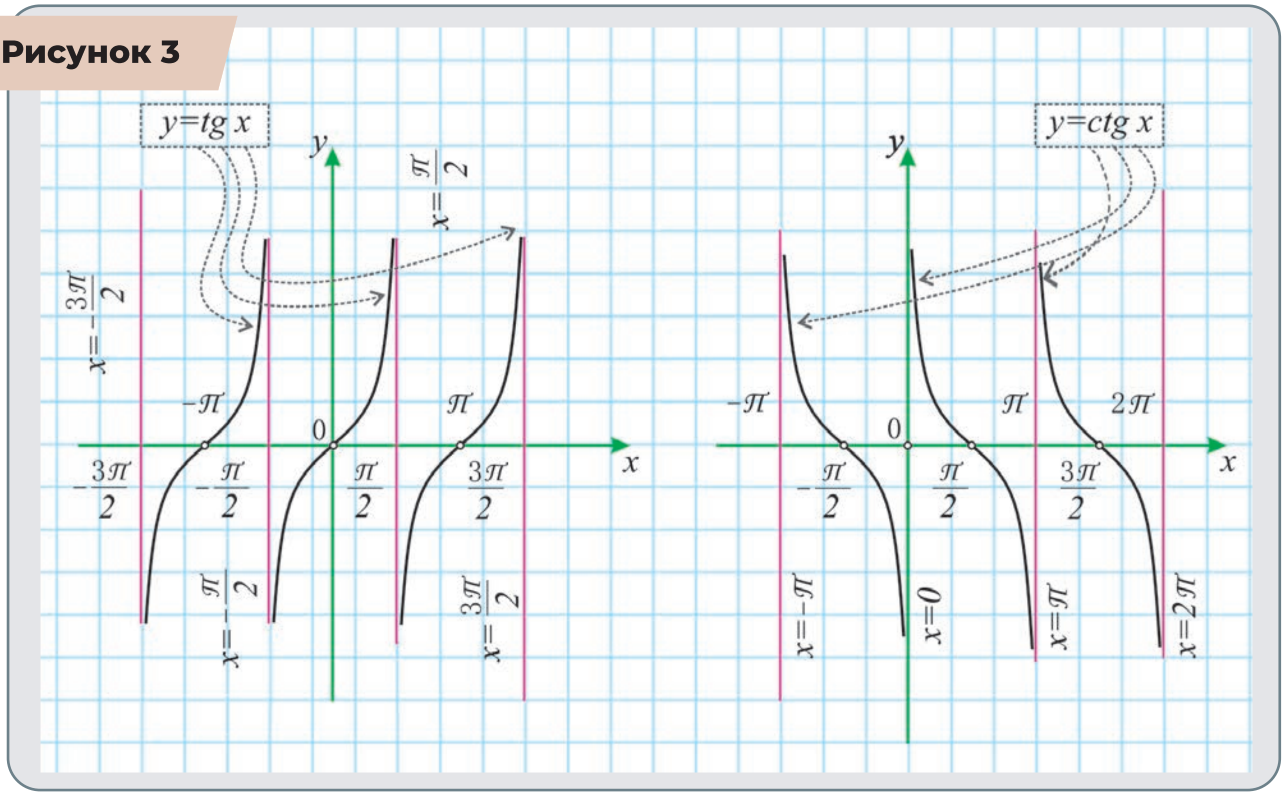


Рисунок 3



2) функция $y = cosx$ убывает на промежутке $[0; \pi]$ и каждому x из этого промежутка ставит в соответствие единственное значение y из отрезка $[-1; 1]$;

3) функция $y = tgx$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и каждому x из этого интервала ставит в соответствие единственное значение y из интервала $(-\infty; +\infty)$;

4) функция $y = ctgx$ убывает на интервале $(0; \pi)$ и каждому x из этого интервала ставит в соответствие единственное значение y из интервала $(-\infty; +\infty)$.

Отметим, что при решении примеров на нахождение области определения в некоторых случаях достаточно указать те точки, в которых функция не определена.

Пример 1. Найдите область определения функции $y = 2tg(3x-1)$.

Решение. Так как функция $y = tgx$ не определена в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$, то функция $y = 2tg(3x-1)$ не определена в значениях $\frac{\pi}{2} + \pi k$ аргумента $3x-1$. Это явление обозначается так: $3x-1 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Отсюда $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Ответ: Функция $y = 2tg(3x-1)$ определена во всех точках x числовой прямой, которые подчиняются условиям $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 2. Найдите множество значений функции $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$.

Решение. При решении этого примера воспользуемся следующим двойным неравенством.

$$-1 \le \cos x \le 1,$$

справедливого во всех значениях x. Итак,

$$-1 \le \cos(5x-4) \le 1.$$

Умножаем все его члены на $-\frac{1}{3}$.

$$-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3}\cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$$

Прибавим 2 ко всем членам последнего двойного неравенства.

$$2-\frac{1}{3} \le 2-\frac{1}{3}\cos(5x-4) \le 2+\frac{1}{3}$$

После приведения получим

$$1\frac{2}{3} \le 2-\frac{1}{3}\cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3} \text{ или } 1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3}.$$

Ответ: Множество значений заданной функции есть отрезок $\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$, или по-другому, $E(y)=\left[1\frac{2}{3};2\frac{1}{3}\right]$.

Как известно, если основным (наименьшим положительным) периодом функции $y=f(x)$ является T, то величина $\frac{T}{|k|}$ является основным периодом функции $y=af(kx+b)$, $k\neq 0$.

Пример 3. Найдите наименьший положительный период функции $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$.

Решение. Так как основной период функции $y=\sin x$ является $T=2\pi$, то

$$\frac{T}{\frac{4}{3}}=\frac{3T}{4}=\frac{3\cdot 2\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$$

– основной период функции $y=2\sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$.

Ответ: Основной период заданной функции $\frac{3\pi}{2}$.

ПРИМЕРЫ

1. Найдите область определения функции.

a) $y=\cos 3x$ b) $y=\sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=\sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=\sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

2. Найдите множество значений функции.

a) $y=-1+\cos x$ b) $y=-6\sin 3x\cos 3x$ c) $y=2+\cos x$ d) $y=-3\sin 2x+2$

e) $y=5tg4x$ f) $y=3-4\cos 5x$ g) $y=-5+\frac{1}{2}\cos x\sin x$

3. Определите чётность или нечётность функций.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\sin^2 x$ d) $y=tg2x+2\sin x$

e) $y = x^2 + tg^2 x$ f) $y = tg10|x|$ g) $y = \dfrac{x^2 + \cos x}{2}$ h) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{x + 5}$

4. Используя график функции $y = sinx$, постройте график следующих функций.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0{,}5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. Используя график функции $y = cosx$, постройте график следующих функций.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0{,}5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Постройте график функции.

a) $y = tg2x$ b) $y = ctg\dfrac{x}{2}$ c) $y = 2tgx$ d) $y = \dfrac{1}{3}ctgx$

7. Определите чётность или нечётность функций.

a) $y = \dfrac{\cos 2x - \sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2x$ e) $y = sin^2x + sinx$ f) $y = 5sin^3x + 2sinx$

8. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty;\infty)$:

a) покажите, что функция $f(x) + f(-x)$ – чётная;

b) покажите, что функция $f(x) - f(-x)$ – нечётная.

9. Найдите наименьший положительный период функции.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{4} - 3\right)$ c) $f(x) = tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x) = \cos\sqrt{3x}$ f) $f(x) = tg(4\pi x - 3)$

10. Найдите наименьший положительный период заданной функции $f(x)$:

a) $f(x) = \sin\dfrac{3x}{2} + tg7x$ b) $f(x) = \cos x + 2\sin\left(\dfrac{3x}{5} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x-1) - 3sin3x$ d) $f(x) = \sin 3x + \cos\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2}tg\dfrac{9x}{5}$

11. Покажите, что $T = -5\pi$ является периодом функции $f(x) = \sin 6x$.

12. Покажите, что $T = \pi$ является периодом функции $f(x) = \sqrt{\sin 2x + 1}$.

13. У какой из следующих функций наименьший положительный период равен π?

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y = tgx$ d) $y = ctgx$

14. Постройте график функции.

a) $y = |\sin x|$ b) $y = |\cos x|$ c) $y = |tgx|$ d) $y = |ctgx|$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА, ГРАФИКИ

Обратные тригонометрические функции

В повседневной жизни встречаются случаи, когда разрушаются здания, мосты, транспортные средства, электростанции, самолёты и другие устройства, под воздействием резонансных явлений. Резонансное явление наблюдается в результате взаимной синхронизации периодических процессов. Для предотвращения таких явлений необходимо знать, при каких значениях аргумента тригонометрические функции принимают заранее заданные значения, т. е. необходимо знать обратные тригонометрические функции.

При изучении обратных тригонометрических функций требуется знать:

1) периодичность тригонометрических функций и их основные периоды;

2) возрастание функции $y = sinx$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и она – взаимно-однозначная функция между отрезками $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $[-1; 1]$;

3) убывание функции $y = cosx$ на $[0; \pi]$, и она – взаимно-однозначная функция между отрезками $[0; \pi]$ и $[-1; 1]$;

4) возрастание функции $y = tgx$ на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и она – взаимно-однозначная функция между интервалами $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $(-\infty; +\infty)$;

5) убывание функции $y = ctgx$ на $(0; \pi)$, и она – взаимно-однозначная функция между интервалами $(0; \pi)$ и $(-\infty; +\infty)$.

Функция *y = arcsinx* и её свойства, график

Уравнение $y = sinx$ решается однозначно относительно x на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и это решение пишется в виде

$$x = arcsiny.$$

Этим равенством определена функция ***arcsin*** – арксинус (рис. 1), ставящая каждому элементу $y \in [-1; 1]$ в соответствие единственный элемент $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В определённом таким образом соответствии, если аргумент обозначим через x, а функцию – через y, то его можем переписать в следующем виде

$$y = arcsinx.$$

Функция $y = arcsinx$ является обратной к функции $y = sinx$:

$$sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Рисунок 1

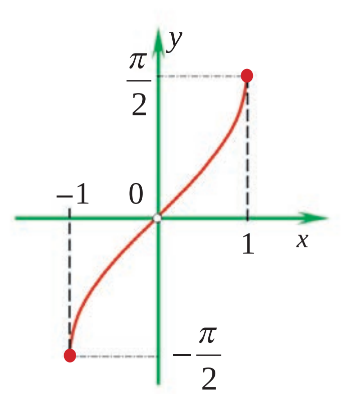


График функции y = arcsinx

Свойства функции *y = arcsinx*:

- $D(y)=[-1;1]$;
- $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
- *y = arcsinx* – возрастающая функция;
- наибольшее значение функции *y = arcsinx* равно $\frac{\pi}{2}$, а её наименьшее значение равно $-\frac{\pi}{2}$;
- график функции *y = arcsinx* проходит через начало координат;
- *y = arcsinx* – нечётная функция, т. е. *arcsin*(–*x*) = –*arcsinx*;
- функция *y = arcsinx* не является периодической.

Пример 1. Найдите значение выражения $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Пусть $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=x$. В этом случае данное задание можно поставить иначе: найти значение *x* из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, удовлетворяющего равенству $sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Известно, что равенство $sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}$ имеет место, когда $x=\frac{\pi}{3}$. Таким образом $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

Ответ: $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

В таблице ниже показаны некоторые значения выражения $arcsin\alpha$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arcsinx$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Функция *y = arccosx* и её свойства, график

Уравнение *y = cosx* решается однозначно относительно *x* на отрезке [0; π], и это решение пишется в виде

$$x = arccosy.$$

Этим равенством определена функция ***arccos*** – арккосинус (рис. 2), ставящая каждому элементу $y\in[-1;1]$ в соответствие единственный элемент $x\in[0;\pi]$. В определённом таким образом соответствии, если аргумент обозначим через *x*, а функцию – через *y*, то его можем переписать в следующем виде:

$$y = arccosx.$$

Функция ***y = arccosx*** является обратной к функции ***y = cosx.***

$$cos(arccosx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arccos(cosx) = x, \quad x \in [0; \pi]$$

Свойства функции $y = arccosx$:

- $D(y)=[-1;1]$;
- $E(y)=[0;\pi]$;
- $y = arccosx$ – убывающая функция;
- наибольшее значение функции $y = arccosx$ равно π, а её наименьшее значение равно 0;
- график функции $y = arccosx$ пересекается с осью Ox в точке (1; 0) с абсциссой $x = 1$, а с осью Oy в точке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ с ординатой $y=\frac{\pi}{2}$;
- $y = arccosx$ – ни нечётная, ни чётная функция. Однако здесь справедливо равенство

$$arccos(-x) = \pi - arccosx;$$

- функция $y = arccosx$ не является периодической (область определения не периодична).

Рисунок 2

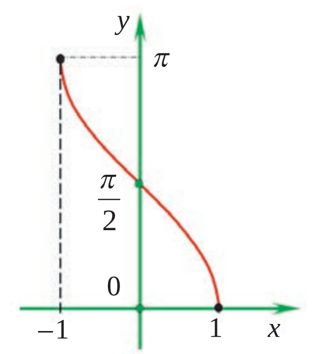


График функции $y = arccosx$

Пример 2. Найдите значение выражения $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Пусть $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=x$. В этом случае данное задание можно поставить по другому: найти значение x из промежутка $[0; \pi]$, удовлетворяющего равенству $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Известно, что равенство $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет место при $x=\frac{\pi}{4}$:

$$arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

В следующей таблице приведены некоторые значения выражения $arccos\,x$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$arccosx$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Функция $y = arctgx$ и её свойства, график

Уравнение $y = tgx$ решается однозначно относительно x на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, и это решение записывается в виде

$$x = arctgy.$$

Этим равенством определена функция ***arctg*** – арктангенс (рис. 3), ставящая каждому элементу $y\in(-\infty;+\infty)$ в соответствие единственный элемент $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. В определённом таким образом соответствии, если аргумент обозначим через x, а функцию – через y, то его можем переписать в следующей форме:

$$y = arctgx.$$

Функция $y = arctgx$ является обратной к функции $y = tgx$:

$$tg(arctgx) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$arctg(tgx) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция $y = arctgx$ обладает следующими свойствами:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = arctgx$ – возрастающая функция;
- функция $y = arctgx$ не достигает наибольшего и наименьшего значения;
- график функции $y = arctgx$ проходит через начало координат;
- $y = arctgx$ нечётная функция, т. е.

$$arctg(-x) = -arctgx;$$

- функция $y = arctgx$ не является периодической.

Рисунок 3

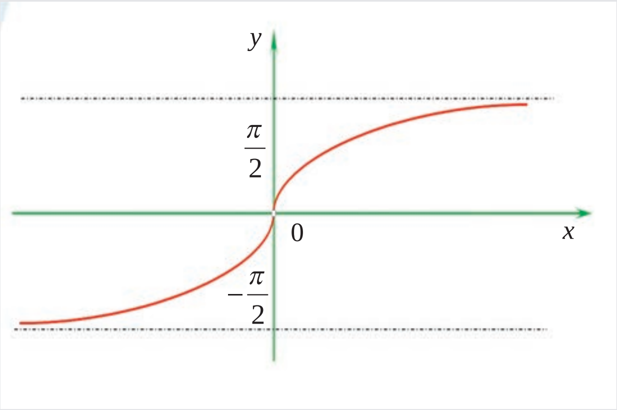


График функции y = arctgx

Пример 3. Найдите значение выражения $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решение. Пусть $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$. Значит, требуется найти значение x, удовлетворяющее равенству $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Известно, что $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

В таблице приведены некоторые значения выражения $arctg\, x$.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Функция $y = arcctgx$ и её свойства, график

Уравнение $y = ctgx$ решается однозначно относительно x на интервале $(0;\ \pi)$, и это решение записывается в виде

$$x = arcctgy.$$

Этим равенством определена функция **arcctg** – арккотангенс (рис. 4), ставящая каждому $y \in (-\infty;\ +\infty)$ в соответствие единственный элемент $x \in (0;\ \pi)$. В определённом таким образом соответствии, если аргумент обозначим через x, а функцию – через y, то его можем переписать в следующей форме:

$$y = arcctgx.$$

Рисунок 4

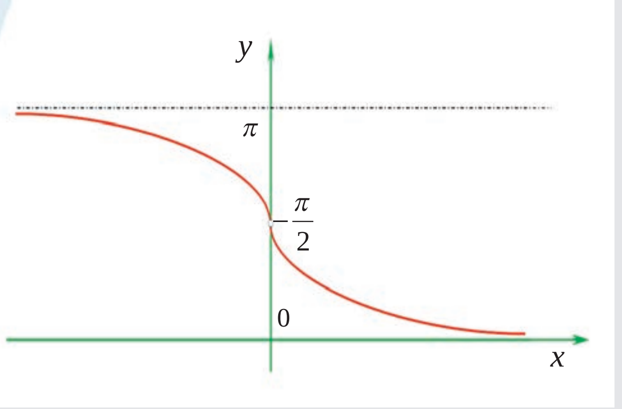


График функции $y = arcctgx$

Функция $y = arcctgx$ является обратной к функции $y = ctgx$: $ctg(arcctgx) = x,\quad x \in (-\infty; +\infty)$, $arcctg(ctgx) = x,\quad x \in (0; \pi)$.

Функция $y = arcctgx$ обладает следующими свойствами:

- $D(y)=(-\infty;+\infty)$;
- $D(y)=(0;\pi)$;
- $y = arcctgx$ – убывающая функция;
- функция $y = arcctgx$ не достигает наибольшего и наименьшего значения;
- график функции $y = arcctgx$ не пересекается с осью Ox, пересекается с осью Oy в точке $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ с ординатой $y = \dfrac{\pi}{2}$;
- $y = arcctgx$ – не является ни нечётной, ни чётной. Но, тем не менее, имеет место

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx;$$

функция $y = arcctgx$ не является периодической.

Пример 4. Найдите значение выражения $arcctg\sqrt{3}$.

Решение. Пусть $arcctg\sqrt{3} = x$. Значит, требуется найти значение x, удовлетворяющее равенству $ctgx = \sqrt{3}$. Известно, что $ctg\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Ответ: $arcctg\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

В таблице приведены некоторые значения выражения $arcctg\,x$.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

ПРИМЕРЫ

1. Имеют ли смысл следующие выражения?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

2. Вычислите.

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $arcsin\, 0$

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos\, 0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg\, 0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Вычислите.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$ d) $arctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Вычислите.

a) $cos\left(arctg2\right)$ b) $sin\left(arctg7\right)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg\left(arctg5\right)$ e) $sin\left(arctg11\right)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos\left(arcctg\left(-4\right)\right)$ h) $ctg\left(arcsin\left(-0{,}9\right)\right)$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg\left(arctg\left(-15\right)\right)$ k) $tg\left(arccos\left(-0{,}3\right)\right)$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Вычислите.

a) $cos\left(2arcsin0{,}2\right)$ b) $sin\left(2\,arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin\left(2arcctg\sqrt{26}\right)$

d) $tg\left(2arccos0{,}6\right)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos\left(2arccos\left(-0{,}8\right)\right)$

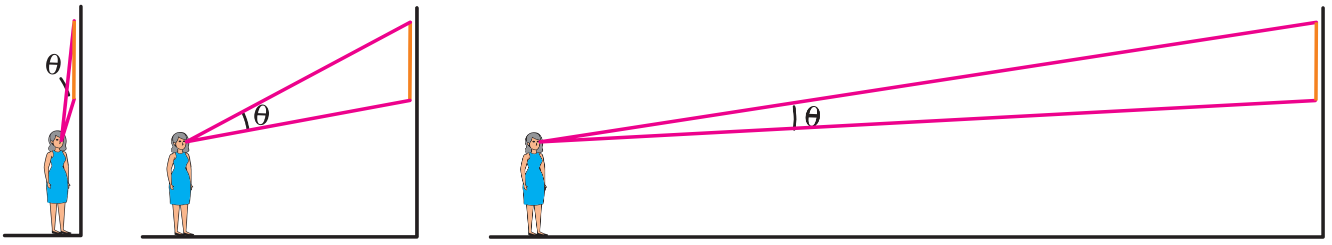
g) $tg\left(2arcctg\left(-3\right)\right)$ h) $sin\left(2arcsin\left(-0{,}1\right)\right)$ i) $tg\left(2arcctg\, 20\right)$

ПРОЕКТНАЯ РАБОТА

ГДЕ СИДЕТЬ В КИНО?

Всем известно, что угловой размер объекта зависит от его удалённости от зрителя. Чем дальше объект, тем меньше его угловой размер. Угловой размер определяется углом зрения, под которым предмет виден зрителю целиком.

Если вы смотрите на картину на стене, как далеко вы должны находиться, чтобы получить максимальный обзор? Если картина висит выше уровня глаз, то стягивающий угол явно мал, если вы находитесь слишком близко или слишком далеко, как показано на рисунках 1 и 2. То же самое происходит и при выборе места в кинотеатре.



Пример 1. Экран в кинотеатре имеет высоту 22 фута (1 fut = 0,3048 m) и высоту 10 футов над уровнем пола. Первый ряд сидений находится в 7 футах от экрана, а ряды друг от друга – в 3 футах. Вы решаете сесть в ряд с максимальной видимостью, то есть там, где угол θ экрана в вашем ряде максимален. Допустим, ваши глаза находятся на высоте 4 фута над полом, как на картинке, и вы сидите на расстоянии x от экрана (рис. 1).

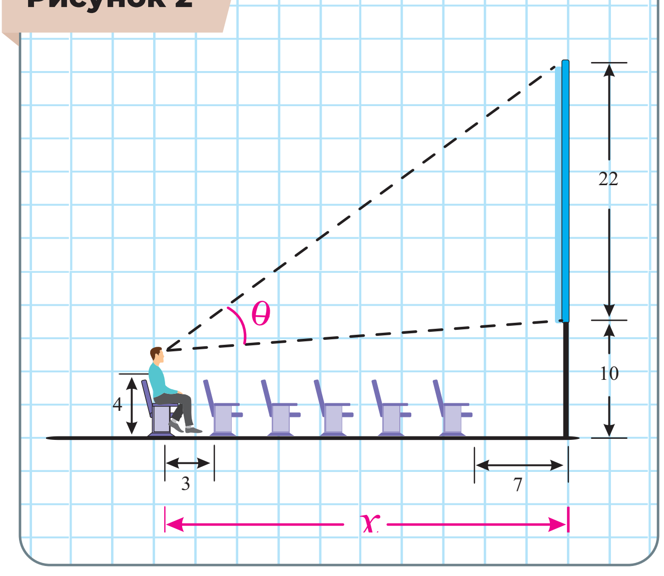
Задание 1. Докажите, что справедливо равенство $\theta = arctg\dfrac{28}{x} - arctg\dfrac{6}{x}$.

Задание 2. Используйте формулу тангенса разности, чтобы получить равенство

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right).$$

Задание 3. Считая θ как функцию от x, постройте её график. При этом рекомендуется использование приложения Geogebra. Какое значение x максимизирует θ? В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора в этом ряду?

Рисунок 2



Пример 2. Предположим, что начиная с первого ряда пол зала наклонён под углом α к горизонту, а расстояние между рядами равно 3, длина наклона, как показано на рис. 2, равна x.

Задание 4. Используйте формулу для косинусов, чтобы вывести:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

Здесь

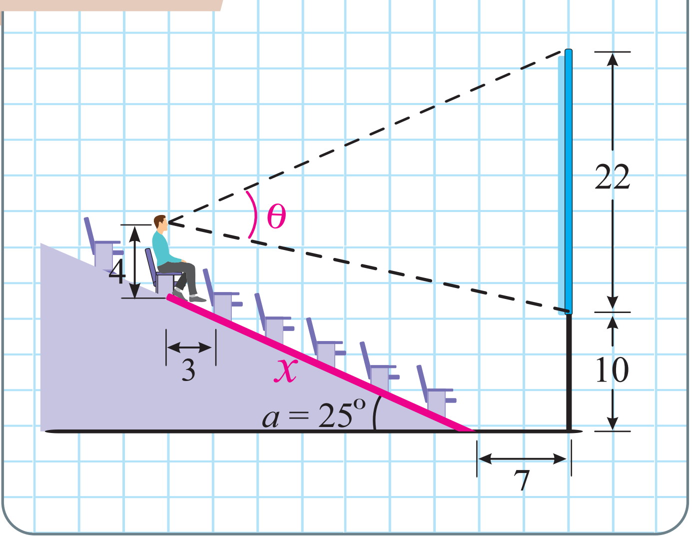
$$a^2 = \left(7 + xcos\alpha\right)^2 + \left(28 - xsin\alpha\right)^2$$

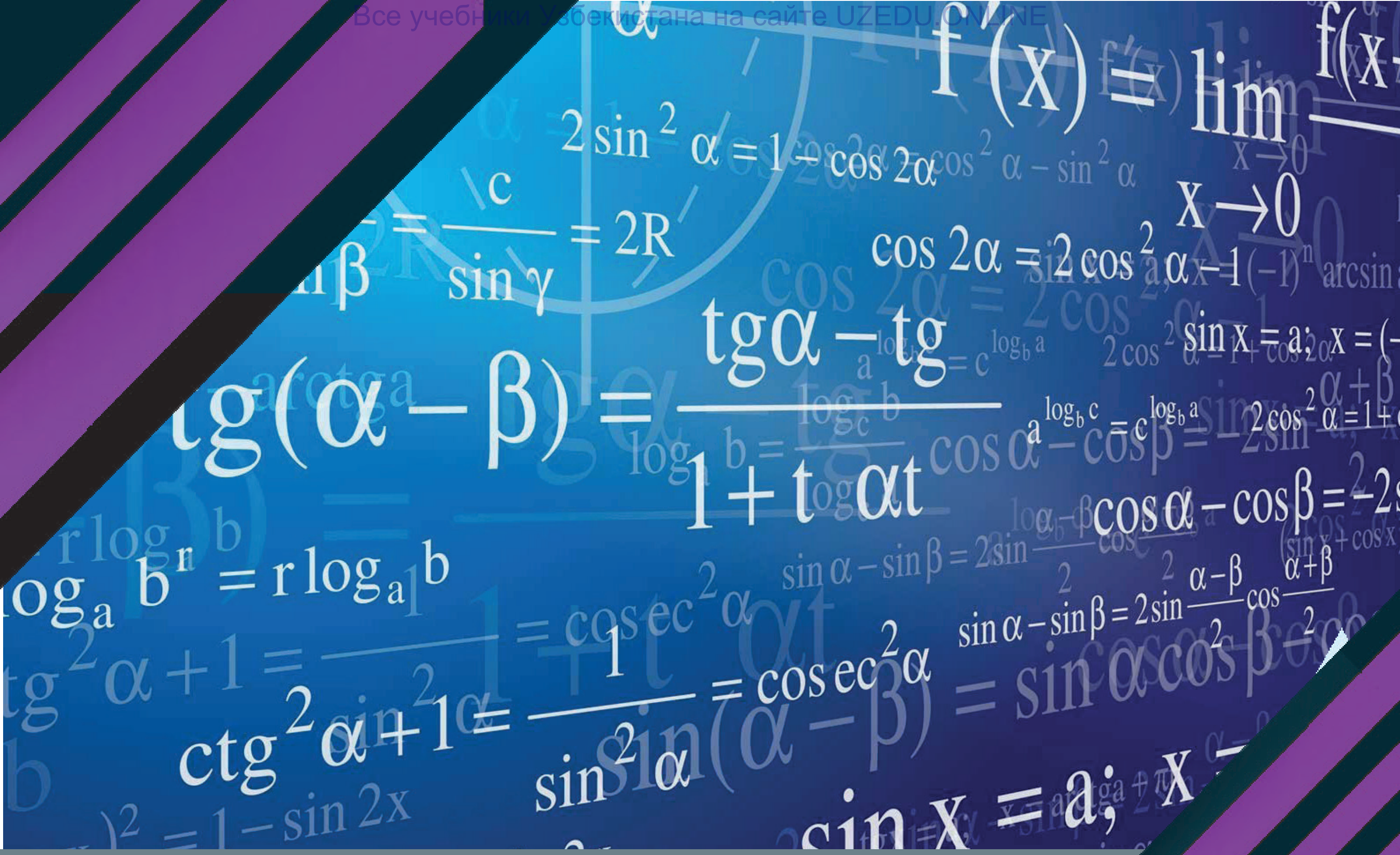
и

$$b^2 = \left(7 + xcos\alpha\right)^2 + \left(xsin\alpha - 6\right)^2.$$

Задание 5. С помощью графического приложения Geogebra начертите зависимость θ от x и найдите значение x, которое максимизирует θ. В каком ряду лучше сидеть? Какой угол обзора в этом ряду?

Рисунок 3





ГЛАВА 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
- МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Простейшие тригонометрические уравнения

Важно знать, когда процессы, характеризуемые периодическими функциями, принимают какие значения. Для этого необходимо уметь решать простейшие тригонометрические уравнения вида

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ tgx = a,\ ctgx = a$$

с периодическими функциями.

Чтобы научиться решать простейшие тригонометрические уравнения, требуется знать:

1) понятие уравнения;
2) понятие корня уравнения; решение – это множество корней уравнения;
3) бесконечность корней тригонометрических функций, поскольку они – периодические;
4) уметь обобщать и записывать бесконечное множество найденных корней с помощью кратких формул (в которых для каждого целого числа k выражение $n = 2k$ означает чётное число, а выражение $n = 2k+1$ – нечётное число).

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Известно, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Кроме того, равенство $\sin x = \frac{1}{2}$ выполняется также при значении $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ (рис. 1). Поскольку синус является периодической функцией с основным периодом 2π, то для любого целого n при

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

и

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

будет выполнено $\sin x = \frac{1}{2}$ (рис. 2). Эти два значения можно обобщить следующим образом:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, если n чётно, т. е. $n = 2k$, то получим $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; если n нечётно, то есть $n = 2k+1$ то, $x = -\frac{\pi}{6} + \pi(2k+1)$. Итак, получили полное решение.

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Рисунок 1

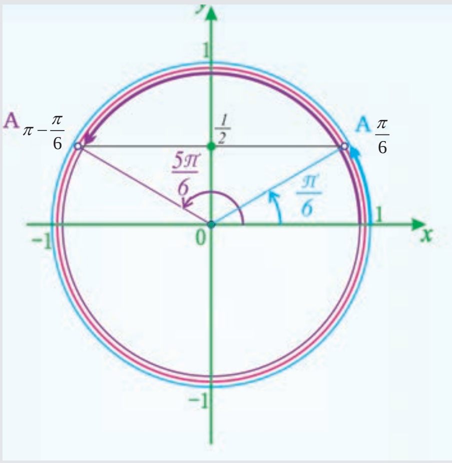
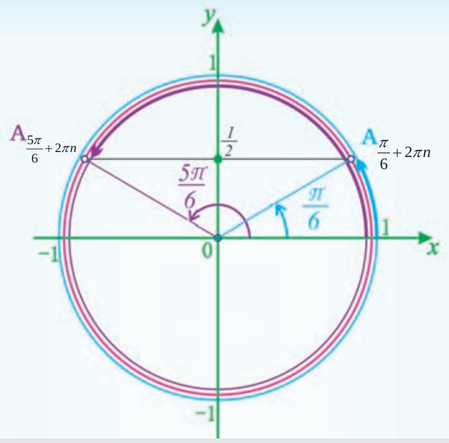


Рисунок 2



Уравнения вида *sinx* = *a*

Если $a>1$ или $a<-1$, то уравнение $\sin x=a$ не имеет корней. Поэтому в таких случаях пишут, что решение уравнения $\sin x=a$ состоит из пустого множества $\varnothing$;

Если $-1\le a\le 1$, то решение уравнения, $\sin x=a$ состоит из значений вида

$$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z.$$

Частные случаи.

1) *sinx* = –1. Решение состоит из значений аргумента

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

2) *sinx* = 0. Значения

$$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

составляют решение.

3) *sinx* = 1. Множество значений аргумента

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

составляет решение данного уравнения.

Уравнения вида *cosx* = *a*

Если $a>1$ или $a<-1$, то уравнение $\boldsymbol{\cos x=a}$ не имеет корней. Поэтому в таких случаях пишут, что решение уравнения $\boldsymbol{\cos x=a}$ состоит из пустого множества $\varnothing$;

Если $-1\le a\le 1$, то решение уравнения *sinx* = *a* состоит из значений вида

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z.$$

Частные случаи

1) *cosx* = –1. Решение состоит из значений неизвестной

$$x=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

2) *cosx* = 0. Решение состоит из совокупности значений неизвестной

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

3) *cosx* = 1. Решение состоит из множества значений неизвестной

$$x=2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

Известно, что $\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 3). Поскольку косинус – периодическая функция с периодом 2π, то равенство $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ будет выполнено (рис. 4) для любого значения аргумента вида

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ или } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Обобщая эти два уравнения, получаем решение уравнения.

Ответ: $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Рисунок 3

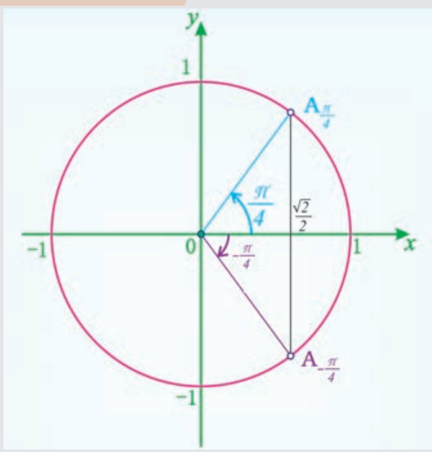
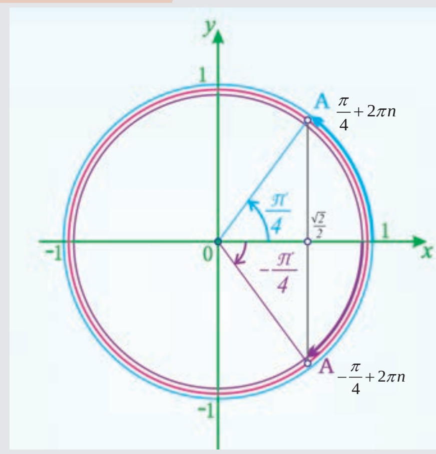


Рисунок 4



Уравнение вида *tgx* = *a*

Для каждого целого числа *n* значение

$$x = arctga + \pi n$$

переменной *x* является корнем уравнения. В этом случае решение имеет вид

$$x = arctga + \pi n,\ n \in Z.$$

Уравнение вида *ctgx* = *a*

Для каждого целого числа *n* значение

$$x = arcctga + \pi n$$

переменной *x* является корнем уравнения, а решение имеет вид

$$x = arcctga + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 3. Решите уравнение $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$.

Решение.

$$tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}+\pi n \Rightarrow x=-\frac{11\pi}{28}+\pi n.$$

Ответ: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi n,\ n\in Z$.

Пример 4. Решите уравнение $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$.

Решение.

$$ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3} \Rightarrow \frac{3x}{2}=arcctg\sqrt{3}+\pi n \Rightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите уравнение.

a) $sin2x=1$ b) $sin\frac{x}{3}=-1$ c) $sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$ e) $sin(4x-1)=-\frac{\pi}{3}$ f) $sinx=\frac{1}{2}$

g) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $sin4x=1$ i) $sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ k) $sin\frac{2x}{3}=-1$ l) $sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

m) $sin(3x+1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $sin(-x)=-\frac{1}{2}$ o) $sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=1$

2. Решите уравнение.

a) $cos\frac{2x}{5}=1$ b) $cos\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$ c) $cos8x=0$

d) $cos3x=1,2$ e) $2cos(x-1)=\frac{11}{2}$ f) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cosx=-\frac{1}{2}$ h) $cosx=-1$ i) $cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $cos\frac{3x}{4}=0$ l) $cos4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $cos(\pi(x-3))=1$

p) $sin^2\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}$ q) $cos^2\frac{3}{2}x=\frac{1}{4}$ r) $2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Решите уравнение.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg(\frac{\pi}{4}(x-1))=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Решите уравнение.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=sin0°$

d) $ctg(\pi(2x+3))=cos0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Найдите корни уравнения в заданном отрезке.

a) $sin3x=\frac{\sqrt{2}}{2},\ [0;2\pi]$ b) $cos3x=\frac{\sqrt{3}}{2},\ [-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ [0;\pi]$ d) $ctg4x=-1,\ [-3\pi;3\pi]$

6. При каких значениях a верно равенство $tgx=\frac{a+1}{a-1}$?

7. При каких значениях a справедливо равенство $sin\,x=a+\frac{1}{a}$?

8. При каких значениях a выполняется равенство $5cos(2x-3)=a-\frac{6}{a}$?

9. При каких значениях a не выполняется равенство $5sin(x-7)=a-\frac{4}{a}$?

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения, приведённые к квадратным уравнениям

Пример 1. Решите уравнение $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$.

Решение.

Это квадратное уравнение относительно $\sin x$. Если обозначим $\sin x=t$, то получим $2t^2-3t+1=0$. Его корни $t_1=1,\quad t_2=\frac{1}{2}$. Подставляя эти значения, мы получим

1) $\sin x=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$, 2) $\sin x=\frac{1}{2},\ x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z$.

Пример 2. Решите уравнение $2\cos^2 x-5\sin x+1=0$.

Решение.

Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, мы получим

$$2\left(1-\sin^2 x\right)-5\sin x+1=0 \text{ или } 2\sin^2 x+5\sin x-3=0.$$

Введя обозначение $\sin x=y$, получим квадратное уравнение $2y^2+5y-3=0$. Находим его корни $y_1=-3,\ y_2=\frac{1}{2}$.

При $y=-3$ полученное уравнение $\sin x=-3$ не имеет решения, так как $-3<-1$.

При $y=\frac{1}{2}$ полученное уравнение $\sin x=\frac{1}{2}$ имеет решение:

$$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ \ n\in Z.$$

Ответ: $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

Пример 3. Решите уравнение $tgx-2ctgx+1=0$.

Решение.

Заменив $ctg\,x$ на $\frac{1}{tg\,x}$, имеем $tgx-\frac{2}{tgx}+1=0$. Умножая все слагаемые на $tg\,x$, получим $tg^2x+tgx-2=0$. Введём обозначение $tgx=t$ и решаем полученное квадратное уравнение $t^2+t-2=0\ \Rightarrow\ t_1=1,\ t_2=-2$.

Подставляя найденные значения в обозначение, обнаружим, что

1) $tgx=1,\ x=arctg1+\pi n,\ n\in Z,\ \ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z$

2) $tgx=-2,\ x=-arctg2+\pi n,\ \ n\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ x=-arctg2+\pi n,\ \ n\in Z$.

Пример 4. Решите уравнение $3\sin^2 x+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Решение.

Разделив уравнение почленно на $\cos^2 x$, получим $3tg^2x+5tgx+2=0$. Обозначая $tgx=t$, приходим к квадратному уравнению $3t^2+5t+2=0$. Его корни $t_1=-1$, $t_2=-\dfrac{2}{3}$. Подставляя найденные значения в обозначение, обнаружим, что

1) $tgx=-1,\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

2) $tgx=-\dfrac{2}{3},\ x=-arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ \ x=-arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Пример 5. Решите уравнение $3\sin x-2\cos x=0$.

Решение.

1) Разделив обе части уравнения на $cosx$, составим уравнение $3tgx-2=0$. Решаем последнее уравнение

2) $3tgx-2=0,\Rightarrow\ tgx=\dfrac{2}{3},\ \Rightarrow\ x=arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=arctg\dfrac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z$

Замечание. При почленном делении уравнения вида $asinx+bcosx=0$ на $cosx$ (или на $sinx$) образуется равносильное уравнение заданному (поскольку равенства $sinx=0$ и $cosx=0$ не могут быть выполнены совместно).

Пример 6. Решите уравнение $2\sin x+\cos x-2=0$.

Решение.

Согласно формулам $\sin x=2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2},\ \cos x=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$,

$2=2\cdot 1=2\left(\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}\right)$, имеем $4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}=2\cos^2\dfrac{x}{2}+2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$\Rightarrow 3\sin^2\dfrac{x}{2}-4\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=0$. Это уравнение разделим почленно на $\cos^2\dfrac{x}{2}$

Тогда $3tg^2\dfrac{x}{2}+4tg\dfrac{x}{2}+1=0$. Обозначая $tg\dfrac{x}{2}=t$, получим квадратное уравнение

$3t^2+4t+1=0$. Его корни $t_1=\dfrac{1}{3}$, $t_2=1$. Подставляя найденные значения в обозначение, имеем:

1) $tg\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{3}\ \Rightarrow x=2arctg\dfrac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. 2) $tg\dfrac{x}{2}=1\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=2arctg\dfrac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Пример 7. Решите уравнение $\cos x + \sin x = 1$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$, перепишем уравнение и решим его.

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n.$$

Отсюда:

при нечётных n, т. е. при $n = 2k+1$, имеем $x = -\frac{\pi}{2} + \pi(2k+1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

при чётных n, т. е. при $n = 2k$, имеем $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

Уравнения, допускающие разложение на множители

Пример 8. Решите уравнение $\sin 9x - \sin x = \cos 5x$.

Решение.

Так как $\sin 9x - \sin x = 2\sin\frac{9x-x}{2}\cos\frac{9x+x}{2} = 2\sin 4x\cos 5x$,

то $2\sin 4x\cos 5x = \cos 5x \Rightarrow \cos 5x(2\sin 4x - 1) = 0$. Далее каждый множитель приравняем к нулю и решим полученное уравнение:

1) $\cos 5x = 0,\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$

2) $2\sin 4x - 1 = 0 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2},\ 4x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z,\ x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5},\ x = (-1)^n\cdot\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$.

Пример 9. Решите уравнение $2\sin x\cos x + 5\sin x + 5\cos x + 1 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение

$$2\sin x\cos x + 5(\sin x + \cos x) + 1 = 0.$$

Если введём обозначение $\sin x + \cos x = t$, то, возведя обе части в квадрат, получим

$$(\sin x + \cos x)^2 = t^2 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow 2\sin x\cos x = t^2 - 1.$$

Теперь заданное уравнение запишем в виде рационального уравнения и решим его:

$t^2 - 1 + 5t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + 5t = 0 \Rightarrow t_1 = -5,\ t_2 = 0.$

1) При $t = t_1 = -5$ уравнение $\sin x + \cos x = -5$ не имеет корней.

2) При $t = t_2 = 0$ решаем уравнение $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

ПРИМЕРЫ

Решите уравнения.

1. $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$
2. $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$
3. $2\mathrm{ctg}^2 3x - 3\mathrm{ctg}3x + 1 = 0$
4. $\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x = 3$
5. $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$
6. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$
7. $2\cos x = 1 - \sqrt{\cos x}$
8. $\sin 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$
9. $\sin 5x = \frac{2}{3}\cos^2 5x$
10. $\cos^4 \frac{x}{5} + \sin^2 \frac{x}{5} = 1$
11. $3\mathrm{tg}2x - 2\mathrm{ctg}2x - 1 = 0$
12. $2\mathrm{tg}x - 2\mathrm{ctg}x = 3$
13. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$
14. $\sin 2x + \cos 2x = 0$
15. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$
16. $\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0$
17. $\cos x - \sin x = 1$
18. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
19. $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = -1$
20. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
21. $3\sin x + 4\cos x = 3$
22. $\sin 4x + \cos 4x = 4$
23. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$
24. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$
25. $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x$
26. $\sin 5x \cos 4x - \cos 5x \sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$
28. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$
29. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$
30. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$
31. $(2\cos x - 3)\cdot \mathrm{ctg}x = 0$
32. $(\mathrm{tg}x - 3)(\cos x - \frac{1}{2}) = 0$
33. $\mathrm{tg}3x \cos x = 0$
34. $\sin 2x\, \mathrm{tg}x = 0$
35. $\frac{\cos 2x}{1 + \mathrm{tg}x} = 0$
36. $\frac{1 - 2\cos 2x}{\cos 2x - 2} = 0$
37. $\frac{\mathrm{tg}x}{\sin 5x} = 0$
38. $\frac{\cos x}{1 - \cos 4x} = 0$
39. $|\cos 2x - 1| - 2|\cos 2x + 2| = 0$
40. $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$
41. $\cos x\sqrt{\sin x} = 0$
42. $\cos 3x + 2\cos x = 0$
43. $\sin^{13} x + \cos^{13} x = 1$
44. $\sin 9x = 2\sin 3x$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении простейших тригонометрических неравенств требуется знать:

1) что ось *Oy* называется **осью синусов;**
2) что ось *Ox* называется **осью косинусов;**
3) геометрическую интерпретацию отношений <, ≤, >, ≥ между углами;
4) что при каждом значении переменной *x* непременно выполнены

$$-1 \le \sin x \le 1 \text{ и } -1 \le \cos x \le 1.$$

Пусть *f*(*x*) означает одну из тригонометрических функций *sinx*, *cosx*, *tgx* или *ctgx*, то есть, пусть *f*(*x*) = *sinx*, *f*(*x*) = *cosx*, *f*(*x*) = *tgx* или *f*(*x*) = *ctgx*.

Тогда для некоторого числа *a* простейшими тригонометрическими неравенствами считаются неравенства вида $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$.

Решение неравенств $\sin x < a$ и $\sin x \le a$

При решении этого неравенства рассмотрим следующие случаи значений *a*.

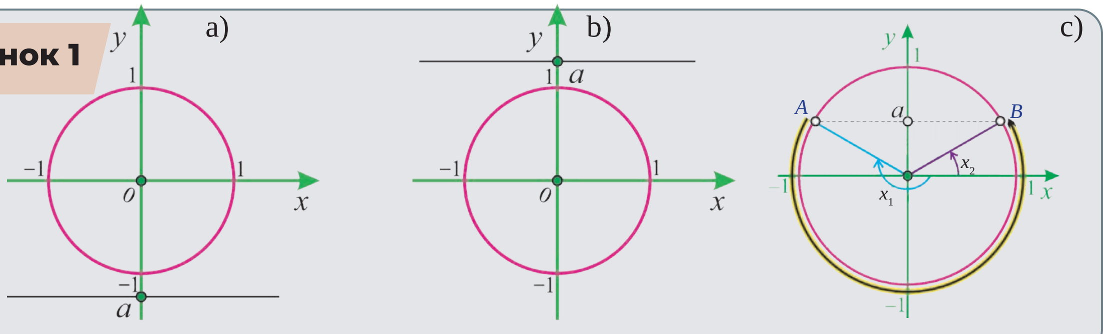
1) Если $a \le -1$, то решением неравенства $\sin x < a$ является $\varnothing$ (рис. 1a).
2) Если $a > 1$, решение неравенства $\sin x < a$ есть числовая ось $(-\infty; +\infty)$ (рис. 1b).
3) Если $a < -1$, то решение неравенства $\sin x \le a$ является $\varnothing$ (рис. 1a).
4) Если $a \ge 1$, решение неравенства $\sin x \le a$ есть числовая ось $(-\infty; +\infty)$(рис. 1b).

5) Если $a = -1$, решением неравенства $\sin x \le -1$ является множество, состоящее из значений переменной $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

6) Если $a = 1$, то неравенство $\sin x < 1$ выполнено во всех точках числовой оси $(-\infty; +\infty)$, кроме точек $\frac{\pi}{2} + 2\pi n\ \ n \in Z$. Эта ситуация может быть записана так:

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+1)\right),\ n \in Z \text{ или } x \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Рисунок 1



7) При $-1 < a < 1$ решением неравенства $\sin x < a$ является (рис. 1c) множество тех значений переменной *x*, для которых выполнены неравенства

$$-\arcsin a + (2n-1)\pi < x < \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z.$$

8) При $-1 < a < 1$ решением неравенства $\sin x \le a$ является (рис. 1c) множество тех значений переменной *x*, для которых выполнены неравенства

$$-\arcsin a + (2n-1)\pi \le x \le \arcsin a + 2n\pi,\ n \in Z.$$

Пример 1. Решите неравенство $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(2n-1)\pi \le x \le \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2n\pi,\ n\in Z,$$

$$\frac{\pi}{3}+(2n-1)\pi \le x \le -\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z,$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2n\pi \le x \le -\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z.$

Решение неравенств $\cos x < a$ и $\cos x \le a$

1) Если $a \le -1$, то решением неравенства $\cos x < a$ является $\varnothing$ bo‘ladi (рис. 2a).

2) Если $a > 1$, то решением неравенства $\cos x < a$ является вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2b).

3) Если $a < -1$, то решением неравенства $\cos x \le a$ является $\varnothing$ (рис. 2a).

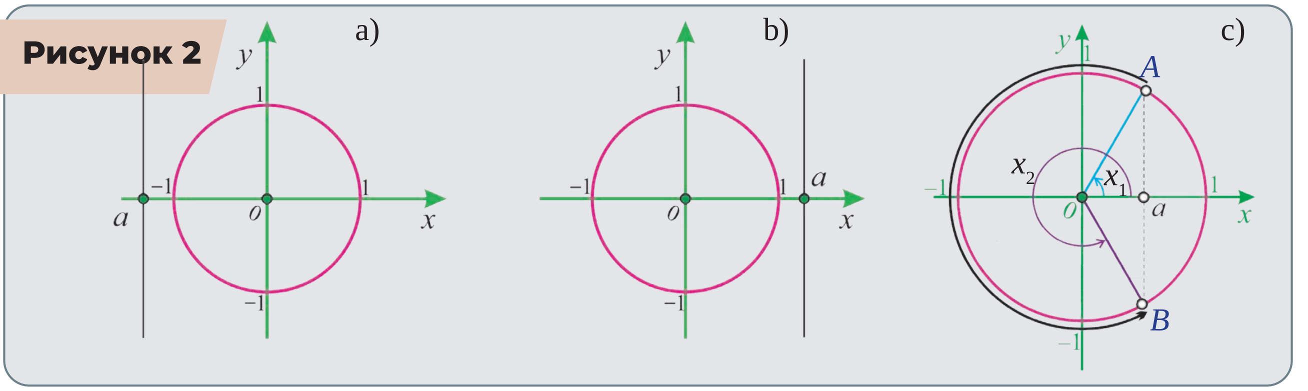
4) Если $a = -1$, то решением неравенства $\cos x \le -1$ является множество точек $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

5) Если $a = 1$, то решением неравенства $\cos x < 1$ является множество тех точек x, для которых $x \ne 2\pi n$ $x \ne 2\pi n$.

Решение в этом случае может быть записано так: $x \in (2\pi n;\ 2\pi(n+1))$ $n \in Z$

6) Если $a \ge 1$, то решением неравенства $\cos x \le a$ является вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$ (рис. 2b).

Рисунок 2



7) Если $-1 < a < 1$, то решением неравенства $\cos x < a$ является (рис. 2c) множество тех значений переменной x, для которой выполнены неравенства

$$\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.$$

8) Если $-1 < a < 1$, то решением неравенства $\cos x \le a$ является (рис. 2c) множество тех значений переменной x, для которой выполнены неравенства

$$\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.$$

Пример 2. Решите неравенство $\cos x \le \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z,$$

$$\pi - \arccos\frac{1}{2}+2\pi n \le x \le 2\pi - \left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right)+2\pi n,\ n\in Z,$$

$$\pi - \frac{\pi}{3}+2\pi n \le x \le 2\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)+2\pi n,\ n\in Z,$$

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n \le x \le \frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

Решение неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$

При решении неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$ целесообразно использовать график функции $y = tgx$ (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что неравенства $tgx < a$ и $tgx \le a$ справедливы при значениях x, для которых

$$-\frac{\pi}{2} < x < arctga \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x \le arctga$$

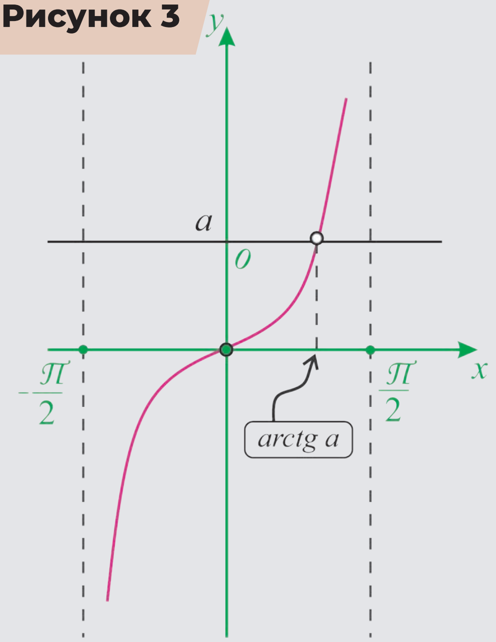
соответственно. Поскольку $y = tgx$ – периодическая функция с основным периодом π, то решением неравенств $tgx < a$ и $tgx \le a$ являются множества всех значений переменной x, для которых, соответственно, выполнены неравенства

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < arctga+\pi n,\ n\in Z,$$

и

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \le arctga+\pi n,\ n\in Z.$$

Рисунок 3



Пример 3. Решите неравенство $tg\frac{x}{4} \le -1$.

Решение.

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \le arctg(-1)+\pi n,\ n\in Z$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \le -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

$$-2\pi+4\pi n < x \le -\pi+4\pi n,\ n\in Z$$

Ответ: $(-2\pi+4\pi n; -\pi+4\pi n]$, $n\in Z$.

Решение неравенств $ctgx < a$ и $ctgx \le a$

При решении неравенств $ctgx < a$ и $ctgx \le a$ целесообразно использовать график функции $y = ctgx$ (рис. 4).

Из рис. 4 видно, что неравенства $ctgx < a$ и $ctgx \le a$ справедливы при значениях x, для которых

$$arcctg\ a < x < \pi \text{ и } arcctg\ a \le x < \pi,$$

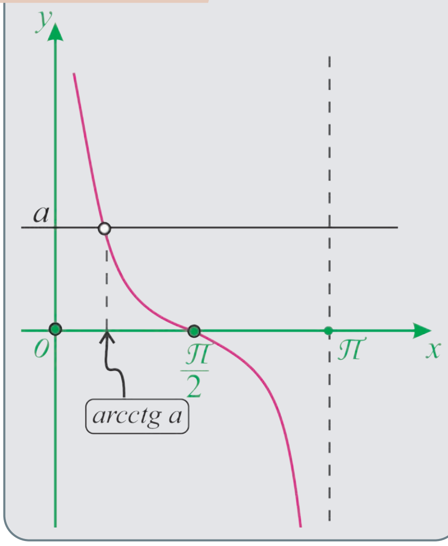
соответственно. Поскольку $y=ctgx$ – периодическая функция с основным периодом π, то решением неравенств $ctgx < a$ и $ctgx \le a$ являются множества всех значений переменной x, для которых, соответственно, выполнены неравенства

$$arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z,$$

и

$$arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ \ n \in Z.$$

Рисунок 4



Пример 4. Решите неравенство $ctg\dfrac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

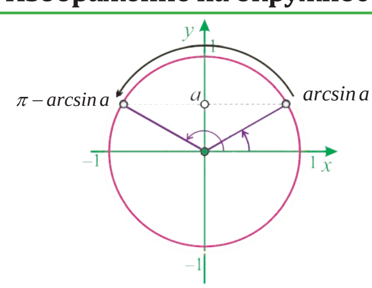
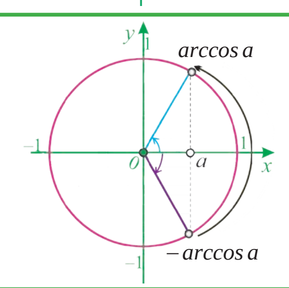
Решение.

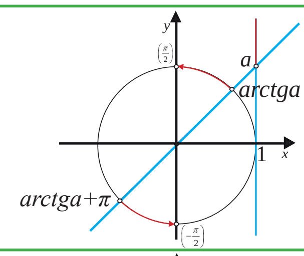
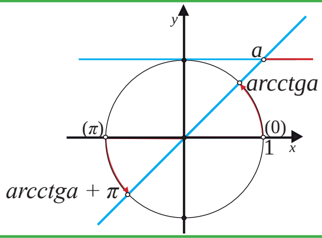
$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \ \Rightarrow \ \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \ \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\left(\dfrac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right),\ n \in Z$.

Решение некоторых тригонометрических неравенств

Неравенство	Решение	Изображение на окружностях
$\boldsymbol{sinx > a}$	$\arcsin a + 2\pi n < x < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$	
$\boldsymbol{cosx > a}$	$-\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,\ \ n \in Z$	

tgx > a	$arctga+\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	
ctgx > a	$\pi n<x< arcctga+\pi n,\ n\in Z$	

Пример 5. Решите неравенство $sinx>\dfrac{1}{2}$.

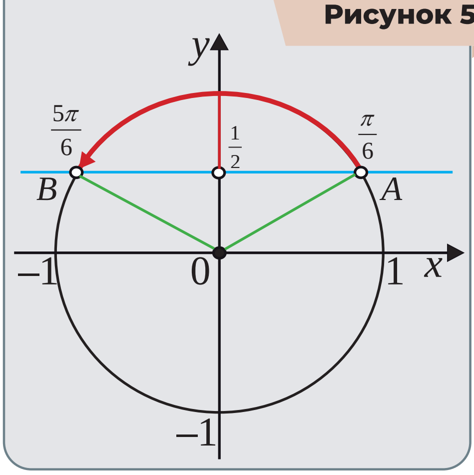


Рисунок 5

Решение.

Пусть прямая $y=\dfrac{1}{2}$ пересекает единичную окружность в точках *A* и *B* (рис. 5). Значения *sinx* должны лежать выше этой прямой, для того чтобы удовлетворять заданному неравенству. Функция *y=sinx* и прямая $y=\dfrac{1}{2}$ пересекаются в точках, центральные углы, отсчитанные от положительного направления оси абсцисс, которых соответственно равны $x=\dfrac{\pi}{6}$ и $x=\dfrac{5\pi}{6}$. Из рисунка видно, что при значениях переменной *x*, строго заключенных между $\dfrac{\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6}$, будет выполнено заданное неравенство.

Таким образом, при $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$ будет $\sin x>\dfrac{1}{2}$. Так как функция *y=sinx* – периодическая функция с основным периодом 2π, это неравенство остаётся верным и для всех значений переменной, для которой

$\dfrac{\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$ для каждого целого *n*.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$

Пример 6. Решите неравенство $\cos x\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin x\sin\dfrac{\pi}{4}\ge-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Применяя формулу для косинуса суммы, упрощаем левую часть неравенства

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Проводим прямую $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 6). Она пересекает единичную окружность в точках, соответствующих значениям $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ переменной величины $x+\frac{\pi}{4}$. Значит, при вращении угла $x+\frac{\pi}{4}$ от $-\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$ т. е. при $-\frac{3\pi}{4}\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}$ будет выполнено неравенство $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

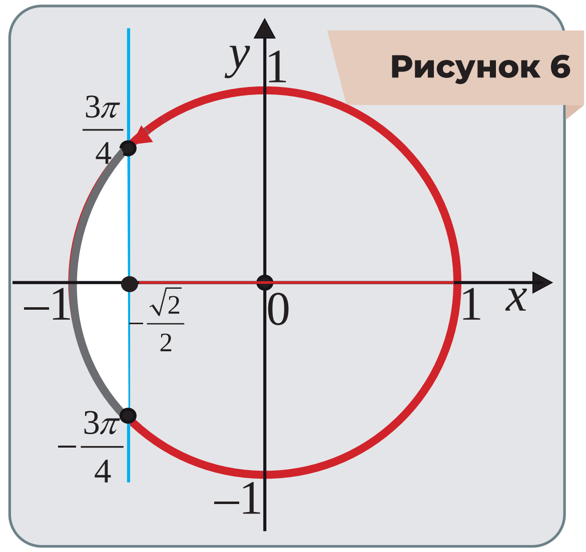


Рисунок 6

Теперь, учитывая периодичность и период косинуса, получим

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n \quad n\in Z$$

$$-\pi+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n \quad n\in Z.$$

Ответ: $\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z$.

Пример 7. Решите неравенство $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge1$.

Решение. Из рисунка 7 вытекает, что если величина $2x-\frac{\pi}{4}$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\pi}{4}\le2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{5\pi}{4}\le2x-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2},$$

то тогда $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge1$.

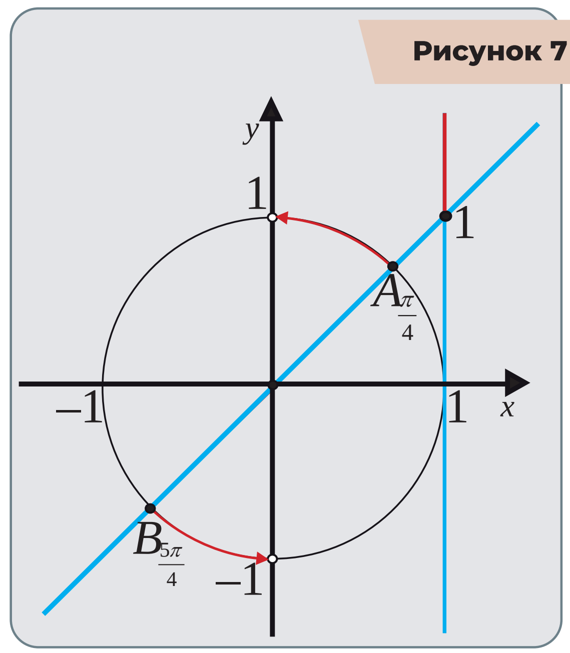


Рисунок 7

Замечание. Уравнение синей прямой на рисунке может быть задано уравнениями двух лучей $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, которые дополняют друг друга до прямой. Двойное неравенство вида $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$ при этом означает, что переменный угол φ может вращаться от центрального угла φ_1 до центрального угла φ_2. Необходимо учитывать те значения углов, в которых тангенс или котангенс не определены. Окончательное решение неравенства получается прибавлением периодов этих функций.

Вернемся теперь к решению примера 7. Прибавляя период и упрощая неравенство $\frac{\pi}{4}\le2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, получим $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\le x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\in Z$.

ПРИМЕРЫ

1. Решите неравенства.

a) $\sin x > 1$ b) $\sin x \geq 1$ c) $\sin x < 1$ d) $\sin x \leq 1$

e) $\sin x > -1$ f) $\sin x \geq -1$ g) $\sin x < -1$ h) $\sin x \leq -1$

i) $\sin x > 1{,}5$ j) $\sin x \geq -1{,}2$ k) $\sin x < 1{,}1$ l) $\sin x \leq -2$

2. Решите неравенства.

a) $\cos x > 1$ b) $\cos x \geq 1$ c) $\cos x < 1$ d) $\cos x \leq 1$

e) $\cos x > -1$ f) $\cos x \geq -1$ g) $\cos x < -1$ h) $\cos x \leq -1$

i) $\cos x > 2$ j) $\cos x \geq -1{,}6$ k) $\cos x < 1{,}4$ l) $\cos x \leq -1{,}7$

3. Решите неравенства.

a) $\sin 2x \geq 0$ b) $\cos 3x \leq 0$ c) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ d) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\sin x > 0$ h) $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$

4. Решите неравенства.

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Решите неравенства.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$

6. Найдите решение неравенства $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ в отрезке $[0; \pi]$.

7. Найдите решение неравенства $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ в отрезке $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$

8. Решите неравенства.

a) $\cos^2 x - 3\cos x < 0$ b) $2\sin^2 x - 5\sin x + 3 \geq 0$

c) $3\cos^2 x + 7\cos x + 4 \leq 0$ d) $tg^2 x - 4tg x + 3 < 0$

9. Решите неравенства

a) $\cos\left(3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$

ГЛАВА 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ
- ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ
- ПОВТОРЕНИЕ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Теория вероятностей – один из основных разделов современной математики. Предметом теории вероятностей является изучение законов случайных событий. Её главные понятия – испытание и событие.

Под **испытанием** понимается выполнение определённого комплекса условий. Результат испытания называется **событием**.

События бывают трёх типов: **невозможные** (не происходят ни при каких испытаниях), **достоверные** (происходят при каждом испытании) и **случайные** (могут произойти или не произойти в результате испытания). Наиболее важной задачей является вычисление появления случайного события.

Любые явления, происходящие по законам природы и общества, зависят от случайного события. Некоторые из них можно предсказать, а некоторые приближённо оцениваются: погоду, цены, хороший урожай и неурожай и т. д., предсказать сложно.

В середине XVII века такие учёные, как Паскаль, Ферма, Бернулли, уделяли серьёзное внимание изучению некоторых закономерностей явлений, наблюдаемых в азартных играх, изучали процессы, и в результате внесли большой вклад в создание науки, называемой теорией вероятностей. Теория вероятностей широко используется в различных областях, в том числе в экономике, биологии, медицине, сельском хозяйстве, технике и других отраслях.

Наблюдение или экспериментальное изучение какого-либо явления осуществляется путём проведения определённых испытаний.

Понятие события

Определение. Любой результат (или последствие) эксперимента называется событием. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита – A, B, C, ...

В обычной жизни, практической деятельности и научных исследованиях часто встречаются эксперименты и испытания, результаты которых нельзя предсказать с полной уверенностью.

Например, при подбрасывании монеты нельзя с полной уверенностью сказать, какая сторона выпадет; неизвестно попадание в цель при выстреле; при бросании кубика невозможно предугадать выпадение числа 6; нельзя предсказать номер выигрышного лотерейного билета и т.д.

Определение. События, которые обязательно произойдут в результате испытания, называются достоверными событиями и обычно обозначаются буквой **Ω**.

Например, при подбрасывании кости выпадение номера от 1 до 6; содержание не более чем 1000 букв у выбранного наугад слова; наступление ночи за днём и т. д. – всё это достоверные события.

Определение. Событие, которое не произойдет ни в каком испытании, называется невозможным событием и обычно обозначается символом ∅.

Например, два выигрыша в одной лотерее, посадка космического корабля на Солнце и его возвращение, полёт самолёта на высоте 20 km и т. д. – невозможные события.

Определение. Событие, которое может произойти или нет в результате испытания, называется случайным событием.

Например, выпадение гербовой стороны при подбрасывании монеты, попадание в цель при выстреле, выигрыш лотерейного билета, выпадение очка 6 при бросании игральной кости и т. д. – случайные события.

Определение. Если наступление одного события исключает наступление других событий, то такие события называются несовместными.

Пример 1. Из коробки с деталями взяли одну деталь. При этом выход качественной детали исключает выход некачественной детали или наоборот. События «выход качественной детали» и «выход некачественной детали» являются несовместными.

Пример 2. При подбрасывании монеты выпадение орла (гербовой стороны) исключает выпадение решки (стороны с цифрой). События «выпадение орла» и «выпадение решки» несовместны.

Определение. Если события могут происходить независимо от наступления других, то такие события называются совместными событиями.

Например, «вышло солнце» и «день холодный» – события, которые могут происходить совместно.

Определение. Событие, представляющее единственный исход испытания, называется элементарным событием.

Определение. Событие, которое можно разложить на элементарные события, называется сложным.

Определение. Если нет оснований говорить о том, что какое-либо одно из нескольких событий имеет большую возможность наступления в результате испытания, чем другие, то такие события называются равновозможными событиями.

Например, при подбрасывании монеты, выпадении орла или решки, или при бросании игральной кости выпадение одного из чисел от одного до шести – все это равновозможные события.

Определение. Событием, противоположным событию A, называется событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события A.

Понятие зависимых и независимых событий

Определение. Если наступление одного из двух событий не зависит от наступления или ненаступления второго события, то такие события называются независимыми событиями.

Пример 3. Монету подбрасывают дважды. Вероятность выпадения решки при первом броске (событие A) не зависит от того, выпадет ли решка при втором броске (событие B). С другой стороны, вероятность выпадения орла во втором испытании не зависит от результата первого эксперимента. Таким образом, события A и B независимы.

Пример 4. При бросаниях монеты и игральной кости пусть A – событие выпадения орла, а B – выпадение чётного очка. Здесь A и B – независимые события.

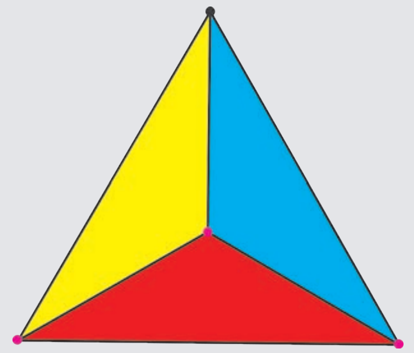
Пример 5. При бросании двух игральных костей пусть A – выпадение в первой кости, а B – выпадение во второй кости чётного очка. A и B – независимые события.

Определение. Если любые два из нескольких событий не зависимы, то они называются попарно независимыми.

Пример 6. Монету подбросили 3 раза. Пусть A, B, C – события падений орла в первой, второй и третьей попытках, соответственно. Ясно, что никакие два рассматриваемых событий (т. е. (A и B), (A и C), (B и C)) независимы. Таким образом, события A, B и C попарно независимы.

Пример 7. Одна грань правильного тетраэдра красная, другая – жёлтая, третья – синяя, а четвертая – в этих трёх цветах (рис. 1). При бросании тетраэдра выпадение красного цвета – это событие A, выпадение жёлтого – событие B, а выпадение синего – событие C. При этом события A, B и C попарно независимы.

Рисунок 1



Определение. Если вероятность наступления одного из двух событий зависит от наступления или ненаступления второго события, то такие события называются зависимыми.

Пример 8. В коробке 80 белых и 20 чёрных шаров. Один шар вынимается наугад и не может быть возвращен в коробку. Если выход белого шара в первой попытке является событием A, то событие B выхода белого шара во второй попытке зависит от события A. То есть события A и B зависимы.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

Понятие «вероятность» является одним из главных понятий теории вероятностей. Рассмотрим в примере.

Предположим, что в коробке лежат вперемежку 12 одинаковых шаров, из которых 5 красных, 4 чёрных и 3 белых. Возможность того, что вынутый из коробке шар будет красным или чёрным, больше, чем возможность того, что он будет белым. Можно ли численно измерить эту возможность? Оказывается, можно. Это число называется вероятностью события.

Таким образом, вероятность – это число, характеризующее возможность наступления события.

Поставим перед собой задачу количественно определить вероятность того, что вынутый шар будет красным или чёрным. Событием A считаем взятие красного или чёрного шара. В испытании (испытание состоит во взятии шара из коробке) каждый из возможных исходов, то есть каждое событие, которое может произойти, является элементарным событием. Обозначим элементарные события через $E_1, E_2, E_3, E_4, ...$ В данном примере могут произойти следующие 12 элементарных событий: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – вынимается красный шар; E_6, E_7, E_8, E_9– вынимается чёрный шар; E_{10}, E_{11}, E_{12}– вынимается белый шар.

Нетрудно заметить, что эти исходы являются единственно возможными (один шар обязательно вынимается) и равновозможными событиями (шар вынимается наугад, шары одинаковые и они хорошо перемешаны) .

Элементарные события, приводящие к наступлению ожидаемого события, называются благоприятствующими ему событиями. В примере следующие 9 элементарных событий $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$ являются благоприятствующими событиями событию A (взятию красного или чёрного шара). Отношение числа элементарных событий, благоприятствующих событию A к общему числу элементарных событий называется вероятностью события A и обозначается $P(A)$. B рассматриваемом примере всего 12 элементарных событий, 9 из которых благоприятствуют событию A. Итак, вероятность того, что вынутый шар будет красным или чёрным, равна: $P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Найденное число (вероятность) даёт количественную оценку вероятности того, что в поставленной задаче вынимается красный или чёрный шар.

Существуют разные определения вероятности. Это классическое, статистическое и геометрическое определения.

Классическое определение вероятности

Определение. ***Вероятность события*** A – это отношение числа m событий, благоприятствующих наступлению A, к числу n всевозможных элементарных событий испытания. Вероятность события A обозначается через $P(A)$. Итак, по определению

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Из определения вероятности вытекают следующие свойства.

1. Вероятность достоверного события равна 1. То есть $P(\Omega)=1$.

Действительно, если событие достоверно, то любой элементарный исход опыта благоприятствует его наступлению. В этом случае $m=n$ и, следовательно,

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

Пример 1. В сосуде 20 шаров, пронумерованных от 1 до 20. Один шар был вынут из сосуда наугад. Какова вероятность того, что порядковый номер этого шара не больше 20 (событие A)?

Решение. Порядковый номер любого из шаров в сосуде не превосходит 20. Следовательно, количество элементарных событий, благоприятствующих наступлению события *A*, и количество всевозможных элементарных событий равны: $m = n = 20$ и $P(A) = \frac{m}{n} = 1$. В этом случае событие *A* является достоверным.

Ответ: P(A)=1.

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е. P(∅)=0

Действительно, если событие не происходит, никакие элементарные события испытания не будут благоприятствовать его наступлению. В этом случае $m = 0$ и $n \geq 1$ (существует хотя бы одно элементарное событие в испытании), следовательно,

$$P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

Пример 2. В коробке 10 шаров, из них 4 белые, остальные чёрные. Один шар был взят из этой коробки наугад. Какова вероятность того, что это – красный шар (событие *A*)?

Решение. В этом примере событие *A* заключается во взятии красного шара. В коробке нет красного шара, поэтому число *m* благоприятствующих событий к наступлению события *A* равно нулю, т. е. $m = 0$. В опыте имеются всего 10 элементарных событий, каждое из которых заключаются во взятии одного шара (белого или чёрного, но не красного шара), т. е. n=10. Итак, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$. В этом случае *A* – невозможное событие.

Ответ: P(A)=0.

3. Вероятность случайного события – положительное число, заключённое между 0 и 1.

В самом деле, лишь часть всех элементарных явлений опыта благоприятствует наступлению случайного события (не являющегося невозможным и достоверным событием). В этом случае $0 < m < n$. Тогда $0 < \frac{m}{n} < 1$ и, следовательно, $0 < P(A) < 1$.

Таким образом, вероятность любого события удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Пример 3. В мешке 12 шаров, из них 3 белые, 4 чёрные и 5 красные. Один шар был вынут наугад. Найдите вероятность того, что вынутый шар черный (событие A).

Решение. Количество благоприятствующих элементарных событий $m = 4$, а общее количество элементарных событий $n = 12$, поэтому вероятность события A равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: P(A)=$\frac{1}{3}$.

Пример 4. Было продано 2000 лотерейных билетов. Известно, что выигрывает 1 билет 100 000 сумов, 4 билета по 50 000 сумов, 10 билетов по 20 000 сумов, 20 билетов по 10 000 сумов, 165 билетов по 5 000 сумов, 400 билетов по 1 000 сумов, а остальные билеты не имеют выигрыша. Какова вероятность выигрыша не менее 10 000 сумов за один билет?

Решение. Здесь m=1 + 4 + 10 + 20 = 35, n = 2000. Потому что в 35 билетах призы более 10 000 сумов. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Ответ: *P*(*A*)= 0,0175.

Теперь, прежде чем решать следующие примеры, приведём одну формулу.

В коробке n шаров. Из них n_1 белые, n_2 чёрные, n_3 красные и nk жёлтые шары. Вероятность события A, что из этой коробки взято m шаров, из них m_1 – белые, m_2 – чёрные, m_3 – красные и mk – жёлтые шары, вычисляется по формуле:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m}.$$

Помните! $p_n=n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n;$ $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!};$ $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!};$ $0!=1.$

Пример 5. В коробке 10 шаров: 6 белых и 4 чёрных. 2 шара были взяты наугад. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Общее количество возможных случаев в этой задаче равно

$$n=C_{10}^2=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=\frac{9\cdot 10}{1\cdot 2}=45.$$

А количество событий, благоприятствующих событию A, равно

$$m=C_6^2\cdot C_4^0=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{0!\cdot 4!}=15.$$

Отсюда $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $P(A)=\frac{1}{3}$.

Пример 6. В магазине работают 6 мужчин и 4 женщины. 7 человек были выбраны случайным образом по номеру в табеле. Найдите вероятность того, что среди выбранных 3 женщины.

Решение. Общее количество элементарных событий состоит в количестве выбора 7 из 10 человек. Оно вычисляется по формуле $n=C_{10}^7=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$. Теперь нужно Найти количество благоприятствующих элементарных событий. Это количество вычисляется равенством $m=C_4^3\cdot C_6^4=\frac{4}{1}\cdot\frac{5\cdot 6}{1\cdot 2}=60$. Значит, вероятность этого события $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$

Ответ: $P(A)=\frac{1}{2}$.

Пример 7. На одной полке стоят 2 учебника по математике, 2 по физике и 2 по химии. Какова вероятность того, что книги по химии находятся рядом?

Решение. Найдём количество всех перестановок 6 книг: $n=P_6=6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720$.

Теперь для подсчёта количества перестановок всех книг, так, чтобы книги по химии стояли рядом друг с другом, считаем две книги по химии за одну. Таким образом нужно Найдите количество всех перестановок 5 книг. Находим количество этих перестановок $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$. Две книги по химии могут переставлены между собой. Количество перестановок 2 книг равно $P_2=2!=1\cdot 2=2$. Отсюда $m=P_5\cdot P_2=120\cdot 2=240$. Итак, согласно классическому определению вероятности,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}.$$

Ответ: $P(A)=\frac{1}{3}$.

Пример 8. Абонент не может вспомнить последние три цифры при наборе номера телефона. Но он знает, что эти цифры разные. Какова вероятность набрать правильный номер со всех попыток набора?

Решение. Обозначим событие набора правильного номера через *A*, а его вероятность через $P(A)$. Последние три цифры можно набрать A_{10}^{3} способом. Тогда общее количество элементарных событий будет $n=A_{10}^{3}=\frac{10!}{(10-3)!}=8\cdot 9\cdot 10=720$.

Номер телефона, который ищет абонемент, будет 1 из этих 720. То есть $m=1$. Согласно классическому определению вероятности, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}$.

Ответ: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{720}$.

Статистическое определение вероятности

Относительная частота, наряду с вероятностью, является одним из главных понятий теории вероятностей.

Определение. Относительная частота события – это отношение количества испытаний, в которых наступило событие *A*, к общему количеству фактически проведённых испытаний. Относительное событие обозначается через *W*(*A*). Таким образом, относительная частота события А определяется по формуле

$$W(A)=\frac{M}{N}.$$

где *M* – количество испытаний, при которых наступило событие *A, N* – общее количество проведённых испытаний.

Определение. Статистическая вероятность события – это относительная частота данного события при больших количествах испытаний.

Сопоставляя определения вероятности и относительной частоты, приходим к следующему выводу: в определении вероятности не требуется, чтобы испытания действительно проводились, а в определении относительной частоты требуется, чтобы испытания действительно проводились. Проще говоря, вероятность вычисляется до испытаний, а относительная частота – после испытаний.

Если $M=N$, то есть количество проведённых испытаний равно количеству появлений события, то это событие является достоверным.

Если $M=0$, то есть в результате эксперимента событие не происходит ни разу, то это событие является невозможным.

Пример 1. Снайпер произвёл по цели 30 выстрелов. Если известно, что 23 из них попали в мишень, найдите относительную частоту попадания пуль в мишень.

Решение. 23 пули попали в цель, поэтому количество наступлений события $M=23$, а общее количество выстрелов $N=30$, поэтому относительная частота этого события $W(A)=\frac{23}{30}$.

Ответ: $W(A)=\frac{23}{30}$.

Пример 2. Найдите относительную частоту числа, кратного 5, среди первых 1000 натуральных чисел.

Решение. Обозначаем появление числа, кратного 5, через A, а его относительную частоту – через $W(A)$. Общее количество проведённых испытаний равно $N = 1000$, и количество натуральных чисел среди первых 1000, кратных 5, равно 200. Поэтому $M = 200$, а относительная частота $W(A)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$.

Ответ: $W(A)=\frac{1}{5}$.

Пример 3. В таблице даны сведения о туристах, прибывших в страну из-за границы, и гражданах, путешествовавших по территории своей страны (внутренние туристы).

Годы	Количество иностранных туристов	Количество внутренних туристов	Общее количество туристов
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
$\sum$	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Найдите относительную частоту числа граждан страны, совершавших поездки внутри страны в рассматриваемые годы.

Решение. Через A обозначим событие быть внутренним туристом. Количество внутренних туристов $M = 1\ 766\ 970$ (есть количество испытаний, в которых наступило событие A). Общее количество туристов $N = 5\ 531\ 951$ означает общее количество испытаний. В этом случае,

$$W=\frac{M}{N}=\frac{1766970}{5531951}\approx 0{,}3194.$$

Ответ: $W(A)= 0{,}3194$.

Геометрическое определение вероятности

Дана область (кусок линии, поверхности или объёма) Ω, в которой все точки равновозможные. Пусть достоверно попадание в нее точки, брошенной в эту область. Выделим из этой заданной области небольшой участок ω. Нужно определить вероятность попадания точки, брошенной в область Ω, в выделенную область ω. Чем больше выделенная область, тем больше вероятность попадания, а когда область ω равна области Ω, вероятность попадания становится достоверным событием. Следовательно, вероятность попадания брошенной точки в кусок ω прямо пропорциональна размеру области ω, и её следует интерпретировать с геометрической точки зрения. В таких случаях удобно использовать геометрическое определение вероятности.

Если событие попадания брошенной точки в область Ω достоверно, то вероятность попадания этой точки в кусок ω, отделённый от этой области, равна отношению размера $m(\omega)$ куска ω к размеру $m(\Omega)$ области Ω:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}.$$

Здесь размером области может быть длина, площадь или объём.

Если взять за область Ω отрезок L, а за область ω кусок l отрезка L, то вероятность того, что точка, брошенная на отрезок L, попадёт в кусок l, найдётся равенством

$$P(A)=\frac{l}{L}.$$

Если рассматривать область Ω как поверхность S, а область ω как поверхность s (лежащей в S), то вероятность того, что точка, брошенная в поверхность S, попадёт в поверхность s, вычисляется формулой

$$P(A)=\frac{s}{S}.$$

Если взять область Ω за объём V, а область ω за объём v, то вероятность попадания точки, брошенной в объем V, в объём v вычисляется равенством

$$P(A)=\frac{v}{V}.$$

Геометрическое определение также может быть интерпретировано по времени. Если событие неизбежно произойдёт в течение времени T, то вероятность того, что это событие произойдёт в течение времени t, равна:

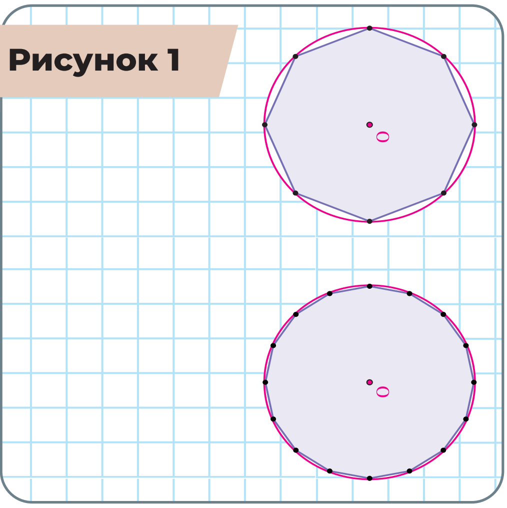
$$P(A)=\frac{t}{T}.$$

Пример 1. Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в правильный n-угольник, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_n)$ – площадь n-угольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 1). Через B_n обозначим событие попадания точки в правильный n-угольник, вписанный в окружность. Тогда

$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}.$$

Рисунок 1



Рассмотрим некоторые частные случаи этой задачи.

a) Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в правильный треугольник, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_3)$ – площадь треугольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 2), B_3 – событие попадания точки в правильный треугольник. В этом случае

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\cdot sin\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137.$$

b) Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт в квадрат, вписанный в окружность.

Решение. Пусть $S(D_4)$ – площадь квадрата, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 3), B_4 – событие попадания точки в квадрат. В этом случае

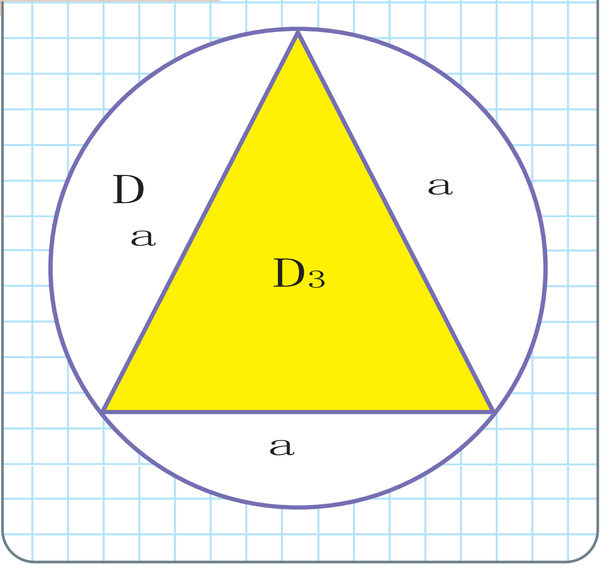
$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{4\cdot\sin\frac{2\pi}{4}}{2\pi}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637.$$

c) Точка брошена в окружность радиуса R. Найдите вероятность того, что выпавшая точка попадёт внутрь правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

Решение. Пусть $S(D_6)$ – площадь шестиугольника, $S(D)$ – площадь окружности (рис. 4), B_6 – событие попадания точки в шестиугольник. В этом случае

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{6\cdot\sin\frac{2\pi}{6}}{2\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274.$$

Рисунок 2



Пример 2. В отрезке L длиной 30 cm размещается отрезок I длиной 12 cm. Найдите вероятность того, что точка, поставленная наугад в большой отрезок, попадёт и в малый отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки в отрезок I прямо пропорциональна его длине и не зависит от её расположения.

Решение. Выброшенная точка достоверно попадает в отрезок L. Определим вероятность $P(E)$ события E – попадания точки в отрезок I, расположенный в L (рис. 5). На картинке показаны только три случая. Но отрезок I может располагаться в любой части L. Однако во всех случаях вероятность принимает одинаковое значение, равное

$$P(E)=\frac{l}{L}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}.$$

Пример 3. Два друга захотели встретиться между 9 и 10 часами. Заранее было оговорено, что первый пришедший будет ждать своего друга 15 минут. Если друг не появится в это время, он может уйти. Какова вероятность того, что эти два друга встретятся, если они могут прийти в любое время между 9 и 10 часами, а время прибытия в данное время случайно и не согласовано между собой?

Рисунок 3

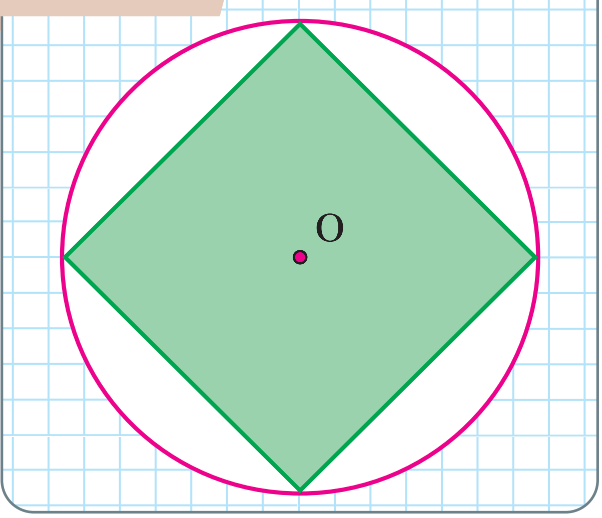
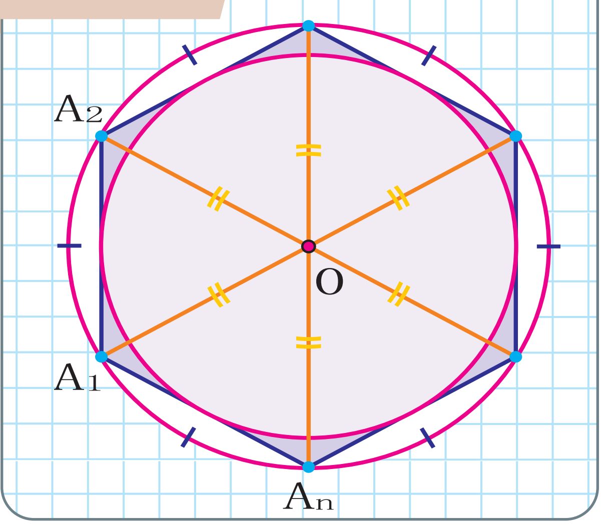


Рисунок 4



Решение. Пусть время прибытия первого человека равно x, а время прибытия второго человека равно y. Для их встречи необходимо и достаточно выполнение неравенства $|x-y|\le 15$. Возьмём x и y как декартовы координаты на плоскости, и пусть минуты – единицы измерений в этих координатных осях. Всевозможные моменты, в которых могут встретиться друзья (появление события A), – это все точки квадрата со стороной 60, благоприятствующие моменты – это закрашенные точки квадрата (рис. 6).

Итак, согласно геометрическому определению вероятности, искомая вероятность равна отношению площади $S(D_1)$ закрашенной части к площади $S(D)$ квадрата:

$$P(A)=\frac{S(D_1)}{S(D)}.$$

Вычислим площади:

$$S(D)=60\times 60=3600, \text{ и}$$

$$S(D_1)=3600-2\cdot\frac{45\times 45}{2}=1575.$$

Тогда искомая вероятность будет:

$$P(A)=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}.$$

Рисунок 5

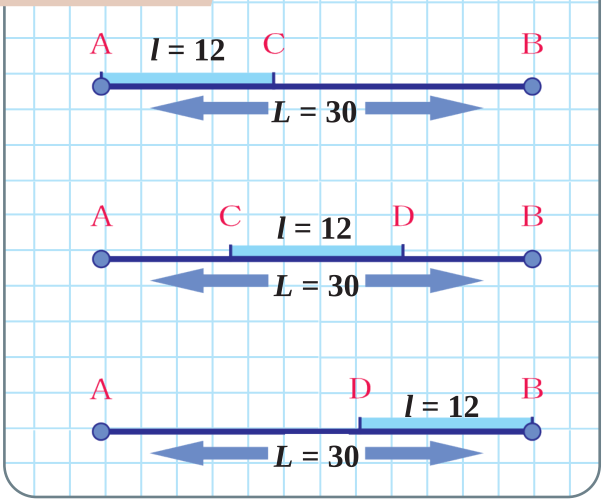
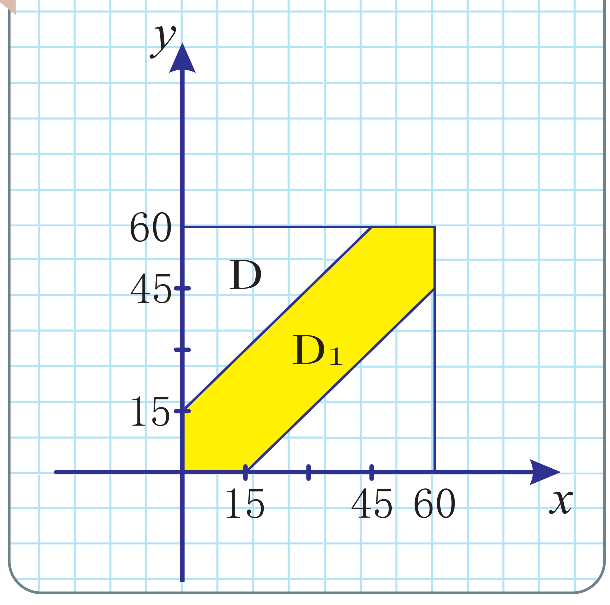


Рисунок 6



ЗАДАЧИ

1. В лотерее 1000 билетов. 500 из них выигрышные и 500 без выигрыша. Было куплено два билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

2. Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность того, что в обоих случаях выпадет орёл?

3. На полках разместили 20 книг. Какова вероятность того, что определённые 5 из них разместятся рядом (событие A)?

4. Выбрасываются две игральные кости. Сумма выпавших чисел – чётное число. При этом найдите вероятность того, что хотя бы на одном из кубиков всегда выпадет 6.

5. Бросают две кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна 5, а их произведение равно 4.

6. Найдите вероятность того, что при броске двух игральных костей сумма выпавших чисел равна 7.

7. Задумывается двузначное число разными цифрами. Найдите вероятность того, что наугад сказанное число окажется задуманным числом.

8. В коробке 20 шаров: 10 чёрных и 10 белых. Из ящика вынули наугад один шар. Найдите вероятность того, что этот шар был: a) белым; b) чёрным.

9. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных книг в случайной партии из 100 книг. Найдите относительную частоту бракованных книг.

10. По мишени было произведено 20 выстрелов. 18 из них поразили цель. Найдите относительную частоту попадания в цель.

11. При тестировании партии предметов относительная частота годных предметов составила 0,9. Если всего проверено 200 предметов, найдите количество годных предметов.

12. Когда 920 жителей города спросили, как они добираются до работы, оказалось, что 350 из них ездят на машине, 420 – на общественном транспорте, 80 – на велосипеде и 70 – пешком. Определите относительную частоту добирающих на работу:

1) на машине;
2) на общественном транспорте;
3) на велосипеде;
4) пешком.

13. В окружности радиусом 20 cm начерчены две непересекающиеся окружности, одна радиусом 5 cm, а другая радиусом 10 cm. Найдите вероятность того, что точка, взятая наугад изнутри большего круга, окажется внутри одной из меньших окружностей.

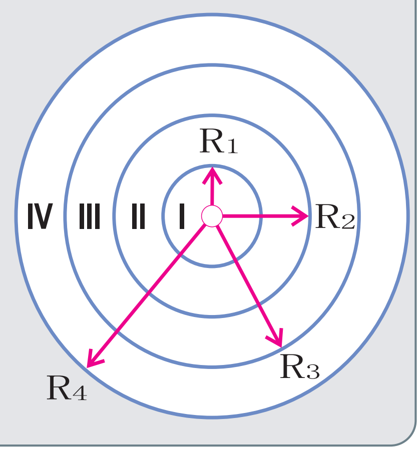
14. Двое друзей договорились встретиться в определённом месте между 10 и 11 часами. Первый пришедший ждёт второго 20 минут, затем уходит. Найдите вероятность того, что друзья встретятся, если они имеют равные шансы приехать в заданный промежуток времени.

15. В результате сильного шторма телефонная линия была оборвана на расстоянии от 40 до 70 километров. Найдите вероятность того, что разрыв произойдёт между 50 и 55 километрами.

16. Внутри круга нарисован квадрат. Какова вероятность того, что точка, помещённая внутри круга, окажется внутри квадрата?

17. Мишень представляет собой концентрические круги с радусами $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 4r$. Если достоверно попадание копья, брошенного в мишень, найдите вероятность того, что копьё попадёт в каждую область (рис. 7).

Рисунок 7



18. Подбросили две кости одновременно. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна пяти.

19. В классе 30 учеников, 10 из них ходят в кружок математики. В классе наугад были отобраны 6 учеников. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них посещает математический кружок.

20. Найдите вероятность того, что из 3 синих и 4 зелёных шаров случайно выбранными 3-мя шарами будут 2 синих и 1 зелёный.

21. Найдите вероятность выпадения чётного очка при однократном броске кости.

22. 26 из 10 000 арбузов треснули во время транспортировки. Найдите относительную частоту числа лопнувших арбузов.

23. В коробке 7 белых и 3 чёрных шара. Найдите вероятность того, что взятый наугад шар окажется белым.

24. Абонент, набирая номер в телефоне, забыл две цифры в конце и набрал их наугад, только зная, что эти цифры разные. Найдите вероятность того, что будет набран правильный номер.

25. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 2 элемента. Найдите вероятность того, что включёнными окажутся неизношенные элементы.

26. В коробке m белых и n чёрных шаров. Из коробки взяли один шар. Найдите вероятность того, что взятый шар будет белым.

27. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

ПОВТОРЕНИЕ

ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

1. Найдите область определения функций.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Если $f(x)=x^2$ и $g(x)=2x-1$, при скольких значениях x имеет место $f(g(x))=g(f(x))$?

3. Если $f(x+1)=x^2-3x+2$, то $f(x)=$?

4. Если $f(x)=\sqrt{x^3-1}$, чему равно $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$?

5. Если $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, чему равно $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$?

6. Какие значения принимают функции?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Какие из следующих функций чётные?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Какие из следующих функций нечётные?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнения (2-21).

1. При каких значениях t уравнения $18x+7=5$ и $18x+7+t=5+t$ равносильны?

2. $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\frac{4}{x^2}=\frac{9}{x}$

4. $1-\frac{15}{x}=\frac{16}{x^2}$

5. $\frac{9}{x}+\frac{13}{2x}=2$

6. $\frac{2}{x-3}=\frac{x}{x+3}$

7. $\frac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$

9. $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$

10. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\frac{1}{x}+\frac{36}{9x-x^2}-\frac{x-5}{9-x}=0$

12. $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$

13. $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3}{x-4}$

14. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

15. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\frac{4}{x^2-3x+2}-\frac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$

22. Поезд задержался в пути на 30 минут. Для того чтобы прибыть по расписанию, машинист на отрезке пути 80 km увеличил скорость на 8 km/h. Какова скорость поезда по расписанию?

23. Моторная лодка прошла 28 km по течению реки и 25 km против течения, затратив на весь путь столько же времени, сколько ей понадобилось бы на прохождение 54 km в стоячей воде. Определите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 2 km/h.

Решите уравнения (24-38).

24. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

25. $\frac{1+x}{6}-\frac{6}{1+x}=\frac{4}{x+1}-\frac{x+1}{4}$

26. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=3\frac{1}{3}$

27. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{\left(x^2+1\right)x}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left|x+\dfrac{1}{x}\right|+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите систему уравнений (1-8).

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Решите систему уравнений (9-13).

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Решите неравенства.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Решите систему неравенств.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<(\dfrac{2}{3})^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнения.

1. $\sqrt{x-1}=-4$

2. $\sqrt{x}=8$

3. $\sqrt{x}=-16$

4. $\sqrt[3]{x+1}=2$

5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$

6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$

7. $1+\sqrt{x+3}=0$

8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$

9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$

10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$

11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$

12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$

13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$

14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$

15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$

16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$

19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$

20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$

21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$

22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$

23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$

24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$

25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$

26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$

27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$

28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$

29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$

30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$

31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$

32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$

33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$

34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$

36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$

38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$

39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$

40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$

41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$

42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите систему уравнений.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решите уравнения.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$

2. Сколько корней имеет уравнение $49^x + 7^x + 1 = 57$?

3. Найдите наибольший корень уравнения $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Решите неравенства.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0{,}04)^{2x} > (0{,}2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$ f) $3{,}2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \ge 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0{,}5^{4x+3} \le 0{,}5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \ge \frac{1}{2}$

2. Сколько натуральных чисел удовлетворяют неравенству?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \le 16$ c) $2^{5x-7} \ge 16$ d) $0{,}1^{4x-5} > 0{,}001$

3. Найдите наибольшее целое число, входящее в решение.

a) $2{,}5^{2x+3} \le 6{,}25$ b) $1{,}1^{5x-3} < 1{,}21$ c) $0{,}7^{9x+4} > 0{,}343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \ge \frac{8}{125}$

ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. Графику какой функции точка $A(-2;-1)$ не принадлежит?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Найдите область определения функции.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x+|x|)$

3. При каком $x \in \{2;3;4;5;6\}$ функция $y = \log_x(x+1)$ достигает наибольшего значения?

4. Как можно преобразовать график функции $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ из графика функции $y = \log_3 x$?

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Вычислите значение выражения.

a) $\log_{12}\sqrt[5]{144}$ b) $\log_3 5-\log_3\dfrac{5}{27}$ c) $\dfrac{\log_{27}2}{\log_3 8}$

d) $\dfrac{\log_{11}12}{\log_{11}6}+\dfrac{\log_5 3}{\log_5 6}$ e) $\dfrac{3\log_7 2-\dfrac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2+\dfrac{1}{3}\log_5 27}$ f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}}+27^{\log_3 4}+3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\dfrac{1}{2}\log_3\log_5 125$ h) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Решите уравнения.

a) $\log_5 x=2$ b) $\log_{0,2}x=4$ c) $\log_{\frac{1}{3}}x=-1$ d) $\log_7 x=\dfrac{1}{3}$

2. Решите уравнения.

a) $\log_3 x+\log_{\frac{1}{3}}x+2=0$ b) $3\log_{\frac{1}{7}}x=\log_{\frac{1}{7}}9+\log_{\frac{1}{7}}3$

c) $\log_2(3x-6)=\log_2(2x-3)$ d) $\log_6(14-4x)=\log_6(2x+2)$

3. Решите уравнение.

a) $\log_2^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}^2\left(x^2+x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x\right)=0$

c) $\lg^2 x-\lg x+1=\dfrac{9}{\lg 10x}$ d) $\log_2^2 x+7\log_2 x+49=\dfrac{-218}{\log_2\dfrac{x}{128}}$

4. Решите уравнения.

a) $x^{5+\log_2 x}=\dfrac{1}{16}$ b) $5^{2(\log_5 2+x)}-2=5^{x+\log_5 2}$

c) $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2+20x+5}}\right)=0$ d) $x^{\lg 2}+2^{\lg x}=4$

5. Сколько целых корней имеет уравнение $\log_2(x+4)=-2\log_2\dfrac{1}{2-x}$?

СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases}3\cdot 7^x-3^y=12\\ 7^x\cdot 3^y=15\end{cases}$ b) $\begin{cases}3^{-x}\cdot 2^y=\dfrac{4}{9}\\ x+y=4\end{cases}$ c) $\begin{cases}2^x+2y=1\\ 3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2^x+2y=1\\ 3y-6y^2=2^{x-1}\end{cases}$ e) $\begin{cases}3\cdot 2^x+y=13\\ 2^{2x+1}+3y=35\end{cases}$ f) $\begin{cases}3\cdot 7^x+3^y=12\\ 7^x\cdot 3^y=4\end{cases}$

2. Решите систему уравнений.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Решите неравенства.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ f) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

g) $\log_3(13-4^x)>2$ h) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ i) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. Сколько натуральных чисел меньше 5 удовлетворяют неравенству $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x}$?

3. Найдите сумму натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $2\log_5 x-\log_x 125<1$?

4. Сколько натуральных чисел удовлетворяют неравенству $\log_x(3-x)>1$?

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции.

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ c) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\dfrac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Найдите множество значений функции.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Определите чётность или нечётность заданной функции.

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ b) $y = x\cos x$ c) $y = \sin x + x^2$ d) $y = \cos x - x^2$

4. Найдите наименьший положительный период функции.

a) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ b) $y = \cos(3x - 1)$ c) $y = tg2x$ d) $y=\cos\dfrac{x}{3}$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции.

a) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y = 1 - 2|\sin 3x|$

6. Найдите нули функции.

a) $y = \sin x - 2$ b) $y = 2\cos x + 1$ c) $y = x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. Найдите область определения функции.

a) $y = arccos\dfrac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2 + 3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\dfrac{4-x}{3}$

2. Сравните.

a) $arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $arctg(-1)$ и $arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ и $arcsin1$ d) $arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $arcsin\dfrac{1}{2}$

3. Найдите значение выражения.

a) $2arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)+arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\dfrac{1}{2}+4arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\dfrac{1}{2}+arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Вычислите.

a) $2arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $2arc\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2arc\,tg1+3arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2arc\,tg(-1)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Вычислите.

a) $sin\left(arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\dfrac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Решите уравнение на промежутке $0 \le x < 360^\circ$.

a) $sinx = -0,3$ b) $sinx = 0,15$ c) $cosx = 0,6$ d) $cosx = -0,43$

2. Найдите значения *x*, учитывая промежутки.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\quad 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. Решите уравнение на промежутке $0 \le x < 360^\circ$.

a) $7-6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx - 3cosx = 0$

4. Решите уравнения.

a) $sin10x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $cos10x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg10x=\sqrt{3}$ d) $ctg10x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Решите уравнения.

a) $sin4xcos3xtg8x=0$ b) $cos4x=-cos5x$ c) $tg5x=-tg\frac{x}{3}$

6. Решите уравнения.

a) $2sin^2x+cos^2x-2=0$ b) $2sin^2x+cosx=0$ c) $sinxcosx=0$

7. Решите уравнения.

a) $sin^2x-2sinxcosx+cos^2x=0$ b) $7cos^2x-3sin^2x=0$

c) $cos^22x-10sin2xcos2x+21sin^22x=0$ d) $8sin^2x-cos^2x=0$

8. Решите уравнения подстановкой.

a) $cos^22x+1=2cos^2x$ b) $3cos^2xsinx+1=3cos^2x+sinx$

c) $6cos^2x+6sin^2x-3cosx-3=0$ d) $5sin^2xcosx+6cos^2x-10cosx+6=0$

9. Решите уравнения.

a) $cos2x+cosx=0$ b) $cos3x=2cos2x-1$

c) $2cos^2x=4sinxcosx-1$ d) $cos^2x-3sinxcosx=-1$

10. Решите уравнения заменой $sinx+cosx=t$.

a) $2(sinx+cosx)+sin2x+1=0$ b) $\sin x+\cos x=1+\frac{\sin 2x}{2}$

11. Решите уравнения методом оценки.

a) $2sin^8x-3cos^8x=5$ b) $(cos2x-cos4x)^2=4-4cos^23x$

12. Решите уравнения с помощью введения вспомогательного угла.

a) $12cosx-5sinx=-13$ b) $sinx+cosx=\sqrt{2}$

13. Решите неравенства.

a) $\sqrt{2}\cos 2x\le 1$ b) $2sin3x>-1$ c) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\left(\frac{x}{4}-3\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{x}{3}+2\right)<\frac{1}{2}$

14. Решите неравенства.

a) $sin^2x+2sinx>0$ b) $cos^2x-cosx<0$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. В лотерее 2000 билетов, 400 из которых выигрышные. Найдите вероятность того, что только один из двух взятых билетов окажется выигрышным.

2. Найдите вероятность того, что при бросании двух костей сумма выпавших очков равна 7, а произведение равно 6.

3. В корзине 7 чёрных и 8 белых шаров. Вынули один шар. Какова вероятность того, что он окажется: а) белым; б) чёрным?

4. Найдите вероятность кратности на 3 наугад взятого натурального числа, не превосходящего 25.

5. Из партии из 1000 книг, отобранных случайным образом в издательстве, 7 оказались непригодными. Найдите относительную частоту непригодных книг.

6. В квадрат вписан круг. Найдите вероятность того, что точка, помещённая в квадрате, окажется внутри круга.

7. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел при бросании двух костей одновременно меньше шести.

8. В коробке 11 белых и 9 чёрных шаров. Найдите вероятность того, что 2 из 4 взятых наугад шаров будут белыми.

9. В корзине 7 красных и 13 синих мячей. Найдите вероятность того, что 2 взятых наугад мяча будут разного цвета.

10. В коробке 7 белых и 3 чёрных шара. Найдите вероятность того, что вынутые наугад из неё 2 шара окажутся разного цвета.

11. Абонент, набирая номер телефона, забыл три цифры в конце. Найдите вероятность того, что при наборе цифр наугад будет набран правильный номер.

12. В коробке 100 лампочек, 10 из которых неисправны. Найдите вероятность того, что 2 лампочки будут бракованными, если взять 4 лампочки наугад.

13. Найдите вероятность того, что 3 случайно выбранных шаров из 3 синих, 4 красных и 5 зелёных будут разного цвета.

14. Если в партии изделий с относительной частотой пригодности 0,8 проверено 250 изделий, Найдите количество пригодных изделий.

15. В мешке 5 синих и 7 жёлтых шаров. Найдите вероятность того, что два случайно извлечённых шара будут разного цвета.

16. В корзине 5 зелёных, 7 жёлтых и 8 красных яблок. Найдите вероятность того, что 3 случайно выбранных яблока будут разного цвета.

17. В коробке лежат 6 пронумерованных одинаковых игральных костей. По одной извлекают все кости. Найдите вероятность того, что номера извлечённых костей появятся в порядке убывания.

18. В коробке 12 белых и 18 красных шаров. Найдите вероятность того, что 3 из вынутых 4 шаров будут красными.

19. В классе 36 учеников, 13 из них занимаются в шахматном кружке. Найдите вероятность того, что хотя бы один из 7 учеников из этого класса посещает шахматный кружок.

O'quv nashri

ALGEBRA
VA ANALIZ ASOSLARI

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik
(Rus tilida)

Перевод с узбекского Адилбека Заитова
Редактор Заре Сардарян
Художественный редактор Сарвар Фармонов
Технический редактор Акмал Сулайманов
Художник Бехзод Зуфаров
Дизайнер Рустам Худайберганов
Компьютерная верстка Илхом Болтаев
Корректор Людмила Ким

Разрешено к печати 21.10.2022.
Формат 60x84 1/8. Гарнитура «Cambria». Кегль 12. Печать офсетная.
Условный печатный лист 20,46. Издательский печатный лист 21,59.
Тираж 77 725 экз. Заказ № 1150-2

print.uz
ОПЕРАТИВНО и КАЧЕСТВЕННО

Отпечатано в типографии ООО "PRINTUZ".
100105, г. Ташкент. Мирабадский район,
ул. Кушкуприк, 28/1.

Сведения о состоянии учебника, выданного в аренду

№	Ф. И. О. ученика	Учебный год	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при возвращении	Подпись классного руководителя
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Таблица заполняется классным руководителем при передаче учебника в аренду и возврате в конце учебного года. При заполнении таблицы используются следующие оценочные критерии:

Новый учебник	Состояние учебника при первой сдаче.
Хорошо	Обложка цела, не оторвана от основной части книги. все страницы в наличии, не порваны, на страницах нет записей и помарок.
Удовлетворительно	Обложка не смята, слегка испачкана, края стёрты. Удовлетворительно восстановлен пользователем. Вырванные страницы восстановлены, но некоторые страницы исчерчены.
Неудовлетворительно	Обложка испачкана, порвана, корешок оторван от основной части книги или совсем отсутствует. Страницы порваны, некоторых вообще не хватает, имеющиеся исчерчены. Учебник к дальнейшему пользованию не пригоден, восстановить нельзя.