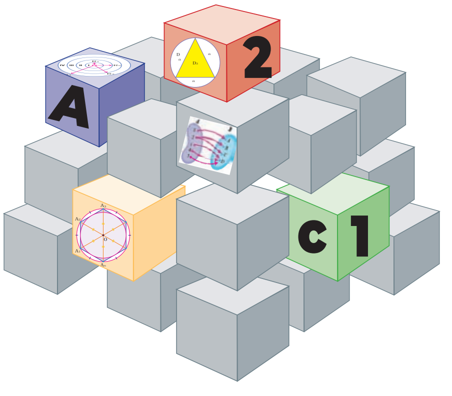
ALGEBRA

WE ANALIZIŇ ESASLARY 10



Umumy orta bilim berýän mekdepleriň
10-njy synpy üçin derslik

Özbegistan Respublikasynyň Halk bilimi ministrligi
tarapyndan neşire hödürlenildi

Täze neşir

DAŞKENT 2022

UO‘K 512(075.3)
KBK 22.14ya72
A 48

Düzüjiler:

Adilbek Zaitow, Rano Hamraýewa, Bahtiýar Abdiýew, Kalmurza Sagidullaýew, Umid Rahmanow, Baljan Urinbaýewa

Halkara ekspert:

Marcelo Staricoff

Syn ýazanlar:

M. A. Mirzaahmedow – Muhammet al-Horezmi adyndaky ýöriteleşdirilen mekdebiniň matematika mugallymy, fizika-matematika ylymlarynyň kandidaty, dosent

J. A. Koýjanow – Nowaýy welaýatynyň Hatyrçy etrabyndaky 5-nji mekdebiniň matematika mugallymy.

A. K. Kadirow – Daşkent welaýatynyň Akkorgan etrabyndaky 6-njy mekdebiniň matematika mugallymy.

Algebra we analiziň esaslary [Tekst]: 10-njy synp derslik / A. Zaitow [we başg.] – Daşkent: Respublikan tälim merkezi, 2022. – 192 s.

OnyCEF-iň Özbegistandaky wekilhanasy
bilen hyzmatdaşlykda taýýarlandy.

Özbegistan Respublikasynyň Ylymlar akademiýasynyň W. I. Romanowskiý adyndaky
Matematika institutynyň netijesi esasynda kämilleşdirildi.

Original maket we dizaýn konsepsiýasy
Respublikan tälim merkezi tarapyndan taýýarlandy.

Respublikanyň ýörite kitap gaznasynyň serişdeleriniň hasabyndan çap edildi.

ŞERTLI BELGILER

– aňsat ýumuşlar.

– çylşyrymlyrak ýumuşlar.

– çylşyrymly ýumuşlar

– kiçi temalar.

ISBN 978-9943-8456-1-9

MAZMUNY

GAÝTALAMAK

KWADRAT FUNKSIÝA......6

KWADRAT DEŇSIZLIK......9

TRIGONOMETRIK TOŽDESTWOLAR......14

ARIFMETIK WE GEOMETRIK PROGRESSIÝALAR......20

I BAP. FUNKSIÝALAR

FUNKSIÝA. FUNKSIÝANYŇ BERLIŞ USULLARY......24

FUNKSIÝANYŇ KESGITLENIŞ ÝAÝLASY WE BAHALAR TOPLUMY......27

FUNKSIÝANYŇ ÜSTÜNDE ARIFMETIK AMALLAR......32

ÇYLŞYRYMLY, TERS, DÖWÜRLEÝIN FUNKSIÝALAR......35

FUNKSIÝANYŇ HÄSIÝETLERI......42

FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINIŇ ÜSTÜNDE ÝÖNEKEÝ ÇALŞYRMALAR......47

ÇYZYKLY WE KWADRATIK MODELIRLEMELER......55

TASLAMA IŞI......58

II BAP. RASIONAL DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER. IRRASIONAL DEŇLEMELER

RASIONAL DEŇLEMELER......61

RASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY......70

RASIONAL DEŇSIZLIKLER......74

RASIONAL DEŇSIZLIKLER ULGAMY......78

IRRASIONAL DEŇLEMELER......81

IRRASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY......87

III BAP. GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALAR

GÖRKEZIJILI FUNKSIÝA..95
GÖRKEZIJILI DEŇLEMELER..99
GÖRKEZIJILI DEŇSIZLIKLER..102
LOGARIFM DÜŞÜNJESI. LOGARIFMIK FUNKSIÝA..104
LOGARIFMIK AŇLATMALARY TOŽDESTWOLAÝYN ÇALŞYRMA..109
LOGARIFMIK DEŇLEMELER..116
GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK DEŇLEMELER ULGAMY..119
LOGARIFMIK DEŇSIZLIKLER..123
GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALARYŇ ULANYLYŞY..127

IV BAP. TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR

TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR. DÖWÜRLEÝIN PROSESLER..133
TERS TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR..139
TASLAMA IŞI..145

V BAP. TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER DEŇSIZLIKLER

TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER..148
KÄBIR TRIGONOMETRIK DEŇLEMELERI ÇÖZMEGIŇ USULLARY..153
TRIGONOMETRIK DEŇSIZLIKLER..157

VI BAP. ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETI

TÖTÄNLEÝIN HADYSALAR..165
ÄHTIMALLYGYŇ KESGITLEMELERI..168

GAÝTALAMAK..178

10-njy SYNP ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY DERSLIGI ÜÇIN OKUW GOŞMAÇASY

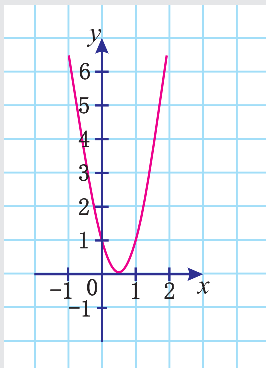
10-njy SYNP ALGEBRA WE ANALIZIŇ ESASLARY DERSLIGI ÜÇIN WIDEODERSLER

GAÝTALAMAK

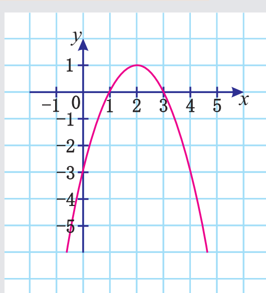
- KWADRAT FUNKSIÝA
- KWADRAT DEŇSIZLIK
- TRIGONOMETRIK TOŽDESTWOLAR
- ARIFMETIK WE GEOMETRIK PROGRESSIÝALAR

KWADRAT FUNKSIÝA

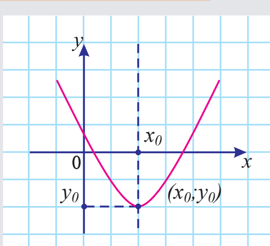
1-nji surat



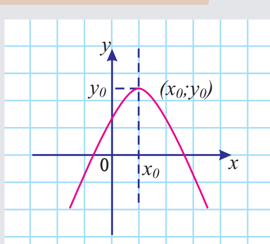
2-nji surat



3-nji surat



4-nji surat



Kwadrat funksiýanyň kesgitlemesi

Kesgitleme

$y = ax^2 + bx + c$ görnüşindäki funksiýa ***kwadrat funksiýa*** diýilýär, munda *a, b, c* berlen hakyky sanlar, *a*≠0, *x* – hakyky üýtgeýji.

Meselem, aşakdaky funksiýalar kwadrat funksiýalardyr:
$y = 3x^2 + 2x - 1$, $y = -4x^2 - 5x$, $y = 6x^2 - 3$, $y = 4x^2$, $y = 2 - x^2$.

Kwadrat funksiýanyň grafigi

1. $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigi *parabola* diýilýän egri çyzykdan ybarat bolýar. 1-nji suratda $y = 4x^2 - 4x + 1$ we 2-nji suratda $y = -x^2 + 4x - 3$ funksiýalaryň grafikleri şekillendirilen.
2. $y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň şahalary $a > 0$ bolanda (3-*nji surat*) ordinata oky boýunça ýokary ugrukdyrylan, $a < 0$ bolanda (4-*nji surat*) bolsa aşak ugrukdyrylan bolýar.
3. $y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň depesiniň $(x_0; y_0)$ koordinatalary $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ ýa-da $y_0 = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ formulalar bilen hasaplanýar.
4. $y = ax^2 + bx + c$ parabola özüniň depesi arkaly geçýän we ordinata okuna parallel göni çyzyga görä simmetrik bolýar.
5. $y = ax^2 + bx + c$ parabolanyň *Ox* oky bilen kesişme nokatlarynyň abssissalary kwadrat funksiýanyň nollary bolýar. Kwadrat funksiýanyň nollaryny tapmak üçin $ax^2 + bx + c = 0$ deňlemäni çözmeli.
6. Kwadrat funksiýanyň *Oy* oky bilen kesişme nokadynyň ordinatasy funksiýanyň *x* = 0 nokatdaky bahasyndan ybarat.

$y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň grafigini gurmak üçin:

1. Parabolanyň şahalarynyň ugry anyklanýar.
2. Parabolanyň depesiniň koordinatalary $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ formulalaryň kömeginde tapylýar we koordinata tekizliginde bellenýär.
3. Parabolanyň abssissa oky bilen kesişme nokatlary (nollary) tapylýar. Eger funksiýanyň nollary bar bolmasa, onda adatda parabolanyň simmetriýa okuna görä simmetrik bolan iki nokat tapylýar. Meselem: parabolanyň *Oy* oky bilen kesişme nokady (0; *c*) we oňa simmetrik bolan ($2x_0$; *c*).
4. Gurlan nokatlary üznüksizikekiz egri çyzyk bilen utgaşdyrylýar (parabolanyň grafigini takygrak gurmak üçin ýene birnäçe nokady gurmak maksada laýyk bolýar).

Kwadrat funksiýanyň häsiýetleri

1. Kesgitleniş ýaýlasy:

$D(y)=(-\infty;\infty)$.

2. Bahalar toplumy:

a) $a>0$ bolsa, $E(y)=[y_0;\infty)$.

b) $a<0$ bolsa, $E(y)=(-\infty;y_0]$.

3. Iň uly we iň kiçi bahalary:

a) $a>0$ bolsa, $x=x_0$ nokatda iň kiçi bahany alýar we bu baha $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ -ge deň bolýar, iň uly bahany bolsa almaýar.

b) $a<0$ bolsa, $x=x_0$ nokatda iň uly bahany alýar we bu baha $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ -ge deň bolýar, iň kiçi bahany bolsa almaýar.

4. Funksiýa nollary:

a) $D=b^2-4ac>0$ bolsa, funksiýa iki nollara eýe: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ we $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

b) $D=b^2-4ac=0$ bolsa, funksiýa bir (özara deň iki) nola eýe: $x=\dfrac{-b}{2a}$.

c) $D=b^2-4ac<0$ bolsa, funksiýa nollara eýe däl.

5. Monotonlyk aralyklary:

a) $a>0$ bolsa, $y=ax^2+bx+c$ funksiýa $(-\infty;x_0]$-da kemelýän, $[x_0;\infty)$-da artýan bolýar.

b) $a<0$ da $y=ax^2+bx+c$ funksiýa $(-\infty;x_0]$ interwalda artýan, $[x_0;\infty)$ interwalda kemelýän bolýar (bu ýerde x_0 – parabolanyň depesiniň abssissasy).

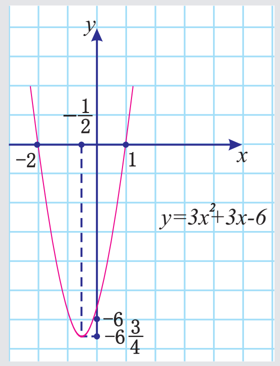
1-nji mysal. $y=3x^2+3x-6$ kwadrat funksiýa berlen bolsun. Onuň häsiýetlerini ýazyň we grafigini gurup görkeziň.

Çözülişi

1. Kesgitleniş ýaýlasy: $D(y)=(-\infty;\infty)$.
2. $a=3>0$ we $x_0=-\dfrac{1}{2}$, $y_0=-6,75$, $E(y)=[-6,75;\infty)$.
3. $x=-\dfrac{1}{2}$ bolanda iň kiçi bahasy $y=-6,75$-e deň, iň uly bahany almaýar.
4. $D=81>0$, diýmek, nollary iki: $x_1=1, x_2=-2$.
5. $x\in(-\infty;-2)\cup(1;\infty)$ da $y>0$ we $x\in(-2;1)$ da $y<0$ bolýar.
6. Funksiýa jübüt hem, täk hem däl.
7. Funksiýa $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$ aralykda kemelýän, $\left[-\dfrac{1}{2};\infty\right)$ aralykda artýan bolýar.

Funksiýanyň grafigi 5-nji suratda görkezilen.

5-nji surat



MYSALLAR

1. Haýsy funksiýalar kwadrat funksiýa bolýar?

a) $y=\frac{1}{3}x+2$ b) $y = -x^2 + 5x + 1$ c) $y=x^2-x^3$ d) $y = x^2$

2. $x=-3$ bolanda, $y=4x^2+7x-5$ funksiýanyň bahasy näçä deň bolýar?

3. x-iň nähili bahalarynda $y=-3x^2+x+1$ funksiýanyň bahasy -1-e deň bolýar?

4. $y=-5x^2+x+\sqrt{7}$ funksiýa x-iň nähili bahalarynda kesgitlenen?

5. -5 sany $y=x^2-5x$ funksiýanyň noly bolarmy?

6. Funksiýanyň grafigini guruň.

a) $y=x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=3x^2$

d) $y=-3x^2-5$ e) $y=x^2-2x$ f) $y=-2x^2+5x$

7. Funksiýanyň nollaryny tapyň.

a) $y=2x^2+5x+2$ b) $y=3x^2+10x+3$ c) $y=-2x^2+x-5$

8. Funksiýanyň bahalar toplumyny tapyň.

a) $y=x^2+2$ b) $y=(x-4)^2-1$ c) $y=(x-5)^2+3$ d) $y=3-4x^2$

e) $y=3x-x^2$ f) $y = 3x^2+2x$ g) $y=2x^2-8x+19$ h) $y=-3x^2-12x+1$

9. x-iň nähili bahalarynda funksiýa iň uly (ýa-da iň kiçi) baha kabul edýändigini anyklaň we ony tapyň.

a) $y=x^2+9x+34$ b) $y=-9x^2-3x+7$ c) $y=-2x^2-5x+1$

10. t-niň nähili bahalarynda $y=2x^2-tx+8$ funksiýanyň nollary bolmaýar?

11. x-iň nähili bahalarynda $y=5x^2-4x-1$ funksiýanyň bahalary otrisatel bolýar?

12. $y=x^2+6x+13$ funksiýa otrisatel bahalary kabul edip bilermi?

13. $y=-x^2-4x-5$ funksiýa položitel bahalary kabul edip bilermi?

14. $y=6x^2+7x+1$ funksiýanyň grafigini guruň we grafik boýunça funksiýanyň bahalary položitel, otrisatel bolýan x-iň bahalaryny tapyň.

15. $y=-x^2+4x-3$ funksiýanyň grafigini guruň. Grafigiň kömeginde funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň.

16. x-iň nähili bahalarynda $y=x^2-22x+27$ we $y=2x^2-20x+3$ funksiýalaryň bahalary deň bolýar?

17. Eger parabolanyň $(-1;\ 6)$ nokat arkaly geçýändigi we onuň depesi $(1;\ 2)$ nokatdadygy mälim bolsa, parabolanyň deňlemesini tapyň.

18. $y=x^2+px+q$ parabolanyň depesi $A(1;\ -2)$ bolsa, p we q koeffisiýentleri tapyň.

19. Eger $y=ax^2+bx+c$ parabolanyň depesi $M(-1;\ -7)$ we parabola ordinatalar oky bilen $N(0;\ -4)$ nokatda kesişse, $a,\ b,\ c$ koeffisiýentleri tapyň.

20. $A(1;4)$, $B(-1;10)$, $C(2;7)$ nokatlardan geçýän $y = ax^2 + bx + c$ funksiýany tapyň.

KWADRAT DEŇSIZLIK

Kesgitleme

Eger deňsizligiň çep böleginde kwadrat üçagza, sag böleginde bolsa nol duran bolsa, şeýle deňsizlige ***kwadrat*** **(bir näbellili ikinji derejeli)** ***deňsizlik*** diýilýär.

$ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ $(a\neq 0)$ deňsizlikler kwadrat deňsizliklerdir, munda a, b, c – berlen sanlar, x bolsa näbelli san.

Deňsizligiň çözüwi diýip näbelliniň şu deňsizligi dogry sanly deňsizlige öwürýän ähli bahalary toplumyna aýdylýar.

Deňsizligi çözmek onuň çözüwini tapmak ýa-da çözüwi ýokdugyny görkezmek diýmekdir.

Kwadrat deňsizligi aşakdaky usullar bilen çözmek mümkin:

1-nji usul. Çyzykly deňsizlikler ulgamyna getirip çözmek

Eger $ax^2+bx+c=0$ kwadrat deňleme iki dürli köke eýe bolsa, onda kwadrat deňsizligi çözmegi birinji derejeli deňsizlikler ulgamyny çözmäge getirmek mümkin.

1-nji mysal. $x^2-5x+6<0$ deňsizligi çözüň.

Çözülişi

Deňsizligiň çep tarapyny köpeldijilere:

$$(x-2)(x-3)<0.$$

1-nji ýagdaý: $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3)$. 2-nji ýagdaý: $\begin{cases} x-2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$.

Jogaby: (2; 3).

2-nji usul. Kwadrat deňsizligi kwadrat funksiýanyň grafiginiň kömeginde çözmek

Kwadrat deňsizlikleri kwadrat funksiýanyň grafigini gurup, grafik boýunça bu funksiýa položitel ýa-da otrisatel bahalary kabul edýän aralyklary tapyp, çözmek mümkin.

Kwadrat deňsizligi grafiki usulda çözmek üçin:

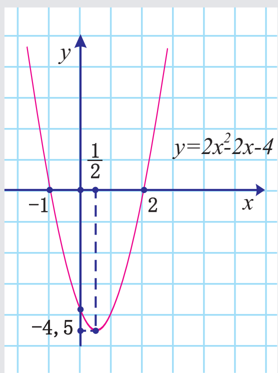
1) parabolanyň şahalarynyň ugry anyklanýar;

2) funksiýanyň nollary (eger olar bar bolsa) tapylýar ýa-da olaryň ýokdugy anyklanýar;

3) $y = ax^2 + bx + c$ funksiýanyň grafiginiň eskizi çyzylýar;

4) grafik boýunça funksiýa položitel ýa-da otrisatel bahalary kabul edýän aralyklar görkezilýär.

1-nji surat



2-nji mysal. $2x^2-2x-4\geq 0$ deňsizligi kwadrat funksiýanyň grafiginiň kömeginde çözüň.

Çözülişi. $y=2x^2-2x-4$ funksiýanyň grafigini gurýarys (1-*nji surat*).

Ilki parabolanyň depesini tapýarys:

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2};\quad y_0=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}-4=-4,5.$$

Soň diskriminanty hasaplap $D=b^2-4ac=4+32=36$, parabolanyň nollaryny tapýarys:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{4}=\frac{2\pm 6}{4},\qquad x_1=-1,\ x_2=2.$$

Jogaby: $(-\infty;-1]\cup[2;\infty)$.

Deňsizligi bu usulda çözende, parabolanyň depesiniň koordinatalaryny tapmak hökman däl, şonuň ýaly-da parabolanyň *Oy* oky bilen kesişme nokatlarynyň grafikde görkezilmegi möhüm däl. Iň möhümi, parabolanyň şahalarynyň ugruny we funksiýanyň nollary bar ýa-da ýokdugyny bilmekdir.

3-nji usul. Kwadrat deňsizligi aralyklar (interwallar) usuly bilen çözmek

Eger käbir $(a;\ b)$ aralykda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigini galamy kagyzdan üzmezden çyzmak mümkin bolsa, bu funksiýa $(a;\ b)$ aralykda ***üznüksiz*** diýilýär.

Meselem, $y=kx+b$, $y=ax^2+bx+c$ funksiýalar öz kesgitleniş ýaýlasynda üznüksiz funksiýalardyr.

Üznüksiz funksiýalaryň bir möhüm häsiýetini subutsyz kabul edýäris.

Eger $f(x)$ funksiýa $(a;\ b)$ aralykda üznüksiz bolsa we nola öwrülmese, onda bu aralykda funksiýanyň bahalary birmeňzeş alamata eýe bolýar, ýagny şu aralykda funksiýa öz alamatyny saklaýar.

Kwadrat funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny onuň x_1 we x_2 nollarynyň kömeginde üç sany $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ \infty)$ aralyklara bölmek mümkin (munda $x_1<x_2$). Bu aralyklaryň hersinde kwadrat funksiýa üznüksiz we nola öwrülmeýär, ýagny öz alamatyny saklaýar. Bir näbellili deňsizlikleri çözmegiň ***aralyklar usuly*** hut şu häsiýete esaslanan.

Kwadrat deňsizlikleri çözende aralyklar usulynyň ulanylyşyna garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. $D>0$. Bu ýagdaýda kwadrat funksiýanyň nollary hasaplanan iki hakyky x_1 we x_2 $(x_1<x_2)$ sanlar bar bolýar. Olar kwadrat funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny: $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$, $(x_2;\ \infty)$ aralyklara bölýär we bu aralyklaryň hersinde funksiýanyň bahalary hemişelik alamata («+» ýa-da «–») eýe bolýar.

Kwadrat funksiýanyň bahalarynyň alnan aralyklardaky aňlatmany dürli usullar bilen tapmak mümkin:

1) $y=ax^2+bx+c$ funksiýanyň bahasynyň $(-\infty;\ x_1)$, $(x_2;\ \infty)$ aralyklaryň hersindäki alamaty a koeffisiýentiň alamaty bilen birmeňzeş; $(x_1;\ x_2)$ aralykdaky alamaty bolsa a koeffisiýentiň alamatyna garşylykly bolýar;

2) funksiýanyň bahalarynyň alamatyny her bir aralykdaky «amatly» nokatda kesgitlemek mümkin;

3) $y = ax^2 + bx + c$ funksiýany $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ görnüşde ýazyp, her bir aralykda çyzykly köpeldijileriň alamatlaryny tapmak arkaly kesgitlemek mümkin.

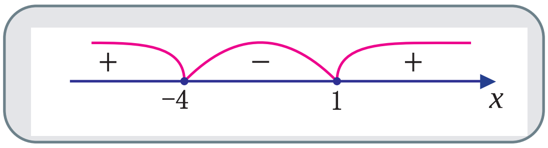
3-nji mysal. $x^2 + 3x - 4 \leq 0$ deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüň.

Çözülişi. Deňsizligiň çep bölegini köpeldijilere:

$(x+4)(x-1) \leq 0.$

Onuň nollary: – 4 we 1.

Tapylan nokatlary sanlar okunda belgileýäris we sanlar okuny aralyklara bölýäris. Her bir aralykda $y = x^2 + 3x - 4$ funksiýanyň alamatyny anyklaýarys:



Berlen mysalyň şertinde funksiýa özüniň položitel bolmadyk bahalaryny haýsy aralykda alýandygy soralany üçin çözüw [–4; 1] bolýar.

Jogaby: [–4; 1].

2-nji ýagdaý. $D = 0$ bolsun. Onda $y = ax^2 + bx + c$ funksiýa diňe bir x_0 nokatda nola öwrülýär. x_0 nokat koordinata okuny iki: $(-\infty; x_0)$ we $(x_0; \infty)$ aralyklara bölýär. Her bir $x \neq x_0$ üçin $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýanyň bahalarynyň alamaty a koeffisiýentiň alamaty bilen birmeňzeş bolýar (2, 3-*nji suratlar*).

3-nji ýagdaý. $D < 0$. Onda $y = ax^2 + bx + c$ kwadrat funksiýa nollara eýe bolmaýar.

Bu ýagdaýda x-iň islendik bahalarynda funksiýa a koeffisiýentiň alamaty bilen gabat gelýän birmeňzeş alamatly bahalary kabul edýär:

1) eger $a > 0$ bolsa, x-iň islendik bahasynda $ax^2 + bx + c > 0$;

2) eger $a < 0$ bolsa, x-iň islendik bahasynda $ax^2 + bx + c < 0$.

Aşakdakylary bilmek we ulanyp bilmek möhüm:

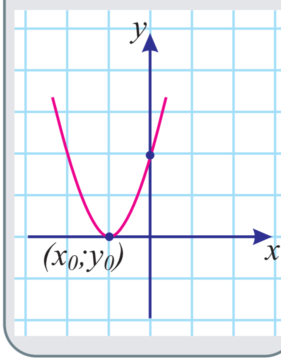
1) $a > 0$ we $D < 0$ bolanda $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ deňsizlikleriň çözüwleri ähli hakyky sanlar toplumyndan ybarat (4-*nji surat*);

2) $a > 0$ we $D < 0$ bolanda $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ deňsizlikleriň çözüwleri boş toplumdan ybarat (4-*nji surat*);

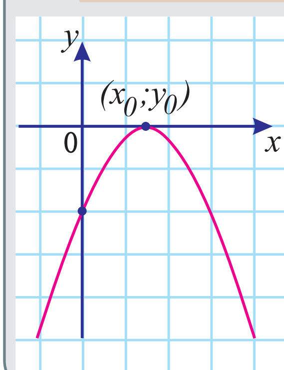
3) $a < 0$ we $D < 0$ bolanda $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ deňsizlikleriň çözüwleri boş toplumdan ybarat (5-*nji surat*);

4) $a < 0$ we $D < 0$ bolanda $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ deňsizlikleriň çözüwleri ähli hakyky sanlar toplumyndan ybarat bolýar (5-*nji surat*).

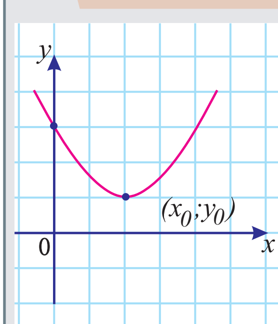
2-nji surat



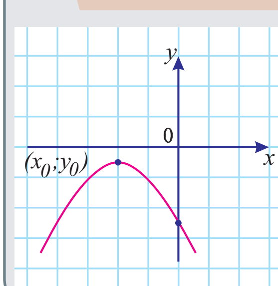
3-nji surat



4-nji surat



5-nji surat



MYSALLAR

1. 0; –2; 3 sanlaryndan haýsylary $-4x^2+5x-5>0$ deňsizligi kanagatlandyrýar?

2. Aşakdaky deňsizlikleri çyzykly deňsizlikler ulgamyna getirip çözüň.

a) $(x+4)(2x-3)>0$ b) $x^2+10x-11<0$

c) $(5x-2)(4x+3)\le 0$ d) $2x^2-5x+2\ge 0$

3. Deňsizlikler deň güýçlümi?

a) $5x^2>2x$ we $5x>2$ b) $3x^3<7x^2$ we $3x<7$ c) $\dfrac{x^2-1}{x}>0$ we $(x^2-x)(x+1)>0$

4. Deňsizlikleri çözüň.

a) $x^2>0$ b) $4x^2\ge 0$ c) $x^2<0$

d) $-x^2\le 0$ e) $x^2+7>0$ f) $5x^2+11\le 0$

g) $-x^2-5>0$ h) $3x^2-2x<0$ i) $-4x^2+11x<0$

j) $x^2-9x+20<0$ k) $x^2-10x+25>0$ l) $-x^2+6x-8>0$

m) $3x^2-x+2\ge 0$ n) $-9x^2+24x+20>0$ o) $-7\cdot(3-x)^2>0$

5. Çözüwi berlen aralyklardan ybarat bolan käbir kwadrat deňsizlik düzüň.

a) $(-\infty;-3)\cup(6;\infty)$ b) $(-\infty;\ \infty)$

6. Abssissa okunda $x^2+9x\le -14$ deňsizligiň çözüwi bolan kesimiň uzynlygyny tapyň.

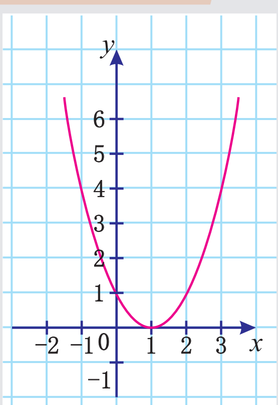
7. Näçe bitin san $2x^2+7x-15<0$ deňsizligi kanagatlandyrýar?

8. Deňsizligi aralyklar usuly bilen çözüň.

a) $x^2+5x-6>0$ b) $-x^2+x+2<0$ c) $x^2+3x+7>0$ d) $x^2+3x+7\le 0$

e) $-2x^2+5x+3>0$ f) $6x^2-x-2<0$ g) $2x^2+5x+9\le 0$ h) $49x^2-28x+4\le 0$

6-njy surat



9. Deňsizlikleri çözüň.

a) $8x^2+3x-5\ge 0$ b) $5x^2-12x+8\le 0$

c) $49x^2-70x+25>0$ d) $(2x^2+3x+4)(x+3)\ge 0$

e) $(7+6x-x^2)(3x-5)<0$

10. Deňsizligi kwadrat funksiýanyň grafiginiň kömeginde çözüň.

a) $2x^2+5x-3>0$ b) $4x^2-9x-90>0$

11. 6-njy suratda $y = ax^2+bx+c$ funksiýanyň grafigi şekillendirilen. Aşakdaky deňsizlikleriň çözüwini tapyň.

a) $ax^2+bx+c>0$ b) $ax^2+bx+c\le 0$

12. Deňsizligiň ähli bitin çözüwleriniň ýygyndysyny tapyň.

a) $2x^2-9x+4<0$ b) $\frac{x-1}{4}+\frac{3-2x}{2}>\frac{3x+x^2}{8}$

c) $(5x+7)(x-2)\le 21x^2-11x+3$

13. $3x(x-2)<2x(x+4)-(x-16)\le 0$ deňsizligiň $[0;9]$ kesime degişli bolan näçe bitin çözüwi bar?

14. $y=-x^2+4x-3$ funksiýanyň grafiginiň kömeginde aşakdaky deňsizlikleriň çözüwini tapyň.

a) $-x^2+4x-3>0$ b) $-x^2+4x-3\ge 0$ c) $-x^2+4x-3<0$ d) $-x^2+4x-3\le 0$

15. a-nyň nähili bahalarynda $ax^2+2ax+4=0$ deňleme köklere eýe bolmaýar?

16. Deňsizligi çözüň: $(x-1)^2(x^2-2)<(x-1)^2(6-2x)$

17. $f(x)=(x-1)^4(x+1)^3x^2$ funksiýa berlen.

a) $f(x)<0$ b) $f(x)\le 0$ c) $f(x)>0$ d) $f(x)\ge 0$

bolýan x-iň ähli bahalaryny tapyň.

18. Deňsizlikleri çözüň:

a) $x^2-2(b-c)x+a^2>0$, munda a, b, c-ler üçburçlugyň taraplary;

b) $x^2+(a^2+b^2-c^2)x+a^2b^2>0$, munda a, b, c-ler üçburçlugyň taraplary.

19. Eger $a^2+12b<0$ bolsa, $3x^2-b\le ax$-i çözüň.

20. Eger $b>0,05a^2$ bolsa, $5x^2-ax+b>0$-y çözüň.

21. Eger $b^2\le 4ac$ we $a+c>b$ bolsa, $ax^2+bx+c\le 0$ ni çözüň.

22. c-niň nähili bahalarynda $y=cx^2+x+c$ we $y=cx+1-c$ funksiýalaryň grafikleri umumy nokada eýe bolmaýar?

23. p-niň nähili bahalarynda $y=px^2-24x+1$ we $y=12x^2-2px-1$ funksiýalaryň grafigi kesişmeýär?

24. a-nyň nähili bahalarynda $x^2+3x+a=0$ deňlemäniň kökleri $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+1>0$ şerti kanagatlandyrýar?

25. b-niň nähili bahalarynda $x^2-2bx+b+6=0$ deňlemäniň:

a) kökleri otrisatel; b) kökleri položitel; c) kökleri dürli alamatly bolýar?

26. a-nyň nähili bahalarynda ähli hakyky sanlar deňsizligi kanagatlandyrýar?

a) $x^2-(a+2)x+8a+1>0$ b) $\frac{1}{24}x^2+ax-a+1>0$

27. b-niň nähili bahalarynda deňsizlik çözüwe eýe däl?

a) $x^2+2bx+1<0$ b) $bx^2+4bx+5<0$ c) $bx^2+(2b+3)x+b-1\ge 0$

TRIGONOMETRIK TOŽDESTWOLAR

Esasy trigonometrik toždestwolar

1. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ 2. $tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}, \quad cos\alpha \neq 0$ 3. $ctg\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha}, \quad sin\alpha \neq 0$

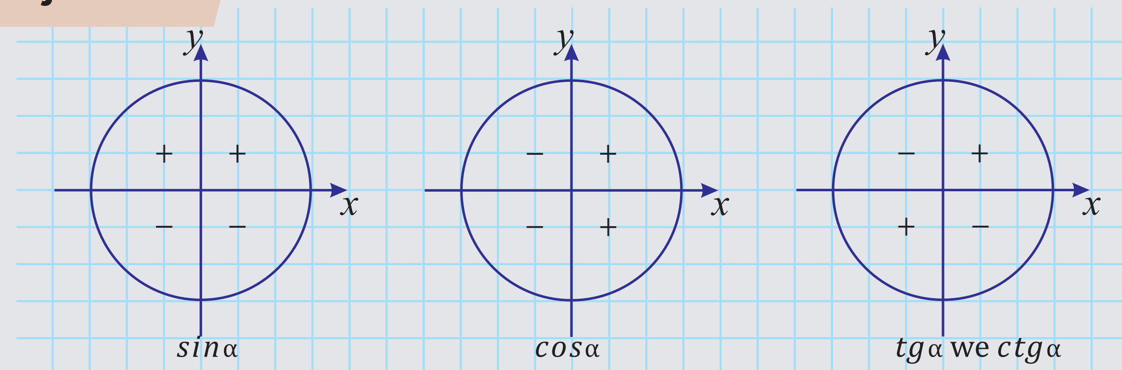
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$ 5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}, \quad cos\alpha \neq 0$ 6. $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}, \quad sin\alpha \neq 0$

Käbir burçlaryň sinusynyň, kosinusynyň, tangensiniň we kotangensiniň bahalary

α	$0^0\,(0)$	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90°\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180°(\pi)$
$sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Bolmaýar	0
$ctg\alpha$	Bolmaýar	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Bolmaýar

Sinusyň, kosinusyň, tangensiň we kotangensiň alamatlary

1-nji surat



α we (–α) burçlaryň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi

1. $sin(-\alpha) = -sin\alpha$ 2. $cos(-\alpha) = cos\alpha$ 3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ 4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Getirme formulalar

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$
$cos\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-cos\,\alpha$	$-sin\,\alpha$	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$cos\,\alpha$
$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$tg\,\alpha$
$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$-tg\,\alpha$	$-ctg\,\alpha$	$ctg\,\alpha$

Getirme formulalardaky şu kanunalaýyklyga üns beriň: eger α -ny I çärýege degişli diýip alsak, $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ burçlar üçin getirme formulalarda funksiýanyň ady çalyşmaýar, $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ burçlar üçin bolsa sinus kosinusa, kosinus sinusa, tangens kotangense, kotangens tangense çalyşýar.

Meselem, $sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$-a garasak, $\frac{\pi}{2}$-ler sanyny aňladýan n – natural san jübüt bolsa, funksiýanyň ady çalyşmaýar; n – täk bolsa, funksiýanyň ady çalyşýar. Aňlatmany kesgitlemek bolsa $n\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ burç haýsy çärýege degişlidigine we bu çärýekde sinusyň alamatynyň nähilidigine garap anyklanýar.

1-nji mysal. Hasaplaň.

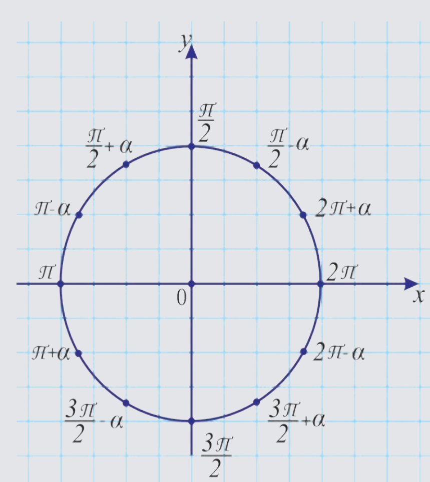
a) $sin855^\circ = sin(9\cdot90^\circ+45^\circ) = cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $cos2025^\circ = cos(22\cdot90^\circ+45^\circ) = -\,cos45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $tg1680^\circ = tg(18\cdot90^\circ+60^\circ) = tg60^\circ = \sqrt{3}$

d) $ctg1200^\circ = ctg(13\cdot90^\circ+30^\circ) = -tg30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2-nji surat



Goşmak formulalary

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$
7. $ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$
8. $ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Ikeldilen burçuň formulalary

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Jemi we tapawudyny köpeltmek hasylyna çalşyrma formulalary

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
5. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
6. $tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$
7. $ctg\alpha+ctg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$
8. $ctg\alpha-ctg\beta=\dfrac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

Köpeltmek hasylyny jeme çalşyrma formulalary

1. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$
3. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

Dereje peseltmek formulalary

1. $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
2. $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
3. $tg^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
4. $ctg^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

Ýarym burçuň formulalary

1. $cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{2}$

2. $sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{2}$

3. $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}$

4. $ctg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\alpha}{1-cos\alpha}$

5. $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}$

6. $ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}=\frac{1+cos\alpha}{sin\alpha}$

$sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ -lary $tg\frac{\alpha}{2}$ arkaly aňlatmagyň formulalary

1. $sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

2. $cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

3. $tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$

MYSALLAR

1. Eger $ctg\alpha=-\frac{3}{4}$ we $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $cos\alpha$-ny tapyň.

2. Eger $tg\alpha=-\sqrt{5}$ we $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ bolsa, $sin\alpha$-ny tapyň.

3. Eger $tg\alpha=\frac{3}{2}$ bolsa, $\frac{2sin\alpha+5cos\alpha}{3sin\alpha-4cos\alpha}$ -ny tapyň.

4. Ýönekeýleşdiriň.

a) $\frac{2sin^2\alpha-1}{2cos^2\alpha-1}$ b) $\frac{ctg\left(2\,sin^2\alpha+tg\alpha\right)}{\left(sin\alpha+cos\alpha\right)^2}$ c) $\frac{1-cos^2\alpha}{sin^4\alpha}-ctg^2\alpha$ d) $2-\frac{1-sin^4\alpha}{cos^2\alpha}$

5. Hasaplaň.

a) $4cos150°-sin240°-3tg210°$ b) $2cos135°+tg60°-ctg240°$

c) $sin300°-3cos135°+2cos210°$ d) $tg150°-ctg315°+5sin135°$

6. Hasaplaň.

a) $tg\frac{7\pi}{6}-2tg\frac{5\pi}{3}+3tg\frac{11\pi}{6}$ b) $2cos\frac{4\pi}{3}+sin\frac{5\pi}{4}-cos\frac{4\pi}{3}$

c) $20ctg\frac{3\pi}{2}-sin\frac{2\pi}{3}+cos\frac{4\pi}{3}$ d) $ctg\frac{7\pi}{4}+2ctg\frac{4\pi}{3}-2cos\frac{5\pi}{6}$

7. Ýönekeýleşdiriň.

a) $\frac{1-tg\,(360°-\alpha)tg\alpha}{tg\,(270°-\alpha)+tg\alpha}$ b) $\frac{cos\,(90°+\alpha)+sin\,(90°-\alpha)}{cos\,(270°-\alpha)+cos\,(180°+\alpha)}$

8. Ýönekeýleşdiriň.

a) $\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\beta}{2}\right)-ctg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\beta}{2}\right)}$ b) $\dfrac{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)}{cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2a\right)+sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2a\right)}$

9. Toždestwony subut ediň.

a) $\dfrac{sin(\pi-2\alpha)-2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{sin^2(\pi+\alpha)-cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=2ctg\alpha$ b) $\dfrac{sin^4\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-cos^2(2\alpha+\pi)}{1-3cos(2\alpha+\pi)}=\dfrac{sin^2\alpha}{2}$

10. Hasaplaň.

a) $sin(-43°)cos88°+cos(-43°)sin88°$ b) $cos11°cos19°-sin19°sin11°$

11. Hasaplaň.

a) $sin\dfrac{2\pi}{7}cos\dfrac{3\pi}{14}+cos\dfrac{2\pi}{7}sin\dfrac{3\pi}{14}$ b) $\dfrac{1+tg33°tg78°}{tg78°-tg33°}$

12. Hasaplaň.

a) $cos\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)cos\dfrac{7\pi}{9}-sin\dfrac{7\pi}{9}sin\left(-\dfrac{19\pi}{36}\right)$ b) $\dfrac{1-tg\dfrac{\pi}{11}tg\dfrac{5\pi}{66}}{tg\dfrac{5\pi}{66}+tg\dfrac{\pi}{11}}$

13. Ýönekeýleşdiriň.

a) $cos(\alpha-\beta)-sin\alpha sin\beta$ b) $sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)$

c) $sin4\alpha\, cos\alpha-cos4\alpha\, sin\alpha$ d) $cos\alpha\, cos2\alpha+sin2\alpha\, sin\alpha$

e) $\dfrac{1}{2}cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha$ f) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}cos\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha$

14. a) $cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ we $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ bolsa, $cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ -ni tapyň.

b) $cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ we $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$ bolsa, $sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$ -ni tapyň.

15. Hasaplaň.

a) $\dfrac{6sin10°cos10°}{sin20°}$ b) $\dfrac{sin88°}{sin22°cos22°cos44°}$ c) $sin\dfrac{\pi}{12}\left(2sin^2\dfrac{\pi}{24}-1\right)$

16. a) Eger $cos\alpha=0,4$ bolsa, $cos2\alpha$ -ny tapyň.

b) Eger $sin\alpha=-0,7$ bolsa, $cos2\alpha$ -ny tapyň.

17. a) Eger $cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ we $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ bolsa, $sin2\alpha$-ny tapyň.

b) Eger $sin\alpha = \frac{1}{5}$ we $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ bolsa, $sin2\alpha$-ny tapyň.

18. Ýönekeýleşdiriň:

a) $2\cos^2\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha - 1)$ b) $\frac{sin2\alpha}{1 + cos2\alpha}$

19. Eger $tg\alpha = -2$ bolsa, $sin2\alpha$, $cos2\alpha$, $tg2\alpha$, $ctg2\alpha$-lary tapyň.

20. a) $cos123° tg231° sin312°$ aňlatmanyň alamatyny anyklaň.

b) $sin\frac{1}{3}cos\frac{7}{8}tg4ctg5{,}7$ aňlatmanyň alamatyny anyklaň.

21. Sanlary deňeşdiriň: $sin200°$ we $sin(-200°)$.

22. $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ we $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ deňlikleriň ikisi-de bir wagtda ýerlikli bolmagy mümkinmi?

23. Toždestwony subut ediň.

a) $\left(\sin\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(tg^2\alpha + ctg^2\alpha\right) = 7$ b) $\frac{tg3\alpha}{tg^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - ctg^2 3\alpha}{ctg3\alpha} = 1$

24. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň.

a) $\frac{1 - ctg^2(-\alpha)}{\cos\alpha + \sin(-\alpha)} \cdot \sin(-\alpha) + ctg(-\alpha)$ b) $\frac{\sin(\alpha - \beta) - \sin(\beta - \alpha)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha)}$

25. Toždestwony subut ediň:

a) $sin\alpha + cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $2sin2\alpha cos5\alpha = sin7\alpha - sin3\alpha$.

26. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; $sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $\cos(\alpha + \beta)$ni tapyň.

27. Toždestwony subut ediň: $\frac{tg\alpha - tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$.

28. Hasaplaň: $\sin(-300^0)\cos(-135^0)tg(-210^0)ctg(-120^0)$.

29. Eger $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{3}$ bolsa, $sin\alpha cos\alpha$-ny tapyň.

30. Eger $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$ we $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ bolsa, $sin\alpha + cos\alpha$-ny tapyň.

ARIFMETIK WE GEOMETRIK PROGRESSIÝA

Arifmetik progressiýa

1. $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$;
2. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in N$;
3. $a_n = a_k + (n-k)d$, $n, k \in N$, $n > k$;
4. $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$;
5. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $n, k \in N$, $n > k$;
6. $\{a_n\}$ arifmetik progressiýanyň agzalary üçin $a_n + a_m = a_k + a_l$ deňlik ýerlikli, munda $n + m = k + l$;
7. $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$;
8. $S_n = \dfrac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2}$.

Geometrik progressiýa

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $n \in N$;
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in N$;
3. $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$, $n, k \in N$ we $n > k$;
4. $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, $n, k \in N$, $n > k$;
5. $\{b_n\}$ arifmetik progressiýanyň agzalary üçin $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ deňlik ýerlikli, munda $n + m = k + l$;
6. $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$, eger $q = 1$ bolsa, $S_n = b_1 \cdot n$;
7. $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$;
8. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýanyň (ähli agzalary) ýygyndysy:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1, q \neq 0.$$

MYSALLAR

1. Eger $a_1 = -3$ we $d = 6$ bolsa, arifmetik progressiýanyň segseninji agzasyny tapyň.

2. 2, 6, 10, 14, 18, ... yzygiderlik arifmetik progressiýany düzýär. Onuň n-agzasynyň formulasyny ýazyň.

3. Arifmetik progressiýada:

a) $a_7 = -5$, $a_{32} = 70$ bolsa, a_1 we d-ni;

b) $a_5 = 2$, $a_{40} = 142$ bolsa, a_7-ni;

c) $a_{14} = 5$, $a_{12} = 1$ bolsa, a_{13} -;

d) $a_{25} - a_{20} = 10$, $a_{16} = 13$ bolsa, a_{10}-y tapyň.

4. Eger geometrik progressiýada $b_2 = 4$ we $b_3 = 6$ bolsa, b_7-ni tapyň.

5. Eger geometrik progressiýada $b_1 = 3$ we $q = -2$ bolsa, b_8-i tapyň.

6. Geometrik progressiýada:

a) $b_1 = 18$, $q = \frac{1}{9}$ bolsa, b_2-ni;

b) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ bolsa, b_7-ni;

c) $b_4 = 8$, $b_8 = 128$ bolsa, $b_1$we q-ny;

d) $b_9 = -1$, $q = -1$ bolsa, $b_1$we b_{17}-ni tapyň.

7. Geometrik progressiýada $b_1 = 3$, $q = 2$ bolsa, S_6-ny tapyň.

8. Geometrik progressiýada $b_2 = 6$, $q = 3$ bolsa, S_8 -i tapyň.

9. Geometrik progressiýada $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$ bolsa, ilkinji 10 agzasynyň jemini tapyň.

10. Geometrik progressiýanyň birinji agzasy 5, altynjy agzasy 1215-e deň. Şu progressiýanyň maýdalawjysyny tapyň.

11. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýada $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$ bolsa, onuň jemini tapyň.

12. 12, 4, $\frac{4}{3}$, ... çäksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemini tapyň.

13. Geometrik progressiýada:

a) $b_1 = 24$, $b_2 = 36$ bolsa, q ni;

b) $b_5 = 36$, $b_7 = 144$ bolsa, b_6 ni;

c) $b_6 = \frac{1}{486}$, $b_8 = \frac{1}{4374}$ bolsa, b_7-ni tapyň.

14. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýanyň jemi 150-ä deň. Eger $q = \frac{1}{3}$ bolsa, b_1-i tapyň.

15. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýada $b_1 = \frac{1}{4}$, $S = 16$ bolsa, q-ny tapyň.

16. Geometrik progressiýada:

a) $b_1 = 3$, $q = 5$ bolsa, S_4-i;

b) $b_2 = 8$, $b_3 = 4$ bolsa, S_6-ny;

c) $b_1 = -2$, $b_6 = -486$ bolsa, S_6 -ny tapyň.

17. Geometrik progressiýada $q=-\frac{1}{2}$, $S_8=\frac{85}{64}$ bolsa, b_1-ni tapyň.

18. Arifmetik progressiýanyň n-agzasynyň formulasyny ýazyň.

a) $a_1=5,\ a_2=-5$ b) $a_1=-3,\ a_6=12$ c) $a_1=6,\ a_{10}=33$

19. Arifmetik progressiýanyň dördünji we altynjy agzalary degişlilikde 16 we 19-a deň bolsa, birinji agzasyny tapyň.

20. Ilkinji 25 natural sanyň jemini tapyň.

21. (a_n) arifmetik progressiýada $a_3+a_7=5$ we $a_4=1$ bolsa, onuň ilkinji on agzasynyň jemini tapyň.

22. Arifmetik progressiýada $a_1=-20{,}7$, $d=1{,}8$ bolsa, näçenji agzasyndan başlap progressiýanyň ähli agzalary položitel bolýar?

23. Arifmetik progressiýada $a_{12}+a_{15}=20$ bolsa, S_{26}-ny tapyň.

24. Arifmetik progressiýada $a_2+a_6=44$, $a_5-a_1=20$ bolsa, a_{100}-i tapyň.

25. Arifmetik progressiýanyň üçünji we dokuzynjy agzalarynyň jemi 8-e deň. Şu progressiýanyň ilkinji on bir agzasynyň jemini tapyň.

26. Arifmetik progressiýada $S_n=3n^2+n$ bolsa, a_1 we d-ni tapyň.

27. Artýan geometrik progressiýada $b_{12}=4\cdot b_{10}$ we $b_3=6$ bolsa, b_7-ni tapyň.

28. Geometrik progressiýada $b_5=\sqrt[3]{2}$. Şu progressiýa ilkinji dokuz agzasynyň köpeltmek hasylyny tapyň.

29. Geometrik progressiýada $S_4=10\frac{5}{8}$, $S_5=42\frac{5}{8}$, $b_1=\frac{1}{8}$ bolsa, q-ny tapyň.

30. Geometrik progressiýada $b_1=1$ we $b_3+b_5=90$ bolsa, q-ny tapyň.

31. Üç sany x, y we 12 sany kemelýän geometrik progressiýany düzýär. Eger 12-niň ýerine 9 goýulsa, arifmetik progressiýa emele gelýär. $x+y$-i tapyň.

32. Geometrik progressiýada $b_2\cdot b_4\cdot b_6=216$ we $b_3=12$. Şu progressiýanyň ilkinji alty agzasynyň jemini tapyň.

33. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýanyň täk orunlarda duran hemme agzalarynyň jemi 36-a deň. Jübüt orunlarda duran hemme agzalarynyň jemi 12-ä deň. Şu progressiýayň maýdalawjysyny we ikinji agzasyny tapyň.

34. Çäksiz kemelýän geometrik progressiýanyň birinji we dördünji agzalarynyň jemi 54-e, ikinji we üçünji agzalarynyň jemi 36-a deň. Şu progressiýanyň jemini tapyň.

35. Arifmetik progressiýada:

a) $a_1=-3$, $a_3\cdot a_7=24$ bolsa, S_{12}-ni; b) $a_2+a_9=20$ bolsa, S_{10}-y;

c) $a_3+a_6=19$ bolsa, S_8-i; d) $S_4=-28$, $S_6=58$ bolsa, S_{16}-ny tapyň.

I BAP. FUNKSIÝALAR

- FUNKSIÝA. FUNKSIÝANYŇ BERLIŞ USULLARY
- FUNKSIÝANYŇ KESGITLENIŞ ÝAÝLASY WE BAHALAR TOPLUMY
- FUNKSIÝANYŇ ÜSTÜNDE ARIFMETIK AMALLAR
- ÇYLŞYRYMLY, TERS, DÖWÜRLEÝIN FUNKSIÝALAR
- FUNKSIÝANYŇ HÄSIÝETLERI
- FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINIŇ ÜSTÜNDE ÝÖNEKEÝ ÇALŞYRMALAR
- ÇYZYKLY WE KWADRATIK MODELIRLEMELER
- TASLAMA IŞI

FUNKSIÝA. FUNKSIÝANYŇ BERLIŞ USULLARY

Funksiýa

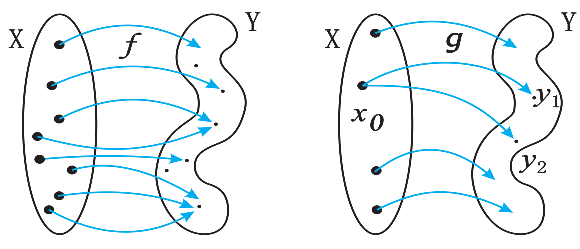
Tebigat, önümçilik, ykdysadyýet we başga ugurlarda käbir mukdarlaryň arasyndaky baglanyşyklary öwrenmekde ***funksiýa*** düşünjesi möhüm ähmiýete eýe.

X we Y sanly toplumlar bolsun. Her bir $x \in X$ nokada ýeke-täk $y \in Y$ nokady laýyk goýýan kanunalaýyklyga ***funksiýa*** diýilýär.

Funksiýany kesgitleýän kanunalaýyklyklar f, g, ... harplary arkaly belgilenýär. $y = f(x)$ ýazuw f kanunalaýyklyk $x \in X$ nokada $y \in Y$ nokady laýyk gelýändigini aňladýar we munda X toplumyň nokatlaryny Y toplumyň nokatlaryna laýyk gelýän f funksiýa berlen diýilýär. Munda, x ***erkli üýtgeýji*** ýa-da ***argument***, y bolsa ***erksiz üýtgeýji*** ýa-da ***funksiýa*** diýip aýdylýar. f funksiýa adatda $y = f(x)$ ýa-da $f(x)$ görnüşlerde aňladylýar.

Aşakda käbir funksiýalar getirilen:

1-nji surat



f kanunalaýyklyk funksiýa bolýar: X-yň her bir x elementine Y-den ýeke-täk y element laýyk gelen.

g kanunalaýyklyk funksiýa däl: $x_0 \in X$ elemente iki $y_1, y_2 \in Y$ elementler laýyk gelen.

Funksiýa bolýan (f) we funksiýa bolmaýan (g) kanunalaýyklyklar

1) *çyzykly funksiýa*: $y = kx + b$

2) *kwadrat funksiýa*: $y = ax^2 + bx + c$

3) *derejeli funksiýa*: $y = x^n$

4) *drob derejeli funksiýa*: $y = \sqrt[n]{x^m}$

5) *ters proporsionallyk funksiýasy*: $y = \frac{k}{x}$ (bu ýerde $k \neq 0$)

6) *modully funksiýa*: $y = |x|$

Funksiýanyň berliş usullary

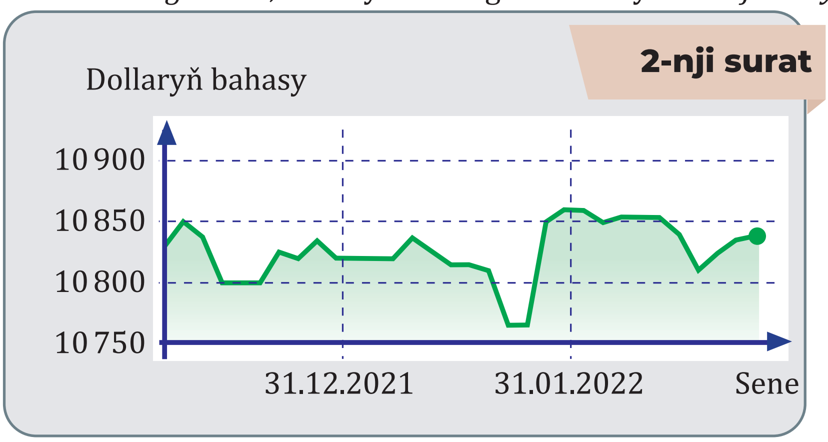
Funksiýalar aşakdaky usullarda berilmegi mümkin:

1. Funksiýanyň berlişiniň ***analitik usuly.*** Eger funksiýa bir ýa-da birnäçe formula ýa-da deňlemeler bilen berlen bolsa, onda bu funksiýa analitik usulda berlen diýilýär. Meselem, maddy nokadyň hereket deňlemesi $s = 20 - 5t + \frac{1}{4}t^2$ analitik usulda berlen funksiýa mysal bolup bilýär.

2. Funksiýanyň berlişiniň ***jedwel usuly*** adatda amaly tejribelerde üýtgeýjileriň arasyndaky özara baglylygy aňladýar. Meselem, temperaturanyň günlük üýtgeýşi jedwel usulynda berilmegi mümkin. Bu ýerde günler erkli üýtgeýji (ýagny argument), temperatura bolsa erksiz üýtgeýji (ýagny funksiýa) bolýar. Daşkent şäherinde 2022-nji ýylyň 20–27-nji ýanwar günleri howanyň temperaturasynyň hepdelik üýtgeýşi aşakdaky jedwelde getirilen:

Sene		20.01	21.01	22.01	23.01	24.01	26.01	27.01
Temperatura, t °C	Gündizine	13	9	3	4	6	7	8
	Gijesine	–2	–3	–1	–2	–3	–4	–3

3. Käbir amaly işlerde üýtgeýjileriň baglylygy ***grafiki usulda*** berilýär. Meselem, dollaryň soma görä bahasynyň aýlyk, ýyllyk üýtgeýşi grafiki usulda aňladylmagy mümkin. Bu ýerde seneler *argument*, dollaryň soma görä bahasy bolsa *funksiýa* bolýar.



2-nji surat

4. Funksiýa ***tekst usulynda*** berilmegi-de mümkin. Meselem: 4 sany agzasy bar maşgala palaw bişirmek üçin 1 kg tüwi sarplaýar. Öýe 2 myhman gelende palaw bişirmek üçin näçe kg tüwi gerek bolar? Bu meselede palawdaky tüwiniň mukdary öýdäki adamlaryň sanyna bagly bolup, adamlar sany argument, tüwiniň mukdary funksiýa bolýar.

MYSALLAR

1. Tekst bilen berlen funksiýanyň analitik görnüşini ýazyň. Meselem, «argumentiň kwadratyndan 5-i aýryň» diýilmegi aşakdaky funksiýany berýär: $f(x) = x^2 - 5$.

a) argumenti 3-e köpeldip, ondan 5-i aýryň.
b) argumentiň kwadratyna 2-ni goşuň.
c) argumentden 1-i aýryp, soň kwadrata göteriň.
d) argumente 1-i goşuň, soň kwadrat kököni tapyp, 6-a bölüň.

2. Tekst usulynda berlen funksiýanyň ***analitik***, ***jedwel*** we ***grafik*** görnüşini tapyň:

a) $f(x)$-i tapmak üçin argumenti 3-e bölüň, soň $\frac{2}{3}$-ni goşuň.

b) $g(x)$-i tapmak üçin argumentden 4-i aýryň, soň $\frac{3}{4}$-e köpeldiň.

c) $T(x)$ funksiýa x soma satyn alnan önümiň salgyt mukdary funksiýasy bolsun, salgyt mukdaryny tapmak üçin önümiň nyrhynyň 8%-ini hasaplaň.

d) $V(d)$ funksiýa d diametrli şaryň göwrümini tapmak funksiýasy bolsun, göwrümi tapmak üçin diametriň 3-nji derejesini π-ge köpeldip 6-a bölüň.

3. Berlen funksiýalar üçin bahalar jedwelini dolduryň:

a) $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
–1	
0	
1	
2	
3	

b) $g(x) = |2x+3|$.

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

4. Funksiýanyň berlen argumentdäki bahalaryny tapyň.

a) $f(x) = x^2-6$ $\quad f(-3),\ f(3),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) $f(x) = x^3+2x$ $\quad f(-2),\ f(-1),\ f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $f(x)=\frac{|x|}{x}$ $\quad f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $f(x)=\frac{1-2x}{3}$ $\quad f(2), f(-2), f\left(\frac{1}{2}\right), f(a), f(-a), f(a-1)$

e) $h(x)=\frac{x^2+4}{5}$ $\quad h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a-2), h(\sqrt{x})$

f) $f(x)=x^2+2x$ $\quad f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\frac{1}{a}\right)$

g) $h(t)=t+\frac{1}{t}$ $\quad h(-1),\ h(2),\ h\left(\frac{1}{2}\right),\ h(x-1),\ h\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Berlen deňliklerden haýsylary x üýtgeýjili funksiýa bolup biler?

a) $3x-5y=7$ b) $3x^2-y=5$ c) $x=y^2$ d) $x^2+(y-1)^2=4$

e) $2x-4y^2=3$ f) $2x^2-4y^2=3$ g) $2xy-5y^2=4$ h) $\sqrt{y}-x=5$

i) $2|x|+y=0$ j) $2x+|y|=0$ k) $x=y^3$ l) $x=y^4$

6. Aşakdaky jedwellerden haýsysy x üýtgeýjili funksiýa bolup biler?

a)

x	y
–5	–12
9	2
11	2

b)

x	y
–10	–9
$3\frac{1}{2}$	–6
–10	–1

c)

x	y
2	0
–5	–3
–17	7
6	17
11	7

d)

x	y
–4	$3\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
$9\frac{3}{5}$	–10

FUNKSIÝANYŇ KESGITLENIŞ ÝAÝLASY WE BAHALAR TOPLUMY

Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy we bahalar toplumy

$y = f(x)$ funksiýada x argument kabul etmegi mümkin bolan sanlar toplumy berlen funksiýanyň ***kesgitleniş ýaýlasy***, y funksiýa kabul etmegi mümkin bolan sanlar toplumyna berlen funksiýanyň ***bahalar toplumy*** diýilýär we olar degişlilikde $D(f)$ we $E(f)$ ýa-da $D(y)$ we $E(y)$ ýaly belgilenýär.

Käbir funksiýalar üçin kesgitleniş ýaýlasy we bahalar toplumy jedweli:

Funksiýa	Kesgitleniş ýaýlasy	Bahalar toplumy
1) $y = kx + b$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
2) $y = x^2$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
3) $y = \lvert x \rvert$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
4) $y = \frac{k}{x}$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
5) $y = \sqrt{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
6) $y = \sqrt[2n]{x}$	$D(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = [0;\ +\infty)$
7) $y = \sqrt[3]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$
8) $y = \sqrt[2n+1]{x}$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty;\ +\infty)$

x argumentiň $y = f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolmadyk islendik bahasynda $y = f(x)$ funksiýa kesgitlenen bolýar, başgaça aýdanda, $f(x)$ funksiýa mana eýe bolmaýar. Meselem, $y = \sqrt{x}$ funksiýa $x = -1$ bolanda; $y = \frac{k}{x}$ funksiýa $x = 0$ bolanda mana eýe däl.

1-nji mysal. $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

Çözülişi. Rasional aňlatmanyň maýdalawjysy nola deň bolmagy mümkin däl, ýagny:

$$x^2 - x \neq 0$$
$$x(x-1) \neq 0$$
$$x \neq 0 \text{ we } x \neq 1.$$

Diýmek, x argument 0 we 1 bahalary kabul edip bilmeýär. Şonuň üçin, berlen funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Jogaby: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

2-nji mysal. $y=\sqrt{9-x^2}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

Çözülişi. Kwadrat kök aşagyndaky aňlatma otrisatel bolup bilmeýär. Ýagny:

$$9-x^2 \geq 0$$

$$(3-x)(3+x) \geq 0$$

$$-3 \leq x \leq 3.$$

Diýmek, x argument diňe [–3; 3] kesimden baha kabul edip bilýär. Şonuň üçin, funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $D(y)=[-3;3]$.

Jogaby: $D(y)=[-3;3]$.

3-nji mysal. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

Çözülişi. Berlen funksiýanyň maýdalawjysynda kwadrat kök aşagyndaky aňlatma berlen, bu aňlatma nola deň bolmagy mümkin däl, hem-de otrisatel bolmaly däl. Şonuň üçin,

$$x+1>0$$

$$x>-1.$$

Diýmek, funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $D(y)=(-1;\infty)$.

Jogaby: $D(y)=(-1;\infty)$.

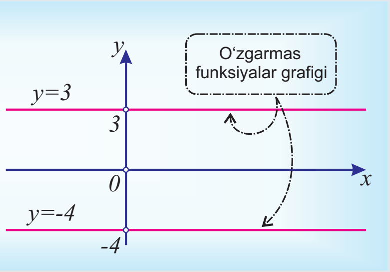
Funksiýanyň grafigi

$y=f(x)$ funksiýa özüniň $D(f)$ kesgitleniş ýaýlasyndan alnan her bir x elemente $E(f)$ bahalar toplumyndan ýeke-täk $f(x)$ bahasy laýyk gelýär. Netijede her bir $x \in D(f)$ element Oxy koordinatalar tekizliginde ýeke-täk $(x, f(x))$ nokady kesgitleýär.

Oxy koordinatalar tekizliginde alnan ähli $(x, f(x))$ nokatlar toplumyna $y=f(x)$ ***funksiýanyň grafigi*** diýilýär.

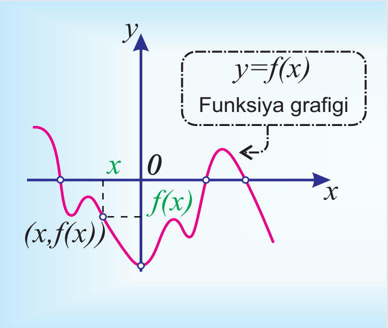
1-, 2-nji suratlarda funksiýanyň grafikleri şekillendirilen.

1-nji surat



Funksiýanyň grafigi

2-nji surat



Funksiýanyň grafigi

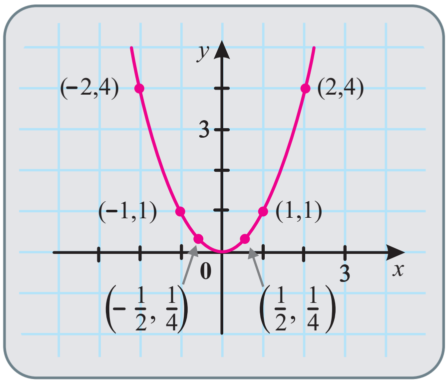
4-nji mysal. Aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini guruň.

a) $y=x^2$ b) $y=x^3$ d) $y=\sqrt{x}$

Çözülişi. Bu funksiýalaryň grafiklerini gurmak üçin ilki käbir bahalar üçin jedwelini düzýäris. Soň şu nokatlary koordinata tekizliginde belgileýäris we olary egri çyzyk bilen utgaşdyrýarys.

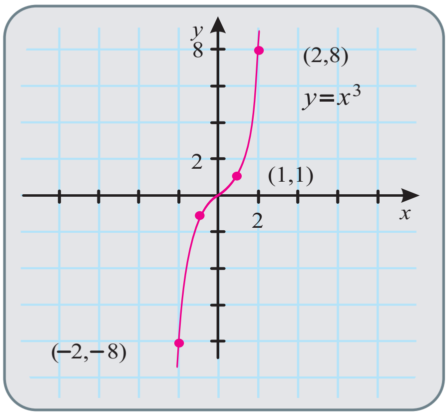
a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9



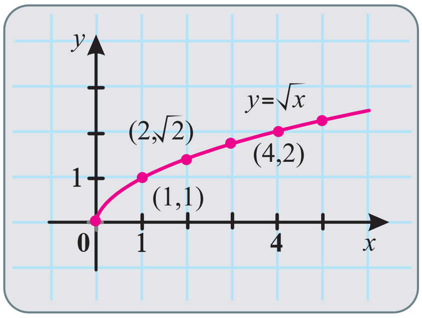
b)

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	2
$y = x^3$	–8	–1	–1/8	0	1/8	1	8



c)

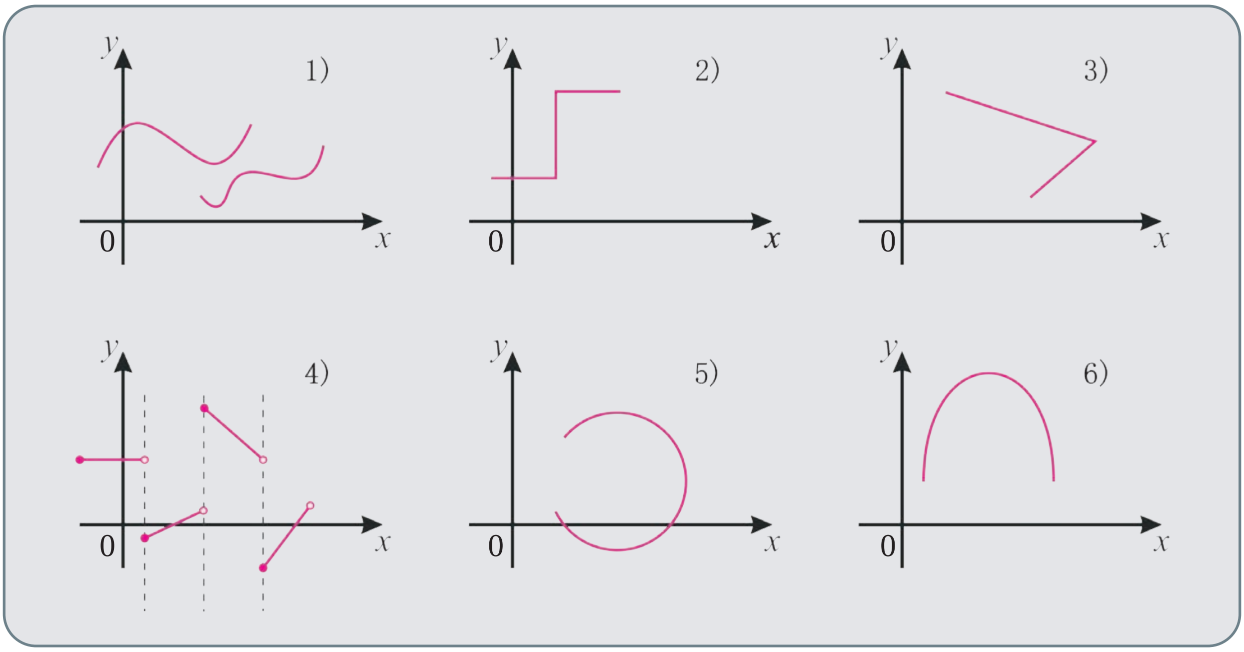
x	0	1/4	1	2	4	9
$y = \sqrt{x}$	0	1/2	1	$\sqrt{2}$	2	3



Oy okuna parallel islendik göni çyzyk berlen grafigi birden artyk bolmadyk nokatda kesip geçse Oxy tekizliginde şekillendirilen figura $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi bolýar.

Eger Oy okuna parallel nähilidir göni çyzyk berlen çyzygy birden artyk nokatda kesip geçen ýagdaýda Oxy tekizliginde şekillendirilen figura funksiýanyň grafigi bolup bilmeýär.

Aşakdaky suratda getirilen 4-nji we 6-njy figuralar käbir funksiýanyň grafigi bolýar. 1-nji, 2-nji, 3-nji we 5-nji grafikler bolsa funksiýanyň grafigi bolmaýar.



MYSALLAR

1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny we bahalar toplumyny tapyň.

a) $f(x)=3x$ b) $f(x)=3x,\ 2\le x\le 6$

c) $f(x)=5x^2+2$ d) $f(x)=5x^2+2,\ 0\le x\le 2$

2. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

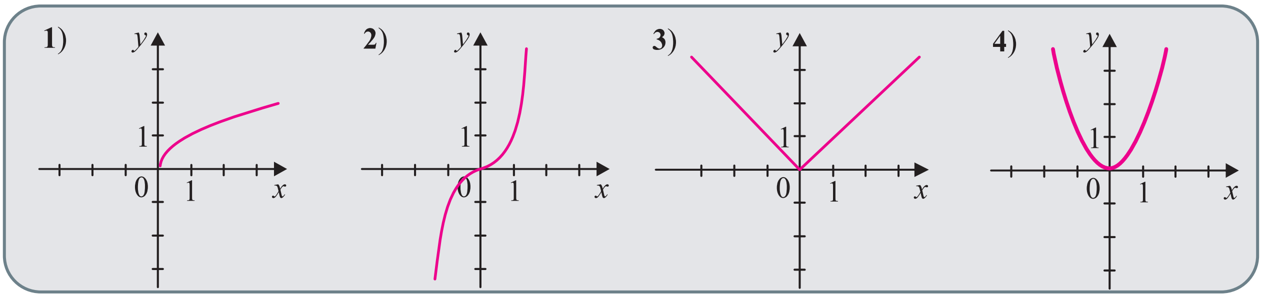
a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+x-6}$ e) $f(t)=\sqrt{t+1}$ f) $g(t)=\sqrt{t^2+9}$

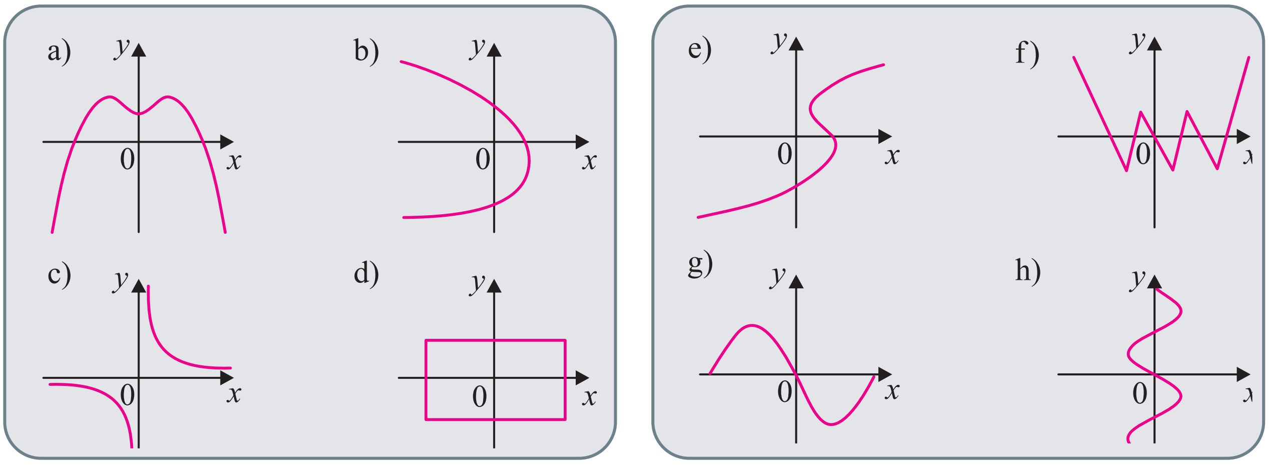
g) $f(t)=\sqrt[3]{t-1}$ h) $g(x)=\sqrt{7-3x}$ i) $f(x)=\sqrt{1-2x}$

3. Funksiýa laýyk grafigi anyklaň.

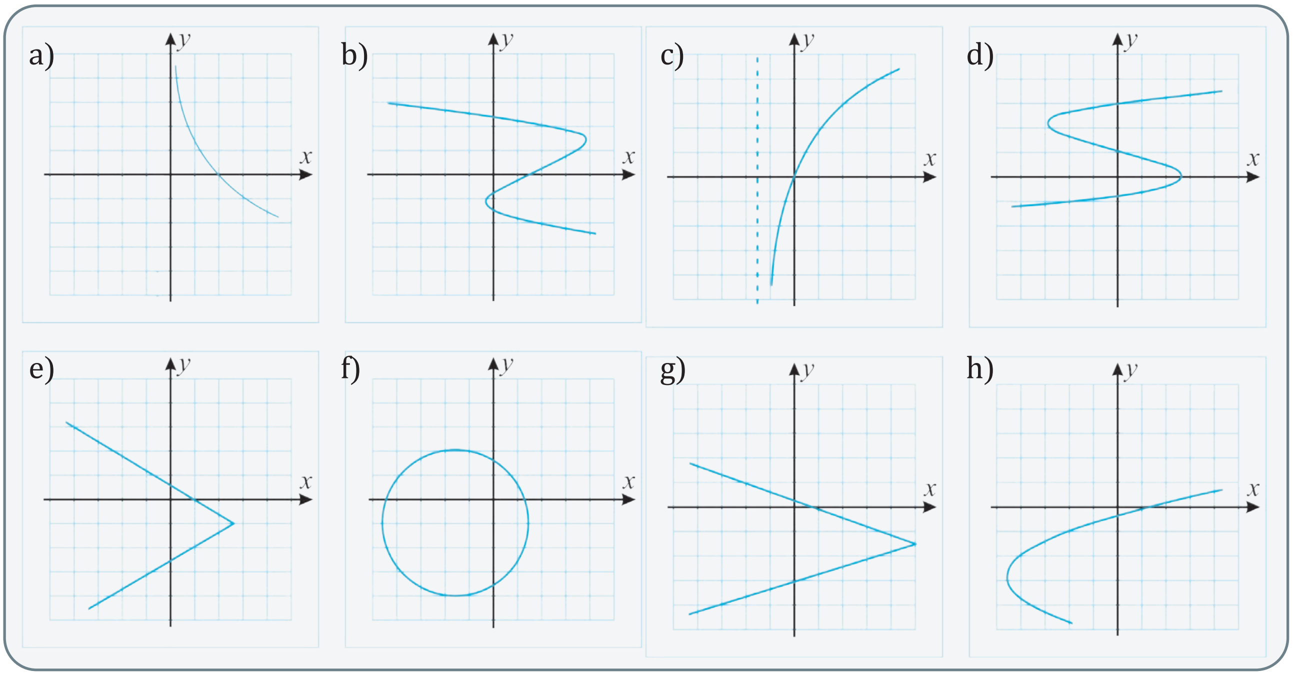
a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3$ c) $f(x)=\sqrt{x}$ d) $f(x)=|x|$



4. Berlen figuralardan haýsylary funksiýanyň grafigi bolup bilýär?



5. Berlen figuralardan haýsylary funksiýanyň grafigi bolup bilmeýär?



6. Berlen funksiýalaryň grafiklerini guruň.

a) $f(x)=8x-x^2$ b) $g(x)=x^2-x-20$ c) $h(x)=x^3-5x-4$

7. Berlen funksiýalaryň bahalar jedwelini düzüň we grafigini guruň.

a) $f(x)=-x^2$ b) $f(x)=x^2-4$ c) $g(x)=-(x+1)^2$

d) $r(x)=3x^4$ e) $r(x)=1-x^4$ f) $g(x)=x^3-8$

g) $k(x)=\sqrt[3]{-x}$ h) $k(x)=-\sqrt[3]{x}$ i) $f(x)=1+\sqrt{x}$

j) $C(t)=\dfrac{1}{t^2}$ k) $C(t)=-\dfrac{1}{t+1}$ l) $H(x)=|2x|$

m) $G(x)=|x|+x$ n) $G(x)=|x|-x$ o) $f(x)=|2x-2|$

FUNKSIÝANYŇ ÜSTÜNDE ARIFMETIK AMALLAR

Funksiýanyň üstünde arifmetik amallar

Funksiýanyň üstünde goşmak (+), aýyrmak (–), köpeltmek (×), bölmek (÷) arifmetik amallaryny ýerine ýetirmek mümkin.

$f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalary degişlilikde A we B toplumlar bolsun. Bu funksiýalaryň $A \cap B$ toplumdaky ***jemi*** diýip her bir $x \in A \cap B$ elementde $f(x) + g(x)$ bahany kabul edýän funksiýa aýdylýar. $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň jemi $(f + g)(x)$ ýaly belgilenýär.

Diýmek:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Edil şonuň ýaly, $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň ***tapawudyny, köpeltmek hasylyny, paýyny*** kesgitlemek mümkin:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Üns beriň!

1. $A \cap B = \varnothing$ bolsa, bu amallar kesgitlenmeýär.

2. Iki $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalaryň paýyny kesgitlemekde X toplumdan alnan her bir x element üçin $g(x) \neq 0$ bolmagy talap edilýär.

MYSALLAR

1-nji mysal. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ we $g(x) = \sqrt{x}$ funksiýalar berlen.

a) $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ we $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ funksiýalary we olaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

b) $(f+g)(4), (f-g)(4), (fg)(4)$ we $\left(\dfrac{f}{g}\right)(4)$ -i tapyň.

Çözülişi. a) f funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy $x \neq 2$, g funksiýanyňky bolsa $x \geq 0$. f we g funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalarynyň kesişmesi $[0; 2) \cup (2; \infty)$ bolýar.

Onda olaryň üstünde amallar aşakdaky ýaly ýerine ýetirilýär:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x}$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}.$$

b) $x = 4$ baha her bir täze funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyna degişlidiginden aşakdaky bahalar kesgitlenen:

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

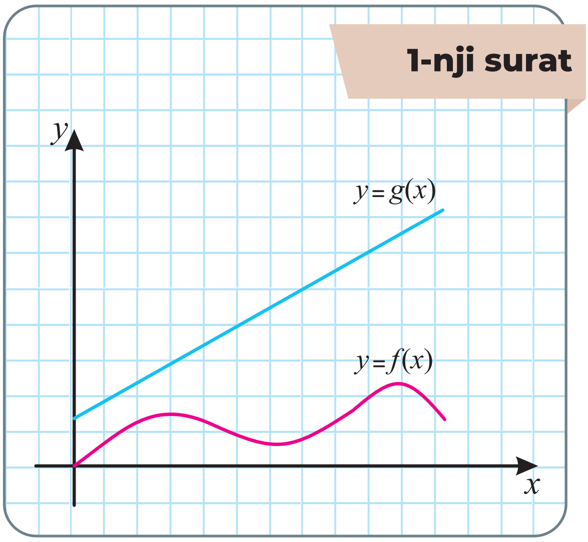
$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

2-nji mysal. Funksiýalary grafiki usulda goşmak

f we g funksiýalaryň grafigi 1-nji suratda berlen bolsun. Grafiki usuldaky goşmagyň kömeginde $f + g$ funksiýanyň grafigini çyzyň.



Çözülişi. Mälim bolşy ýaly, f funksiýanyň grafigi Oxy tekizlikdäki

$$\{(x, f(x)) : x \in D(f)\}$$

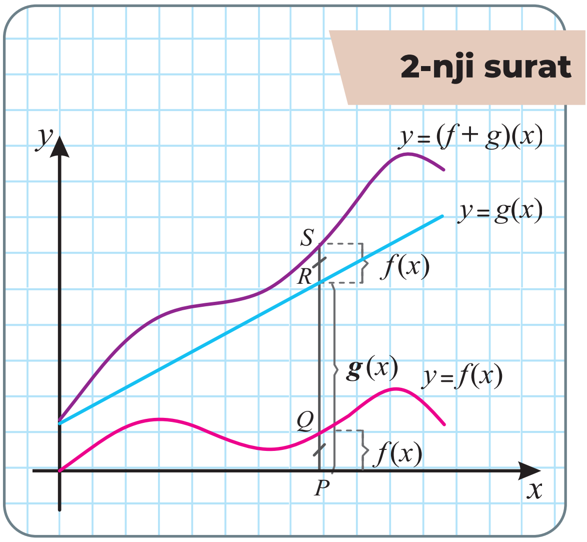
toplumdan ybarat. Edil şonuň ýaly,

$$\{(x, g(x)) : x \in D(g)\}$$

toplum g funksiýanyň grafigi bolýar. f we g funksiýalary goşmagyň grafiki usuly diýende şu toplum düşünilýär:

$$\{(x, f(x) + g(x)) : x \in D(f) \cup D(g)\}.$$

PQ kesim PR kesimiň ýokarsyna $f + g$ funksiýanyň S nokadyny almak üçin nusgalap göçürlen ($PQ = RS$).



MYSALLAR

1. Funksiýalary goşuň we aýryň.

a) $f(x) = 5x + 1,\ g(x) = -2x$

b) $f(x) = -3x + 3,\ g(x) = -5x + 4$

c) $f(x) = 2x + 1,\ g(x) = -5x + 3$

d) $f(x) = -3x^2 + 7x,\ g(x) = 2x + 4$

2. Funksiýalary köpeldiň.

a) $f(x)=-x^2$, $g(x)=-3x+1$

b) $f(x)=-3x^2+3$, $g(x)=-x$

c) $f(x)=-x+3$, $g(x)=5x+6$

d) $f(x)=-4x+5$, $g(x)=-3x+1$

3. $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x)$ we $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ funksiýalary we olaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $f(x)=x,\ \ g(x)=2x$

b) $f(x)=x,\ \ g(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=x^2+x,\ \ g(x)=x^2$

d) $f(x)=3-x^2,\ \ g(x)=x^2-4$

e) $f(x)=5-x,\ \ g(x)=x^2-3x$

f) $f(x)=x^2+2x,\ \ g(x)=3x^2-1$

g) $f(x)=\sqrt{25-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x+3}$

h) $f(x)=\sqrt{16-x^2},\ \ g(x)=\sqrt{x^2-1}$

i) $f(x)=\frac{2}{x},\ \ g(x)=\frac{4}{x+4}$

j) $f(x)=\frac{2}{x+1},\ \ g(x)=\frac{x}{x+1}$

4. Funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}$

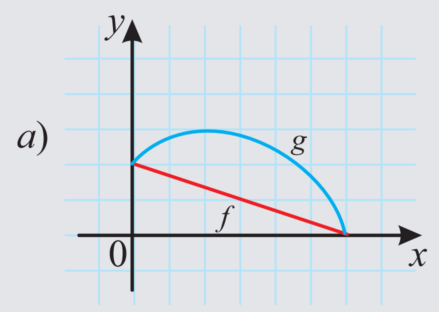
b) $f(x)=\sqrt{x+4}-\frac{\sqrt{1-x}}{x}$

c) $h(x)=(x-3)^{-\frac{1}{4}}$

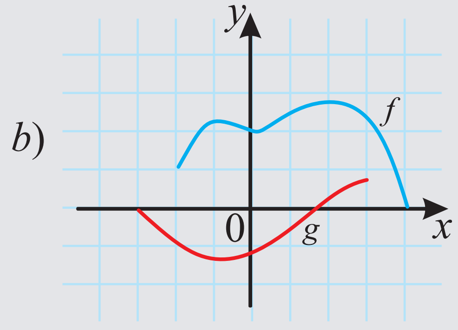
d) $k(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

5. Grafikden peýdalanyp goşmagyň kömeginde $f+g$ funksiýanyň grafigini guruň (3–4-*nji suratlar*).

3-nji surat



4-nji surat



ÇYLŞYRYMLY, TERS, DÖWÜRLEÝIN FUNKSIÝALAR

Çylşyrymly funksiýa

Funksiýalary yzygider ulanmak netijesinde üýtgeýjileriň täze baglanyşyklary emele gelýär. Eger X toplumda $y = f(x)$ funksiýa berlen bolup, x argument T toplumda kesgitlenen käbir $x = g(t)$ funksiýa bolsa, onda T toplumda $y = f(g(t))$ ***çylşyrymly funksiýa*** kesgitlenen diýlip aýdylýar.

Meselem, $y = 2x^2-3x$ funksiýa $X = (-\infty; +\infty)$ toplumda, $x=\sqrt{t}$ funksiýa bolsa $T=[0;+\infty)$ toplumda berlen bolsun. Onda $y=2t-3\sqrt{t}$ funksiýa $T=[0;+\infty)$ toplumda $y=2x^2-3x$ we $x=\sqrt{t}$ funksiýalaryň çylşyrymly funksiýasy bolýar.

1-nji mysal. $f(x)=x^2$ we $g(x)=x-3$ funksiýalar berlen:

a) $f(g(x))$ we $g(f(x))$ çylşyrymly funksiýalary we olaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň;

b) $f(g(5))$ we $g(f(7))$-ni tapyň.

Çözülişi. a) Aşakdaky deňlikler ýerlikli:

g funksiýanyň berlişine görä, $f(g(x)) = f(x-3)$,

f funksiýanyň berlişine görä, $f(g(x)) = (x-3)^2$ bolýar.

f funksiýanyň berlişine görä, $g(f(x)) = g(x^2)$,

g funksiýanyň berlişine görä, $g(f(x)) = x^2-3$ bolýar.

$f(g(x))$ we $g(f(x))$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy hakyky sanlar toplumy.

b) Tapylan çylşyrymly funksiýalarda x-yň ýerine berlen bahany goýýarys:

$f(g(5)) = (5-3)^2 = 2^2 = 4$, $\quad g(f(7)) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$.

2-nji mysal. Eger $f(x)=\sqrt{x}$ we $g(x)=\sqrt{2-x}$ berlen bolsa, aşakdaky funksiýalary we olaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň (1-*nji surat*).

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$

c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

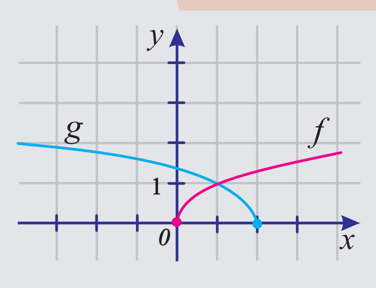
Çözülişi. a) Çylşyrymly funksiýanyň kesgitlemesine hem-de f we g funksiýalaryň berlişine görä,

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{2-x}\right)=\sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x} \text{ bolýar.}$$

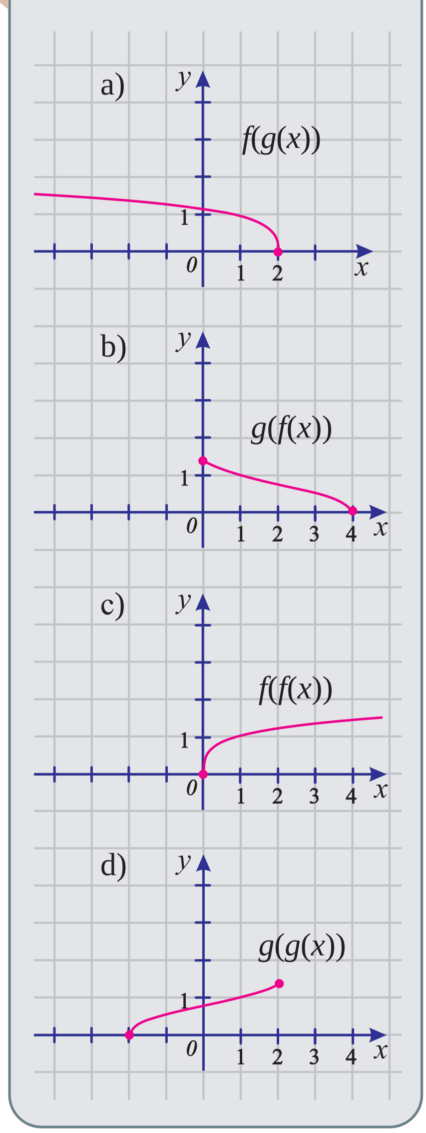
$\sqrt[4]{2-x}$ aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasy $2-x\ge 0$.

Mundan $x \le 2$.

1-nji surat



2-nji surat



Diýmek, $f(g(x))$-nyň kesgitleniş ýaýlasy $(-\infty; 2]$ aralykdan ybarat (2-*nji a surat*).

b) f-nyň berlişine görä, $g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right)$ bolup,

g-nyň berlişine görä, $g(f(x)) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ bolýar.

$\sqrt{x}$ -nyň kesgitleniş ýaýlasy: $x \geq 0$.

$\sqrt{2-\sqrt{x}}$ -nyň kesgitleniş ýaýlasy: $2-\sqrt{x} \geq 0$, mundan

$\sqrt{x} \leq 2$ ýa-da $x \leq 4$. Diýmek, $0 \leq x \leq 4$ (2-*nji b surat*).

c) f-nyň berlişine görä, $f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right)$ bolup,

f-nyň berlişine görä, $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ bolýar.

$\sqrt[4]{x}$ -nyň kesgitleniş ýaýlasy: $[0; \infty)$ (2-*nji c surat*).

d) g-nyň berlişine görä, $g(g(x)) = g\left(\sqrt{2-x}\right)$ bolup,

g-nyň berlişine görä, $g(g(x)) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ bolýar.

$\sqrt{2-\sqrt{2-x}}$ -nyň kesgitleniş ýaýlasy: $2-x \geq 0$ we

$\sqrt{2-x} \leq 2$ Mundan $x \leq 2$ we $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$, diýmek,

$g(g(x))$ -nyň kesgitleniş ýaýlasy: $[-2; 2]$ (2-*nji d surat*).

3-nji mysal. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ we $h(x) = x+3$ bolsa, $f(g(h(x)))$-ny tapyň.

Çözülişi. h-nyň berlişine görä,

$f(g(h(x))) = f\left(g(x+3)\right)$ bolup, g funksiýanyň berlişine görä, $f(g(h(x))) = f\left((x+3)^{10}\right)$,

f funksiýanyň berlişine görä, $f(g(h(x))) = \dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$ bolýar.

4-nji mysal. $F(x) = \sqrt[4]{x+9}$ funksiýa berlen. $F(x) = f(g(x))$ bolýan f we g funksiýalara mysal getiriň.

Çözülişi. f we g funksiýalary aşakdaky ýaly alyp bileris: $g(x) = x+9$ we $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

Munda, g-nyň berlişine görä, $f(g(x)) = f(x+9)$ bolup, f-nyň berlişine görä, $f(g(x)) = \sqrt[4]{x+9}$ bolýar.

Şu ýumuş şertini kanagatlandyrýan f we g funksiýalary birnäçe ýagdaýda saýlap almak mümkin. Şolardan ýene biri $f(x)=\sqrt{x}$ we $g(x)=\sqrt{x+9}$.

5-nji mysal. Çylşyrymly funksiýanyň ulanylyşy

Gämi 20 km/h hemişelik tizlikde kenara parallel ýagdaýda hereket edýär. Gämi maýagyň garşysyndan sagat 12:00-da, kenardan 5 km uzaklykda geçýär.

a) Maýak bilen gäminiň arasyndaky s aralygy gäminiň sagat 12:00-dan soň ýörän aralygy d-ge bagly funksiýasy görnüşinde ýazyň:

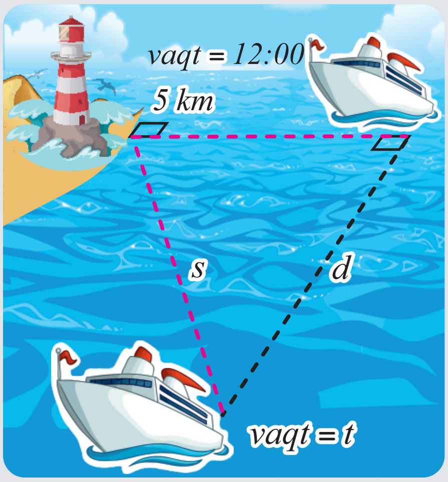
$$s=f(d).$$

b) d-ni sagat 12:00-dan soň geçen wagt t (sagat) -ge bagly funksiýasy görnüşinde ýazyň:

$$d=g(t).$$

c) $f(g(t))$ çylşyrymly funksiýany tapyň. Bu funksiýa nämäni aňladýar?

3-nji surat



Çözülişi. 3-nji surata garaýarys.

a) s we d aralyklaryň baglylygyny Pifagoryň teoremasynyň kömeginde görkezýäris. Başgaça aýdanda, s-iň d-ge bagly funksiýadygyny aşakdaky ýaly aňladýarys:

$$s=f(d)=\sqrt{25+d^2}.$$

b) gämi 20 km/h hemişelik tizlikde hereketlenýändigi üçin d aralygyň t wagta baglylygy

$$d=g(t)=20t$$

görnüşdäki funksiýa arkaly aňladylmagy mümkin.

c) şeýdip:

g-nyň berlişine görä, $f(g(t)) = f(20t)$ bolup,

f funksiýanyň berlişine görä, $f(g(t)) = \sqrt{25+(20t)^2}$ bolýar. Bu ýerde $f(g(t))$ funksiýa gämi bilen maýagyň arasyndaky aralygyň wagta görä funksiýasyny aňladýar.

Ters funksiýa

Eger $f(x)=y$ deňleme her bir y üçin x-a görä ýeke-täk $g(y)$ köke eýe bolsa, onda $x=g(y)$ funksiýa $y=f(x)$ funksiýa ***ters funksiýa*** diýilýär. $x=g(y)$ funksiýa ýerine adatdaky belgilemelere görä, $y=g(x)$ ýazuwy ulanylýar. $y=f(x)$ funksiýa ters funksiýa $y=f^{-1}(x)$ ýaly ýazylýar.

1-nji mysal. $y=3x-5$ funksiýa garap geçeliň. Bu ýerden x-sy y arkaly aňladalyň:

$$3x-5=y \Rightarrow 3x=y+5 \Rightarrow x=\frac{y+5}{3}.$$

Ahyrky deňlikde x we y -leriň ýerlerini çalşyryp:

$$y=\frac{x+5}{3}$$

funksiýa eýe bolarys. Diýmek, $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ funksiýa $y=3x-5$ funksiýa ters funksiýa bolýar.

Ýatlatma. Berlen $y=f(x)$ funksiýa we oňa ters $y=f^{-1}(x)$ funksiýa üçin $D\left(f^{-1}\right)=E(f)$ hem-de $E\left(f^{-1}\right)=D(f)$ bolýar.

Üns beriň! $\left(f(x)\right)^{-1}=\frac{1}{f(x)}$ bolup, bu deňlikdäki (-1) dereje görkezijisini aňladýar. $f^{-1}(x)$ ýazuwdaky (-1) bolsa ters funksiýany aňladýar. Umuman alanda, $\left(f(x)\right)^{-1}\neq f^{-1}(x)$. Meselem: $f(x)=3x-5$ funksiýa üçin $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$ hem-de $\left(f(x)\right)^{-1}=\frac{1}{3x-5}$ bolýar.

2-nji mysal. Berlen funksiýanyň ters funksiýasyny tapyň: $f(x)=\frac{x^5-3}{2}$.

Çözülişi. Funksiýany $y=\frac{x^5-3}{2}$ ýaly ýazyp alýarys we x-sy y arkaly aňladýarys:

$$y=\frac{x^5-3}{2}$$

$$2y=x^5-3$$

$$x^5=2y+3$$

$$x=\sqrt[5]{2y+3}.$$

Indi x we y-leriň ýerini çalşyrýarys: $y=\sqrt[5]{2x+3}$. Diýmek, ters funksiýa aşakdaky ýaly: $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{2x+3}$.

3-nji mysal. Berlen funksiýanyň ters funksiýasyny tapyň: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$.

Çözülişi. Funksiýany aşakdaky ýaly ýazyp alýarys $y=\frac{2x+3}{x-1}$ we x-sy y arkaly aňladýarys:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y\cdot(x-1)=2x+3$$

$$yx-y=2x+3$$

$$yx-2x=y+3$$

$$x\cdot(y-2)=y+3$$

$$x=\frac{y+3}{y-2}$$

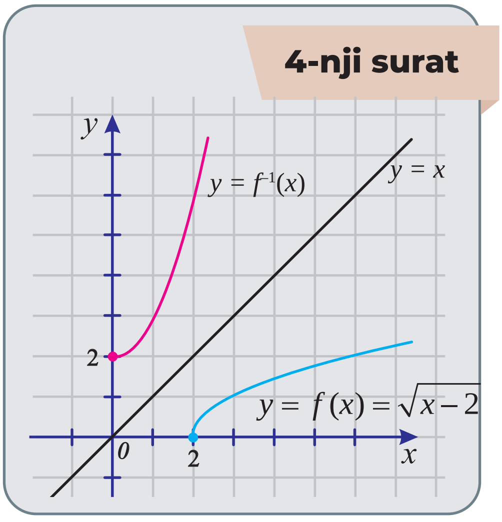
Diýmek, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$ ters funksiýa bolýar.

4-nji mysal. Ters funksiýanyň grafigini gurmak.

$f(x)=\sqrt{x-2}$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp f^{-1} funksiýanyň grafigini guruň we onuň analitik görnüşini ýazyň.

Çözülişi.

1. $y=\sqrt{x-2}$ funksiýanyň grafigi 4-nji suratda getirilen.



2. f^{-1} funksiýanyň grafigi f funksiýanyň grafigini $y=x$ göni çyzyga görä simmetrik şöhlelendirmek arkaly gurulýar (4-*nji surat*).

3. $y=\sqrt{x-2}$ funksiýada x-sy y arkaly aňladylýar, munda $y\geq 0$ bolýandygy hasaba alynýar.

$$\sqrt{x-2}=y$$

$$x-2=y^2$$

$$x=y^2+2,\quad y\geq 0.$$

Indi x we y-leriň ýerini çalşyrýarys: $y=x^2+2$, $x\geq 0$.

Diýmek, ters funksiýa $f^{-1}(x)=x^2+2$ bolýan eken, $x\geq 0$.

Bu tapylan $f^{-1}(x)$ ters funksiýa $y=x^2+2$ parabolanyň sag şahasyndan ybarat. Muny grafikden hem görmek bolýar.

Döwürleýin funksiýalar

D(*f*) berlen $y=f(x)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy bolsun. Şeýle $T\neq 0$ tapylyp, her bir $x\in D(f)$ üçin:

1. $x-T$ we $x+T$ -ler $D(f)$ -a degişli,

2. $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$ gatnaşyklar ýerine ýetirilse, onda $y=f(x)$ ***döwürleýin funksiýa*** diýilýär.

Eger T sany $y=f(x)$ funksiýanyň döwri bolsa, onda her bir n bitin san üçin nT sany hem $y=f(x)$ funksiýanyň döwri bolýar:

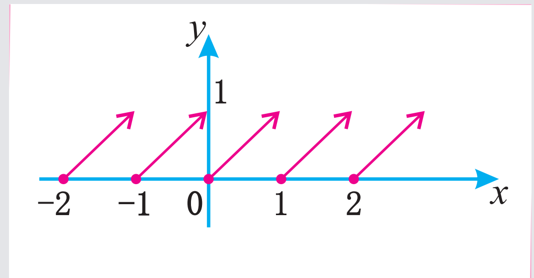
$$f(x+nT)=f(x),\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Iň kiçi položitel T döwür $f(x)$ funksiýanyň ***esasy döwri*** diýip aýdylýar.

Döwürleýin funksiýanyň grafigini bir döwrüň aralygynda çyzmak ýeterli bolýar, başga döwür aralyklarynda şu grafik gaýtalanýar.

Meselem, sanyň drob bölegi $\{x\}$ – berlen x sana onuň drob bölegini laýyk goýýan funksiýa (5-*nji surat*) döwürleýin funksiýa bolýar. Onuň esasy döwri $T_0 = 1$, ýagny islendik $x \in (-\infty; +\infty)$ san üçin $(x+1) \in (-\infty; +\infty)$ hem-de $\{x+1\} = \{x\}$ gatnaşyklar ýerlikli bolýar.

5-nji surat



$y = \{x\}$ funksiýanyň grafigi

Eger $y = f(x)$ funksiýanyň esasy döwri T_0 bolsa, onda $y = kf(ax+b)+c$ funksiýanyň esasy döwri $T_1 = \dfrac{T_0}{|a|}$ bolýar ($a \neq 0$).

MYSALLAR

1. $f(x) = 2x-3$ we $g(x) = 4-x^2$-dan peýdalanyp çylşyrymly funksiýalaryň bahasyny tapyň.

a) $f(g(0))$ b) $g(f(0))$ c) $f(f(2))$ d) $g(g(3))$

e) $f(g(-2))$ f) $g(f(-2))$ g) $f(f(-1))$ h) $g(g(-1))$

2. $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$ we $g(g(x))$ funksiýalary we olaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $f(x) = 2x+3$, $g(x) = 4x-1$

b) $f(x) = 6x-5$, $g(x) = \dfrac{x}{2}$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+1$

d) $f(x) = x^3+2$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x+4$

f) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

g) $f(x) = |x|$, $g(x) = 2x+3$

h) $f(x) = 4-x$, $g(x) = |x+4|$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = 2x-1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2-4x$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

l) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

3. $f(x) = 3-x$ we $g(x) = x^2+1$-den peýdalanyp funksiýalary tapyň.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(f(x))$ d) $g(g(x))$

4. $f(g(h(x)))$ çylşyrymly funksiýany tapyň.

a) $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x-1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2+2$

c) $f(x)=x^4+1,\ g(x)=x-5,\ h(x)=\sqrt{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\dfrac{x}{x-1},\ h(x)=\sqrt[3]{x}$

5. $F(x) = f(g(x))$ deňligi kanagatlandyrýan f we g ýönekeý funksiýalara mysallar getiriň.

a) $F(x)=(x-9)^5$ b) $F(x)=\sqrt{x}+1$ c) $F(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

d) $F(x)=\dfrac{1}{x+3}$ e) $F(x)=\left|1-x^3\right|$ f) $F(x)=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

6. Berlen f funksiýa ters funksiýany tapyň.

a) $f(x)=3x+5$ b) $f(x)=7-5x$ c) $f(x)=5-4x^3$

d) $f(x)=3x^3+8$ e) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{5}{x-6}$

g) $f(x)=\dfrac{3-4x}{8x-1}$ h) $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ i) $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-7}$

j) $f(x)=\sqrt{5+8x}$ k) $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ l) $f(x)=x^6,\ x\geq 0$

m) $f(x)=\dfrac{1}{x^2},\ x>0$ n) $f(x)=4-x^2,\ x\geq 0$ o) $f(x)=x^2+x,\ x\geq -\dfrac{1}{2}$

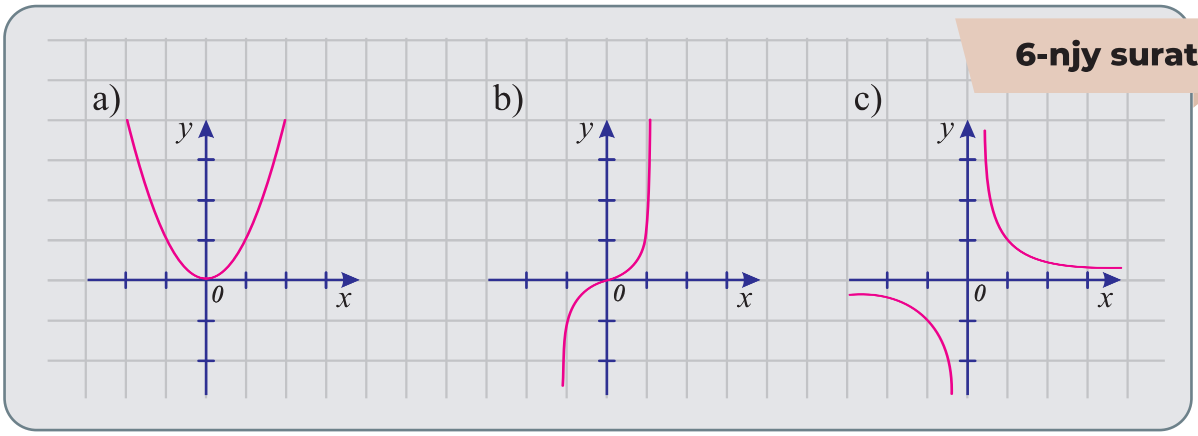
7. Berlen funksiýa ters funksiýany tapyň. f funksiýanyň grafiginden peýdalanyp ters funksiýanyň grafigini guruň.

a) $f(x)=3x-6$ b) $f(x)=16-x^2,\ x\geq 0$

c) $f(x)=\sqrt{x+1}$ d) $f(x)=x^3$

8. 6-njy suratda berlen grafiklere laýyk funksiýalary saýlaň we olara ters funksiýanyň grafigini guruň:

1) $f(x)=x^3$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=x^2$



6-njy surat

9. $T=\sqrt{2}$ san $f(x) = 5$ funksiýanyň döwri bolýandygyny subut ediň.

10. Berlen funksiýalaryň döwürleýin dälligini görkeziň.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ b) $f(x)=-\dfrac{2}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{x}{x}$

d) $f(x)=x^2-4$ e) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+5x+8}$ f) $f(x)=\sqrt[3]{x}+3x-1$

FUNKSIÝANYŇ HÄSIÝETLERI

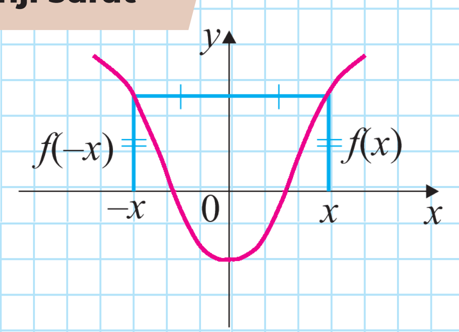
Jübüt we täk funksiýalar

Islendik $x \in D(f)$ üçin $f(-x) = f(x)$ deňlik ýerine ýetirilse, onda $f(x)$ ***jübüt funksiýa*** diýilýär. Jübüt funksiýanyň grafigi *Oy* okuna görä simmetrik bolýar (1-*nji surat*).

Islendik $x \in D(f)$ üçin $f(-x) = -f(x)$ deňlik ýerine ýetirilse, onda $f(x)$ ***täk funksiýa*** diýilýär. Täk funksiýanyň grafigi koordinata başlangyjyna görä simmetrik bolýar (2-*nji surat*).

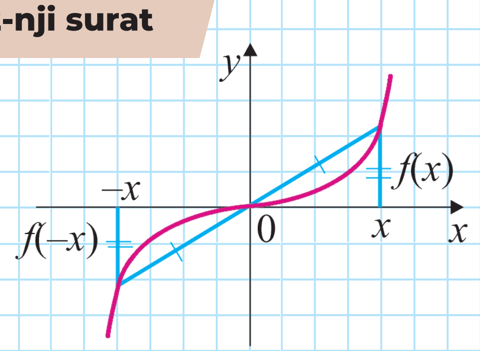
Ýokardaky iki deňlikden hiç biri-de ýerine ýetirilmese, onda $f(x)$ ***jübüt hem, täk hem däl funksiýa*** diýilýär.

1-nji surat



$f(x)$ – jübüt funksiýa

2-nji surat



$f(x)$ – täk funksiýa

1-nji mysal. $f(x) = 2x^2 + 5$ funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini barlaň.

Çözülişi.

$f(x) = 2x^2 + 5$ funksiýa üçin:

$$f(-x) = 2(-x)^2 + 5 = 2x^2 + 5 = f(x)$$

bolýanlygyndan $f(x)$ funksiýa jübüt funksiýa bolýar.

2-nji mysal. $f(x) = 2x^3 + 5x$ funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini barlaň.

Çözülişi.

$f(x) = 2x^3 + 5x$ funksiýa üçin:

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x) = -\left(2x^3 + 5x\right) = -f(x)$$

bolýanlygyndan $f(x)$ funksiýa täk funksiýa bolýar.

3-nji mysal. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini barlaň.

Çözülişi.

$$f(-x) = 2(-x)^3 + 5(-x)^2 - 3(-x) + 1 =$$

$$= -\left(2x^3 - 5x^2 - 3x - 1\right)$$

Diýmek, $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ bolup, bu funksiýa jübüt hem, täk hem däl eken.

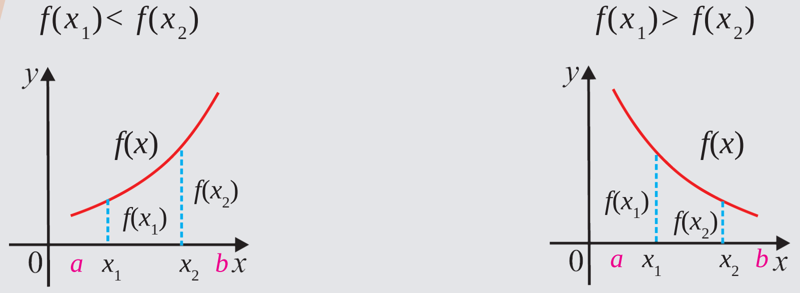
Funksiýalaryň artmagy we kemelmegi

$f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kesgitlenen bolup, $x_1 < x_2$ şerti kanagatlandyrýan ähli $x_1, x_2 \in (a; b)$ -ler üçin:

- $f(x_1) < f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda artýan;
- $f(x_1) > f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kemelýän;
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda artmaýan;
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ bolsa, $f(x)$ funksiýa $(a; b)$ aralykda kemelmeýän funksiýa diýilýär.

Artýan, kemelýän, artmaýan we kemelmeýän funksiýalara umumy at bilen ***monoton funksiýalar*** diýilýär.

3-nji surat



Artýan funksiýa **Kemelýän funksiýa**

Funksiýanyň ekstremum nokatlary we ekstremumlary

- Eger:

1) $f(x)$ funksiýa x_1 nokat degişli bolan käbir $(a;\ b)$ interwalda kesgitlenen bolup;

2) $(a;\ b)$ interwalyň x_1-den tapawutly ähli x nokatlarynda $f(x) < f(x_1)$ şert ýerine ýetirilse, onda x_1 nokada $f(x)$ ***funksiýanyň maksimum nokady*** diýilýär (4-*nji surat*).

Eger $x_1 \in D(f)$ nokat $f(x)$ funksiýa üçin maksimum nokat bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň x_1 nokatdaky $f(x_1)$ bahasyna ***funksiýanyň maksimumy*** diýilýär we $y_{\max}$ ýaly belgilenýär. Diýmek,

$$y_{\max} = f(x_1).$$

- Eger:

1) $f(x)$ funksiýa x_2 degişli bolan käbir $(a;\ b)$ interwalda kesgitlenen bolup;

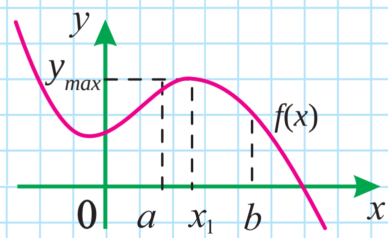
2) $(a;\ b)$ interwalyň x_2-den tapawutly ähli x nokatlarynda $f(x) > f(x_2)$ şert ýerine ýetirilse, onda x_2 nokada $f(x)$ ***funksiýanyň minimum nokady*** diýilýär (5-*nji surat*).

Eger $x_2 \in X$ nokat $f(x)$ funksiýa üçin minimum nokat bolsa, onda $f(x)$ funksiýanyň x_2 nokatdaky $f(x_2)$ bahasy $f(x)$ ***funksiýanyň minimumy*** diýilýär we $y_{\min}$ ýaly belgilenýär. Diýmek,

$$y_{\min} = f(x_2).$$

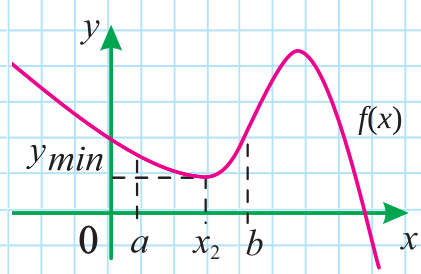
Funksiýanyň maksimum we minimum nokatlaryna ***ekstremum nokatlary*** diýilýär.

4-nji surat



$f(x)$ üçin $(a;\ b)$ interwalda
x_1 – funksiýanyň maksimum nokady;
$y_{max} = f(x_1)$ – funksiýanyň maksimumy.

5-nji surat

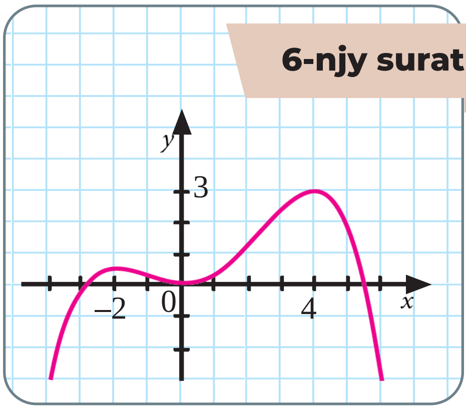


$f(x)$ üçin $(a;\ b)$ interwalda
x_2 – funksiýanyň minimum nokady;
$y_{\min} = f(x_2)$ – funksiýanyň minimumy.

4-nji mysal. $f(x)$ funksiýanyň grafigi 6-njy suratda getirilen. Funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny tapyň.

Çözmek

$f(x)$ funksiýanyň grafiginden funksiýa $(-\infty;-2]$ we $[0;4]$ aralyklarda artýandygyny hem-de $[-2;0]$ we $[4;\infty)$ aralyklarda kemelýändigini kesgitleýäris.



6-njy surat

MYSALLAR

1. Berlen funksiýalaryň jübüt ýa-da täkligini barlaň.

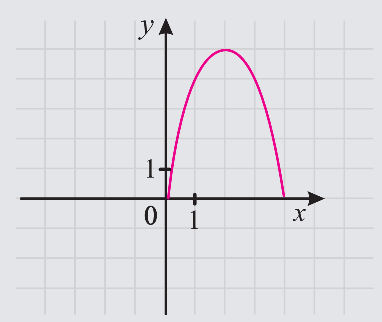
a) $f(x)=x^4$ b) $f(x)=x^3$

c) $f(x)=x^2+x$ d) $f(x)=x^4-4x^2$

e) $f(x)=x^3-x$ f) $f(x)=3x^3+2x^2+1$

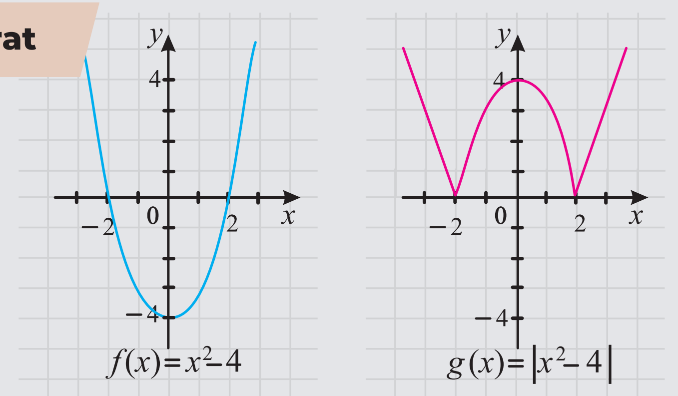
g) $f(x)=1-\sqrt[3]{x}$ h) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

2. 7-nji suratda $x\geq 0$ ýaýla üçin funksiýanyň grafigi berlen. $x<0$ ýaýlada grafigi şeýle guruň, ýagny:
1) jübüt funksiýanyň;
2) täk funksiýanyň grafigi alynsyn.



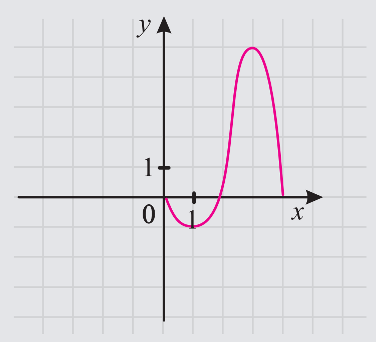
7-nji surat

3. 8-nji suratda $f(x)=x^2-4$ we $g(x)=|x^2-4|$ funksiýanyň grafikleri berlen. $g(x)$ funksiýanyň grafigi $f(x)$ funksiýanyň grafiginden nähili alnandygyny düşündirip beriň.



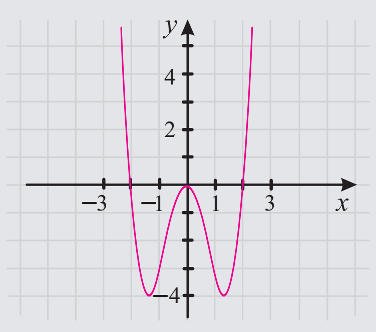
8-nji surat

9-njy surat



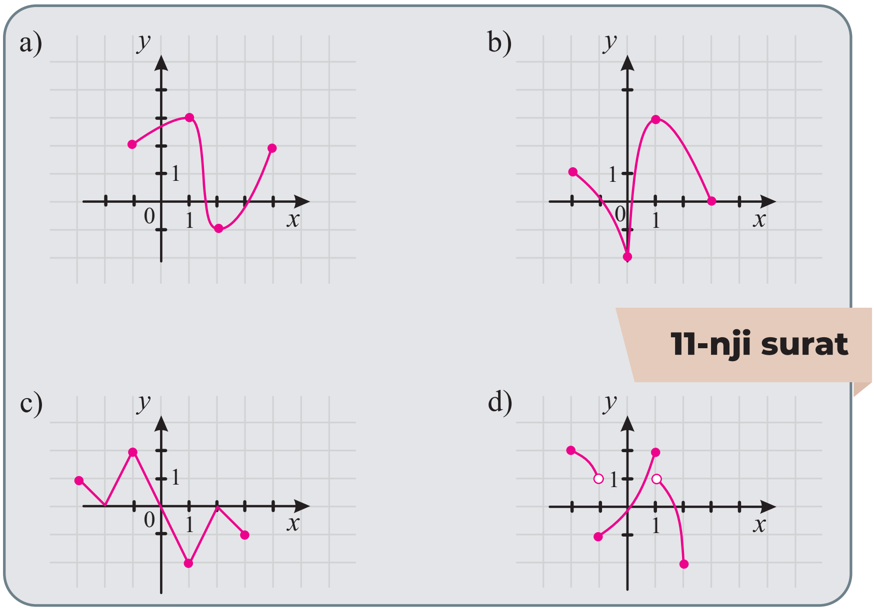
4. 9-njy suratda $x \geq 0$ ýaýla üçin funksiýanyň grafigi berlen. $x < 0$ ýaýlada grafigi şeýle guruň, ýagny:
1) jübüt funksiýanyň;
2) täk funksiýanyň grafigi emele gelsin.

10-njy surat



5. $f(x) = x^4 - 4x^2$ funksiýanyň grafigi berlen (10-*njy surat*). Ondan peýdalanyp $g(x) = |x^4 - 4x^2|$ funksiýanyň grafigini guruň.

6. 11-nji suratda f funksiýanyň grafigi berlen. Bu grafikden peýdalanyp aşakdakylary anyklaň:
1) f funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny we bahalar toplumyny.
2) f funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny.



11-nji surat

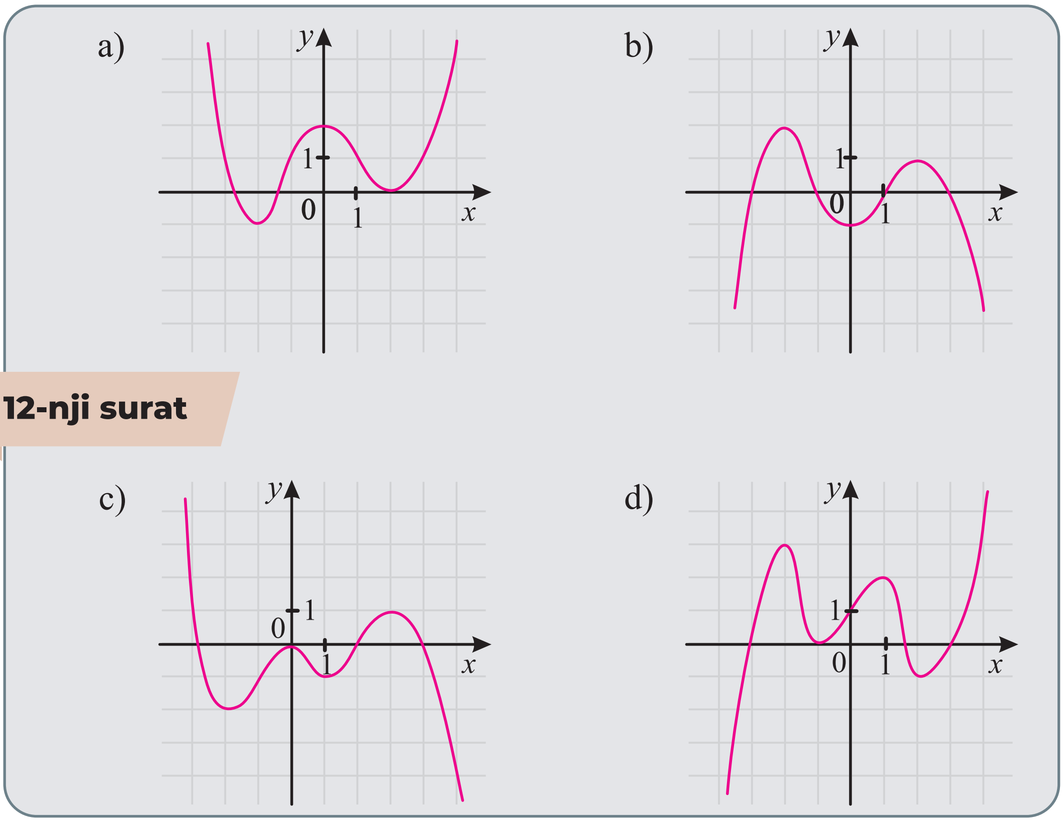
7. Berlen funksiýalaryň grafigini guruň, kesgitleniş ýaýlasyny we bahalar toplumyny anyklaň, artýan we kemelýän aralyklaryny takmyny tapyň.

a) $f(x)=x^2-5x$ b) $f(x)=x^3-4x$ c) $f(x)=x^4-16x^2$

8. f funksiýanyň grafigi 12-nji suratda berlen. Bu grafikden peýdalanyp aşakdakylary takmyny anyklaň:

1) funksiýanyň ähli ekstremum nokatlaryny we ekstremumlaryny;

2) funksiýanyň artýan we kemelýän aralyklaryny.



12-nji surat

9. Aşakdaky maglumatlar esasynda funksiýanyň grafiginiň eskizini guruň.

a) $(-\infty;3]$ kemelýär, $[3;+\infty)$ artýar;

b) $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$ kemelýär, $[0;1]$ üýtgemeýär;

c) $(-\infty;-6]$ kemelýär, $[-6;0]$ artýar we $[0;+\infty)$ üýtgemeýär;

d) $[-5;10]$ artýar, $[10;+\infty)$ üýtgemeýär we $x=-5$-de iň kiçi bahany kabul edýär.

FUNKSIÝANYŇ GRAFIGINIŇ ÜSTÜNDE ÝÖNEKEÝ ÇALŞYRMALAR

Funksiýanyň grafigini süýşürmek

Berlen $f(x)$ funksiýanyň grafigini Oxy tekizliginde süýşürmek mümkin. Funksiýanyň grafiginiň aşakda getirilýän süýşürmelere garap geçýäris.

1. Funksiýanyň grafigini Ox oky boýunça süýşürmek.
2. Funksiýanyň grafigini Oy oky boýunça süýşürmek.
3. Funksiýanyň grafigini käbir wektor ugrunda süýşürmek.

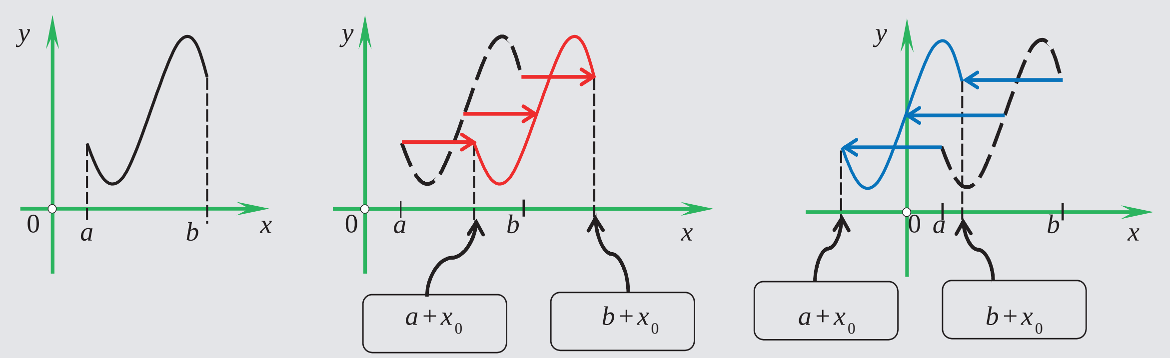
1. Funksiýanyň grafigini Ox oky boýunça x_0 birlige süýşürmek (1-*nji surat*)

a) eger $x_0>0$ bolsa, grafik Ox oky ugrunda x_0 birlik süýşýär.

b) eger $x_0<0$ bolsa, grafik Ox oky ugruna garşy $|x_0|$ birlik süýşýär.

1-nji surat

$y = f(x)$ funksiýanyň grafigini Ox oky boýunça süýşürmek



a) berlen $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi.

b) $x_0>0$ bolanda $y = f(x-x_0)$ funksiýanyň grafigi; $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi saga x_0 birlik süýşen.

c) $x_0<0$ bolanda $y = f(x-x_0)$ funksiýanyň grafigi; $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi çepe $|x_0|$ birlik süýşen.

1-nji mysal. $f(x) = x^2$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini guruň.

a) $g(x)=(x+4)^2$ b) $h(x)=(x-2)^2$

Çözülişi. 2-nji suratda görkezilişi ýaly,

a) g funksiýanyň grafigini gurmak üçin f funksiýanyň grafigini çepe 4 birlige süýşürýäris.

b) h funksiýanyň grafigini gurmak üçin f funksiýanyň grafigini saga 2 birlige süýşürýäris.

2-nji surat

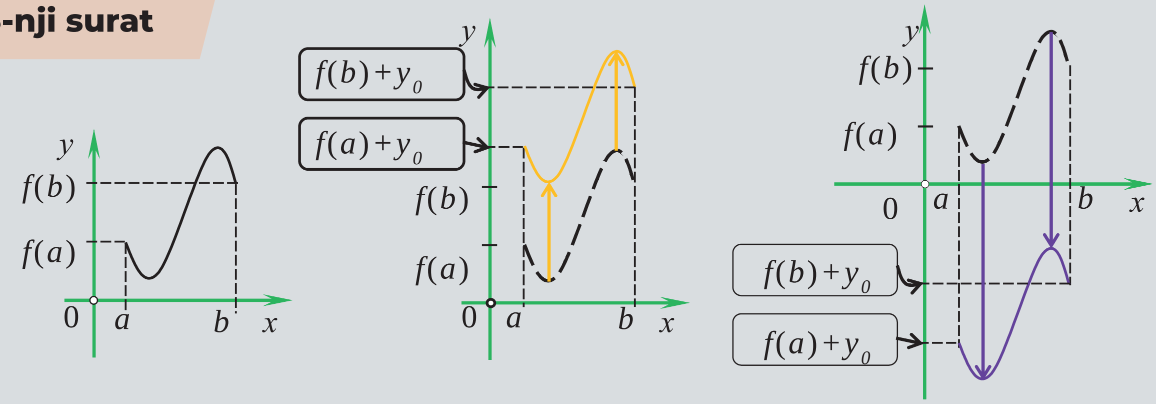
2. Funksiýanyň grafigini Oy oky boýunça y_0 birlige süýşürmek (3-*nji surat*)

a) eger $y_0 > 0$ bolsa, grafik Oy oky ugrunda y_0 birlik süýşýär;

b) eger $y_0 < 0$ bolsa, grafik Oy oky ugruna garşy $|y_0|$ birlik süýşýär (3-*nji surat*).

3-nji surat

$y = f(x)$ funksiýanyň grafigini Oy oky boýunça süýşürmek.



a) Berlen $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi.

b) $y_0 > 0$ bolanda $y = f(x)+y_0$ funksiýanyň grafigi. $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi ýokary y_0 birlik süýşen.

c) $y_0 < 0$ bolanda $y = f(x)+y_0$ funksiýanyň grafigi. $y = f(x)$ funksiýanyň grafigi aşak $|y_0|$ birlik süýşen.

2-nji mysal. $f(x) = x^2$ funksiýadan peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini guruň.

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

Çözülişi.

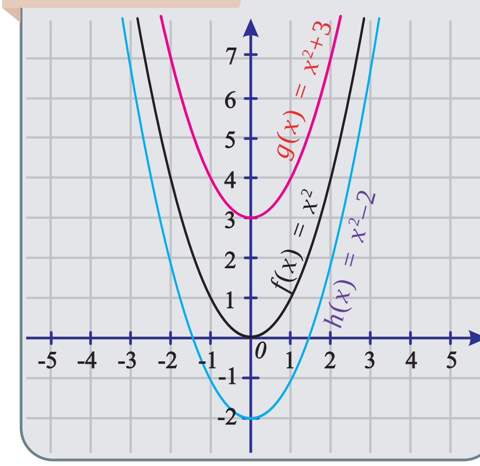
a) Aşakdaka üns beriň:

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Diýmek, 4-nji suratda görkezilişi ýaly g funksiýanyň grafigini çyzmak üçin f funksiýanyň grafigini ýokary 3 birlige süýşürýäris (göterýäris).

b) Edil şeýle, h funksiýanyň grafigini çyzmak üçin f funksiýanyň grafigini aşak 2 birlige süýşürýäris (düşürýäris).

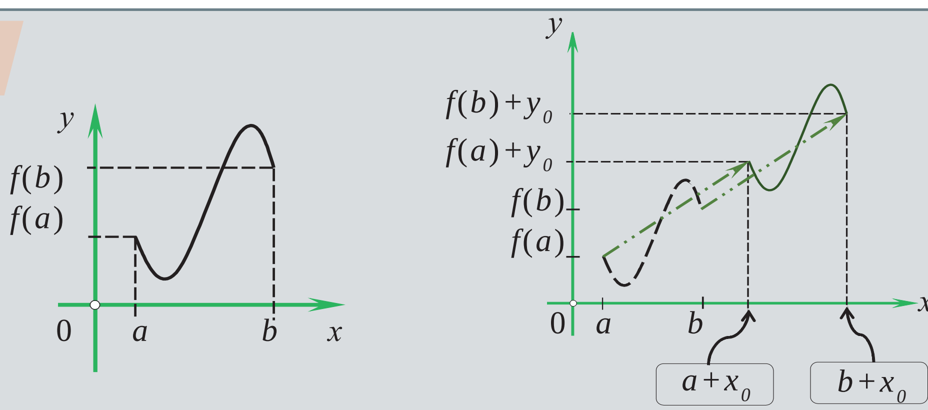
4-nji surat



3. Funksiýanyň grafigini hem Ox, hem Oy oklary boýunça süýşýürmek (5-*nji surat*)

$y = f(x - x_0) + y_0$ funksiýanyň grafigini gurmak üçin $y = f(x)$ funksiýanyň grafigini Ox oky boýunça x_0 birlige, Oy oky boýunça bolsa y_0 birlige süýşürmek ýeterli.

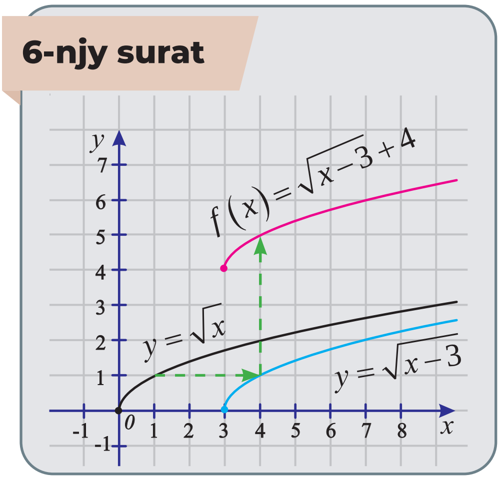
5-nji surat



3-nji mysal. $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ funksiýanyň grafigini guruň.

Çözülişi.

Ilki $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafigini gurýarys. Alnan funksiýanyň grafigini 3 birlik saga süýşürýäris we $y=\sqrt{x-3}$ funksiýanyň grafigini alýarys. Soň bu grafigi 4 birlik ýokary süýşürýäris we $f(x)=\sqrt{x-3}+4$ funksiýanyň grafigini alýarys (6-*njy surat*).



6-njy surat

Funksiýanyň grafiklerini gysmak we uzaltmak

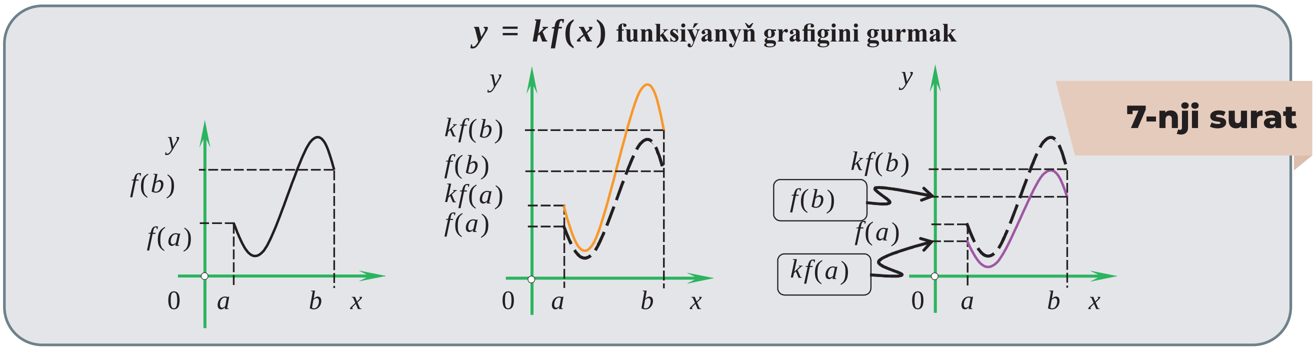
Berlen $f(x)$ funksiýanyň grafigini Oxy tekizliginde deformirlemek (gysmak ýa-da uzaltmak) mümkin. Iki möhüm ýagdaýa garap geçýäris.

1-nji ýagdaý. Berlen $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp $y = kf(x)$ funksiýanyň grafigi aşakdaky ýaly alynýar (7-*nji surat*):

a) eger $k>1$ bolsa, grafik Ox okundan Oy oky boýunça k deň uzaldylýar.

b) eger $0<k<1$ bolsa, grafik Ox okuna Oy oky boýunça $\frac{1}{k}$ deň gysylýar.

c) eger $k<0$ bolsa, onda $y = kf(x)$ funksiýanyň grafigi $y = |k|f(x)$ funksiýanyň grafiginiň Ox oka görä simmetrik tersi bolýar.



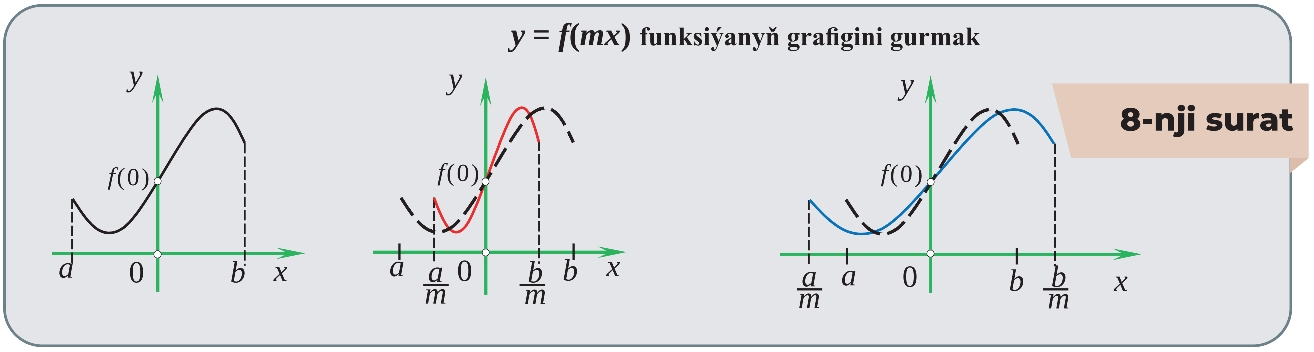
7-nji surat

2-nji ýagdaý. Berlen $y = f(x)$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp $y = f(mx)$ funksiýanyň grafigi aşakdaky ýaly alynýar (8-*nji surat*):

a) eger $m>1$ bolsa, grafik Oy okuna Ox oky boýunça m deň gysylýar;

b) eger $0<m<1$ bolsa, grafik Oy okundan Ox oky boýunça $\frac{1}{m}$ deň uzaldylýar.

c) eger $m<0$ bolsa, onda $y = f(mx)$ funksiýanyň grafigi $y = f(|m|x)$ funksiýanyň grafiginiň Oy oka görä simmetrik tersi bolýar.



8-nji surat

4-nji mysal. Aşakdaky funksiýalaryň grafigini guruň.

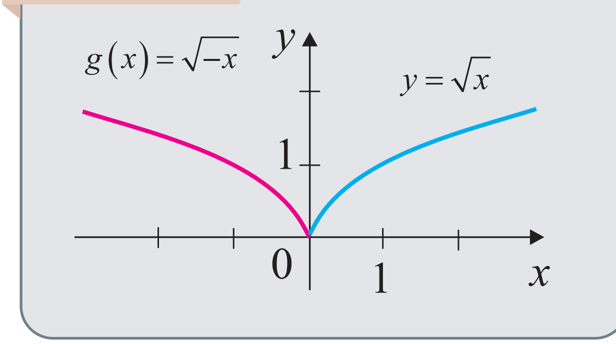
$$g(x)=\sqrt{-x}$$

Çözülişi.

9-njy suratda $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafigini çyzýarys. Bu grafigi y okuna görä simmetrik şöhlelendirmek arkaly $g(x)=\sqrt{-x}$ funksiýanyň grafigini alýarys.

Üns beriň: $g(x)=\sqrt{-x}$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy: $x\leq 0$-dan ybarat.

9-njy surat



5-nji mysal. 10-njy suratda $f(x)=x^2$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini guruň.

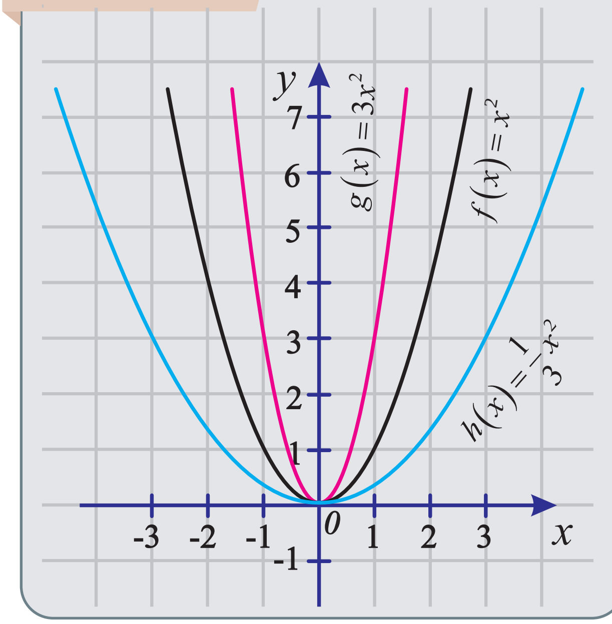
a) $g(x)=3x^2$ b) $h(x)=\frac{1}{3}x^2$

Çözülişi.

a) g funksiýanyň grafigi f funksiýanyň her bir nokadynyň y koordinatasyny 3-e köpeltmekden emele gelýär. Ýagny g funksiýanyň grafigini gurmak üçin f funksiýanyň grafigini wertikal 3 deň uzaltmaly.

b) h funksiýanyň grafigi f funksiýanyň her bir nokadynyň y koodrinatasyny $\frac{1}{3}$ -e köpeltmekden emele gelýär. Ýagny h funksiýanyň grafigini gurmak üçin f funksiýanyň grafigini wertikal ugurda x oka 3 deň gysmaly.

10-njy surat

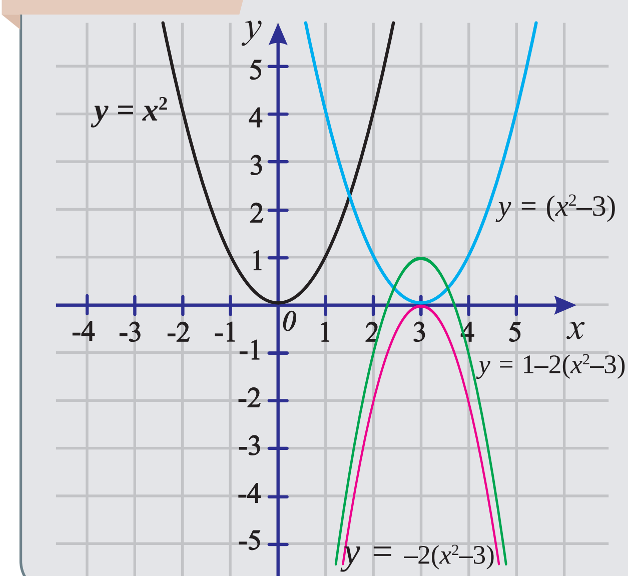


6-njy mysal. $f(x)=1-2(x-3)^2$ funksiýanyň grafigini guruň.

Çözülişi.

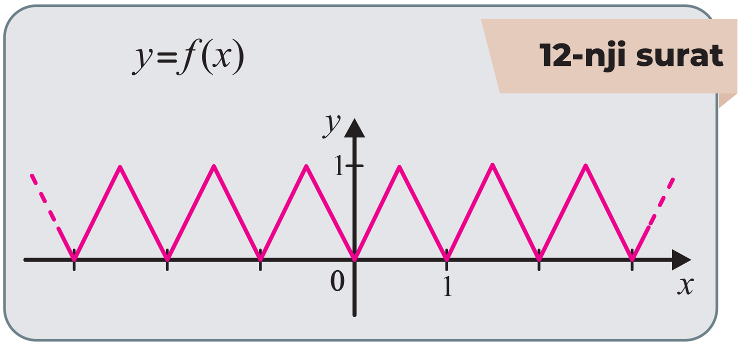
Ilki $y=x^2$ funksiýanyň grafigini saga 3 birlige gorizontal süýşürýäris we $y=(x-3)^2$ funksiýanyň grafigini alýarys. Soň bu grafigi Ox okuna görä simmetrik şöhlelendirýäris. Oy oky boýunça 2 deň uzaltmagy ýerine ýetirýäris we $y=-2(x-3)^2$ funksiýanyň grafigini alýarys. Ahyrynda bu grafigi ýokary 1 birlige süýşürýäris we $f(x)=1-2(x-3)^2$ funksiýanyň grafigini alýarys. (11-*nji surat*).

11-nji surat



7-nji mysal. 12-nji suratda $y=f(x)$ funksiýanyň grafigi berlen. Bu grafikden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini guruň.

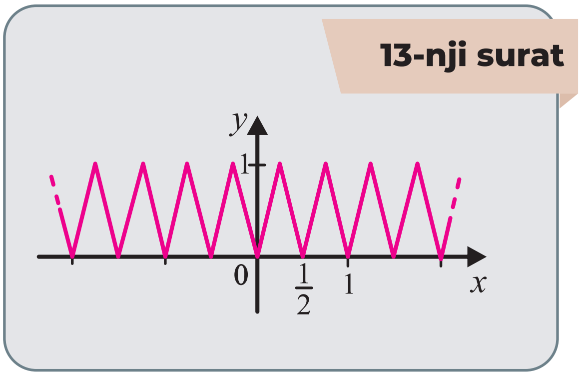
a) $y=f(2x)$; b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$.



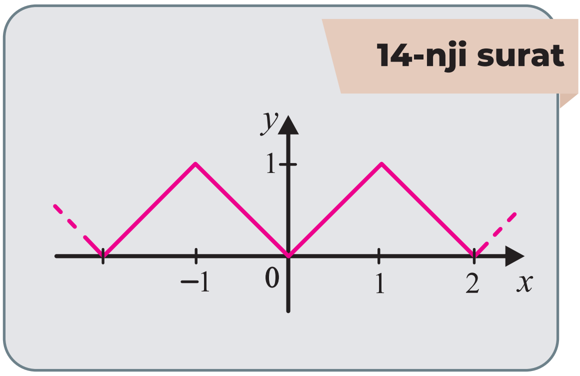
Çözülişi.

a) $y=f(2x)$ funksiýanyň grafigini gurmak üçin $f(x)$ funksiýanyň grafigini *Oy* okuna *Ox* oky boýunça 2 deň gysýarys (13-*nji surat*).

b) $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ funksiýanyň grafigini gurmak üçin $f(x)$ funksiýanyň grafigini *Oy* okundan *Ox* oky boýunça 2 deň uzaldýarys (14-*nji surat*).



$y=f(2x)$



$y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$

MYSALLAR

1. $f(x)$ funksiýanyň grafigi berlen bolsa, aşakdaky funksiýalaryň grafigi nähili gurulýandygyny düşündiriň.

a) $y=f(x)-1$ b) $y=f(x-2)$ c) $y=f\left(\frac{1}{4}x\right)$

d) $y=f(x)+4$ e) $y=f(-x)$ f) $y=3f(x)$

g) $y=-f(x)$ h) $y=\frac{1}{3}f(x)$ i) $y=f(x-5)+2$

j) $y=f(x+1)-1$ k) $y=4f(x+1)+3$ l) $y=f(4x)$

m) $y=-f(x)+5$ n) $y=3f(x)-5$ o) $y=1-f(-x)$

2. g funksiýanyň grafigi f funksiýanyň grafiginden nähili çalşyrmalaryň kömeginde alnandygyny düşündiriň.

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$

b) $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2+2$

c) $f(x)=x^3,\ g(x)=(x-4)^3$

d) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^3-4$

e) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x+2|-2$

f) $f(x)=|x|,\ g(x)=|x-2|+2$

g) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=-\sqrt{x}+1$

h) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=\sqrt{-x}+1$

3. $y=x^2$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini çyzyň.

a) $g(x)=x^2+1$

b) $g(x)=(x-1)^2$

c) $g(x)=-x^2$

d) $g(x)=(x-1)^2+3$

4. $y=\sqrt{x}$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafigini çyzyň.

a) $g(x)=\sqrt{x-2}$

b) $g(x)=\sqrt{x}+1$

c) $g(x)=\sqrt{x+2}+2$

d) $g(x)=-\sqrt{x}+1$

5. Berlen funksiýalara 15-nji suratda berlen grafiklerden laýygyny tapyň.

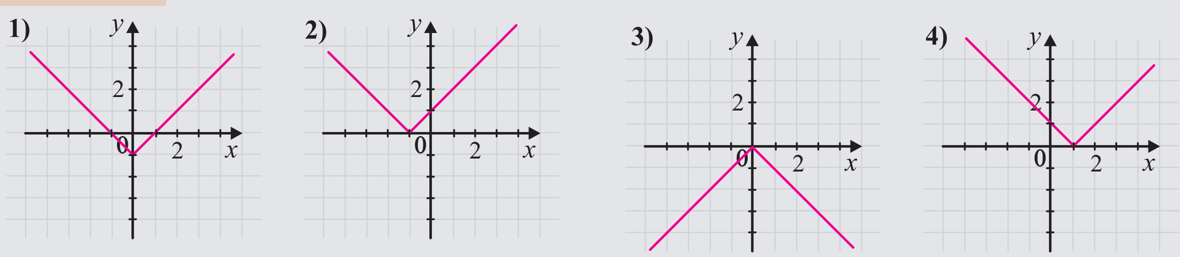
a) $y=|x+1|$

b) $y=|x|-1$

c) $y=|x-1|$

d) $y=-|x|$

15-nji surat



6. Aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini standart funksiýanyň grafigi üstünde degişli çalşyrmalary ýerine ýetirip çyzyň.

a) $f(x)=x^2+3$

b) $f(x)=\sqrt{x}+1$

c) $f(x)=|x|-1$

d) $f(x)=\sqrt{x}+1$

e) $f(x)=(x-5)^2$

f) $f(x)=(x+1)^2$

g) $f(x)=|x+2|$

h) $f(x)=\sqrt{x-4}$

i) $f(x)=-x^3$

j) $f(x)=-|x|$

k) $y=\sqrt[4]{-x}$

l) $y=\sqrt[3]{-x}$

m) $y=\dfrac{1}{4}x^2$

n) $y=-5\sqrt{x}$

o) $y=3|x|$

p) $y=\dfrac{1}{2}|x|$

q) $y=(x-3)^2+5$

r) $y=\sqrt{x+4}-3$

s) $y=3-\dfrac{1}{2}(x-1)^2$

t) $y=2-\sqrt{x+1}$

u) $y=|x+2|+2$

v) $y=2-|x|$

w) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{x+4}-3$

x) $y=3-2(x-1)^2$.

7. Berlen f funksiýanyň grafigine görkezilen çalşyrmalar ulanylan. Jemleýji funksiýanyň formulasyny ýazyň.

a) $f(x)=x^2$, 3 birlik aşak süýşüriň.

b) $f(x)=x^3$, 5 birlik ýokaryk süýşüriň.

c) $f(x)=\sqrt{x}$, 2 birlik çepe süýşüriň.

d) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, 1 birlik saga süýşüriň.

e) $f(x)=|x|$, 2 birlik çepe we 5 birlik aşak süýşüriň.

f) $f(x)=|x|$, x okuna görä şekillendirip, 4 birlik saga we 3 birlik ýokaryk süýşüriň.

g) $f(x)=\sqrt[4]{x}$, y okuna görä simmetrik şöhlelendiriň we 1 birlik ýokaryk süýşüriň.

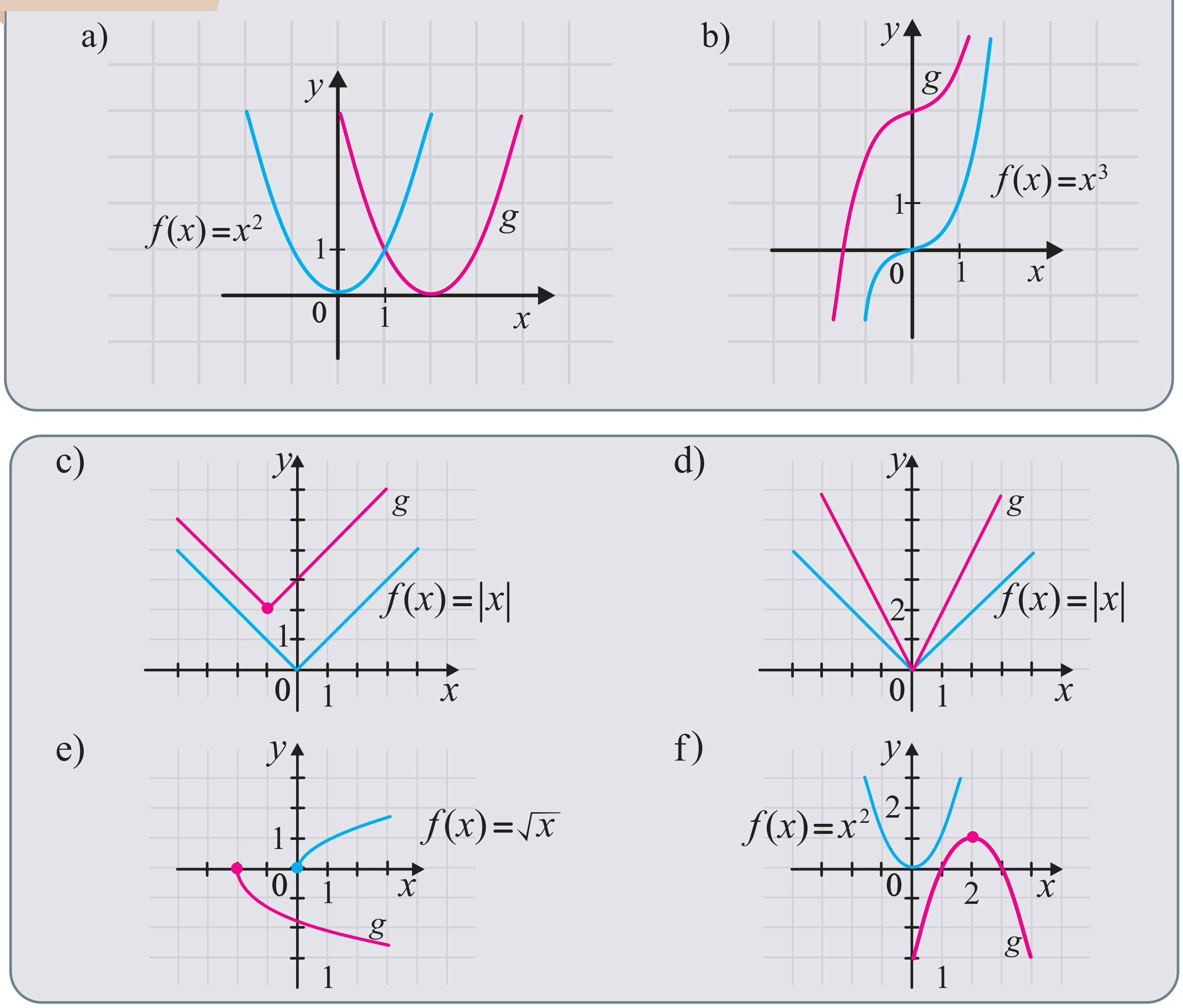
h) $f(x)=x^2$, 2 birlik çepe süýşüriň we x okuna görä simmetrik şöhlelendiriň.

i) $f(x)=x^2$, 2 deň wertikal uzaldyp, 2 birlik aşak we 3 birlik saga süýşüriň.

j) $f(x)=|x|$, $\frac{1}{2}$ deň wertikal ugurda gysmagy ýerine ýetirip, 1 birlik çepe we 3 birlik ýokaryk süýşüriň.

8. f we g funksiýalaryň grafigi berlen (16-*njy surat*). f funksiýadan peýdalanyp g funksiýanyň formulasyny tapyň.

16-njy surat



9. $y = f(x)$ funksiýa berlen, 17-nji suratda aşakdakylara degişli grafigi tapyň.

a) $y = f(x-4)$

b) $y = f(x)+3$

c) $y = 2f(x+6)$

d) $y = -f(2x)$

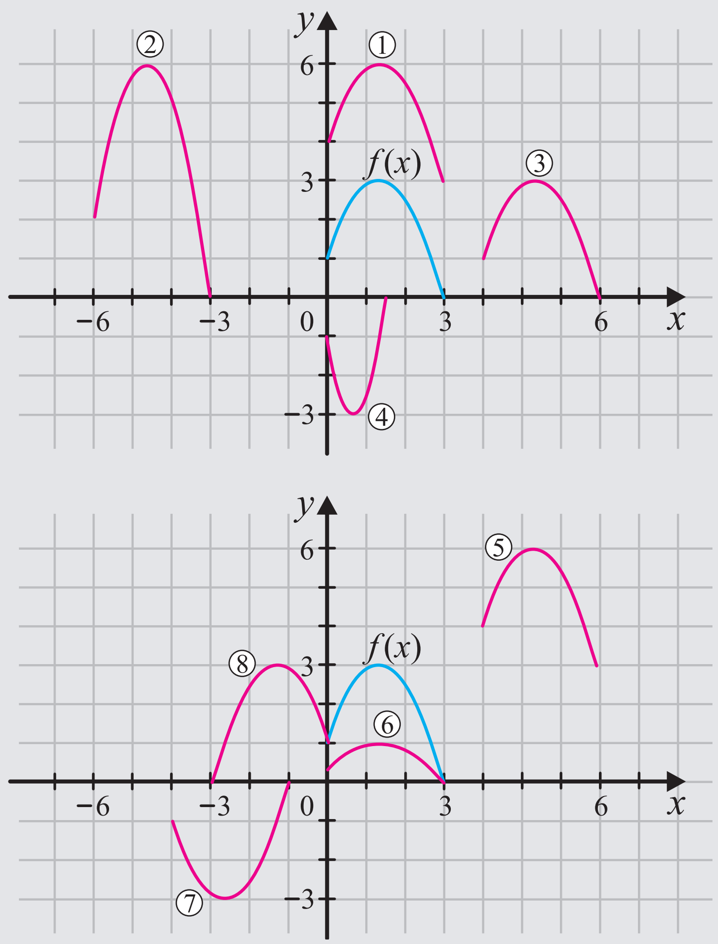
e) $y = \frac{1}{3}f(x)$

f) $y = -f(x+4)$

g) $y = f(x-4)+3$

h) $y = f(-x)$

17-nji surat



ÇYZYKLY WE KWADRATIK MODELIRLEMELER

Matematiki modelirleme gündelik durmuşymyzdaky dürli prosesleri öwrenmegiň esasy analitik serişdesi hasaplanýar.

Aşakdaky meselelere garap geçýäris.

1-nji mesele. Porşenli nasos iň köpi bilen nähili çukurdan suw çykaryp bilşini tapyň (1-*nji surat*).

Çözülişi.

Mälim bolşy ýaly, porşenli nasosyň turbasyndaky suw sütünininiň basyşy

$$p = \rho g h$$

formula bilen hasaplanýar.

Bu ýerde $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ – suwuň dykyzlygy, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ – erkin gaçma tizlenmesi, h – suw sütünininiň beýikligi.

Nasos ýeriň üstünde ýerleşendigi üçin suwuň sütünininiň beýikligine *suwuň çuňlugy* diýilýär. Diýmek, suwuň çuňlugyny

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

deňlikden tapmak mümkin.

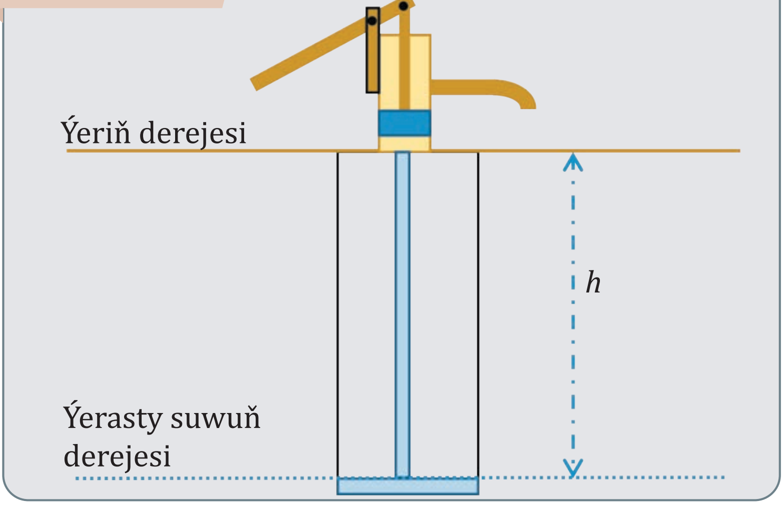
1643-nji ýylda italýan fizigi Ewaželista Torriçelli tejribelerinde suwuň sütünininiň basyşy atmosfera basyşy $p_0 = 100\ 000$ Pa-dan aşyp gitmeýänligi subut edilen, ýagny $p \le p_0$. Şonuň üçin porşenli nasosda suwuň çuňlugy

$$h = \frac{p}{\rho g} \le \frac{p_0}{\rho g} = \frac{100000}{1000 \cdot 10} = 10\ \mathrm{m}$$

-den aşyp gitmeýän eken.

Jogaby: Porşenli nasos iň köpi bilen 10 m çuňlukdan suw çykaryp bilýär.

1-nji surat



Bu modeldäki üýtgeýjiler birinji derejeli bolup, özara çyzykly amallar (goşmak we sana köpeltmek) arkaly baglanan. Şonuň üçin bu tipdäki matematiki modellere ***çyzykly modeller*** diýilýär. Goýlan meseläni çyzykly model şekline getirmek prosesine ***çyzykly modelirleme*** diýilýär.

2-nji mesele. Okuwçy *Oxy* koordinatalar tekizligini şeýle saýlady, ýagny munda öz öýüni koordinata başlangyjy *O*(0; 0) diýip aldy. Soň özi okaýan mekdebiň *C*(4; 3) nokatda ýerleşýändigini anykląpdy. Ýoluň öýi bilen mekdebiň arasyndan geçýän göni çyzykly bölegi *Ox* okuny (6; 0) nokatda, *Oy* okuny (0; 4) nokatda kesip geçýändigini hasaplap çykdy.

Mekdebe öýjükli aragatnaşyk kompaniýasynyň antennasy ornaşdyrylandygy mälim. Okuwçy ýolda hereketlenýän awtomobildäki ýolagçynyň öýjükli aragatnaşyk serişdesi antennadan ýaýraýan tolkuny iň gowy tutýan nokady tapmaga gyzyklandy.

Ýumuş. Siz bu meseläni nähili çözen bolardyňyz?

Çözülişi. Görnüşi ýaly, ýoluň mekdebe iň ýakyn nokadynda öýjükli aragatnaşyk serişdesi tolkuny iň gowy tutýar. Bu meseläni çözende ýoly teswirleýän (*AB*) göni çyzyk deňlemesini düzmeli we onuň mekdebe iň ýakyn nokadynyň koordinatalaryny tapmaly. Munuň üçin ilki bilen beýan edilenler esasynda ýagdaýyň çyzgysy çyzylýar (2-*nji surata garaň*).

Soň *A*(6; 0) we *B*(0; 4) nokatlardan geçýän göni çyzygyň deňlemesi düzülýär. Munuň üçin göni çyzygyň

$$y = kx+b$$

deňlemesine *A*(6; 0) we *B*(0; 4) nokatlaryň koordinatalaryny goýup, şu

$$0 = k\cdot 6+b$$

$$4 = k\cdot 0+b$$

deňlikler alynýar. Olardan

$$b = 4,\ \ k = -\frac{2}{3}$$

koeffisiýentler tapylýar. Diýmek, (*AB*) göni çyzygyň deňlemesi

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

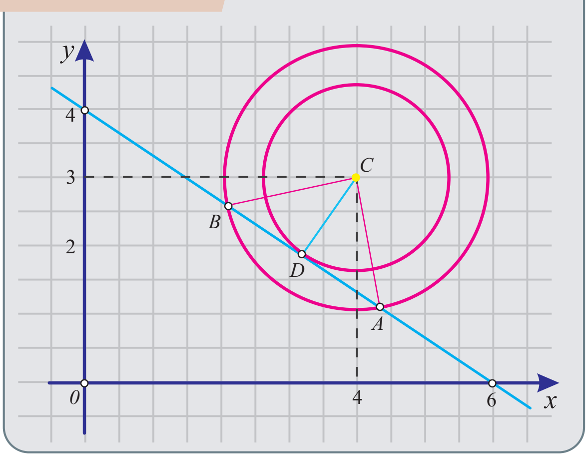
bolýar.

Meseläniň çözüwi (*AB*) göni çyzygyň *C*(4; 3) nokada iň ýakyn *D*(*x*; *y*) nokadyny tapmakdan ybarat. Bu ýagdaýyň matematiki modeli aşakdaky ýaly ýazylýar:

$$F = \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} \to min,$$

$$y = -\frac{2}{3}x+4$$

2-nji surat



Bu modeldäki üýtgeýjiler birinji we ikinji derejeli bolany üçin bu tipdäki matematiki modellere ***kwadratik modeller*** diýilýär. Goýlan meseläni kwadrat model şekline getirmek prosesine ***kwadratik modelirleme*** diýilýär.

MYSALLAR

1. Her bir berlen ýumşuň çyzykly modelini ýazyň:

a) Siz welosipedi 10 000 som başlangyç töleg we sagadyna 5000 som tarif boýunça kärendä aldyňyz.

b) Awtomobilleri abatlaýyş ussahanasy 50 000 som baza tölegi hem-de sagadyna 15 000 somdan töleg belledi.

c) Şemiň uzynlygy 30 cm we sagadyna 1,4 cm tizlikde ýanýar.

d) Programmirleme boýunça hünärmen maslahat üçin aýratyn $75 we ondan soň sagadyna $35 alýar.

e) Häzirki temperatura 25 °C we gijesine her sagatda 2 °C -a peselmegine garaşylýar.

f) Oba ilaty 6791 adam we ýylyna 7 adama kemelýär.

2. Berlen jedweldäki funksiýanyň çyzykly ýa-da kwadratikdigini anyklaň.

x	0	1	3	4	6
y	5	10	20	25	35

3. Top ýokaryk we aşak bökende onuň alýan beýikligi hemişelik ýagdaýda kemelýär. Aşakdaky jedwelde wagt boýunça böküş beýikligi görkezilen.

a) Iň laýyk gelýän kwadrat funksiýany tapyň.

b) Topuň maksimal beýikligini tapyň.

c) 2,5 sekuntda topuň näçe beýiklikde bolandygyny takmyn ediň.

t (s)	2	2,2	2,4	2,6	3
h (dýuým)	2	16	26	33	42

4. Eger daş 70 metrlik binanyň depesinden oklanan bolsa, daşyň wagta bagly beýikligi $h(t) = -5t^2 - 20t + 70$ kwadrat funksiýa bilen berlen, bu ýerde t sekuntda, beýikligi bolsa metrde. Näçe sekuntdan soň daş ýere gaçar?

5. Melike otagyny arassalamaga Umidadan iki esse köp wagt sarplaýar. Aziza otagyny arassalamagy üçin Umidadan 10 minut köpräk wagt sarplaýar. Olar otaglaryny arassalamak üçin jemi 90 minut sarplaýar. Melike otagyny arassalamagy üçin näçe wagt sarp eder?

6. Dilşat deňze düri almak üçin çümdi. Onuň t sekuntdan soňky çümme çuňlugy $h(t) = -4t^2 + 4t + 3$ metr boldy, $t \geq 0$.

a) dürler nähili çuňlukda ýerleşipdir?

b) Dilşat düri almak üçin näçe wagt sarplaýar?

c) Dilşat nähili beýiklikden suwa çümdi?

7. Jasmina köýnek tikmek üçin buýurma aldy. Ol bir günde x sany köýnek tikse, $P(x) = -x^2 + 20x$ som mukdarynda girdeji alýar.

a) Iň uly girdeji almak üçin ol näçe köýnek tikmeli?

b) Iň uly girdeji näçe soma deň?

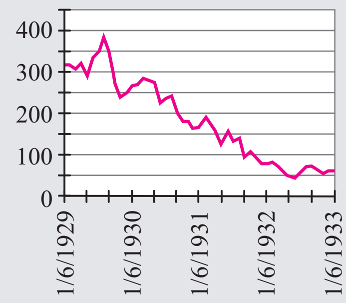
8. 2005-nji ýylda Zerewşan şäheriniň ilaty 55 000-e ýakyndy. Şol wagtda ilat sany ýylyna 2000-e golaý depginlerde artýardy. Islendik ýyl üçin Zerewşanyň ilatyny tapmaly. Munuň üçin onuň çyzykly modelini düzüň. 2010-njy ýylda Zerewşanyň ilaty näçe bolupdyr? Zerewşanyň ilat sany 2025-nji ýylda näçe boljagyny hasaplaň.

TASLAMA IŞI

Her bir grafik hekaýa edýär

Eger surat müň söze laýyk bolsa, onda grafik hiç bolmanda birnäçe hatar jümlelerine ýaraýar. Hakykatdan hem, grafik käte hekaýany köp sözlere garanda tizräk we netijeliräk aýdyp bermegi mümkin. 1929-njy ýyldaky fond bazarynyň ýykylmagynyň heläkçilikli täsiri Dou Jons indeksiniň (DJIA) grafiginden (1-*nji surat*) derrew görünýär. Şol wagtdaky gazetlerde şeýle grafikler heläkçiligiň nähili derejede uludygyny ýetirmegiň netijeli usuly hökmünde çap edilipdir.

1-nji surat



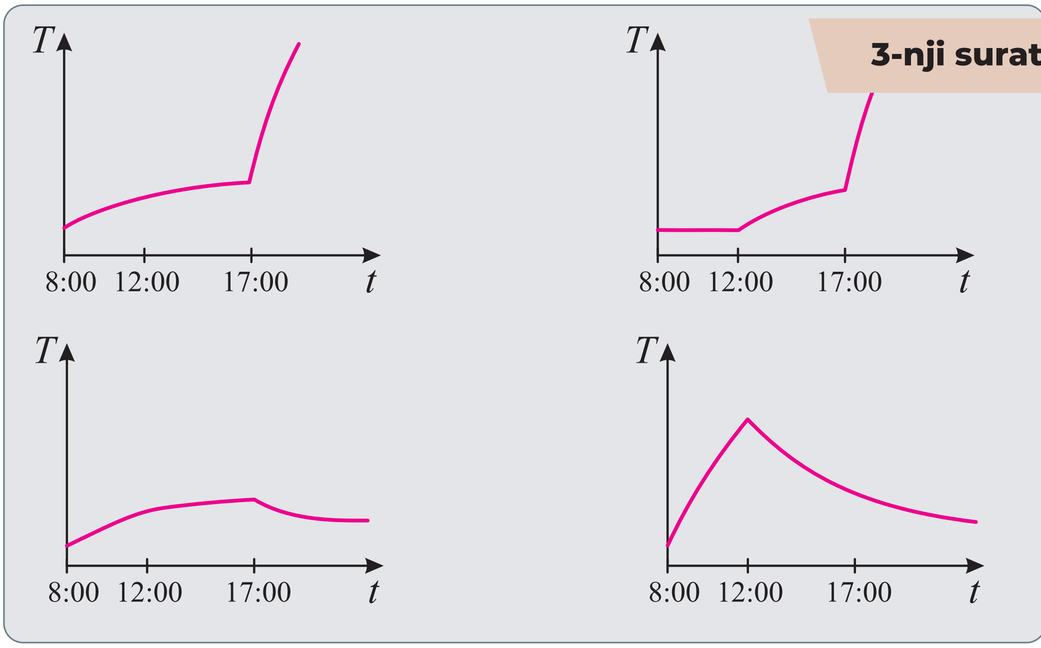
2-nji suratdaky habary ýetirmek üçin hiç hili söz gerek däl. Grafik ýönekeý bir wakany aýdyp berýär: nämedir aşak düşdi – ähtimal, söwda, peýda ýa-da önümlilik, jogapkär şahs bolsa örän howatyrlanýar.

2-nji surat

Şu taslama barlagynda biz grafikler aýdyp berýän hekaýalary okaýarys we hekaýa ediji grafikleri *döredýäris.*

Hekaýany grafikden okamak

1. Aşakda temperaturanyň wagta görä dört grafigi (sagat 8:00-dan başlap) görkezilen bolup, olardan soň üç sany hekeýa berlen. (3-*nji surat*).



3-nji surat

a) hekaýalaryň her birini grafikleriň biri bilen laýyklaň.

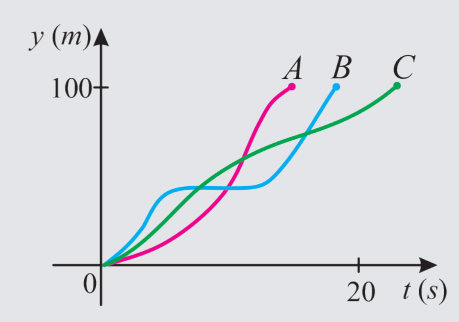
b) hiç hili hekaýa laýyk gelmeýän grafik üçin edil şeýle hekaýa ýazyň.

1-nji hekaýa	Günortan doňduryjydan eti alyp, eretmek üçin tekjä goýdum we işe gitdim. Işden öýe gaýdanymdan soň eti peçde bişirdim.
2-nji hekaýa	Ir bilen doňduryjydan eti alyp, eretmek üçin tekjä goýdum we işe gitdim. Işden öýe gaýdanymdan soň eti peçde bişirdim.
3-nji hekaýa	Ir bilen doňduryjydan eti alyp, eretmek üçin tekjä goýdum we işe gitdim. Men muny unudyp, işden öýe gelýärkäm kafede naharlandym. Öýe gelenimden soň bolsa eti gaýtadan doňduryja goýdum.

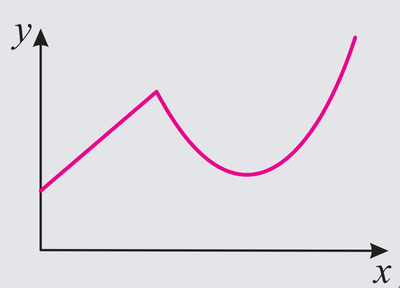
2. 100 metre päsgelçiliklerden geçip ylgamakda üç sany ylgawçy gatnaşdy. Grafikde ylgaw aralygy her bir ylgaýjy üçin wagt funksiýasy hökmünde görkezilen (4-*nji surat*). Grafik size şu çapyşyk hakda näme diýýändigini suratlandyryp beriň. Çapyşykda kim ýeňiji boldy? Her bir ylgawçy çapyşygy gutardymy? Siziňçe, B sportçy bilen näme bolupdyr?

3. Aşakdaky çyzga laýyk gelýän (islendik ýagdaýy öz içine alan) hekaýa düzüň. (5-*nji surat*).

4-nji surat



5-nji surat



II BAP. RASIONAL DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER. IRRASIONAL DEŇLEMELER

- RASIONAL DEŇLEMELER
- RASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY
- RASIONAL DEŇSIZLIKLER
- RASIONAL DEŇSIZLIKLER ULGAMY
- IRRASIONAL DEŇLEMELER
- IRRASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY

RASIONAL DEŇLEMELER

Esasy kesgitlemeler we düşünjeler

Kesgitleme

$f(x) = g(x)$ görnüşindäki deňlige ***bir näbellili deňleme*** diýilýär (bu ýerde $f(x)$ we $g(x)$-ler x näbellili aňlatmalar).

Deňlemäniň köki diýip näbelliniň berlen deňlemäni dogry sanly deňlige öwürýän bahasyna aýdylýar.

Deňlemäni çözmek diýende onuň ähli köklerini tapmak ýa-da onuň köki bolmaýandygyny görkezmek düşünilýär.

Deňlemäniň ähli kökleri toplumyna ***deňlemäniň çözüwi*** diýilýär.

Eger x näbelliniň hiç bir bahasy deňlemäni dogry sanly deňlige öwürmese, onda «***deňlemäniň köki ýok***» ýa-da «***deňlemäniň çözüwi – boş toplum***» jümlesi ulanylýar, bu ýagdaýy $\boldsymbol{x} \in \varnothing$ ýaly hem ýazmak mümkin.

1-nji mysal. $(x+3)(2x-1)(x-2)=0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Bu deňlemäniň sag tarapy nola deň, çep tarapy bolsa 3 sany aňlatmanyň köpeltmek hasylyndan ybarat. Köpeldijilerden hiç bolmanda diňe biri nola deň bolanda köpeltmek hasyly nola deň bolany üçin her bir köpeldiji nola deň bolan ýagdaýy aýratyn garap geçýäris: $x+3=0$, $2x-1=0$, $x-2=0$. Emele gelen şu deňlemelerden deňlemäniň kökleri

$x_1=-3$, $x_2=\dfrac{1}{2}$, $x_3=2$ bolýandygyny anyklaýarys.

2-nji mysal. Kökleri 0, –1 we $\sqrt{2}$ -ä deň bolan deňleme düzüň.

Çözülişi. Dürli görnüşdäki deňlemeler jogap hökmünde berilmegi mümkin. Iň ýönekeý deňleme $x(x+1)\left(x-\sqrt{2}\right)=0$ görnüşinde bolýandygyny ýatladyp geçýäris.

Bu sanlar ýene aşakdaky deňlemäniň hem köki bolup bilýär:

$$(x^2+x^3)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2+3\right)=0$$

Kesgitleme

Eger $f(x)=g(x)$ deňlemäniň ähli kökleri $f_1(x)=g_1(x)$ deňlemäniň kökleri bolsa we, tersine, $f_1(x)=g_1(x)$ deňlemäniň ähli kökleri $f(x)=g(x)$ deňlemäniň kökleri bolsa, ýagny olaryň çözüwleri gabat gelse, şeýle deňlemelere ***deň güýçli deňlemeler*** diýilýär.

3-nji mysal. $3x-6=0$ we $2x-1=3$ deňlemeleriň deň güýçlüligini barlaň.

Çözülişi. $3x-6=0$ we $2x-1=3$ deňlemeler deň güýçli, çünki her biriniň köki $x=2$-den ybarat.

Çözüwi boş toplum bolan islendik iki deňleme hem deň güýçli bolýar.

Deň güýçli deňlemeler aşakdaky ýaly belgilenýär: $3x-6=0 \Leftrightarrow 2x-1=3$.

Deňleme aşakdaky ýagdaýlarda özüne deň güýçli bolan deňlemä geçýär:

a) Deňlemäniň käbir agzasy deňligiň bir böleginden ikinji bölegine garşylykly alamat bilen geçirilende. Meselem: $f(x)=g(x)+t(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=t(x)$.

b) Deňlemäniň iki tarapy noldan tapawutly sana köpeldilende ýa-da bölünende.

Bitin rasional deňlemeler

Eger $f(x)$ we $g(x)$ funksiýalar bitin rasional aňlatmalar bilen berlen bolsa,

$$f(x)=g(x)$$

deňlemä ***bitin rasional deňleme*** diýilýär.

Şeýle deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy ähli hakyky sanlar toplumy bolýar.

Kesgitleme

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\ a_0\neq 0$ görnüşindäki deňleme **standart görnüşdäki *n*-nji derejeli bitin rasional deňleme** diýip atlandyrylýar. Bu ýerde a_0, a_1, ..., a_{n-1} koeffisiýentler, a_n azat agza, $n \in N$.

Eger $a_0 = 1$ bolsa, $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ deňleme **getirilen *n*-nji derejeli bitin rasional deňleme** diýip atlandyrylýar.

Mälim bolşy ýaly, *n*-nji derejeli köpagza *n* sanyndan köp bolmadyk köklere eýe bolmagy mümkin, diýmek, her bir standart görnüşdäki *n*-nji derejeli bitin rasional deňleme hem *n* sanydan köp bolmadyk köklere eýe bolýar.

Teorema. Bitin koeffisiýentli getirilen bitin rasional deňlemäniň kökleri bitin san bolsa, olar azat agzanyň bölüjileri bolýar.

4-nji mysal. $x^4+2x^3=11x^2-4x-4$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Ilki ony standart görnüşe getirýäris: $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Bu deňlemäniň bitin kökleri barlygyny barlamak üçin azat agzasy 4-üň ähli bitin bölüjilerini ýazyp alýarys: $\pm1, \pm2, \pm4$. Bu sanlary yzygider deňlemä goýup görüp, $x_1=1$ we $x_2=2$ sanlar deňlemäniň kökleri bolýandygyny anyklaýarys. Diýmek, $x^4+2x^3-11x^2+4x+4$ köpagza $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ köpagza galyndysyz bölünýär.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-11x^2+4x+4 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-\ \ x^4-3x^3+2x^2\qquad\qquad & x^2+5x+2 \\ \cline{1-1}
5x^3-13x^2+4x+4 & \\
-\ \ 5x^3-15x^2+10x\quad & \\ \cline{1-1}
2x^2-6x+4 & \\
-\ \ 2x^2-6x+4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Deňlemäni $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$ görnüşinde ýazýarys.

Emele gelen deňleme berlen deňlemä deň güýçli deňlemedir. Her bir köpeldijini nola deňleşdirip, deňlemäniň köklerini tapýarys.

Jogaby: $x_1 = 1;\ \ x_2 = 2,\ \ x_{3,4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

5-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

Çözülişi. Azat agzanyň bölüjileri: ±1, ±3, ±5. Bulardan –3, 1, 5 sanlary deňlemäniň çep tarapyny 0-a deň edýändigini aňsatja kesgitläp bileris. Diýmek, $x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ köpagzany aşakdaky ýaly köpeldijilere dagydyp bileris:

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - 15x + 15 = 0$$

$$x^2(x-1) - 2x(x-1) - 15(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$(x-1)(x-5)(x+3) = 0$$

Bu köpeldijileriň her birini 0-a deňleşdirip çözüp, deňlemäniň kökleri $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3$ -e deňdigine göz ýetirýäris.

Jogaby: $x_1 = 1,\ x_2 = 5,\ x_3 = -3$.

6-njy mysal. $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Berlen deňleme 4-nji derejeli serpikme (simmetrik) deňleme. Ony çözmek üçin deňlemäniň iki tarapyny $x^2 \neq 0$-a bölýäris we oňa deň güýçli deňlemäni alýarys.

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = t$ belgileme girizýäris. Onda

$$t^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \text{ bolýar.}$$

Bulardan $t^2 - 5t + 6 = 0$ deňlemäni alýarys. Bu deňlemäniň çözüwleri: $t_1 = 2$ we $t_2 = 3$. Bu bahalary belgilemä gaýtadan goýup, berlen deňlemäniň çözüwi $x + \dfrac{1}{x} = 2$ we $x + \dfrac{1}{x} = 3$ deňlemeleriň çözüwi birleşmegine deň bolýandygyny görýäris.

Bu deňlemeleri çözüp, $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ va $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

7-nji mysal. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Berlen deňleme 3-nji derejeli serpikme (simmetrik) deňleme. Ony çözmek üçin ilki köpeldijilere we oňa deň güýçli deňlemäni alýarys.

$$3(x^3 + 1) + 4x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 - 3x + 3 + 4x) = 0$$

$$(x + 1)(3x^2 + x + 3) = 0.$$

Bu deňlemäniň çözüwi aşakdaky 2 deňlemäniň çözüwiniň birleşmegine deň.

$$x + 1 = 0 \quad \text{we} \quad 3x^2 + x + 3 = 0.$$

1-nji deňlemäniň çözüwi $x = -1$, 2-nji deňleme bolsa hakyky çözüwe eýe däl.

Jogaby: $x = -1$.

Drob-rasional deňlemeler

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ görnüşe getirmek mümkin bolan deňlemelere ***drob-rasional deňleme*** diýilýär (bu ýerde $f(x)$ we $g(x)$-lar x näbellili köpagzalar).

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ görnüşindäki rasional deňlemäniň **kesgitleniş ýaýlasy** $g(x) \neq 0$.

Rasional deňlemeleri çözmegiň yzygiderligi:

- deňlemedäki ähli aňlatmalar deňligiň çep tarapyna geçirilýär;
- ähli aňlatmalar umumy maýdalawja getirilýär;
- deňleme $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ görnüşe getirilýär;
- sanawjysynyň nollary tapylýar;
- kesgitleniş ýaýlasy tapylýar;
- sanawjynyň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolan nollary deňlemäniň kökleri bolýar.

Ýa-da $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ rasional deňlemäniň çözüwini tapmak üçin u $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ görnüşdäki deň güýçli ulgam bellik edilýär we çözülýär.

Meselem, aşakdaky deňlemä garalyň:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0.$$

Drobuň sanawjysyny nola deňleşdirýäris:

$$x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -2,\; x_2 = 1.$$

Bu deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $x \neq 1$, ýagny $x = 1$ baha berlen deňlemäniň çözüwi bolup bilmeýär, diýmek, $x = 1$ del kök bolýar.

8-nji mysal. Deňlemäniň köküni tapyň: $\frac{2x+3}{x-1}=0$.

Çözülişi. $\begin{cases}2x+3=0\\ x-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=-3\\ x\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,5\\ x\neq 1\end{cases}$

Jogaby: $x=-1,5$.

9-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\frac{4x+4}{3(x+2)-3}=0$.

Çözülişi. $\begin{cases}4x+4=0\\ 3(x+2)-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x=-4\\ 3x+6-3\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ x\neq -1\end{cases}$

görnüşi ýaly, x-iň bahasy -1-e deň bolmagy mümkin däl.

Jogaby: $x\in\varnothing$.

10-njy mysal. Deňlemäniň köküni tapyň: $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$.

Çözülişi. Ähli aňlatmalary deňlikden çep tarapa geçirýäris we umumy maýdalawja getirýäris.

$$\frac{x+5}{x-2}+\frac{2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow\frac{(x+5)(x+2)+2x+4}{x^2-4}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{x^2+7x+10+2x+4}{x^2-4}=\frac{x^2+9x+14}{x^2-4}=0$$

Drob-rasional aňlatmanyň sanawjysyny nola deňleşdirýäris we nollaryny tapýarys. Wiýetiň teoremasyndan peýdalanýarys.

$$x^2+9x+14=0\Rightarrow x=-2;\, x=-7$$

Kesgitleniş ýaýlasy $x^2-4=(x-2)(x+2)\neq 0\Rightarrow x\neq -2; x\neq 2$

Görnüşi ýaly, deňlemäniň bir köki bar: $x=-7$.

Jogaby: $x=-7$.

Üns beriň! Drob-rasional deňlemäni çözende hemişe sanawjysynyň nollary deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyna degişli bolýandygyny barlaň.

11-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+5x+6}=0$.

Çözülişi. Berlen deňleme drob-rasional deňlemedir. Ilki sanawjysynyň nollaryny tapýarys.

$$(x^2-x-56)(x-3)=0\Rightarrow x=3;\quad x^2-x-56=0$$
$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-56)=225=15^2$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm15}{2}\Rightarrow x_1=8;\, x_2=-7.$$

Sanawjynyň 3 noluny tapdyk: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

Bu nollary berlen deňlemäniň maýdalawjysyndaky aňlatma goýup barlaýarys we olar maýdalawjynyň nollary bolmaýandygyny göz ýetirýäris.

Jogaby: $x_1=8$; $x_2=-7$; $x_3=3$.

12-nji mysal. Deňlemäniň köklerini tapyň.

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$$

Çözülişi. Deňligiň sag tarapyndaky aňlatmany çep tarapa geçirýäris:

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}-\frac{4-x}{x(x+2)}=0$$

we umumy maýdalawja getirýäris:

$$\frac{2x-(x+2)-(4-x)(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Sanawjysyndaky ýaýlary açyp, kwadrat deňlemä getirýäris:

$$\frac{2x-x-2-4x+x^2+8-2x}{x(x-2)(x+2)}=0 \Rightarrow \frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)}=0$$

Sanawjysynyň nollaryny tapýarys:

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow D=(-5)^2-4\cdot 6=1,\ x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{2} \Longrightarrow x_1=2;\ \ x_2=3.$$

x-iň tapylan bahalaryny berlen deňlemäniň maýdalawjysyndaky aňlatma goýup, barlaýarys. $x = 2$ baha maýdalawjydaky aňlatmany nola öwürendigi üçin del kök bolýar. Diýmek, deňleme bir $x = 3$ köke eýe eken.

Jogaby: $x = 3$.

13-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $x^2+x+1=\dfrac{15}{x^2+x+3}$.

Çözülişi. $x^2+x+1=t$ belgileme girizýäris. Deňleme aşakdaky görnüşe gelýär:

$$t=\frac{15}{t+2}$$

$t \neq -2$ bolýandygyny hasaba alyp, aşakdaky deňlemäni çözýäris:

$$t(t+2)=15$$

$$t^2+2t-15=0$$

$$t_1=-5;\ t_2=3$$

t-niň ýerine goýup, $x^2+x+1=-5$ we $x^2+x+1=3$ deňlemelere eýe bolduk. Olaryň her birini aýratyn çözýäris:

$x^2+x+6=0 \Rightarrow$ hakyky köki ýok; $\quad x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=1.$

Jogaby: $x_1=-2;\ x_2=1$.

Tekstli meseleler çözende rasional deňlemeler ulanylmagy mümkin. Aşakda hereket we işe degişli meseleler rasional deňleme görnüşinde modelirläp çözülen.

Herekete degişli mesele

Wertolýot ilkibaşda şemalyň ugrunda 120 km aralygy uçup geçdi, soň yzyna gaýtdy. Muňa ol 6 sagat wagt sarp etdi. Eger wertolýotyň şemalsyz howadaky tizligi 45 km/h-a deň bolsa, şemalyň tizligini tapyň.

Çözülişi. Şemalyň tizligini x km/h bilen belgiläliň. Onda şemalyň ugry boýunça wertolýotyň tizligi $(45 + x)$ km/h we şemala garşy ugurda bolsa $(45 - x)$ km/h -a deň bolýar. Meseläniň şerti boýunça, wertolýot jemi 6 sagat wagt sarp edipdir. Aralygy tizlige bölüp, goşsak, jemi wagta deň bolýar.

$$\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}=6$$

Drob-rasional deňleme emele geldi: $\frac{120}{45+x}+\frac{120}{45-x}-6=0$

$$\frac{120(45-x)+120(45+x)-6(45+x)(45-x)}{(45+x)(45-x)}=0$$

Sanawjysyny ýönekeýleşdirýäris we nola deňläp çözýäris:

$$6x^2-1350=0$$
$$x^2=225$$
$$x_1=-15;\ x_2=15$$

Tizlik otrisatel baha kabul etmänligi üçin $x=-15$ kök bolup bilmeýär. Diýmek, şemalyň tizligi 15 km/h.

Jogaby: şemalyň tizligi 15 km/h.

Işe degişli mesele

Iki traktorçy bilelikde ekin meýdanyny 4 günde agdardy. Eger 1-nji traktorça şüdügäri aýratyn ýerine ýetirmegi üçin 2-nji traktorça görä 6 gün kem wagt gerek bolsa, her bir traktorçy işi näçe günde ýerine ýetirer?

Çözülişi. 1-nji traktorçy ekin meýdanyny x günde şüdügärlesin. Onda 2-nji traktorçy şu meýdany $(x + 6)$ günde şüdügärleýär. Diýmek, 1-nji traktorçy 1 günde meýdanyň $\frac{1}{x}$ bölegini, 2-nji traktorçy bolsa $\frac{1}{x+6}$ bölegini şüdügärleýär. Meseläniň şertine görä, şu meýdany olar bilelikde 4 günde şüdügärleýär. Ýagny ikisi 1 günde meýdanyň $\frac{1}{4}$ bölegini şüdügärleýär.

Deňlemäni düzýäris we çözýäris: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{4}$

$$\frac{4(x+6)+4x-x(x+6)}{4x(x+6)}=0$$

$$\frac{-x^2+2x+24}{4x(x+6)}=0$$

Emele gelen rasional deňleme aşakdaky ulgama deň güýçli.

$$\begin{cases} x^2-2x-24=0; \\ 4x(x+6)\neq 0; \end{cases} \qquad D=(-2)^2-4\cdot(-24)=100;\ x_{1,2}=\frac{2\pm10}{2}\Rightarrow x_1=6;\ \ x_2=-4$$

Günleriň sany otrisatel bolmaýar, şonuň üçin $x = -4$ jogap bolup bilmeýär. Diýmek, 1-nji traktorçy şüdügäri 6 günde, 2-nji traktorçy bolsa $x+6=6+6=12$ günde ýerine ýetirýär.

Jogaby: 1-nji traktorçy 6 (gün), 2-nji traktorçy 12 (gün).

MYSALLAR

Drob-rasional deňlemeleri çözüň (1–10).

1. $\frac{1}{x}-\frac{2x}{x+1}=0$

2. $\frac{2y-5}{y+5}=\frac{3y+21}{2y-1}$

3. $\frac{5x-7}{x-3}=\frac{4x-3}{x}$

4. $\frac{x+1}{2(x-1)}=\frac{9}{2(x+4)}+\frac{1}{x-1}$

5. $\frac{2x}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{4x}{x^2-1}$

6. $\frac{x^2-2x}{x-2}=x^2-2$

7. $\frac{7}{2x+9}-6=5x$

8. $\frac{15}{x-2}=\frac{14}{x}+1$

9. $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2}$

10. $\frac{3x}{x^2-1}=2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$

Drob-rasional deňlemeleri çözüň (11–30).

11. $\frac{1}{x^2-12x+36}+\frac{12}{36-x^2}=\frac{1}{x+6}$

12. $\frac{8c-3}{4c^2-2c+1}+\frac{6}{8c^3+1}=\frac{2}{2c+1}$

13. $\frac{3x-2}{x-1}+\frac{x-4}{x+3}=\frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}$

14. $\frac{2-3x}{x+1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{x+1}{2-3x}=\frac{4}{3}$

15. $\frac{x-49}{x+6}+\frac{2x+50}{x+5}=2$

16. $\frac{(x+2)^2-9}{x-1}\cdot(x-5)=-24$

17. $(x+4)(x^2-1)=4x^2+24x-\frac{4x^2+20x}{5x+x^2}$

18. $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}=\frac{x-4}{2x-3}-\frac{2x-3}{x+4}$

19. $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1+x}$

20. $\frac{6}{x-1}+\frac{6}{(x-1)(x-3)}+\frac{3}{3-x}=7$

21. $\frac{x^5-4x^3}{x-2}=16+2x^3$

22. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{9}{(x+2)(x-7)}=1$

23. $x^2+x+1=\frac{15}{x^2+x+3}$

24. $\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{3x-2}{x^2+2}=2\frac{2}{3}$

25. $x^2-5x+\frac{24}{x^2-5x}+10=0$

26. $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=2\frac{1}{2}$

27. $\frac{2}{x^2+3}+\frac{4}{x^2+7}=1$

28. $\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}$

29. $\frac{x^2-3x-1}{x^2-2x+4}=\frac{x^2-2x}{x^2-x+1}$

30. $\frac{x^2-4x-1}{x^2-3x+5}=\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x+2}$

31. Iki şäheriň arasyndaky aralyk derýa ýoly bilen 80 km. Enwer gämide şu şäherleriň birinden ikinjisine baryp-gelmek üçin 8 sagat 20 minut wagt sarp etdi. Derýanyň akymynyň tizligi 4 km/h bolsa, gäminiň ýata suwdaky tizligini tapyň.

32. Iki işçi şol bir işi bilelikde ýerine ýetirse, 12 günde tamamlaýar. Eger öň biri işläp, işiň ýarysyny tamamlandan soň onuň ýerine ikinjisi işlese, iş 25 günde gutarýar. Şu işi her haýsy işçi ýeke özi ýerine ýetirse, näçe günde tamamlar?

33. «A» traktor 3 günde 7 ha, «B» traktor bolsa 2 günde 17 ha ýeri şüdügärläp bilýär. Fermer hojalygynda «A» traktordan 2 sany we «B» traktordan 1 sany bar. Eger bu traktorlar bilelikde işledilse, fermer hojalygynyň 237 ha ýerini näçe günde şüdügär eder?

34. Awtomobil ýoluň 80 kilometrlik böleginde 120 km/h, soňky 25 kilometrlik böleginde 50 km/h hem-de soňky 35 kilometrlik böleginde 70 km/h tizlik bilen hereketlendi. Onuň bütin ýoluň dowamyndaky ortaça tizligini tapyň.

35. Bir işi birinji işçiniň ýeke özi *a* günde ýerine ýetirýär, ikinji işçi şu işi ýerine ýetirmek üçin birinji işçä garanda *b* gün artyk wagt sarf edýär. Eger üçünji işçiniň ýeke özi birinji işçä garanda *b* gün tizräk ýerine ýetirip bilse, şu işi üç işçi bilelikde işläp näçe günde tamamlar?

36. Derýanyň ýakasynda ýerleşen A we B şäherleriň arasyndaky aralyk 96 km. Katerde A şäherden B şähere baryp gelmek üçin 10 sagat sarplady. Eger derýanyň akymynyň tizligi 4 km/h bolsa, kateriň ýata suwdaky tizligini tapyň.

RASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY

Iki näbellili iki deňleme gatnaşýan ulgamlar*y* çözmek bize mälim bolan algebraik goşmak, ýerine goýmak, üýtgeýjini çalşyrmak usullaryna daýanýar. Munda gatnaşan drob-rasional aňlatmalaryň maýdalawjylary nola deň bolmaýandygyny belläp geçýäris.

Ýerine goýmak usuly

1-nji mysal. Aşakdaky deňlemeler ulgamyny ýerine goýmak usulyndan peýdalanyp çözüň.

$$\begin{cases} 3xy = 21 \\ x - 8y = -1 \end{cases}$$

Çözülişi. 2-nji deňlemeden $x - 8y = -1 \Rightarrow x = 8y - 1$.

x-iň emele gelen bu bahasyny 1-nji deňlemä goýup, $3(8y-1)y = 21$ deňlemä gelýäris.

Bu deňlemäni çözüp,

$$(8y-1)y = 7$$

$8y^2 - y - 7 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{7}{8}; y_2 = 1$ bahalary tapýarys we olary $x = 8y - 1$-e goýup $\Rightarrow x_1 = -8; x_2 = 7$ bolýandygyny anyklaýarys.

Jogaby: $\left(-8; -\frac{7}{8}\right), (7;1)$.

2-nji mysal. Ýerine goýmak usulyndan peýdalanyp $\begin{cases} 2x^2 + y = 4 \\ x^4 + y^2 = 16 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

$$y = 4 - 2x^2.$$

$$x^4 + (4 - 2x^2)^2 = 16$$

$$x^4 + 16 - 16x^2 + 4x^4 = 16$$

$$5x^4 - 16x^2 = 0$$

$$x^2(5x^2 - 16) = 0, \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{\sqrt{5}},\ x_3 = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y_1 = 4;\ y_2 = -\frac{12}{5};\ y_3 = -\frac{12}{5}$$

Jogaby: $(0;4), \left(\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}; -2\frac{2}{5}\right)$.

Algebraik goşmak usuly

3-nji mysal. Şu deňlemeler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} x^2 + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Çözülişi. Iki deňlemede y näbelli garşylykly alamatly koeffisiýent bilen gatnaşýar, şonuň üçin bu deňlemeleri agzama-agza goşýarys.

$$+\begin{cases} x^2+y=27 \\ x-y=3 \end{cases}$$
$$x^2+x=30$$

$x^2+x-30=0$ bir näbellili kwadrat deňlemä getirdik.

$$x_1=\frac{-1-11}{2}=-6 \Rightarrow y_1=-9$$
$$x_2=\frac{-1+11}{2}=5 \Rightarrow y_2=2$$

Jogaby: (–6; –9), (5; 2).

4-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny algebraik goşmak usulynyň kömeginde çözüň.

$$\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ x^2-x^2y=1. \end{cases}$$

Çözülişi. 2-nji deňlemäni 3-e köpeldip, 1-nji deňlemä goşsak:

$$+\begin{cases} x^3-y^3-3x^2+3y^2x=-2 \\ 3x^2-3x^2y=3 \end{cases}$$

1-nji deňleme tapawudyň kubunyň formulasyna gelýär: $x^3-y^3-3x^2y+3y^2x=1$.

Mundan:
$$\begin{cases} (x-y)^3=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2-x^2y=1 \end{cases}$$

Indi bolsa ýerine goýmak usulyndan peýdalanýarys we ulgamy çözýäris.

$$\begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^2(x-1)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^2-x^3+x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ x^3-2x^2+1=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ (x-1)(x^2-x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=1;\quad x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, bu bahalary $y=x-1$ deňlemä goýup, $y_1=0$, $y_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $y_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ bolýandygyny tapýarys.

Jogaby: $(1;0),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Üýtgeýjini çalşyrmak usuly

5-nji mysal. Deňlemeler ulgamyny çözüň:

$$\begin{cases} x+xy+y=11 \\ x^2y+xy^2=30. \end{cases}$$

Çözülişi. Aşakdaky ýaly belgileme girizýäris.

$$x+y=a \quad \text{we} \quad xy=b$$

Şunda ulgam aşakdaky görnüşe gelýär:

$$\begin{cases} a+b=11 \\ ab=30 \end{cases}$$

Bu ulgamy çözüp, $a_1=6,\ b_1=5$ we $a_2=5,\ b_2=6$ -lary anyklaýarys. Indi aşakdaky ulgamlary çözýäris:

$$\begin{cases} x+y=6 \\ xy=5 \end{cases} \text{ we } \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$$

Olaryň köklerinden düzülen toplum deňlemeler ulgamynyň çözüwi bolýar.

Jogaby: $(5;1),\ (1;5),\ (2;3),\ (3;2)$.

MYSALLAR

Deňlemeler ulgamyny çözüň.

1. $\begin{cases} y-x^2+x=1 \\ x=y-4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x^2-y=2 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ 2x^2=y+11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} xy=20 \\ x-4y=2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+y^2-2xy=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-y=10 \\ x^2-y^2=20-xy \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y=8 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x\cdot y=300 \\ x+y=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^3+8y^3=35 \\ x^2-2xy+4y^2=7 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+2y}+\dfrac{x+2y}{xy}=2 \\ \dfrac{xy}{x-2y}+\dfrac{x-2y}{xy}=4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2-xy+\dfrac{1}{4}y^2+x-\dfrac{1}{2}y=2 \\ \dfrac{1}{4}x^2+xy+y^2+2y+x=3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{x+y}+6\dfrac{x+y}{x-y}=5 \\ xy=-2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{2x}{y}+\dfrac{3y}{x}+6=\dfrac{3}{xy} \\ \dfrac{6y}{x}+\dfrac{4x}{y}-1=\dfrac{45}{xy} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=2 \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y) \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2+y^2=x-y \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x-y)^2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3)=160 \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=-80 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0 \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\dfrac{10}{9}(x+y)^2 \\ x^4y+xy^4=\dfrac{2}{3}(x+y)^3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy=6 \\ yz=15 \\ zx=10 \end{cases}$

RASIONAL DEŇSIZLIKLER

Rasional deňsizlikleri çözmek edil rasional deňlemeleri çözmek ýaly, ilki deňsizligi ýönekeý deň güýçli deňsizlige getirmek arkaly ýerine ýetirilýär. Munda aşakdaky düzgünler berjaý edilýär:

1-nji düzgün. Deňsizligiň islendik agzasyny deňsizligiň bir böleginden ikinji bölegine garşylykly alamat bilen geçirmek mümkin.

2-nji düzgün. Deňsizligiň iki bölegini birmeňzeş položitel sana köpeltmek ýa-da bölmek mümkin, munda deňsizlik belgisi üýtgemeýär.

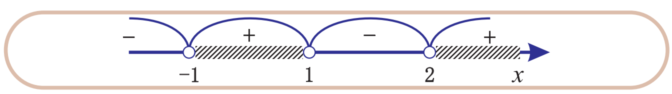
3-nji düzgün. Deňsizligiň iki bölegini birmeňzeş otrisatel sana köpeltmek ýa-da bölmek mümkin, munda deňsizlik belgisi garşylyklysyna üýtgeýär.

Rasional deňsizligi çözende ***interwallar usulyndan*** peýdalanylýar.

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

Çözülişi. 1. Deňsizligiň sag tarapy nola deň, diýmek, çep tarapdaky aňlatmanyň nollaryny tapýarys: $x=1, x=-1, x=2$.

2. x-iň bu bahalaryny san okunda belgileýäris we emele gelen interwallarda çep tarapynyň alamatyny anyklaýarys.



3. Deňsizlik belgisi noldan uly bolany üçin položitel alamatly aralyklar berlen deňsizligiň çözüwi bolýar.

Jogaby: $x \in (-1;1) \cup (2;\infty)$

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $x^4-3<2x(2x^2-x-2)$.

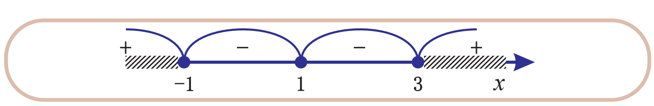
Çözülişi. 1. Bitin rasional deňsizlik berlen. Ony çözmek üçin ilki ähli aňlatmalary deňsizligiň çep tarapyna geçirýäris.

$$x^4-4x^3+2x^2+4x-3<0$$

2. Çep tarapda emele gelen aňlatmany köpeldijilere dargadýarys. Munuň üçin onuň nollaryny tapýarys: $x_1=-1,\ x_2=1$ va $x_3=3$.

$$(x-1)^2(x+1)(x-3)\geq 0$$

3. Nollary sanlar okunda belgileýäris we interwallarda çep tarapdaky aňlatmanyň alamatlaryny belgileýäris.



4. Çep tarapdaky aňlatmada $(x-1)$ ikagza ikinji (jübüt) derejede, şonuň üçin san okunda 1-den geçende alamat üýtgemeýär.

5. Deňsizligiň belgisi noldan uly ýa-da deň bolany üçin položitel alamatly aralyklar we 1 sany deňsizligiň çözüwi bolýar.

Jogaby: $x \in (-\infty;-1] \cup [3;+\infty) \cup \{1\}$

Drob-rasional deňsizlikler

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$, $\frac{f(x)}{g(x)}<0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$ görnüşe getirmek mümkin bolan deňsizlikler ***drob-rasional deňsizlikler*** diýilýär.

Drob-rasional deňsizlikleri çözmegiň yzygiderligi:

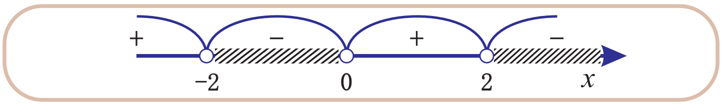
- sanawjysynyň nollary tapylýar;
- maýdalawjysynyň nollary tapylýar;
- surat we maýdalawjynyň nollary san okunda belgilenýär;
- emele gelen interwallarda $\frac{f(x)}{g(x)}$-iň alamatlary tapylýar;
- deňsizligi kanagatlandyrýan aralyk(lar) deňsizligiň çözüwi bolýar.

3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\frac{4}{x}-x<0$.

Çözmek

1. Umumy maýdalawja getirýäris: $\frac{4-x^2}{x}<0$.

2. Sanawjynyň nollary x = 2, x = –2, maýdalawjynyň noly x = 0.
3. Nollary san okunda belgileýäris we interwallarda alamatlary anyklaýarys.



Deňsizlik belgisi noldan kiçi bolany üçin otrisatel alamatly aralyklar berlen deňsizligiň çözüwi bolýar.

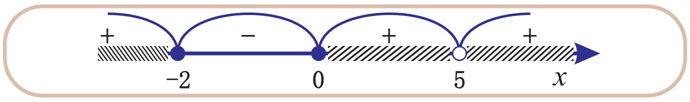
Jogaby: $x\in(-2;0)\cup(2;\infty)$.

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\frac{x(x+2)^3}{(x-5)^2}\geq 0$.

Çözmek

1. Sanawjysynyň nollary $x=0$ va $x=-2$.
2. Maýdalawjysynyň noly x = 5.

3. Sanlar okunda bu bahalary belgiläp çykýarys we interwallarda alamatlary anyklaýarys, munda çep tarapdaky aňlatmada $(x-5)$ aňlatma ikinji (jübüt) derejede gatnaşýar, şonuň üçin san okunda 5 sanyndan iki tarapda ýerleşen interwallar birmeňzeş alamata eýe.



4. Deňsizlik belgisi noldan uly ýa-da deň bolany üçin položitel alamatly aralyklar berlen deňsizligiň çözüwi bolýar.

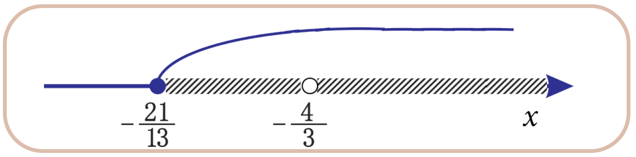
Jogaby: $x\in(-\infty;-2]\cup[0;5)\cup(5;\infty)$.

Üns beriň! $\frac{f(x)}{g(x)} < a$ görnüşdäki deňsizlikleri çözende deňsizligiň iki tarapyny $g(x) \neq 0$ diýip hasaplap, $g(x)$ ga köpeltmek nädogry jogaba getirmegi mümkin. Çünki $g(x)$-iň polożitel ýa-da otrisateldigi anyk däl.

Meselem, $\frac{2x-1}{3x+4} \leq 5 \quad \Big| \cdot (3x+4) \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3x+4}\cdot(3x+4) \leq 5\cdot(3x+4) \\ 3x \neq -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \leq 15x+20 \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{21}{13} \\ x \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Bu ulgamy sanlar okunda şekillendirýäris:



Görnüşi ýaly, deňsizligiň emele gelen çözüwi $\left[-\frac{21}{13}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{4}{3}; \infty\right)$ bolýar diýen nädogry netijä gelýäris.

Dogry jogaby kesgitlemek üçin bu deňsizligi ädimme-ädim özbaşdak işläp çykyň we näme üçin şeýle usul dogry jogap bermädigi barada pikir ediň.

MYSALLAR

Deňsizlikleri çözüň.

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0$

2. $\frac{x-4}{(x-3)x} < 0$

3. $\frac{5+4x}{(x-2)(x+1)} \geq 0$

4. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geq 0$

5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5$

6. $\frac{4x-3}{x-5} > 5$

7. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0$

8. $\frac{16-25x^2}{x^2-4x+4} > 0$

9. $\frac{2x-7}{6} + \frac{7x-2}{3} < 3 - \frac{1-x}{2}$ deňsizligiň bitin sanlardan ybarat çözüwlerinden iň ulusyny görkeziň.

10. $\frac{x-4}{2x+6} \leq 0$ deňsizligiň ähli bitin sanlardaky çözüwleriniň jemini tapyň.

11. $\frac{1}{x}<1$ deňsizligiň $(-3;\ 3)$ aralykdaky bitin çözüwleriniň sanyny tapyň.

12. $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\geq 0$ deňsizligiň otrisatel bitin sanlardan ybarat çözüwlerinden iň ulusyndan iň kiçisiniň tapawudyny tapyň.

13. $\frac{(x+4)^2-8x-25}{(x-6)^2}\geq 0$ deňsizligiň bitin sanlardan ybarat çözüwlerinden näçesi $[-5;\ 6]$ kesimde ýerleşen?

14. $\frac{6x-1}{4x+3}\leq\frac{3x-2}{2x-1}$

15. $\frac{5}{-6x+3}+\frac{6x}{1-2x}\geq 0$

16. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25}\leq 0$

17. $\frac{6x+1}{4x-3}\leq\frac{3x+2}{2x+1}$

18. $\frac{6}{-4x+2}-\frac{5x}{1-2x}\leq 0$

19. $\frac{49x^2-70x+25}{x^2-3x}\leq 0$

20. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2-9}-\frac{3x+1}{3x-12}\leq 0$

21. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9}-\frac{3x+7}{3x-6}\leq 0$

22. $\frac{1}{2x^2-5x}-\frac{2}{25+10x}+\frac{4}{25-4x^2}\geq 0$

23. $\frac{6}{-4x-x^2}-\frac{2}{x^2-4x}+\frac{x}{x^2-16}\geq 0$

24. $\left(\frac{4}{x^2+4x}+\frac{32-3x}{x^3+64}\right):\frac{x+8}{x^3-4x^2+16x}\geq\frac{4}{4+x}$

25. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2-x}{-x^3+8}-\frac{2-x}{2x^2+x}\right):\frac{4}{x^2-2x}\geq\frac{4-x}{x+2x^2}$

RASIONAL DEŇSIZLIKLER ULGAMY

Deňsizlikler ulgamyny çözmegiň yzygiderligi:

- her bir deňsizligiň çözüwi aýratyn tapylýar;
- iki deňsizlik üçin umumy çözüw tapylýar (bu ädim san okunda şekillendirmek arkaly ýerine ýetirilmegi mümkin).

1-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} x^2-9\geq 0, \\ 2x-8<0 \end{cases}$

Çözülişi.

$$\begin{cases} x^2-9\geq 0 \\ 2x-8<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-3)\geq 0 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[3;\infty) \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$$

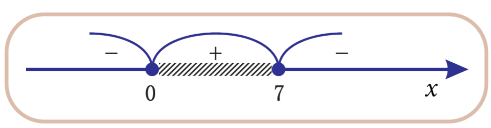
Jogaby: $x\in(-\infty;-3]\cup[3;4)$.

2-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň: $\begin{cases} 7x-x^2\geq 0 \\ x^2-6x+5<0 \end{cases}$

Çözülişi.

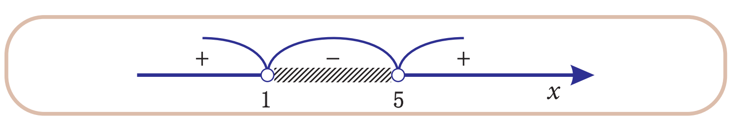
1-nji deňsizligi çözýäris: $x(7-x)\geq 0$.

$x = 0$ we $x = 7$ nollaryny sanlar okunda belgileýäris we emele gelen interwallarda alamatlary anyklaýarys.

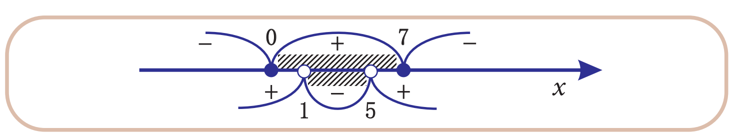


2-nji deňsizligi çözýäris: $x^2-6x+5<0$.

Nollary $x = 1$ we $x = 5$-e deň. Olary san okunda belgileýäris we emele gelen interwallarda alamatlary anyklaýarys.



Iki deňsizligiň çözüwini bir san okunda belgileýäris we iki deňsizligi hem kanagatlandyrýan aralyk ulgamyň çözüwi bolýar.



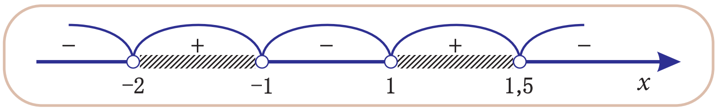
Jogaby: $x\in(1;5)$.

3-nji mysal. Deňsizlikler ulgamyny çözüň. $\begin{cases} \dfrac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0 \\ 1+2x\leq \dfrac{3}{x} \end{cases}$

1-ji deňsizligi çözýäris:

$$\frac{(3-2x)(x+2)}{x^2-1}>0$$

Sanawjysynyň we maýdalawjynyň $x=-2, x=-1, x=1,\ x=1{,}5$ nollaryny sanlar okunda belgileýäris. Emele gelen interwallarda alamatlary anyklaýarys.

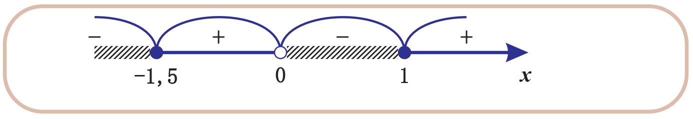


2-nji deňsizligi çözýäris: $1+2x\le\frac{3}{x}$.

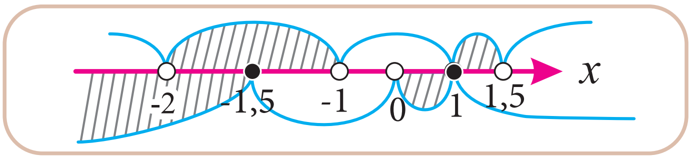
Ähli aňlatmalary deňsizligiň çep tarapyna geçirýäris we umumy maýdalawja getirýäris.

$$\frac{2x^2+x-3}{x}\le 0$$

Drobuň nollary x = 1 we x = –1,5-e deň, kesgitleniş ýaýlasy $x \neq 0$ bolýan bahalardan ybarat. Olary san okunda belgileýäris we emele gelen interwallarda alamatlary anyklaýarys.



Iki deňsizligiň çözüwini bir san okunda belgileýäris we iki deňsizligi hem kanagatlandyrýan aralyk ulgamyň çözüwi bolýar.



Jogaby: $x\in(-2;-1{,}5]$.

MYSALLAR

1. Deňsizlikler ulgamynyň çözüwi bolan ähli bitin sanlary tapyň.

a) $\begin{cases} 0{,}2x>-1 \\ -\frac{x}{3}\ge 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2}\ge\frac{x}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1-\frac{x}{4}>x \\ x-\frac{x-4}{5}>1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-\frac{x}{4}\ge 2 \\ \frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}>1 \end{cases}$

2. Deňsizlikler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge\frac{x-3}{4}-x \\ 1-x>0{,}5x-4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{5x+7}{6}-\frac{3x}{4}<\frac{11x-7}{12} \\ \frac{1-3x}{2}-\frac{1-4x}{3}\ge\frac{x}{6}-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{2x-1}{6}+\frac{x+2}{3}-\frac{x-8}{2}>x-1 \\ 2-2x>0{,}5+0{,}5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{8x+1}{3}>\frac{4x+9}{2}-\frac{x-1}{3} \\ \frac{5x-2}{3}<\frac{2x+13}{2}-\frac{x+2}{3} \end{cases}$

3. Aňlatmanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(1-x)(7-x)}$ b) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{5-x}}+\sqrt{\dfrac{4-x}{7-2x}}$

c) $\sqrt{(x-2)(x-3)}+\sqrt{(5-x)(6-x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+2}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-7}}$

4. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y=\sqrt{12-3x}+\sqrt{x+2}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{10x}$ c) $y=\sqrt{15-3x}+\sqrt{4+x}$ d) $y=\dfrac{\sqrt{-3x^2+12}}{1-5x}$

5. Deňsizlikler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x-2}<1\\ \dfrac{3x+2}{2x-3}>2\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{7-3x}{2-5x}\le 2\\ \dfrac{2x+1}{3x-3}>4\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{3x-2}{x-2}<2\\ \dfrac{5x+1}{4x-5}\ge 3\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3x-1}\le 1\\ \dfrac{2x+5}{x-4}\ge 2\end{cases}$

6. Deňsizlikler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases}x^2\le 9\\ x>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+7x-6\le 0\\ 6(x+4)-3(4-3x)<2\end{cases}$ c) $\begin{cases}5x^2-2x+1\le 0\\ 2(x+3)-(x-8)<4\end{cases}$

d) $\begin{cases}-2x^2+3x-2<0\\ -3(6x-1)-2x<x\end{cases}$ e) $\begin{cases}12(x+2)-5(5-4x)<2\\ 9x^2-6x-8\le 0\end{cases}$ f) $\begin{cases}3x-1<0\\ x^2-3x+2\ge 0\end{cases}$

7. Deňsizlikler ulgamyny kanagatlandyrýan bitin sanlaryň jemini tapyň.

a) $\begin{cases}\dfrac{9-x^2}{x}\ge 0\\ 2x-1\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x-1)}{x}\ge 0\\ 10x-1<0\end{cases}$ c) $\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x+7)}<0\\ 20x\ge 20\end{cases}$ d) $\begin{cases}\dfrac{25-x^2}{x}\le 0\\ 5x-10\le 35\end{cases}$

8. Deňsizlikler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases}3x^2-5x-2<0\\ 4-x^2>0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+x+2>0\\ x^2<9\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x^2+5x+10>0\\ x^2\ge 16\end{cases}$ d) $\begin{cases}-7x^2+5x-2>0\\ x^2\le 25\end{cases}$

e) $\begin{cases}\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}\ge 0\\ (5-x)^2\le 4\end{cases}$ f) $\begin{cases}-5x^2+x-1>0\\ x^2>81\end{cases}$ g) $\begin{cases}x^2-6x+8<0\\ x^2-36\ge 0\end{cases}$ h) $\begin{cases}x^2-16\ge 0\\ x^2-7x+12\ge 0\end{cases}$

i) $\begin{cases}x^2-5x+4\ge 0\\ 2x^2-5x+2\le 0\end{cases}$ j) $\begin{cases}x^2-9x+14<0\\ x^2-7x-8\le 0\end{cases}$ k) $\begin{cases}x^2+4x+3\le 0\\ 2x^2+5x<0\end{cases}$ l) $\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+1)}\ge 0\\ (x-4)(x+4)\le 0\end{cases}$

IRRASIONAL DEŇLEMELER

$\sqrt{2x-5} = 7$, $2\sqrt{x}+5 = 8$, $\sqrt[3]{x+3} = -1-x$ deňlemelerde näbelli san kök belgisi astynda gatnaşýar. Şular ýaly deňlemelere ***irrasional deňlemeler*** diýilýär.

Şu $\sqrt{2+\sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$, $\sqrt[5]{(x+1)^2} - \sqrt[5]{(x-1)^2} = \sqrt[5]{x^2-1}$ deňlemeler hem irrasional deňlemelerdir.

Köp halatlarda irrasional deňlemeler özüniň netijesi bolan rasional deňlemelere getirip çözülýär. Munda **aşakdaky ädimler ýerine ýetirilýär:**

- irrasional deňlemäni rasional deňlemä getirmek üçin berlen deňlemäniň iki tarapyny bir ýa-da birnäçe gezek käbir natural derejä göterilýär;
- emele gelen rasional deňlemäniň kökleri tapylýar we berlen deňlemäni kanagatlandyrýandygy barlanýar.

Muny aşakdaky teorema tassyklaýar.

Teorema. $f_1(x)=f_2(x)$ deňlemäniň iki tarapyny kwadrata götermekden emele gelen $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ deňlemäniň kökleri $f_1(x)=f_2(x)$ we $f_1(x)=-f_2(x)$ deňlemeleriň köklerinden ybarat bolýar.

Bu teorema $f_1(x)=f_2(x)$ deňlemeden $f_1^2(x)=f_2^2(x)$ deňlemä geçende kökler ýok bolmagy ýüze çykmazdan, eýsem del kökler emele gelmegi mümkinligini görkezýär.

Irrasional deňlemede ýekeje kök belgisi gatnaşsa, bu kök belgisini deňlemäniň bir tarapynda galdyryp, deňlemäniň galan agzalaryny ikinji tarapa geçirýäris. Soň bolsa deňlemäniň iki tarapyny deňleme kök belgisinden gutulýan edip käbir derejä göterýäris. Netijede rasional deňleme emele gelýär. Bu emele gelen deňlemäni çözüp, onuň köklerini berlen irrasional deňlemä goýup, barlap görmeli. Eger tapylan köklerden käbiri berlen deňlemäni kanagatlandyrmasa, ol del kök hasaplanýar.

1-nji mysal. $\sqrt{2x-1}=5$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy $2x-1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq \frac{1}{2}$

Deňlemäniň her iki tarapyny kwadrata göterýäris. $\left(\sqrt{2x-1}\right)^2=5^2$

$2x-1=25$ deňleme emele gelýär. Mundan $x = 13$ bolýandygy gelip çykýar.

Barlamak: $\sqrt{2\cdot 13-1}=\sqrt{25}=5$.

Jogaby: $x = 13$.

2-nji mysal. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. $\sqrt{x^2-x-2}=x-3$ deňlemäniň iki tarapyny kwadrata göterýäris: $x^2-x-2 = x^2-6x+9 \Rightarrow 5x=11 \Rightarrow x=2{,}2$.

Barlamak: $\sqrt{2{,}2^2-2{,}2-2}=2{,}2-3$, $\sqrt{0{,}64}=-0{,}8$; $0.8\neq -0{,}8$. Diýmek, $x=2{,}2$ del kök, deňleme çözüwe eýe däl.

Jogaby: Ø.

Irrasional deňlemeleri çözmek:

I. $\sqrt{f(x)} = g(x)$ görnüşindäki deňlemäni oňa deň güýçli bolan $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ ulgama getirip çözmek mümkin.

3-nji mysal. $\sqrt{3x^2 - 6x + 16} = 2x - 1$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

$$\sqrt{3x^2-6x+16} = 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-6x+16 = (2x-1)^2 \\ 2x-1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2-6x+16 = 4x^2-4x+1 \\ 2x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-15=0 \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 15 = 0$ deňlemäni çözýäris. $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2}, \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -5.$

$x \ge \dfrac{1}{2}$ bolany sebäpli deňlemäniň çözüwi $x = 3$.

Jogaby: $x = 3$.

II. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$ görnüşindäki deňleme aşakdaky ýaly çözülýär.

1-nji ädim: $g(x) = 0$ we $f(x) \ge 0$ 2-nji ädim: $f(x) = 0$

4-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $(x^2 - 25)\sqrt{6-2x} = 0$.

Çözülişi.

1-nji ädim: $\begin{cases} x^2 - 25 = 0 \\ 6 - 2x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 5 \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow x = -5$ 2-nji ädim: $6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3$

Jogaby: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

III. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ görnüşindäki deňleme aşakdaky ýaly çözülýär:

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ ýa-da $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

5-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{x+1} = \sqrt{2x-3}$.

Çözülişi.

$$\begin{cases} x+1 = 2x-3 \\ 2x-3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x \ge 1,5 \end{cases} \Rightarrow x = 4$$

Jogaby: $x = 4$.

6-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{14-x}$.

Çözülişi.

Deňlemäniň iki tarapyny kwadrata göterýäris. $\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2=\left(\sqrt{14-x}\right)^2$

$x^2+4x=14-x$ mundan $x_1=2;\quad x_2=-7$ bolýandygyny tapýarys.

Barlamak bu sanlaryň kök bolýandygyny görkezýär.

Jogaby: $x_1=2;\quad x_2=-7$.

IV. $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=0$ görnüşindäki deňlemäni özüne deň güýçli iki ulgamlara getirip çözmek mümkin:

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \quad \text{we} \quad \begin{cases} g(x)=0 \\ f(x)>0 \end{cases}$$

Kä halatlarda deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny bilmek deňlemäniň çözüwi bar ýa-da bolmaýanlygyny kesgitlemäge ýa-da çözüwini tapmaga kömek edýär.

7-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{x+5}=0$.

$$1)\ \begin{cases} x^2-4=0 \\ x+5\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 2 \\ x\ge -5 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2;\ x_2=2$$

$$2)\ \begin{cases} x+5=0 \\ x^2-4\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x=-5$$

Jogaby: $x_1=2;\ x_2=-2;\ x_3=-5$.

8-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$.

Çözülişi.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys.

$$\begin{cases} 1-x^2\ge 0, \\ x^2-9\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2\le 1, \\ x^2\ge 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1, \\ x\le -3,\ x\ge 3 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy boş toplum bolany sebäpli deňleme çözüwe eýe däl.
Jogaby: $\varnothing$.

9-njy mysal. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Deňlemäniň iki tarapyny kwadrata göterýäris.

$$\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}\right)^2=2^2$$

$$3x+7-2\sqrt{(3x+7)(x+1)}+x+1=4.$$

$$\sqrt{(3x+7)(x+1)} = 2x+2$$

$\sqrt{(3x+7)(x+1)} = 2x+2$ deňlemäni iki tarapyny kwadrata götersek,

$(3x+7)(x+1) = 4x^2+8x+4$ deňleme emele gelýär. Mundan $x^2-2x-3=0$ gelip çykýar.

Bu deňlemäniň kökleri $x_1=-1,\ x_2=3$.

Barlamak: $x=-1$ da $\sqrt{3(-1)+7}$ – $\sqrt{-1+1}$ = $2-0=2$.

$x=3$ da $\sqrt{3\cdot3+7}$ – $\sqrt{3+1}$ = $4-2=2$.

Iki kök hem berlen deňlemäni kanagatlandyrýar.

Jogaby: $x_1=-1$; $x_2=3$.

10-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-7}=5$.

Çözülişi.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys.

$$\begin{cases} 3-2x\ge 0 \\ x-7\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1{,}5 \\ x\ge 7 \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$$

Kesgitleniş ýaýlasy boş toplumdan ybarat bolany üçin deňlemäniň köki ýok.

Jogaby: Ø.

11-nji mysal. $\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}-2=0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

$$\sqrt[5]{25+\sqrt{x+13}}=2 \Rightarrow 25+\sqrt{x+13}=2^5 \Rightarrow \sqrt{x+13}=7$$

$\sqrt{x+13}=7,\ x+13=7^2,\ x=49-13=36$

Barlamak: $\sqrt[5]{25+\sqrt{36+13}}=\sqrt[5]{25+\sqrt{49}}$ = $\sqrt[5]{25+7}$ = $\sqrt[5]{32}$ = 2

Jogaby: x = 36.

12-nji mysal. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{5}{2}$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

1. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ belgileme girizsek, $\sqrt{\dfrac{x}{3x+2}}=\dfrac{1}{a}$ bolup, deňleme $a+\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{2}$ görnüşe gelýär. Bu deňlemäni çözüp, $a_1=2$ we $a_2=\dfrac{1}{2}$-leri tapýarys.

2. $\sqrt{\dfrac{3x+2}{x}}=a$ çalşyrmadan peýdalansak $x_1=2$ we $x_2=-\dfrac{8}{11}$ gelip çykýar. Diýmek, deňlemäniň kökleri $x_1=2$ we $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

Jogaby: $x_1=2$ we $x_2=-\dfrac{8}{11}$.

13-nji mysal. $\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

$\sqrt[3]{x^3+4x^2+3x-3}=x+1 \Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=(x+1)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-3=x^3+3x^2+3x+1 \Rightarrow x^2-4=0$.

$x^2=4$, $x_{1,2}=\pm2$.

Barlamak. $x=2$ da $\sqrt[3]{2^3+4\cdot2^2+3\cdot2-3}=2+1$, $\sqrt[3]{27}=3$.

$x=-2$ da $\sqrt[3]{(-2)^3+4\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)-3}=-2+1$, $\sqrt[3]{-1}=-1$.

Jogaby: $x=\pm2$.

14-nji mysal. $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

$\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7 \Rightarrow \sqrt{x^2-3x+5}+x^2-3x+5-12=0$

$\sqrt{x^2-3x+5}=a$ belgileme girizsek, $a^2+a-12=0$ kwadrat deňleme emele gelýär.

$a^2+a-12=0$ deňlemäni çözsek, $a_1=3$; $a_2=-4$.

$a=3$ da $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, $x^2-3x+5=9$, $x^2-3x-4=0$ deňlemäni çözýäris: $x_1=4$; $x_1=-1$.

$a=-4\notin[0;\infty)$ bolany üçin $\sqrt{x^2-3x+5}=-4$ deňleme çözüwe eýe däl.

$x_1=4$; $x_1=-1$ deňlemäniň çözüwleri.

Jogaby: $x_1=4$; $x_2=-1$.

Deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasy diýip näbelliniň şeýle bahalary toplumyna aýdylýar, ýagny bu bahalarda deňlemäniň çep we sag taraplary mana eýe bolýar. Irrasional deňlemäni kesgitleniş ýaýlasyny tapmazdan hem dogry çözmek mümkin. Munuň üçin barlamak ýeterli. Käbir deňlemelerde kesgitleniş ýaýlasyny tapmak peýdaly.

Meselem:

1) $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$ deňlemäniň kesgitleniş ýaýlasyny tapmak ýeterliçe çylşyrymly we peýdasyz (*görkezme: deňlemäniň sag we çep tarapyny kwadrata göteriň*).

2) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$ deňlemäni çözmek üçin onuň kesgitleniş ýaýlasyny tapmak ýeterli bolýandygyny özbaşdak barlaň.

V. $\sqrt{f^2(x)}=f(x)$ deňleme $f(x)\geq0$ deňsizlige deň güýçli,

$\sqrt{f^2(x)}=-f(x)$ deňleme bolsa $f(x)\leq0$ deňsizlige deň güýçli.

MYSALLAR

Deňlemeleri çözüň.

1. $\sqrt{5x+2}=10$

2. $\sqrt{4x-6}=12$

3. $\sqrt{10-2x}=4$

4. $\sqrt{-12+7x}=x$

5. $\sqrt{x+12}+x=0$

6. $\sqrt{4+3x}=-x$

7. $x-3=\sqrt{9-x}$

8. $-x=\sqrt{15-2x}$

9. $x-6=\sqrt{8-x}$

10. $\sqrt{\dfrac{3x-17}{7}}=4$

11. $\sqrt{\dfrac{11}{6-4x}}=\dfrac{1}{2}$

12. $\sqrt{\dfrac{4}{5x-2}}=1$

13. $\sqrt{5x-3}=\sqrt{2x}$

14. $\sqrt{4-2x}=2\sqrt{x-1}$

15. $\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{2x-5}$

16. $3x+2\sqrt{2x^2+3x-5}=12$

17. $3+\sqrt{3x^2-8x+14}=2x$

18. $\sqrt{15x^2-7x+8}=4x$

19. $\sqrt{x^2+x}=2-x$

20. $(x^2-25)\sqrt{6-2x}=0$

21. $(4-x^2)\sqrt{-1-3x}=0$

22. $(x^2-16)(x-3)(x-6)\sqrt{5-x}=0$

23. $(x^2-9x+14)\sqrt{x^2-9}=0$

24. $(x-4)\cdot\sqrt{3+2x-x^2}=0$

25. $\sqrt{5x+4}-\sqrt{x+3}=1$

26. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$

27. $\sqrt{x-13}+\sqrt{10-x}=4$

28. $\sqrt{(2x-3)^2}=2x-3$

29. $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$

30. $2\sqrt{x-2}+2=\sqrt{3x+1}$

31. $\sqrt{x^2+77}-2\sqrt[4]{x^2+77}-3=0$

32. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$

33. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$

34. $\sqrt{x^2+32}=2\sqrt[4]{x^2+32}+3$

35. $x^2+5x+4-5\sqrt{x^2+5x+28}=0$

36. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$

37. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-5}$

38. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+5}=\sqrt{2x+11}$

39. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

40. $\sqrt[3]{7-x}=\sqrt{3-x}$

IRRASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY

Irrasional deňlemeler ulgamyny çözende dürli usullar ulanylýar: köpeldijilere dagytmak, belgileme, algebraik goşmak, üýtgeýjileri çalşyrmak we başgalar.

1-nji mysal. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Deňlemeler ulgamynyň kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b$ belgileme girizýäris.

$$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{xy}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=8 \\ ab=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+7=0 \end{cases}$$

$b^2-8b+7=0$ deňlemäni çözýäris, $b_{1,2}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2}=\dfrac{8\pm 6}{2}$, $\Rightarrow b_1=7,\ b_2=1.$

$a_1=8-b_1=8-7=1, \Rightarrow a_1=1.$

$a_2=8-b_2=8-1=7, \Rightarrow a_2=7.$

4) $a_1=1,\ b_1=7$ da $\sqrt{x}=1,\ \sqrt{y}=7. \Rightarrow x=1,\ y=49.$

$a_2=7,\ b_2=1$ da $\sqrt{x}=7,\ \sqrt{y}=1. \Rightarrow x=49,\ y=1.$

Barlamak: $x=1,\ y=49$ bolanda

$$\begin{cases} \sqrt{1}+\sqrt{49}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+7=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

$x=49,\ y=1$ da

$$\begin{cases} \sqrt{49}+\sqrt{1}=8 \\ \sqrt{49}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7+1=8 \\ 7=7 \end{cases}$$

Jogaby: (1; 49), (49; 1).

2-nji mysal. $\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözmek

Deňlemeler ulgamynyň kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ gysga köpeltmek formuladan peýdalanyp çözýäris.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=21 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=5 \\ \sqrt{y}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=4. \end{cases}$$

Barlamak: $x=25,\ y=4$ da $\begin{cases} 25-4=21 \\ \sqrt{25}-\sqrt{4}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 21=21 \\ 5-2=3 \end{cases}$

Jogaby: (25; 4).

3-nji mysal. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Ilki ulgamdaky birinji deňlemäni çözýäris.

$x+y+\sqrt{x+y}=20$, $\sqrt{x+y}=a$ belgileme girizsek, $a^2+a-20=0$ kwadrat deňleme emele gelýär. $\sqrt{x+y}\ge 0$ bolany üçin $a\ge 0$ bolýar. $a\in[0;\infty)$.

$a^2+a-20=0$ deňlemäni çözýäris, $a_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2}=\dfrac{-1\pm 9}{2}$, $a_1=4,\ a_2=-5$.

$4\in[0;\infty)$, $-5\notin[0;\infty)$. Diýmek, $\sqrt{x+y}=4$. $x+y=16$.

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=16-y \\ (16-y)^2+y^2=136 \end{cases}$$

$(16-y)^2+y^2=136 \Rightarrow y^2-16y+60=0$ deňlemäni çözýäris.

$y_{1,2}=\dfrac{16\pm\sqrt{256-240}}{2}=\dfrac{16\pm 4}{2}$, $\Rightarrow y_1=10,\ y_2=6$.

$y_1=10,\ y_2=6$ bolsa, $x+y=16$-dan $x_1=6,\ x_2=10$ gelip çykýar. (10; 6) we (6; 10) ulgamyň çözüwi.

Barlamak: $\begin{cases} 10+6+\sqrt{10+6}=16+4=20 \\ 10^2+6^2=100+36=136 \end{cases}$

Jogaby: (10; 6), (6; 10).

4-nji mysal. $\begin{cases} x+y=28 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Deňlemeler ulgamynyň kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys: $x \in R, y \in R$.

$\sqrt[3]{x} = a,\ \sqrt[3]{y} = b$ belgileme girizýäris: $x = a^3,\ y = b^3$.

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 28 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right) = 28 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(a^2 - ab + b^2\right) = 28 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - ab + b^2 = 7 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 3ab = 7 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4^2 - 3ab = 7 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ab = 9 \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} ab = 3 \\ a + b = 4 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyndan $a_1 = 1,\ b_1 = 3$ we $a_2 = 3,\ b_2 = 1$ gelip çykýar.

$\sqrt[3]{x} = a,\ \sqrt[3]{y} = b,\ a_1 = 1,\ b_1 = 3$ da $\sqrt[3]{x} = 1,\ \sqrt[3]{y} = 3 \Rightarrow x = 1,\ y = 27.$

$a_2 = 3,\ b_2 = 1$ da $\sqrt[3]{x} = 3,\ \sqrt[3]{y} = 1 \Rightarrow x = 27, y = 1.$

Barlamak: $x = 1, y = 27$ ýa-da $x = 27, y = 1$ da $\begin{cases} 1 + 27 = 28 \\ \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{27} = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

Jogaby: (1; 27), (27; 1).

5-nji mysal. $\begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi. 1) $\begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{y + 2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - \sqrt{5 - 3x + 2x} = 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - x} = 3x - 1 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$$

2) $\sqrt{5 - x} = 3x - 1$ deňlemäni çözýäris. $\sqrt{5 - x} \ge 0$ bolany üçin

$$3x - 1 \ge 0,\ \Rightarrow\ 3x \ge 1,\ \Rightarrow\ x \ge \frac{1}{3},\ \Rightarrow\ x \in \left[\frac{1}{3}; \infty\right).$$

$\sqrt{5 - x} = 3x - 1$ deňligiň iki tarapyny kwadrata götersek,

$5-x=(3x-1)^2$, $\Rightarrow$ $5-x=9x^2-6x+1$, $\Rightarrow$ $9x^2-5x-4=0$ kwadrat deňleme emele gelýär. Deňlemäniň köklerini tapýarys:

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+144}}{18}=\frac{5\pm 13}{18}, \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{9}.$$

$x\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$ bolany üçin $1\in\left[\frac{1}{3};\infty\right)$, $-\frac{4}{9}\notin\left[\frac{1}{3};\infty\right)$.

$x=1$ bolanda $y=5-3x=5-3=2$, $y=2$. (1; 2) ulgamyň çözüwi.

Barlamak: (1; 2) bolanda $\begin{cases}3\cdot1-\sqrt{2+2\cdot1}=3-\sqrt{4}=3-2=1\\ 2+3\cdot1=5\end{cases}$

Jogaby: (1; 2).

6-njy mysal. $\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

$\sqrt{y-2x+11}\geq 0$ bolany üçin $x-5\geq 0$, $x\geq 5$. $x\in[5;\infty)$.

$$\begin{cases}\sqrt{x-2y+2}=2,\\ \sqrt{y-2x+11}=x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\sqrt{x-2y+2}\right)^2=4\\ \left(\sqrt{y-2x+11}\right)^2=(x-5)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2y+2=4,\\ y-2x+11=x^2-10x+25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-2(x^2-8x+14)=2,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2-17x+30=0,\\ y=x^2-8x+14\end{cases}$$

$2x^2-17x+30=0$ deňlemäni çözýäris, $x_{1,2}=\frac{17\pm\sqrt{289-240}}{4}=\frac{17\pm 7}{4}$,

$x_1=6,\ x_2=\frac{5}{2}$.

$x\in[5;\infty)$ şerte esasan, $6\in[5;\infty)$, $\frac{5}{2}\notin[5;\infty)$.

$x_1=6$ da $y_1=6^2-8\cdot6+14=36-48+14=2$. $\Rightarrow y_1=2$

Barlamak: (6; 2) bolanda $\begin{cases}\sqrt{6-2\cdot2+2}=\sqrt{4}=2,\\ \sqrt{2-2\cdot6+11}=6-5=1\end{cases}$

Jogaby: (6; 2).

7-nji mysal. $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7\\ 3x+2y=23\end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

$\sqrt{x+y}=a$ we $\sqrt{2x+y+2}=b$ belgileme girizsek, $a\geq 0$, $b\geq 0$ bolýar.

$x+y=a^2$, $2x+y+2=b^2$

$$+\begin{cases} x+y=a^2 \\ 2x+y+2=b^2 \end{cases} \Rightarrow 3x+2y+2=a^2+b^2.$$

$3x+2y=23$ bolýandygyny hasaba alsak, $3x+2y+2=a^2+b^2 \Rightarrow 25=a^2+b^2$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7 \\ 3x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a_1=3, b_1=4.\ a_2=4, b_2=3.$$

$a_1=3, b_1=4$ bolanda $\begin{cases} \sqrt{x+y}=3, \\ \sqrt{2x+y+2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ 2x+y+2=16 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=9 \\ 2x+y=14 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=4.$$

$a_2=4, b_2=3$ bolanda $\begin{cases} \sqrt{x+y}=4, \\ \sqrt{2x+y+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16, \\ 2x+y+2=9 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Rightarrow x=-9,\ y=25.$$

Barlamak: $(5;\ 4)$ bolanda $\begin{cases} \sqrt{5+4}+\sqrt{2\cdot 5+4+2}=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7, \\ 3\cdot 5+2\cdot 4=15+8=23 \end{cases}$

$(-9;\ 25)$ da $\begin{cases} \sqrt{(-9)+25}+\sqrt{2\cdot(-9)+25+2}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7, \\ 3\cdot(-9)+2\cdot 25=-27+50=23 \end{cases}$

Jogaby: $(5;\ 4), (-9;\ 25)$.

MYSALLAR

Deňlemeler ulgamyny çözüň.

1. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=18 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1 \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} 2\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{y}=-1 \\ 2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{y}=-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{y}=3 \\ 3\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}=-9 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=26 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \\ \sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1 \end{cases}$

6. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=7 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=12 \end{cases}$

7. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=10 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$

8. a) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\ x-y=32 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \\ x-y=16 \end{cases}$

9. a) $\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-\sqrt{6+x}=14 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x-2}+\sqrt{5y+1}=8 \\ 3\sqrt{x-2}-2\sqrt{5y+1}=-2 \end{cases}$

10. a) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4 \\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10 \end{cases}$

11. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5 \\ x\cdot y=216 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4} \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ x\cdot y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2 \\ x\cdot y=27 \end{cases}$

12. a) $\begin{cases} y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=30 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=-12 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

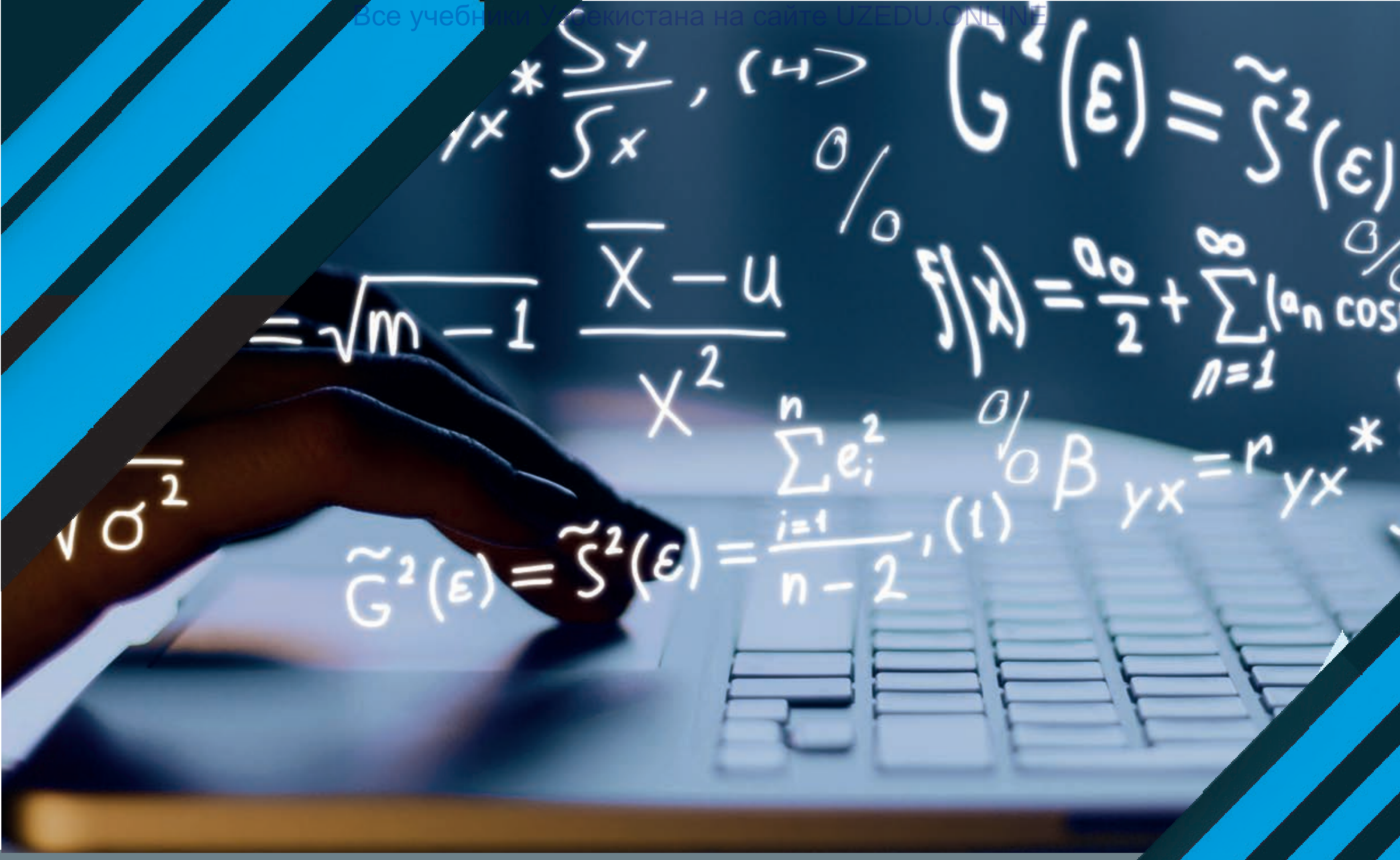
13. a) $\begin{cases} y + x - \sqrt{xy} = 7 \\ xy = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$

14. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = -1 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2} = 7 \end{cases}$

15. a) $\begin{cases} 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 5 \\ 4\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\sqrt{\dfrac{x}{y}} + 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} = 9 \\ 7\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 48 \end{cases}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{10}{3} \\ y^2 + x^2 = 82 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2} \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}$

17. a) $\begin{cases} 4y + 5x - \sqrt{xy} = 79 \\ 5x - 4y + \sqrt{xy} = 81 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y + 2x - \sqrt{xy} = 71 \\ 2x - 9y + \sqrt{xy} = 73 \end{cases}$



III BAP. GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALAR

- GÖRKEZIJILI FUNKSIÝA
- GÖRKEZIJILI DEŇLEMELER
- GÖRKEZIJILI DEŇSIZLIKLER
- LOGARIFM DÜŞÜNJESI. LOGARIFMIK FUNKSIÝA
- LOGARIFMIK AŇLATMALARY TOŽDESTWOLAÝYN ÇALŞYRMA
- LOGARIFMIIK DEŇLEMELER
- GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK DEŇLEMELER ULGAMY
- LOGARIFMIK DEŇSIZLIKLER
- GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALARYŇ ULANYLYŞY

GÖRKEZIJILI FUNKSIÝA

Soňky wagtlarda ýeriň derejesinden tozan göterilmegi tiz-tiz bolýar. Munda tozanyň mukdary ýokary göterildigi saýyn barha kemelýändigi subut edilen. Tozanyň mukdarynyň beýiklige baglylygy görkezijili funksiýa arkaly aňladylýan eken. Ondan daşary, wiruslaryň köpelmegi, radioaktiw maddalaryň dargamagy ýaly hadysalar hem görkezijili funksiýalar arkaly häsiýetlenýär.

Meselem, tozanyň mukdary y-iň x beýiklige baglylygy $y = p \cdot e^{-qx}$ görnüşdäki funksiýa arkaly aňladylýar. Bu ýerde p, q sanlary ***parametrler*** diýilýän ululyklar, e bolsa ***Eýleriň sany*** diýip atlandyrylýan irrasional san. Onuň ýakynlaşan bahasy 2,71-e deň.

Görkezijili funksiýalary öwrenmek üçin aşakdaky häsiýetleri bilmek talap edilýär:

1) $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ 2) $a^1 = a$ 3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 5) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ 6) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$ 8) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a > 0,\ n \in N,\ m \in Z$

Mälim bolşy ýaly, drob görkezijili $a^{\frac{m}{n}}$ ýa-da hakyky görkezijili a^p görnüşindäki derejelere-de garamak mümkin. Munda görkezijiniň käbir bahalarynda a^p dereje mana eýe bolman galmagy mümkin. Meselem, $(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3}$ aňlatma hakyky sanlar toplumynda mana eýe bolmaýar. Ondan daşary, $0^{-3} = \dfrac{1}{0^3} = \dfrac{1}{0}$ aňlatma hem kesgitlenmedik. Şeýle ýagdaýlaryň öňüni almak maksadynda hakyky p görkezijili a^p dereje üçin $a > 0$ deňsizlik ýerine ýetirilmegi talap edilýär. Islendik p hakyky san üçin $1^p = 1$ bolýandygy sebäpli esasy 1 bolan derejeleri öwrenmek arkaly hiç hili täze maglumata eýe bolup bolmaýar.

Diýmek, ýokarda beýan edilenler esasynda aşakdaky netijä gelmek mümkin.

Netije. Islendik p hakyky görkezijili a^p dereje anyk baha kabul etmegi üçin a esas $a > 0$ we $a \neq 1$ şertleri ýerine ýetirmegi talap edilýär.

$a > 0$ we $a \neq 1$ şertleri kanagatlandyrýan a hakyky san üçin şu $y = a^x$ görnüşdäki funksiýa ***görkezijili funksiýa*** diýilýär (dereje görkezijisi – üýtgeýji mukdar).

$y = a^x$ görkezijili funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe:

● $y = a^x$ görkezijili funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy ähli hakyky sanlar toplumyndan ybarat:

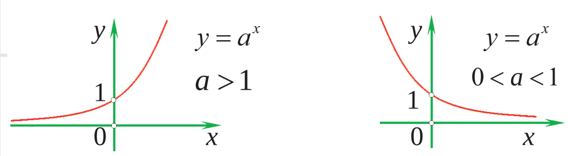
$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

● $y = a^x$ görkezijili funksiýanyň bahalar toplumy ähli položitel hakyky sanlar toplumyndan ybarat:

$$E(y) = (0; +\infty)$$

● $y = a^x$ görkezijili funksiýa Ox oky bilen kesişmeýär.

1-nji surat



Görkezijili funksiýanyň grafigi

- $y = a^x$ görkezijili funksiýa Oy oky bilen bolsa $(0,1)$ nokatda kesişýär.
- Görkezijili funksiýa döwürleýin bolmaýar, jübüt hem däl, täk hem däl.
- a esasyň $0 < a < 1$ deňsizlikleri kanagatlandyrýan bahalarynda $y = a^x$ funksiýa kemelýär: Kemelýän aralygy $(-\infty; +\infty)$ -den ybarat.
- a esasyň $a > 1$ deňsizligi kanagatlandyrýan bahalarynda $y = a^x$ funksiýa artýar: Artýan aralygy $(-\infty; +\infty)$ -den ybarat.

1-nji mysal. $(0,1)^{\sqrt{2}}$ -ni 1 bilen deňeşdiriň.

Çözülişi.

$1=(0,1)^0$ we $y=(0,1)^x$ funksiýa $x \in R$ da kemelýän bolany üçin

$$\sqrt{2}>0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < (0,1)^0 \Rightarrow (0,1)^{\sqrt{2}} < 1$$

Jogaby: $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$.

2-nji mysal. Şu $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=e^x$, $y=2,6^x$ funksiýalardan haýsylary kemelýän?

Çözülişi.

Berlen üç sany funksiýadan diňe birinji funksiýada gatnaşýan görkezijili aňlatmanyň esasy 0 we 1 aralygyna degişli, şonuň üçin birinji funksiýa kemelýän funksiýa bolýar.

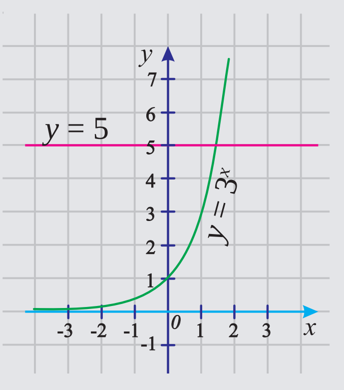
Jogaby: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

3-nji mysal. $3^x=5$ deňleme bir köke eýe bolýandygyny görkeziň.

Çözülişi.

$y=3^x$ we $y=5$ funksiýalaryň grafiklerini bir koordinata tekizliginde guryarys (2-*nji surat*).

2-nji surat



Çyzgydan görnüşi ýaly, grafikler ýeke-täk nokatda kesişýär. Diýmek, deňleme bir köke eýe eken.

MYSALLAR

1. Funksiýanyň häsiýetlerini aýdyň we onuň grafigini guruň.

a) $y=3^x$ b) $y=0,4^x$ c) $y=0,8^x$ d) $y=1,5^x$

2. Funksiýanyň bahalar ýaýlasyny tapyň.

a) $y=3^x$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-1$;

c) $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ d) $y=4^x+2$

3. Sanlary deňeşdiriň.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ va 1 b) $3,2^{-\sqrt{2}}$ va 1 c) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{9}}$ va $0,7^{\frac{1}{6}}$ d) $5^{-\sqrt{13}}$ we $\left(\frac{1}{5}\right)^{2,1}$

4. Hasaplaň.

a) $((\sqrt{3})^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $3^{1-2\sqrt{3}}\cdot 9^{1+\sqrt{3}}$ c) $64^{\sqrt{2}}:64^{3\sqrt{2}}$ d) $(5^{\sqrt[5]{16}})^{\sqrt[5]{2}}$

5. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň.

a) $(c^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ b) $b^{\sqrt{2}}\cdot(\frac{1}{b})^{\sqrt{2}-1}$ c) $x^{\pi}\cdot\sqrt[4]{x^2}:6x^{4\pi}$ d) $y^{\sqrt{2}}\cdot y^{1,5}:6\sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$

6. Şu $y=\left(\frac{5}{9}\right)^x$, $y=\pi^x$, $y=1,7^x$ funksiýalardan haýsylary artýan?

7. Aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini shematik görnüşde şekillendiriň.

a) $y=2^{|x|}$ b) $y=-2^{|x|+1}$ c) $y=2^{-|x|}-1$

8. Aňlatmany ýönekeýleşdiriň.

a) $\dfrac{a^{2\sqrt{2}}-b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}}-b^{\sqrt{3}})^2}+1$ b) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}}\right)}{a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}}}$

c) $\dfrac{a^{\sqrt{5}}-b^{\sqrt{7}}}{a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}+a^{\frac{\sqrt{5}}{3}}b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}+b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$ d) $\sqrt{\left(x^{\pi}+y^{\pi}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{\pi}}xy\right)^{\pi}}$

9. Iki funksiýadan haýsysy artýan, haýsysy kemelýän bolýandygyny anyklaň.

a) $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ b) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$, $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$

c) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{5}-2\right)^x}$ d) $y=\left(3-\sqrt{7}\right)^x$, $y=\dfrac{1}{\left(3-\sqrt{7}\right)^x}$

10. Funksiýanyň bahalar ýaýlasyny tapyň.

a) $y=3^{x+1}-3$ b) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2$ c) $y=\left|2^x-2\right|$ d) $y=4^{|x|}$

11. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahasyny tapyň.

a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ b) $y=4^{\cos x}$ c) $y=5+3^{|\cos x|}$ d) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|\sin x|}-2$

12. a-nyň alamatyny anyklaň.

a) $3^a=10$ b) $10^a=4$ c) $0,3^a=0,1$ d) $0,7^a=5$

13. Aňlatmanyň bahasyny tapyň.

a) $6^{x-1}=12$ bolsa, $6^x=?$ b) $5^{x-3}=4$ bolsa, $5^{4-x}=?$ c) $12^{x+5}=6$ bolsa, $12^{-3-x}=?$

14. Haýsy ýagdaýlarda $3^{x_1} > 3^{x_2}$ deňsizlik ýerine ýetirilýär?

15. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiýanyň x natural san bolandaky bahalary yzygiderligi geometrik progressiýa düzýändigini subut ediň.

Görkezijili funksiýanyň durmuşda ulanylyşy

Gaýnaýan çäýnek otdan alynsa, ol ilki tiz sowaýar, soň bolsa sowama tizligi peselýär. Esasysy, sowama tizligi çäýnegiň temperaturasyna we daşky gurşawyň temperaturasynyň tapawudyna proporsional. Bu tapawut näçe kemelse, çäýnek şonça haýal sowaýar. Çäýnegiň ilkinji temperaturasy T_0, howanyň temperaturasy T_1 bolsa, onda t sekuntdan soň çäýnegiň temperaturasy $T = (T_1 - T_0)e^{-kt} + T_1$ formula bilen anyklanýar.

Fizikada ulanylyşy

Howasyz boşlukda (wakuum) jisimiň erkin gaçmagynda onuň tizligi barha artýar. Howada hem jisimleriň gaçma tizligi barha artýar, emma mälim bir bahadan geçip gitmeýär. Eger howanyň garşylyk güýji paraşýutçynyň gaçma tizligine göni proporsional bolsa, ýagny $F = kv$ bolsa, onda t sekuntdan soň onuň gaçma tizligi $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ -e deň bolýar. Bu ýerde m paraşýutçynyň tizligi.

Ilat sanynyň artmagy

Ýurtda ilat sanynyň mälim wagt aralygynda özgerişi $N = N_0 e^{kt}$ formula bilen görkezilýär. Bu ýerde $t = 0$ wagtdaky ilat sany N_0, t wagtdaky ilat sany N, k bolsa hemişelik.

Biologiýada ulanylyşy

Organiki älemiň köpeliş kanuny: organizm üçin amatly gurşawda (ýyrtyjylar sanynyň azlygy, iýmit mukdarynyň ýeterli bolmagy) janly organizmler görkezijili funksiýa kanuny boýunça köpelýär. Meselem, bir öý siňegi tomsuň dowamynda $8 \cdot 10^{14}$ mukdarynda täze nesil döredýär. Şu mukdarda köpelip baryberende, olaryň agyrlygy birnäçe million tonna ýeterdi (iki öý siňeginiň nesli bolsa planetamyzyň massasyndan geçerdi), olar örän uly meýdany eýelärdi. Eger olary zynjyr edip ýerleşdirse, onda bu zynjyryň uzynlygy Ýerden Güne çenli bolan aralykdan hem uly bolardy. Emma tebigatda siňegiň tebigy «duşmany» hasaplanýan ençeme jandarlaryň we ösümlikleriň barlygy siňekleriň sanynyň bu derejede artmagyna ýol bermeýär.

GÖRKEZIJILI DEŇLEMELER

Görkezijili deňlemeler

Dereje görkezijisinde näbelli gatnaşýan deňlemä ***görkezijili deňleme*** diýilýär.
$3^x = 9$, $4^x - 9 = 7$, $2^{x+1} = 2^{8-2x}$ deňlemeler görkezijili deňlemä mysal bolup bilýär.

Näbelliniň berlen görkezijili deňlemäni dogry sanly deňlige öwürýän bahasy görkezijili deňlemäniň ***köki*** diýilýär.

Görkezijili deňlemeler we olary çözmek

Şu x näbellili $a^x = a^p$ görkezijili deňlemäniň köki $x = p$ bolýar.

Görkezijili deňlemeleri çözende şu düzgün ulanylýar:

$a > 0$, $a \neq 1$ bolanda $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ deňlemäniň kökleri $f(x) = g(x)$ deňlemäniň köklerinden ybarat bolýar.

1-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $2^{x-1} = 16$.

Çözülişi.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys: $2^{x-1} = 2^4 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

Jogaby: $x = 5$.

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $3^{2x} \cdot 3^{x^2} = 3^{15}$.

Çözülişi.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys: $3^{2x+x^2} = 3^{15} \Rightarrow 2x + x^2 = 15$.

$x^2 + 2x - 15 = 0$ kwadrat deňlemäniň kökleri $x_1 = -5; x_2 = 3$ bolýar.

Jogaby: $x_1 = -5$; $x_2 = 3$.

3-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\left(5^{x+1}\right)^x = \left(\frac{5^x}{5^{24}}\right)^{-1}$.

Çözülişi.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys: $5^{x^2+x} = 5^{24-x} \Rightarrow x^2 + x = 24 - x$.

$x^2 + 2x - 24 = 0$ kwadrat deňleme kökleri $x_1 = -6; x_2 = 4$ bolýar.

Jogaby: $x_1 = -6; x_2 = 4$.

4-nji mysal. $6^{x^2} + 36 = 2^{1-x^2} \cdot 12^{x^2}$ deňlemäniň kökleriniň köpeltmek hasylyny tapyň.

Çözülişi.

$12^{x^2} = (6 \cdot 2)^{x^2} = 6^{x^2} \cdot 2^{x^2}$ bolýanlygyndyn peýdalanyp deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$6^{x^2}+36=2^{1-x^2}\cdot 6^{x^2}\cdot 2^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2^{1-x^2+x^2}\cdot 6^{x^2} \Rightarrow 6^{x^2}+36=2\cdot 6^{x^2};\Rightarrow 6^{x^2}=36 \Rightarrow 6^{x^2}=6^2$$

$$x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$$

Diýmek, $x_1\cdot x_2=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=-2$

Jogaby: –2.

5-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $3^{2x-1}=7^{2x-1}$.

Çözülişi.

Berlen deňlemede deňligiň iki tarapyndaky görkezijili aňlatmalaryň dereje görkezijileri birmeňzeş bolany üçin deňligiň iki tarapyny 7^{2x-1} aňlatma bölýäris:

$$\frac{3^{2x-1}}{7^{2x-1}}=\frac{7^{2x-1}}{7^{2x-1}} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=1 \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{0} \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Jogaby: $x=\frac{1}{2}$.

6-njy mysal. $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$ deňlemäniň kökleriniň jemini tapyň.

Çözülişi.

Deňlemäni aşakdaky görnüşde ýazýarys:

$$\frac{1}{9}\cdot 9^{x^2}-\frac{36}{27}\cdot 3^{x^2}+3=0$$

$3^{x^2}=t$ diýip belgileýäris, diýmek, $9^{x^2}=t^2$

$\frac{1}{9}\cdot t^2-\frac{4}{3}\cdot t+3=0$ kwadrat deňlemäni çözüp, $t_1=9$; $t_2=3$ bolýandygyny tapýarys.

$$3^{x^2}=9 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{2} \quad \text{we} \quad 3^{x^2}=3 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$$

deňleme kökleriniň jemi: $x_1+x_2+x_3+x_4=-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1+1=0$.

Jogaby: 0.

MYSALLAR

1. Görkezijili deňlemeleri çözüň.

a) $3^x\cdot 3=81$ b) $4^{3x}\cdot 2^x=128$ c) $5^{x+1}-4\cdot 5^x=25$ d) $7^x\cdot 8^x=1$

e) $4^{x^2-3x-4}=1$ f) $0,3^{2x-1}=0,09$ g) $2^{2x}=4^{2\sqrt{3}}$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x}=9$

i) $27^x=\frac{1}{3}$ j) $400^x=\frac{1}{20}$ k) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{1}{81}$ l) $0,6^{x+3}=0,6^{2x-5}$

2. Deňlemäni çözüň.

a) $3^x=81$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{1024}$ c) $7^x=-49$ d) $13^x=-169$

e) $5^x=0$ f) $8^{2x}=0$ g) $3^{6-x}=3^{3x-2}$ h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{5x-9}$

i) $2^{7x-15}=2^{9-4x}$ j) $13^{5-2x}=13^{6x+1}$ k) $2^{x^2+x-0,5}=4\sqrt{2}$ l) $\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{2}{3}$

3. $\left(\frac{21}{6}\right)^{29x^2-8x}=\left(\frac{6}{21}\right)^{8x^2-29x}$

4. $\sqrt[3]{5^{2x-3}}=\frac{5}{\sqrt[4]{5}}$

5. $\left(\frac{37}{5}\right)^{71\sqrt{x}-3}=\left(\frac{5}{37}\right)^{3\sqrt{x}-293}$

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x^2-9x}=1$

7. $2^{x^2-3}\cdot5^{x^2-3}=0,01\left(10^{x-1}\right)^3$

8. $2^{x+1}=5^{x+1}$

9. $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347$

10. $2\cdot3^{x+1}-4\cdot3^{x-2}=150$

11. $5^{2x}+5^{2x+2}+5^{2x+4}=651$

12. $4\cdot7^{x+3}-7^{x+2}-3\cdot7^{x+1}=1302$

13. $6\cdot2^{x+4}-4\cdot2^{x+3}+3\cdot2^{x+2}=152$

14. $7^{3x}-7^{3x-1}=6$

15. $4^x-6\cdot2^x+8=0$

16. $5\cdot25^x-6\cdot5^x+1=0$

17. $9^x+3\cdot3^x-18=0$

18. $3^{2x+3}-4\cdot3^{x+1}+1=0$

19. $(0,25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$

20. $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot3^{2\sqrt{x}}+3=0$

21. $9\cdot16^x+2\cdot12^x-32\cdot9^x=0$

22. $64\cdot9^x-84\cdot12^x+27\cdot16^x=0$

23. $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$

24. $4^{x^2}+6^{x^2}=2\cdot9^{x^2}$

25. $8^x-6\cdot12^x+11\cdot18^x=2\cdot27^{x+\frac{1}{3}}$

26. $x\cdot3^{x-1}+3\cdot3^{\sqrt{3-x}}=3^x+x\cdot3^{\sqrt{3-x}}$

27. $x^2\cdot4^{\sqrt{6-x}}+4^{2+x}=16\cdot2^{2\sqrt{6-x}}+x^2\cdot2^{2x}$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}+2^{x-3}=80+\sqrt{4^{x-4}}$

GÖRKEZIJILI DEŇSIZLIKLER

$4^x < 64$, $8^x + 11 > 75$, $2^{x-2} \leq 2^{5+3x}$, $9^x < 7^x$ deňsizlikler görkezijili deňsizlige mysal bolup bilýär.

Aşakdaky jedwelde birmeňzeş esasly görkezijili deňsizlikleri rasional deňsizliklere getirmek görkezilen.

Görkezijili deňsizlikleriň görnüşleri	$a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$	$a^{f(x)} < a^{g(x)}$	$a^{f(x)} > a^{g(x)}$	$a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$
$0 < a < 1$ bolanda	$f(x) \geq g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) \leq g(x)$
$a > 1$ bolanda	$f(x) \leq g(x)$	$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) \geq g(x)$

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $2^x > 32$.

Çözülişi.

Deňsizligi aşakdaky ýaly ýazýarys: $2^x > 2^5$.

$2 > 1$ bolany üçin $x > 5$.

Jogaby: $(5;\infty)$.

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \frac{16}{9}$.

Çözülişi.

Deňsizligi aşakdaky ýaly ýazýarys: $\left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

$0 < \frac{3}{4} < 1$ bolany üçin $x \leq -2$.

Jogaby: $(-\infty;-2]$

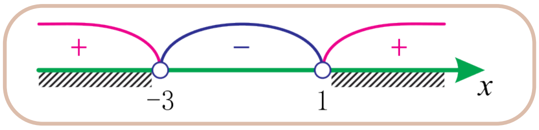
3-nji mysal. $3^{x^2+2x} > 3^3$ deňsizligi çözüň.

Çözülişi.

$3 > 1$ bolany üçin $x^2 + 2x > 3$ deňsizligiň çözüwini tapmak ýeterli.

$$x^2 + 2x - 3 > 0,$$

$$(x+3)(x-1) > 0,$$



Jogaby: $x \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$.

Dürli esasly görkezijili deňsizlikleri çözmek

$a > 0$, $a \neq 1$ we $b > 0$, $b \neq 1$ bolanda şu $a^{f(x)} < b^{f(x)}$ görkezijili deňsizlik $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} < 1$ deňsizlige getirlip, çözülýär.

MYSALLAR

Deňsizlikleri çözüň.

1. $4^x > 256$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \le \frac{1}{729}$

3. $7^x < -49$

4. $13^x > -169$

5. $5^x < 0$

6. $8^{2x} > 0$

7. $10^x \le 0$

8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{2}} > \sqrt{3}$

9. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2x}{15}} < \sqrt[5]{6}$

10. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

11. n-iň näçe natural bahasy $9 \le 3^n \le 79$ goşa deňsizligi kanagatlandyrýar?

12. x-iň nähili bahalarynda $y = 5^x - 5$ funksiýa položitel bahalary kabul edýär?

13. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2x}$ deňsizligiň iň uly bitin çözüwini tapyň.

14. $3 \cdot 9^{2x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{3x-1}$

15. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} > 4^{1-2x}$

16. $2 \cdot 8^{4-5x} < \left(\frac{1}{16}\right)^{x+2}$

17. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x+1}{x+2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

18. $6 \cdot 2^{x+3} - 5 \cdot 2^{x+2} + 4 \cdot 2^x > 128$

19. $7 \cdot 3^{x+4} + 2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x+2} \le 192$

20. $10 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 10^{x+2} < 3^{x+4} - 3 \cdot 10^{x+2}$

21. $5^{x+2} - 5^{x+1} > 2^{x+2} + 2^{x+4}$

22. $\left(\frac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \frac{27}{64}$

23. $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x} < \left(\sqrt{5}\right)^{x^2+2.75}$

24. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2} < 8 \cdot \sqrt{2}^{16-2x}$

25. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$

26. $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \le 0$

27. $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \ge 0$

28. $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

29. $3^{2x+1} + 1 < 4 \cdot 3^x$

30. $3^{8x} - 4 \cdot 3^{4x} \le -3$ deňsizligiň bitin çözüwleriniň jemini tapyň.

31. $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$ deňsizligiň bitin sanlardan ybarat çözüwleri näçe?

LOGARIFM DÜŞÜNJESI. LOGARIFMIK FUNKSIÝA

Logarifm gündelik durmuşda giň ulanylýar. Meselem, banka goýlan pul käbir mukdara näçe wagtda köpelýändigini tapmakda logarifmden peýdalanylýar. Ýa-da sesiň beýikligini bahalamakda logarifmik baglanyşyk ulanylýar.

Logarifm düşünjesini we logarifmik funksiýany öwrenmek üçin:
1) görkezijili funksiýany;
2) görkezijili funksiýalaryň häsiýetlerini **bilmek talap edilýär.**

Logarifm barada düşünje

1-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $3^x = 27$

Çözülişi.

$3^x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Jogaby: $x = 3$.

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $2^x = 5$

Çözülişi.

Bu deňleme köke eýe we bu kök rasional san däl. Şular ýaly deňlemeleriň köküni aňlatmak üçin ***logarifm*** düşünjesi girizilen. Berlen deňlemäniň köki 5-iň 2 esasa görä logarifmi diýip atlandyrylýan ululyga deň bolýar we ol $\log_2 5$ ýaly ýazylýar. Diýmek, $x = \log_2 5$

Jogaby: $x = \log_2 5$.

Umuman alanda, $a^x = b$ deňlemäniň köki $x = \log_a b$-ge deň. Bu ýerde $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Kesgitleme

b sanyň a esasa görä logarifmi diýip b-ni almak üçin a-ny götermeli bolan dereje görkezijisine aýdylýar. b-niň a esasa görä logarifmi $\log_a b$ arkaly belgilenýär. Bu ýerde a – logarifmiň esasy, b – logarifmasty aňlatmasy.

$\log_a b$ aňlatma ***logarifm a esasa görä b*** diýip okalýar.

Meselem, $\log_2 5$ aňlatma logarifm 2 esasa görä 5 diýip okalýar.

$\log_{10} b$ aňlatma gysgaça $\lg b$ ýaly belgilenýär we only logarifm diýilýär, ýagny $\log_{10} b = \lg b$.

$\log_e b$ aňlatma gysgaça $\ln b$ ýaly belgilenýär we natural logarifm diýilýär, ýagny $\log_e b = \ln b$. Munda $e \approx 2{,}71$.

$a^x = b$ deňlemäniň köki $\log_a b$-ni deňlemedäki x-yň ýerine goýsak,

$$a^{\log_a b} = b \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$$

deňlik emele gelýär. Bu deňlige ***esasy logarifmik toždestwo*** diýilýär.

3-nji mysal. Kesgitleme boýunça hasaplaň: a) $\log_2 32$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) lg100; d) $\ln e^3$.

Çözülişi.

a) $\log_2 32 = 5$, çünki $2^5 = 32$ b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, çünki $3^{-2} = \frac{1}{9}$

c) lg100 = 2, çünki $10^2 = 100$ d) $\ln e^3 = 3$, çünki $e^3 = e^3$

Jogaby: a) 5; b) –2; c) 2; d) 3.

4-nji mysal. Hasaplaň: $\log_{64} 32$.

Çözülişi.

Aňlatmanyň bahasyny görkezijili deňlemäniň kömeginde çözüp tapmak mümkin. $\log_{64} 32 = x$ bolsun.

$$64^x = 32 \quad \Rightarrow \quad 2^{6x} = 2^5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Jogaby: $\frac{5}{6}$.

5-nji mysal. Esasy logarifmik toždestwonyň kömeginde hasaplaň: $64^{\log_8 3}$.

Çözülişi.

$64^{\log_8 3} = \left(8^2\right)^{\log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$

Jogaby: 9.

Logarifmik funksiýa we onuň häsiýetleri, grafigi

$a > 0$ we $a \neq 1$ şertleri kanagatlandyrýan a hakyky sana garalyň. Şu

$$y = \log_a x$$

görnüşdäki funksiýa ***logarifmik funksiýa*** diýilýär.

Meselem, $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \lg x$, $y = \ln x$ ýaly funksiýalar logarifmik funksiýalardyr.

Logarifmik funksiýalar aşakdaky **häsiýetlere** ***eýe:***

- $y = \log_a x$ logarifmik funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasy ähli položitel hakyky sanlar toplumyndan ybarat:

$$D(y) = (0; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ logarifmik funksiýanyň bahalar toplumy bolsa ähli hakyky sanlar toplumyndan ybarat:

$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

- $y = \log_a x$ döwürleýin funksiýa däl;
- $y = \log_a x$ funksiýa jübüt hem däl, täk hem däl;
- $0<a<1$ bolanda $y = \log_a x$ funksiýa $(0; +\infty)$ aralykda kemelýän;
- $a > 1$ bolanda $y = \log_a x$ funksiýa $(0; +\infty)$ aralykda artýan.

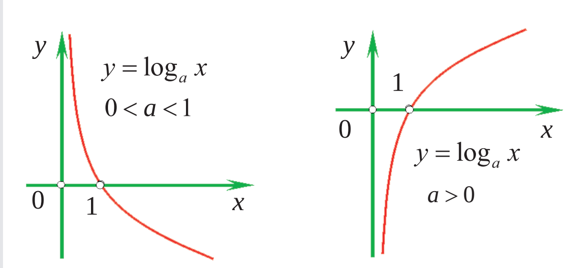
6-njy mysal. Deňeşdiriň: a) $\log_{0,3}7$ we $\log_{0,3}8$
b) $\log_7 0,28$ we $\log_7 0,31$.

Çözülişi.

$y=\log_{0,3}x$ funksiýa kemelýän hem-de $7<8$ bolýanlygyndan, $\log_{0,3}7>\log_{0,3}8$ bolýar.

$y=\log_7 x$ funksiýa artýan hem-de 0,28<0,31 bolýanlygyndan $\log_7 0,28<\log_7 0,31$ bolýar.

1-nji surat



Logarifmik funksiýanyň grafigi

7-nji mysal. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň: $y=\log_7\left(x^2-5x+6\right)$.

Çözülişi.

Logarifmasty aňlatma položitel bolmaly, mundan

$$x^2-5x+6>0 \Rightarrow (x-2)(x-3)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;2)\cup(3;\infty)$$

Jogaby: $D(y)=(-\infty;2)\cup(3;\infty)$.

8-nji mysal. $y=\log_{4-x}\left(x^2-9\right)$ funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

Çözülişi.

$$\begin{cases}4-x>0\\ 4-x\neq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<4\\ x\neq 3\end{cases} \qquad x^2-9>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;\infty)$$

Jogaby: $D(y)=(-\infty;-3)\cup(3;4)$.

9-njy mysal. Funksiýanyň grafigini guruň:

$$y=-1+\log_2(x-1).$$

Çözülişi.

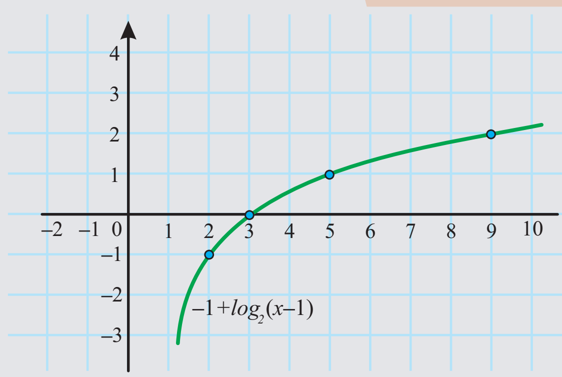
Kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys:

$$x-1>0 \Rightarrow x>1$$

Bahalar jedwelini düzýäris:

x	2	3	5	9
y	-1	0	1	2

2-nji surat



Tapylan nokatlary koordinata tekizliginde belgiläp, olary egri çyzyk bilen utgaşdyrýarys (2-*nji surat*).

MYSALLAR

1. Berlen funksiýalaryň artýan ýa-da kemelýän bolýandygyny anyklaň.

a) $y=\log_{0,075} x$ b) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ c) $y=\lg x$

d) $y=\log_{11} x$ e) $y=-\log_{\frac{1}{e}} x$ f) $y=-\log_{\pi} x$

2. Deňeşdiriň.

a) $\log_e 0,5$ we $\log_e 0,35$ b) $\log_{0,1} 100$ we $\log_{0,1} 101$ c) $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} \sqrt{37}$ we $\log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} 6$

3. Sanlary artýan tertipde ýerleşdiriň.

a) $a=\log_{\frac{1}{5}} 10,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 15,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 20$

b) $a=\log_2 5,\ b=\log_{\frac{1}{4}} 3,\ c=\log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $a=\log_{\frac{1}{6}} 4,\ b=\log_{\frac{1}{5}} 6,\ c=\log_{\frac{1}{5}} 4$

4. Şu pikirleriň dogrudygyny mysallar düzüp, barlaň.

a) $a > 1$ we $b > 1$ bolsa, $\log_a b > 0$

b) $0 < a < 1$ we $0 < b < 1$ bolsa, $\log_a b > 0$

c) $a > 1$ we $0 < b < 1$ bolsa, $\log_a b < 0$

d) $0 < a < 1$ we $b > 1$ bolsa, $\log_a b < 0$

5. Berlen sanlardan haýsylary položitel?

a) $a=\log_{0,2} 8$ b) $b=\log_3 0,8$ c) $c=\log_{0,9} 9$

d) $d=\log_4 2$ e) $p=\log_{0,9} 0,6$ f) $l=\log_{1,2} \frac{3}{8}$

g) $z=\log_{0,02} 0,001$ h) $p=\log_{|-13,08|} 2022$ i) $q=\log_{|-3|} 3$

6. $y=\log_2 x$ we $y=-\log_2 x$ funksiýala ryň grafikleri abssissa okuna görä simmetrik bolýandygyny görkeziň.

7. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y = \log_4 x$ b) $y = \log_2(x-1)$

c) $y = \log_3(x^2-2x-3)$ d) $y = \log_4(x^2-4)$

e) $y = \lg(3-x)$ f) $y = -\log_2(x^2+5x-6)$

8. Funksiýanyň grafigini guruň.

a) $y = \log_3 x$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ c) $y = \lg x$ d) $y = \ln x$

9. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y = \log_{x^2}(4 - x)$ b) $f(x) = \log_{x^2}(x - 1) + \sqrt{2 - x}$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x - 1) - \sqrt{x}$ d) $f(x) = \sqrt{x + 4} + \log_2(x^2 - 4)$

e) $f(x) = \dfrac{\log_{x^2+1}(6 - x)}{\sqrt{x + 2}}$ f) $y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(3 - x)}$

10. Funksiýanyň grafigini guruň.

a) $y = \log_2(x - 1)$ b) $y = \log_3(5x + 1)$ c) $y = \log_4(1 - x)$

d) $y = \lg(x - 3)$ e) $y = \log_6(3x - 2)$ f) $y = 1 - \ln x$

g) $y = \log_8 x - 4$ m) $y = \lg x + 3$ n) $y = \log_6(x - 2) - 1$

11. Funksiýalaryň kesişme nokatlary näçe?

a) $y = \log_2 x$; $y = -x + 1$ b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 2x - 5$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = 4x^2$

d) $y = \log_3 x$; $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ f) $y = 2^x$; $y = \log_{0,5} x$ g) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = \log_3 x$

LOGARIFMIK AŇLATMALARY TOŽDESTWOLAÝYN ÇALŞYRMA

Logarifmik aňlatmalar üstünde amallary ýerine ýetirende we olary ýönekeýleşdirende aşakdaky toždestwolaýyn çalşyrmalardan peýdalanylýar. Bu häsiýetlerde gatnaşýan aňlatmalar logarifm kesgitlenen bolmagy üçin talap edilýän şertleri kanagatlandyrýar diýip alýarys.

Logarifmiň kesgitlemesinden onuň aşakdaky ***häsiýetleri*** gelip çykýar:

1°. $\log_a 1 = 0$.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $a^{\log_a b} = b \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$.

4°. Köpeltmek hasylynyň logarifmi köpeldijileriň logarifmleriniň jemine deň:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

5°. Paýyň logarifmi bölünijileriň we bölüjileriň logarifmleriniň tapawudyna deň:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c.$$

6°. Derejäniň logarifmi dereje görkezijisi bilen esasyň logarifminiň köpeltmek hasylyna deň:

$$\log_a b^p = p\log_a b.$$

7°. Bir esasdan başga esasa geçmegiň formulasy: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

1-nji we 6-njy häsiýetlerden aşakdaky deňlik gelip çykýar:

8°. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

5-nji we 7-nji häsiýetlerden aşakdaky deňlik gelip çykýar:

9°. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$.

5-nji we 8-nji häsiýetleri aşakdaky ýaly umumylaşdyrmak mümkin:

10°. $\log_{a^k} b^p = \dfrac{p}{k}\log_a b$.

Görkezijili we logarifmik aňlatmalary ýönekeýleşdirmek

Logarifmiň we logarifmik funksiýanyň, şonuň ýaly-da, derejäniň we görkezijili funksiýanyň häsiýetleri bilen tanşypdyk. Bu häsiýetlerden logarifmik we görkezijili aňlatmalary ýönekeýleşdirmekde peýdalanylýar.

1-nji mysal. Hasaplaň: $\log_3 18 + \log_3 \dfrac{1}{54}$

Çözülişi.

$$\log_3 18 + \log_3 \frac{1}{54} = \log_3\left(18 \cdot \frac{1}{54}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Jogaby: -1.

2-nji mysal. Hasaplaň: $3\log_2 8-2\log_3 9$

Çözülişi.

$$3\log_2 8-2\log_3 9=3\log_2 2^3-2\log_3 3^2=3\cdot 3\cdot \log_2 2-2\cdot 2\cdot \log_3 3=9\cdot 1-4\cdot 1=5$$

Jogaby: 5.

3-nji mysal. Hasaplaň: $10^{1+\lg 5}$.

Çözülişi.

$$10^{1+\lg 5}=10^1\cdot 10^{\lg 5}=10\cdot 5=50$$

Jogaby: 50.

4-nji mysal. Hasaplaň: $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$.

Çözülişi.

$$\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}=\log_2 \log_5 5^{\frac{1}{8}}=\log_2\left(\frac{1}{8}\cdot \log_5 5\right)=\log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3$$

Jogaby: –3.

5-nji mysal. Hasaplaň: $2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$.

Çözülişi.

$$2^{\log_4\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_9\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\log_{2^2}\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+3^{\log_{3^2}\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=2^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\frac{1}{2}\cdot 2\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=2^{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}+3^{\log_3\left(2+\sqrt{3}\right)}==2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4.$$

Jogaby: 4.

6-njy mysal. Hasaplaň: $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}$

Çözülişi.

$$\sqrt{5^{\frac{2}{\log_3 5}}+0,5^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{2\log_5 3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 7}}=\sqrt{5^{\log_5 3^2}+2^{\log_2 7}}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4$$

Jogaby: 4.

7-nji mysal. Hasaplaň: $\dfrac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25$

Çözülişi.

$$\frac{2}{1+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 2+\log_2 5}+\lg 25=\frac{2}{\log_2(2\cdot 5)}+\lg 25=\frac{2}{\log_2 10}+\lg 25=$$

$$=2\lg 2+\lg 25=\lg 2^2+\lg 25=\lg(4\cdot 25)=\lg 100=2$$

Jogaby: 2.

8-nji mysal. $3^{2+\log_3 2}$ -ni hasaplaň.

Çözülişi. Bu mysaly çözende $a^{m+n}=a^n\cdot a^m$ we $a^{\log_a b}=b$ deňliklerden peýdalanylýar. Netijede şu netijä eýe bolýarys:

$$3^{2+\log_3 2}=3^2\cdot 3^{\log_3 2}=9\cdot 2=18.$$

Görkezijili we logarifmik aňlatmalary ýönekeýleşdirmekde giň ulanylýan

$$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$$

deňligi subut edýäris. Bu ýerde $a>0$, $c>0$, $b>0$ we $b\neq 1$ şertleriň ýerine ýetirilmegi talap edilýär. Bu şertler ýerine ýetirilende $\log_b c$ we $\log_b a$ aňlatmalar mana eýe bolýar. Görnüşi ýaly,

$$\log_b c\log_b a=\log_b a\log_b c$$

deňlik ýerlikli. Bu toždestwodan logarifmiň $n\log_p q=\log_p q^n$ häsiýetine görä

$$\log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a}$$

deňlik gelip çykýar. Onuň iki tarapyny potensirläp,

$$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$$

deňligi alarys.

9-njy mysal. Eger $a=sin\dfrac{\pi}{6}$ bolsa, $\log_4 a$ -ny hasaplaň.

Çözülişi.

$a=sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{3}$ bolany üçin $\log_4 a=\log_4\dfrac{1}{2}=\log_{2^2}2^1=-\dfrac{1}{2}\log_2 2=-\dfrac{1}{2}\cdot 1=-\dfrac{1}{2}$

Jogaby: $-\dfrac{1}{2}$.

10-njy mysal. Hasaplaň: $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$

Çözülişi.

Sanawjyny köpeldijilere dagydyp, aşakdakyny alarys:

$$\frac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}=\frac{(\log_2 14+2\log_2 7)(\log_2 14-\log_2 7)}{\log_2 14+2\log_2 7}=$$

$$=\frac{\cancel{(\log_2 14+2\log_2 7)}(\log_2 14-\log_2 7)}{\cancel{\log_2 14+2\log_2 7}}=\log_2 14-\log_2 7=\log_2\frac{14}{7}=\log_2 2=1$$

Jogaby: 1.

11-nji mysal. $f(x)=\log_4\dfrac{x^2}{4}-2\log_4(4x^4)$ aňlatmany ýönekeýleşdiriň we onuň $x=-2$ bolandaky bahasyny tapyň.

Çözülişi.

Berlen aňlatma mana eýe bolmagy üçin $x \neq 0$ bolmagy talap edilýär. Aşakdaky deňlikler logarifmiň häsiýetlerinden gelip çykýar:

$$f(x) = \log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4\left(4x^4\right) = \log_4 x^2 - \log_4 4 - 2\left(\log_4 4 + \log_4 x^4\right) =$$

$$= 2\log_4|x| - 1 - 2\left(1 + 4\log_4|x|\right) = -6\log_4|x| - 3$$

$$f(-2) = -6\log_4|-2| - 3 = -6\log_{2^2} 2 - 3 = -\frac{6}{2}\log_2 2 - 3 = -3 - 3 = -6$$

12-nji mysal. Eger $a = \log_{98} 112$ bolsa, $\log_7 2$ -ni a arkaly aňladyň.

Çözülişi.

$$a = \log_{98} 112 = \frac{\log_7 112}{\log_7 98} = \frac{\log_7\left(7 \cdot 2^4\right)}{\log_7\left(7^2 \cdot 2\right)} = \frac{\log_7 7 + \log_7 2^4}{\log_7 7^2 + \log_7 2} = \frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2}$$

$$\frac{1 + 4\log_7 2}{2 + \log_7 2} = a$$

$$1 + 4\log_7 2 = 2a + a\log_7 2$$

$$4\log_7 2 - a\log_7 2 = 2a - 1$$

$$(4 - a)\log_7 2 = 2a - 1$$

$$\log_7 2 = \frac{2a - 1}{4 - a}.$$

MYSALLAR

1. Logarifmik aňlatmalaryň bahasyny tapyň.

a) $\log_2 4$ b) $\log_2 1$ c) $\log_2 16$ d) $\log_4 16$

e) $\log_2 64$ f) $\log_8 64$ g) $\log_4 64$ h) $\log_{64} 64$

2. Logarifmik aňlatmalaryň bahasyny tapyň.

a) $\log_5 25$ b) $\log_2 18$ c) $\log_{12} 4$ d) $\log_{10}(0{,}001)$

e) $\log_9 3$ f) $\lg 1000$ g) $\ln e$ h) $\lg\left(\frac{1}{100}\right)$

3. Hasaplaň.

a) $\log_2 8 + \log_2 4$ b) $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$ c) $\log_2 15 - \log_2 \frac{15}{16}$

d) $\log_{\frac{1}{3}} 54 - \log_{\frac{1}{3}} 2$ e) $\log_{0,2} 75 - \log_{0,2} 3$ f) $\log_{36} 9 + \log_{36} 4$

4. Şu sanlardan haýsysy galan üç sanysyna deň däl?

a) $m = 2\log_2 8 - \log_2 4$ b) $n = \log_2 400 - 2\log_2 5$

c) $p = \log_5 125 + \log_5 5$ d) $q = \ln 12e - \ln 2$

5. Aşakdaky sanlardan haýsysy 2-den kiçi?

a) $M=\log_5 100-\log_5 4$ b) $N=4\log_2 3-\log_2 9$

c) $P=\log_6 72-\log_6 2$ d) $Q=\log_4 16+\log_4 \frac{1}{8}$

6. Hasaplaň.

a) $3-\lg 50+\frac{1}{2}\lg 25$ b) $\log_2 32+\log_{32} 2$ c) $\frac{\log_4 13+\log_4 25}{\log_{64} 325}$

d) $\frac{\log_4 11+\log_4 23}{\log_8 253}$ e) $\frac{1}{\log_8 12}+\frac{1}{\log_{18} 12}$. f) $\frac{1}{\log_{45} 15}+\frac{1}{\log_5 15}$

7. Hasaplaň.

a) $81^{\log_3 5}$ b) $4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$ c) $32^{\log_8 27}$

d) $121^{\log_{11} 12}$ e) $3\log_{\sqrt{8}} 2+2^{-2\log_{\frac{1}{2}} 2}$ f) $3\log_{\sqrt{64}} 4+4^{-2\log_{\frac{1}{4}} 3}$

8. a-nyň berlen bahasy üçin aňlatmanyň bahasyny hasaplaň.

a) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=2\cos\frac{\pi}{6}$ b) $3\log_{\frac{1}{3}} a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ c) $4\log_3 a,\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$

9. Hasaplaň.

a) $\log_{\frac{1}{3}} \log_3 27$ b) $\log_4 \log_3 \sqrt{81}$ c) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$

10. Hasaplaň.

a) $\dfrac{2\log_3 12-4\log_3^2 2+\log_3^2 12+4\log_3 2}{3\log_3 12+6\log_3 2}$

b) $\dfrac{\log_2^2 28+\log_2 28\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 28+2\log_2 7}$

c) $\dfrac{\log_{35}^2 7-2\log_{35} 7\cdot\log_{45} 5-3\log_{35}^2 7}{2(\log_{35} 7-3\log_{35} 5)}$

d) $\dfrac{\log_2^2 12-2\log_2 12+2\log_2^2 3-3\log_2 3\cdot\log_2 12+4\log_2 3}{\log_2 12-2\log_2 3}$

11. Aşakdaky funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlalaryny tapyň.

a) $y = \log_2(x+3)$ b) $y = \log_{0,2}(x^2 - 4x)$

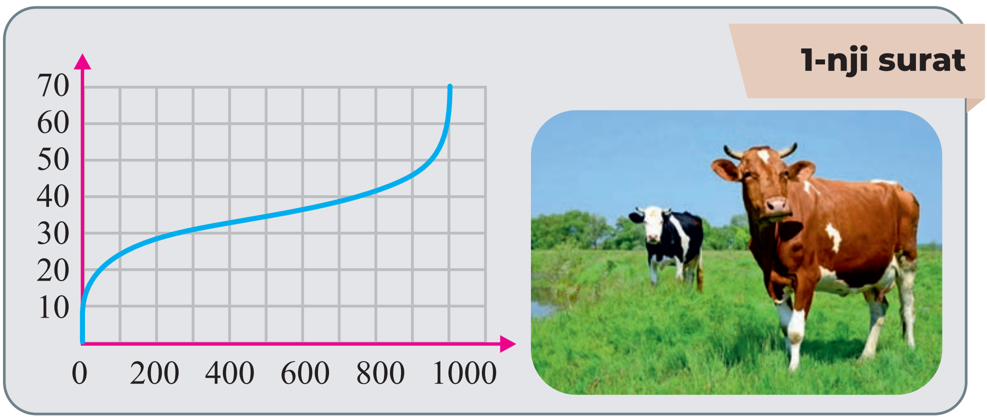
c) $y = \log_{0,7}\left(2x - \dfrac{1}{8}\right)$ d) $y = \log_2(5 - 3x)$

12. *a* arkaly aňladyň .

a) $a = \log_2 3$ bolsa, $\log_{36} 108 = ?$ b) $a = \log_7 3$ bolsa, $\log_{147} 63 = ?$

c) $a = \log_{288} 72$ bolsa, $\log_3 2 = ?$ d) $a = \log_{441} 189$ bolsa, $\log_3 7 = ?$

13. Eger maldaryň 1 000 baş sygryndan biri ýokanç kesele duçar bolan bolsa, onda *t* günde *n* sany sygryň kesellenme görkezijisi $t = -5 \cdot \ln\left(\dfrac{1000 - n}{999n}\right)$ formula bilen modelirlenen. 100 sany, 800 sany, 1 000 sany sygyr näçe günde kesellenendigni tapyň. Çyzgy esasynda netije taýýarlaň (1-*nji surat*).



1-nji surat

14. Jedweller esasynda funksiýanyň grafigini guruň.

a)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3

b)

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2	-3

15. Aşakdaky funksiýalara ters funksiýalary anyklaň.

a) $f(x) = 10^x$ b) $f(x) = \log_3(x+1)$

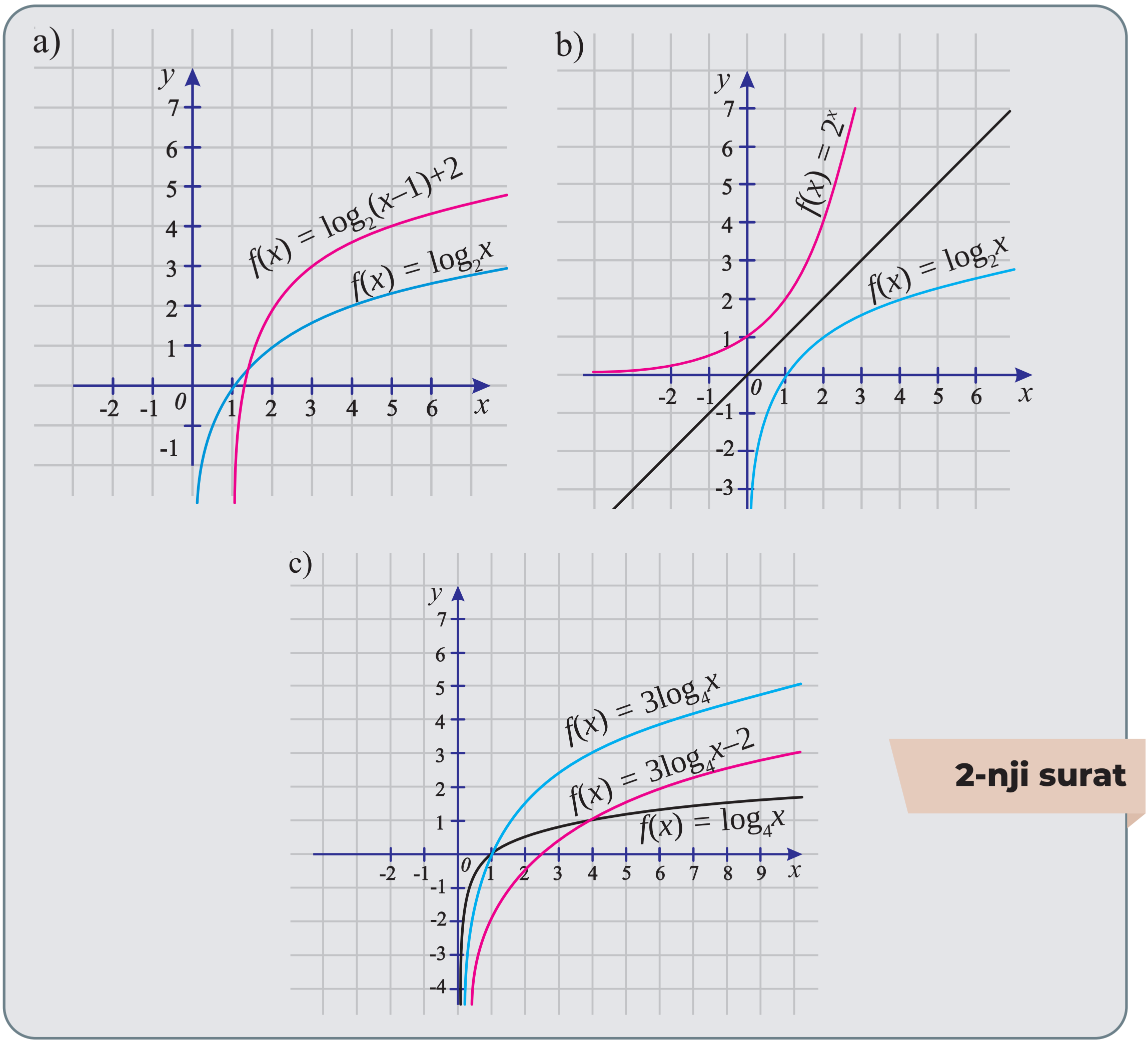
c) $f(x) = 2 + e^{x+4}$ d) $f(x) = 5 + \log_2(x-3)$

16. *a* we *b*-leriň bahasyny tapyň.

a) $\log_3 b = 2$ b) $\log_a 8 = 3$ c) $\log b^2 = \lg 4$ d) $\log_a 36 = 2$

17. $y = \ln e^x$ we $y = e^{\ln x}$ funksiýalarynyň grafigini guruň. Meňzeşligini we tapawutlaryny düşündiriň.

18. 2-nji suratda funksiýanyň üstünde nähili çalşyrmalar ýerine ýetirilendigini beýan ediň.



2-nji surat

Logarifmik funksiýanyň durmuşda ulanylyşy

Sesiň intensiwligi derejesi

Meýdan birligi arkaly wagt birliginde ses tolkuny alyp geçýän energiýa *sesiň intensiwligi* diýip atlandyrylýar. Elastik gurşaw boýunça ses ýaýranda ol ýaýramadyk wagtyndaka görä artykmaç basyş emele gelýär, oňa *sesiň basyşy* diýilýär. Sesiň intensiwligi sesiň basyşynyň amplitudasyna hem-de gurşawyň häsiýetine we tolkunyň şekline bagly. Sesiň beýikliginiň intensiwligi desibelde (dB) ölçenýär.

I – sesiň intensiwligi

I_0 – sesiň otnositel intensiwligi

L – sesiň intensiwliginiň beýikligi

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)dB$$

Smartfonyň nauşniklerine iberen sesiň intensiwligi 100 desibelden geçýär. Adamyň gulagy üçin 80 desibelden ýokary bolan ses beýikligi eşitmek ukybynyň bozulmagyna ýa-da kem-kemden ýitmegine getirýär.

LOGARIFMIK DEŇLEMELER

Logarifmik deňlemeler

Näbelli logarifmasty aňlatmada ýa-da logarifmiň esasynda gatnaşýan deňlemä ***logarifmik deňleme*** diýilýär. Meselem, $\log_2 x = 3$, $\log_x 625 = 2$, $\log_x(x+2) = 2$, $\lg(2x-2) = \lg(x+2)$ deňlemeler logarifmik deňlemä mysal bolup bilýär.

Näbelliniň berlen logarifmik deňlemäni dogry deňlige öwürýän bahasyna logarifmik ***deňlemäniň çözüwi*** diýilýär.

Ýönekeý logarifmik deňlemeleri çözmek

$a > 0$, $a \neq 1$ bolanda şu $\log_a x = b$ deňleme iň ýönekeý logarifmik deňleme bolýar. Bu deňlemäniň çözüwi $x = a^b$ bolýar.

Logarifmik deňlemeleri çözende şu düzgün ulanylýar:

$a > 0$, $a \neq 1$ bolanda $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ deňlemäniň kökleri $f(x) = g(x)$ deňlemäniň $f(x) > 0$ (ýa-da $g(x) > 0$) şerti kanagatlandyrýan köklerinden ybarat bolýar.

Aşakda logarifmik deňlemeleri çözmegiň nusgalaryny getirýäris.

1-nji mysal. $\log_5 x = -2$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Deňlemäni çözende $x > 0$ şert astynda logarifmiň kesgitlemesinden peýdalanýarys:

$$\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{25}$$

$x = \frac{1}{25} > 0$ bolýanlygyndyn tapylan bu baha berlen deňlemäniň köki bolýar.

Jogaby: $x = \frac{1}{25}$.

2-nji mysal. $\log_3(x^2 - 4) = \log_3(5x - 8)$ logarifmik deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Kesgitleniş ýaýlasyny tapýarys:

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 5x - 8 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) > 0 \\ 5x > 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty) \\ x > 1,6 \end{cases} \Rightarrow x \in (2; \infty)$$

Indi $x^2 - 4 = 5x - 8$ deňlemäni çözýäris:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

Näbelliniň $x_1 = 1$ bahasy $(2; \infty)$ topluma degişli däl, $x_2 = 4$ bahasy bolsa bu topluma degişli bolýar. Diýmek, $x_1 = 1$ baha berlen deňlemäniň del köki bolýar, $x_2 = 4$ baha bolsa berlen deňlemäniň köki bolýar.

Jogaby: $x = 4$.

3-nji mysal. $\log_5^2 x-3\log_5 x-4=0$ logarifmik deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Ilki $x>0$ kesgitleniş ýaýlasy bolýandygyny anyklaýarys we $\log_5 x=t$ belgileme girizýäris. Onda

$$t^2-3t-4=0 \Rightarrow (t+1)(t-4)=0 \Rightarrow t_1=-1,\ t_2=4.$$

Diýmek, $\log_5 x=-1$ we $\log_5 x=4$. Mundan $x_1=\frac{1}{5}=0,2$; $x_2=5^4=625$.

Jogaby: $x_1=0,2$; $x_2=625$.

4-nji mysal. $\log_{x-1}16=2$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Deňlemäni çözende ilki bilen onuň köki

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;\ 2)\cup(2;\ \infty)$$

aralyga degişli bolmaly. Logarifmiň kesgitlemesinden peýdalanýarys:

$$\log_{x-1}16=2 \quad \Rightarrow (x-1)^2=16$$

$$x-1=4 \quad \Rightarrow x_1=5$$

$$x-1=-4 \quad \Rightarrow x_2=-3$$

Jogaby: $x=5$.

5-nji mysal. $\log_5\log_2\log_7 x=0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Deňlemäni çözende logarifmiň kesgitlemesinden peýdalanýarys:

$$\log_2\log_7 x=5^0 \Rightarrow \log_2\log_7 x=1 \Rightarrow \log_7 x=2^1 \Rightarrow x=7^2=49$$

Jogaby: $x=49$.

6-njy mysal. $\lg(x^2-3)\cdot\lg x=0$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi.

Her bir köpeldijini 0-a deňleşdirýäris:

$$\lg(x^2-3)=0 \Rightarrow x^2-3=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$$

$$\lg x=0 \Rightarrow x_3=1$$

Kesgitleniş ýaýlasyna görä $x^2-3>0$ we $x>0$ bolmaly. Şu sebäpli $x=2$ kök bolup bilýär.

Jogaby: $x=2$.

MYSALLAR

1. Logarifmik deňlemeleri çözüň.

a) $\log_2 x = -3$ b) $\log_4 2x = \frac{1}{2}$ c) $\lg\frac{5x}{2} = 1$

d) $\log_{\frac{1}{4}} x = -2$ e) $\log_3(3x-1) = 2$ f) $\log_7(x+3) = 2$

g) $\log_9 x^3 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$ h) $\log_4(2x-3) = 4$ i) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$

2. Logarifmik deňlemeleri çözüň.

a) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$ b) $\log_{\frac{1}{2}}(7-8x) = 2$

c) $\log_2 x + \log_8 x = 0$ d) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$

e) $\log_{0,5}(3x+1) = -2$ f) $\log_{0,2}(x+3) = -1$

g) $\log_{0,25}(x+30) = -2$ h) $\log_{\sqrt{3}}(1-2x) = 4$

i) $\log_2\sqrt{x-1} = 1$ j) $\log_3(x^2-4x+3) = \log_3(3x+21)$

k) $\log_3(2x-5) = \log_3(20-3x)$ l) $\log_7(9x-1) = \log_7 x$

m) $\log_3(2x^2-3x) = 2\log_3 x$ n) $\lg(2x) = 2\lg(4x-15)$

3. $\lg(3x-11) + \lg(x-27) = 3$

4. $\log_{81} x - 2\log_3 x + 5\log_9 x = 1,5$

5. $\log_3((x-1)(2x-1)) = 0$

6. $3\lg x^2 - \lg^2 x = 9$

7. $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+4x}{2x-3} = 1$

8. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{2x-1}{x+2} = 1$

9. $\log_\pi(\log_2(\log_3 3x)) = 0$

10. $\log_2^2 x + 3 = \log_2 x^2$

11. $(x^2-6x-7)\log_2(3x-1) = 0$

12. $(x^2-2x-15)\lg(4x-3) = 0$

13. $\log_5(x+4) - \log_5(1-2x) = -\log_5(2x+3)$

14. $\log_2^2 x - 5\log_2 x = 4$

15. $\log_3 x + \log_x 9 = 3$

16. $\log_{x+2} 7 + 3\log_7(x+2) = 4$

17. $\log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3}$

18. $\log_5\sqrt{x-9} + \log_5\sqrt{2x-1} = \log_5 10$

GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK DEŇLEMELER ULGAMY

Görkezijili deňlemeler ulgamy we ony çözmek

Görkezijili aňlatma gatnaşýan deňlemeleri öz içine alýan deňlemeler ulgamyna ***görkezijili deňlemeler ulgamy*** diýilýär. Görkezijili deňlemeler ulgamy dürli görnüşde bolýar. Şeýle ulgamyň her birini çözende özboluşly çemeleşme talap edilýär. Munda görkezijili we logarifmik aňlatmalaryň häsiýetleri giňden ulanylýar.

1-nji mysal. $\begin{cases} 3^x = 9^{y+1}, \\ 4y = 5 - x \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

$9 = 3^2$ bolýanlygyndan peýdalanýarys. Onda $3^x = 3^{2(y+1)}$ bolup, bu ýerden $x = 2y + 2$ gelip çykýar. Ulgamdaky ikinji deňlikde *x* ýerine $2y + 2$ aňlatmany goýýarys.

$4y = 5 - (2y + 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. Endi $x = 2y + 2$ deňlikdäki *y* ýerine onuň bahasyny goýup, *x*-iň bahasyny tapýarys: $x = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow x = 3$.

Jogaby: $\left(3;\ \frac{1}{2}\right)$.

2-nji mysal. $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

$729 = 9^3$ we $1 = 3^0$ bolýanlygyndan peýdalanýarys. Onda

$$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (2;\ 1).$$

Jogaby: (2; 1).

3-nji mysal. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Deňlemeler ulgamynyň berlişinden $x > 0$, $x \neq 1$ şertler ýerine ýetirilmegi gelip çykýar. Şonuň üçin birinji we ikinji deňlemeleriň çep we sag tarapyndaky aňlatmalary logarifmlemek mümkin. Bu aňlatmalary 3 esasa görä logarifmleýäris we aşakdakylara eýe bolýarys:

$$\begin{cases} (y+1)\log_3 x = 3, \\ (2y-5)\log_3 x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = \dfrac{3}{y+1}, \\ (2y-5)\dfrac{3}{y+1} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 2 \end{cases}$$

Jogaby: (3; 2).

4-nji mysal. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Birinji deňlikden $2^y = 5 - 2^x$ baglanyşygy tapýarys. $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ deňligi hasaba alyp, ikinji deňligi $2^x \cdot 2^y = 4$ ýagdaýyna getirýäris, bu ýerden $2^x\left(5 - 2^x\right) = 4$, ondan bolsa $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ deňlemä eýe bolýarys. $t = 2^x$ belgileme girizip $t^2 - 5t + 4 = 0$ şu kwadrat deňlemä eýe bolýarys. Bu ýerde $t > 0$.

Bu kwadrat deňlemäniň çözüwi $t_1 = 1$, $t_2 = 4$ bolup, x we y näbellileriň olara laýyk bahalary

$t_1 = 1$: $\quad 1 = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = 0$; $\quad 2^{y_1} = 5 - 2^0 = 4, \Rightarrow y_1 = 2$

$t_2 = 4$: $\quad 4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2$; $\quad 2^{y_2} = 5 - 2^2 = 1, \Rightarrow y_2 = 0$ bolýar.

Jogaby: (0; 2) we (2; 0).

Düşündiriş. Ýokardaky mysallar her bir görkezijili deňlemeler ulgamyny çözmek üçin döredijilikli çemeleşmelidigini görkezýär.

Logarifmik deňlemeler ulgamy we ony çözmek

Logarifmik aňlatma gatnaşýan deňlemeleri öz içine alýan ulgam ***logarifmik deňlemeler ulgamy*** diýilýär. Logarifmik deňlemeler ulgamy hem görkezijili deňlemeler ulgamy ýaly dürli xil görnüşde bolýar. Olaryň her birini çözende görkezijili we logarifmik aňlatmalaryň häsiýetleri kiň ulanylýar hem-de özboluşly çemeleşme talap edilýär.

5-nji mysal. $\begin{cases} \log_9 \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 xy = 3 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözmek

Ulgamdaky logarifmik aňlatmalar mana eýe bolmagy üçin

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0, \\ xy > 0 \end{cases}$$

deňsizlikler ýerine ýetirilmegi talap edilýär. $\dfrac{x^2}{\sqrt{y}} > 0$ deňsizlik $y > 0$ we $x \neq 0$ bolanda ýerlikli.

Onda ulgamdaky ikinji $xy > 0$ deňsizlikden $x > 0$ we $y > 0$ bolmalydygy gelip çykýar.

Indi logarifmiň häsiýetlerinden peýdalanyp $x > 0$ we $y > 0$ bolanda berlen ulgamy

$$\begin{cases} \log_9 x^2 - \log_9 \sqrt{y} = \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3 \end{cases}$$

ýaly gaýtadan ýazmak mümkin. $\log_9 x^2 = \log_{3^2} x^2 = \log_3 x$ hem-de $\log_9 \sqrt{y} = \log_{3^2} y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}\log_3 y$

deňliklerden peýdalansak, ulgam şu görnüşe gelýär $\begin{cases} \log_3 x - \frac{1}{4}\log_3 y = \frac{1}{2}, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

Ikinji deňlemeden birinji deňlemäni aýryp, $\frac{5}{4}\log_3 y = \frac{5}{2}$ deňlige eýe bolýarys. Mundan $\log_3 y = 2 \Rightarrow y = 9$ bolýandygy gelip çykýar. Indi ulgamyň ikinji deňlemesine y-iň bu bahasyny goýup, x näbellini tapýarys:

$$\log_3 x + \log_3 9 = 3 \Rightarrow \log_3 x + 2 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3.$$

Jogaby: (3; 9).

6-njy mysal. $\begin{cases} x^{\lg y} = 1000, \\ \log_y x = 3 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Ulgamdaky aňlatmalar mana eýe bolmagy üçin $x > 0$, $x \neq 1$, $y > 0$, $y \neq 1$ şertler ýerine ýetirilmelidir. $x^{\lg y} = 1000$ deňligi 10 esasa görä logarifmleýäris:

$$\lg x^{\lg y} = \lg 1000 \Rightarrow \lg y \lg x = 3$$

$\log_y x = 3$ deňligiň çep tarapyndaky logarifmiň esasyny 10 esasa çalşyrýarys:

$$\log_y x = \frac{\lg x}{\lg y} \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 3 \Rightarrow \lg x = 3\lg y$$

Netijede $\lg^2 y = 1$ deňlemä eýe bolýarys.

Mundan

$$\lg y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{10}, \quad \lg y = 1 \Rightarrow y = 10$$

bolýandygy gelip çykýar.

$\lg x = 3\lg y$ deňlikden $x = y^3$ baglanyşygy alyp, x-iň degişli bahalaryny tapýarys:

$$y = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \frac{1}{1000}$$
$$y = 10 \Rightarrow x = 1000$$

Jogaby: $\left(\frac{1}{1000}; \frac{1}{10}\right)$ we (1000; 10).

7-nji mysal. $\begin{cases} \log_2(x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$ deňlemeler ulgamyny çözüň.

Çözülişi.

Ulgam kesgitlenen bolmagy üçin $x - y > 0$, ýagny $x > y$ bolmaly. Onda ulgamyň birinji deňlemesinden

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$$

baglanyşyk gelip çykýar. Ulgamyň ikinji deňlemesinde y ýerine $x - 2$ aňlatmany goýýarys:

$$2^x \cdot 3^{x-2+1} = 72 \Rightarrow 2^x \cdot 3^x = 3 \cdot 72 \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$$

Onda $y = 1$.

Jogaby: (3; 1).

MYSALLAR

1. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 5^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^y \cdot 2^x = 972 \\ y - x = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3y-2x-3} = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ x + y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648 \\ 3^x \cdot 4^y = 432 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9} \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2^y \cdot 8^{-x} = 8\sqrt{2} \\ y + 3x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ i) $\begin{cases} 4^{y-1} \cdot 5^x = 6400 \\ y - x = 3 \end{cases}$

2. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} \log_7 7x + \log_7 y = 2 \\ y - 5x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 4 \\ y - x = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log_2 \left(x^2 + y^2\right) = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 2x - \log_3 \left(\dfrac{2}{y}\right) = 1 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \left(\dfrac{y}{2}\right) = -1 \\ x - y = -\dfrac{7}{4} \end{cases}$

3. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} = -2 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y+1} = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9^x - 3 \cdot 2^y = 3 \\ 9^x \cdot 5^y = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \lg x (\lg x + \lg y) = 2 \\ \lg x - \lg y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3^x \cdot 25^y = 5625 \\ 5^x \cdot 9^y = 2025 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63 \\ 3^x + 7^y = 16 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4 \end{cases}$ ulgamyň köklerini aňladýan nokatlaryň arasyndaky aralygy tapyň.

5. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ \log_{\sqrt{3}} (x - y) = 2 \end{cases}$ x we y deňlemeler ulgamynyň kökleri bolsa, xy-i tapyň.

6. $\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ x we y deňlemeler ulgamynyň kökleri bolsa, $x + y$-i tapyň.

LOGARIFMIK DEŇSIZLIKLER

Logarifmik deňsizlikler

$a>0$ we $a\neq 1$ bolsun. Onda

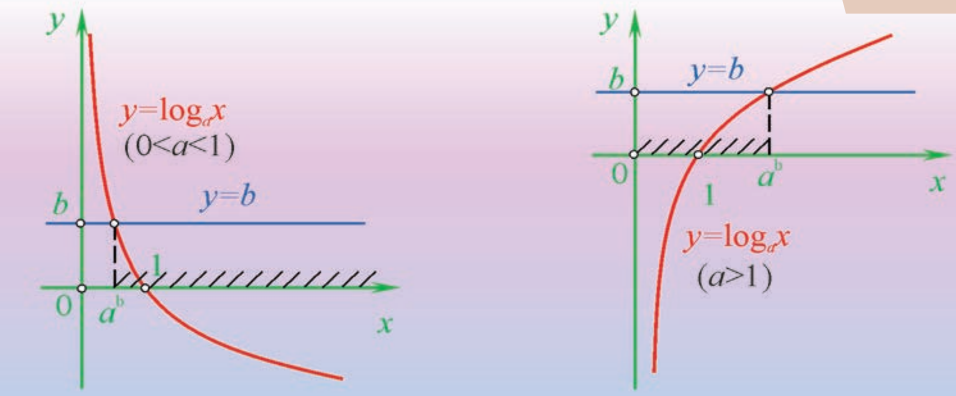
$$\log_a x<b,\ \log_a x>b,\ \log_a x\le b,\ \log_a x\ge b$$

deňsizlikler logarifmik deňsizlikler bolýar. Olary çözende $y=\log_a x$ funksiýanyň monotonlygyndan peýdalanylýar.

$\log_a x<b$ deňsizlige garalyň. Bu deňsizligiň çözüwi x üýtgeýjiniň şeýle bahalary toplumy bolup, bu bahalarda $y=\log_a x$ funksiýanyň Oxy koordinatalar ulgamyndaky grafigi $y=b$ göni çyzykdan aşakda ýerleşen bolýar.

$\log_a x<b$ deňsizligiň çözüwiniň geometrik beýany

1-nji surat



a) $\log_a x<b$ *deňsizligiň* $0<a<1$ *bolandaky çözüwi* $(a^b;\ +\infty)$ *aralykdan ybarat.*

b) $\log_a x<b$ *deňsizligiň* $a>1$ *bolandaky çözüwi* $(0;\ a^b)$ *aralykdan ybarat.*

$\log_a x>b$, $\log_a x\le b$, $\log_a x\ge b$ deňsizlikleriň çözüwleriniň geometrik beýanlaryny özbaşdak ýagdaýda getiriň.

Logarifmik deňsizlikleri çözmek

Şu $\log_a f(x)<\log_a g(x)$ logarifmik deňsizligiň çözüwi:

$0<a<1$ bolanda $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

deňsizlikler ulgamynyň çözüwinden;

$a>1$ bolanda bolsa $\begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$ deňsizlikler ulgamynyň çözüwinden ybarat bolýar.

$\log_a f(x)\le\log_a g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ we $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)$ deňsizlikleriň çözülişi aşakdaky jedwelde getirilen.

Logarifmik deňsizlikleriň görnüşi	$\log_a f(x) \le \log_a g(x)$	$\log_a f(x) < \log_a g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x)$	$\log_a f(x) \ge \log_a g(x)$
$0 < a < 1$ bolanda	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$
$a > 1$ bolanda	$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

1-nji mysal. $\log_{27} x > \frac{1}{3}$ deňsizligi çözüň.

Çözülişi.

Kesgitleniş ýaýlasy $x > 0$. Logarifmiň esasynyň 1-den ululygyndan we logarifmiň kesgitlemesinden peýdalanýarys:

$$\log_{27} x > \frac{1}{3} \Rightarrow x > 27^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x > \sqrt[3]{27} \Rightarrow x > 3 \begin{cases} x > 3 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x \in (3; \infty)$$

Jogaby: $x \in (3; \infty)$

2-nji mysal. $\log_{0,5}(2x-3) > \log_{0,5}(x+1)$ deňsizligi çözüň.

Çözülişi.

Deňsizligi oňa deň güýçli bolan aşakdaky ulgama getirip çözýäris:

$$\begin{cases} 2x-3 < x+1 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 1,5 \end{cases} \Rightarrow x \in (1,5; 4)$$

Jogaby: (1,5; 4)

3-nji mysal. $\log_7^2 x - 13\log_7 x + 42 \ge 0$ deňsizligi çözüň.

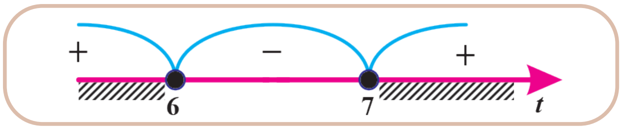
Çözmek

$t = \log_7 x$ belgileme girizýäris. Netijede

$$t^2 - 13t + 42 \ge 0$$

deňsizlik emele gelýär.

$(t-6)(t-7) \ge 0$ deňsizligi çözýäris.



Diýmek, $t \le 6$ ýa-da $t \ge 7$ eken. $\log_7 x \le 6$ ýa-da $\log_7 x \ge 7$ bolýar. Mundan $x \le 7^6$ ýa-da $x \ge 7^7$ deňsizlikler emele gelýär. $x > 0$ şerti hasaba alsak,

$$x \in \left(0; 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$$

bolýar.

Jogaby: $x \in \left(0; 7^6\right] \cup \left[7^7; \infty\right)$.

$A\cdot\log_a^2 x+B\cdot\log_a x+C<0$ ýaly deňsizlikler $\log_a x$ belgileme bilen kwadrat deňsizlige getirip çözülýär.

4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\log_3^2 x-3\log_3 x+2\leq 0$.

Çözmek

Kesgitleniş ýaýlasy $x>0$.

$\log_3 x=t$ belgileme girizýäris

$t^2-3t+2\leq 0$ deňsizligi çözýäris

$(t-1)(t-2)\leq 0$ mundan $1\leq t\leq 2$

$1\leq \log_3 x\leq 2 \quad \Rightarrow \log_3 3\leq \log_3 x\leq \log_3 9 \quad \Rightarrow 3\leq x\leq 9$

Jogaby: $[3;9]$

5-nji mysal. $\log_{x+1}\left(x^2+2x+1\right)^{x^2+2x+5}>4x+28$ deňsizligi çözüň.

Çözülişi.

Deňsizligi aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$\log_{x+1}(x+1)^{2(x^2+2x+5)}>4x+28$$

Bu ýerde iki ýagdaýyň bolmagy mümkin:

1-nji ýagdaý. $0<x+1<1\Rightarrow -1<x<0$

Munda: $2(x^2+2x+5)<4x+28 \;\Rightarrow\; x^2+2x+5<2x+14 \;\Rightarrow\; x^2-9<0 \;\Rightarrow\; x\in(-3;\ 3)$

$-1<x<0$ bolýanlygyndan $x\in(-1;0)$

2-nji ýagdaý. $x+1>1\Rightarrow x>0$

Munda:

$2(x^2+2x+5)>4x+28 \;\Rightarrow\; x^2+2x+5>2x+14 \;\Rightarrow\; x^2-9>0 \;\Rightarrow\; x\in(-\infty;\ -3)\cup(3;\ \infty)$

$x>0$ bolýanlygyndan $x\in(3;\infty)$

1- we 2-nji ýagdaýlary birleşdirsek, deňsizligiň çözüwi aşakdaky ýaly bolýar:

$$x\in(-1;0)\cup(3;\ \infty)$$

Jogaby: $x\in(-1;0)\cup(3;\ \infty)$.

MYSALLAR

1. Deňsizlikleri çözüň.

a) $\log_2 x > 3$ b) $\log_{0,5} x > 2$ c) $\log_2 8 > x$

d) $\log_5 x > 3$ e) $\log_3 x > 4$ f) $\log_3 x \geq \log_6 36$

g) $\log_2 x < \log_{49} 7$ h) $\log_{\frac{1}{5}}(x-5) > -2$ i) $\log_3(x+20) < 3$

j) $\log_3(4x+2) - \log_3 10 < 0$ k) $\log_8 64 > \log_{\frac{1}{5}} x$ l) $\log_4(5-x^2) > 1$

m) $\log_5(3x-2x^2) > 0$ n) $\log^2_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$ o) $5^{\log_5(x-7)} < 4$

2. $\log_2(4-x) - \log_2 7 < 0$ deňsizligi kanagatlandyrýan bitin sanlar näçe?

3. Deňsizlikleri çözüň.

a) $\log_{\frac{4}{3}}(x+6) - \log_{\frac{4}{3}} 9 < \log_{\frac{4}{3}} 2 - \log_{\frac{4}{3}} 6$ b) $\log_2(x-1) < \log_2(3x-1)$

c) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ d) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x-6) \geq -3$

e) $\lg^2 x + 11 \cdot \lg x + 10 < 0$ f) $\log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \leq 0$

g) $\log_2 \log_{\sqrt{2}}(x+1) < 1$ h) $2\log_{\frac{1}{5}}(x-2) + 3\log_5(x-2) < 1$

i) $\log_x x^2 + x > 1$ j) $\lg(x+2) + \lg(x-3) \leq \lg x^2$

4. Deňsizlikleri çözüň.

a) $\lg 10^{\lg(x^2+21)} > 1 + \lg x$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) \geq -2$ d) $\log_{\frac{x-1}{5x-6}}\left(\sqrt{6} - 2x\right) > 0$

e) $x^{1+\lg\sqrt{x}} < 0,1^{-2}$ f) $\sqrt{x^{4\lg x}} < 10x$

5. $\log_{0,2}(x^4+2x^2+1) > \log_{0,2}(6x^2+1)$ deňsizligiň ähli otrisatel çözüwleri toplumyny tapyň.

GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK FUNKSIÝALARYŇ ULANYLYŞY

Çylşyrymly göterim formulasy we onuň ulanylyşy

Aýdaly, käbir Q_0 mukdardaky pul karz alynmakçy. Karz beriji bellenen möhletde ilkinji mukdary käbir P peýda bilen gaýtarmagyny talap etmegi mümkin. Diýmek, görkezilen möhletde karz alyjy gaýtarýan mukdar

$$Q_1 = Q_0 + P$$

bolýar. Möhlet hökmünde bir gün, iki gün, ..., bir hepde, iki hepde, ..., bir aý, iki aý we başgalar alynmagy mümkin. Munda şu

$$p = \frac{P}{Q_0} \cdot 100\%$$

ululyga *alnan karzy öz möhletinde gaýtarma göterimi* diýilýär.

1. Ýönekeý göterim formulasy. Eger göterim diňe alnan Q_0 mukdara ulansa, birinji möhletiň ahyrynda karzyň mukdary

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

bolýar. Munda

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

formula – karz berijiniň birinji möhletiň ahyryndaky peýdasy. Bu prosesi n gezek gaýtalap, n-möhletiň ahyrynda karzyň mukdary

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

bolmagy, karz berijiniň n-möhletiň ahyryndaky peýdasy

$$P_n = \frac{np}{100} \cdot Q_0 \quad (\text{görnüşi ýaly, } P_n = nP)$$

bolmagy tapylýar. Şeýle hasaplanýan göterime ***ýönekeý göterim***,

$$Q_n = \left(1 + \frac{np}{100}\right) Q_0$$

formula bolsa ***ýönekeý göterim formulasy*** diýilýär.

2. Çylşyrymly göterim formulasy. Göterimi alnan karza emele gelen peýdany goşup ulanmak mümkin. Munda birinji möhletiň ahyrynda karzyň mukdary

$$Q_1 = Q_0 + \frac{p}{100} \cdot Q_0 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) Q_0$$

bolýar. Munda

$$P_1 = \frac{p}{100} \cdot Q_0 = P$$

formula – karz berijiniň birinji möhletiň ahyryndaky peýdasy. Bu prosesi n gezek gaýtalap, n-möhletiň ahyrynda karzyň mukdary

$$Q_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

bolmagy, karz berijiniň n-möhletiň ahyryndaky peýdasy

$$P_n = Q_n - Q_0 = \left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right)Q_0$$

bolmagy tapylýar. Şeýle hasaplanýan göterime ***çylşyrymly göterim***,

$$Q_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)^n Q_0$$

formula bolsa ***çylşyrymly göterim formulasy*** diýilýär.

Ýönekeý we çylşyrymly göterim formulalarynyň ulanylyşyna degişli köp amaly mysallar we meseleler duşýar. Häzir *kredit, ipoteka karzy* ýaly jümlelere köp duşýarys. Ipoteka karzyny hasaplamak boýunça mesele çözmegiň nusgasyny getirýäris.

Adatda karz beriji bank, karz alyjy bolsa müşderi görnüşinde bolýar. Banklar ýaşaýyş jaýyny almaga (ipoteka), transport serişdesi, ýa-da hojalyk harytlary (telewizor, sowadyjy, öýjükli aragatnaşyk telefony we başgalar) alanda (kredit) karzy birnäçe ýyla çenli bolan uzak möhlete berýär we müşderiden her aýda karzyň mälim mukdaryny töläp durmagy talap edýär.

1-nji mysal. Başlangyç nyrhy 360 000 000 som bolan öýi ýaş maşgala ýyllyk 20% bilen 15 ýyla ipoteka karzy arkaly aldy. 15 ýylyň dowamynda banka näçe pul gaýtarylar? Bu ýerde bank näçe peýda gazanar?

Çözmek

Başlangyç 360 000 000 som pul bankyň dilinde ***esasy karz*** diýilýär. 1 ýyl 12 aýdan ybarat. Şonuň üçin müşderi banka her aýda esasy karzyň

$$\frac{360\ 000\ 000}{15\cdot 12} = 2\ 000\ 000$$

som mukdaryny gaýtarmaly. Gaýtarmanyň birinji aýynda peýda bolýan göterim aşakdaky ýaly tapylýar:

$$a_1 = 360\ 000\ 000\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12} = 6\ 000\ 000 \text{ som.}$$

Diýmek, müşderi birinji aýyň ahyrynda jemi

$$2\ 000\ 000 + 6\ 000\ 000 = 8\ 000\ 000$$

som gaýtarmaly. Şundan soň galan karzyň mukdary

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

som bolýar. Ikinji aýyň ahyrynda müşderi esasy karzyň 2 000 000 som mukdaryny we peýda bolan şu

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000 = 358\ 000\ 000$$

som göterim mukdaryny, jemi bolsa

$$2\ 000\ 000 + 5\ 966\ 667 = 7\ 966\ 667$$

som puly gaýtarmaly.

$(n-1)$-aýyň puly tölenensoň,

$$360\ 000\ 000 - 2\ 000\ 000\cdot(n-1)$$

som mukdarda esasy karz galýar. n-aýyň ahyrynda müşderi banka $2\ 000\ 000+a_n$ mukdarda pul töleýär. Bu ýerde a_n aňlatmasy n-aýyň göterimi bolup,

$$a_n=\left(360\ 000\ 000-2\ 000\ 000\cdot(n-1)\right)\cdot\frac{20\%}{100\%}\cdot\frac{1}{12}=(181-n)\cdot\frac{100\ 000}{3}$$

deňlik arkaly tapylýar. Görnüşi ýaly, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ kemelýän arifmetik progressiýa bolup, onuň tapawudy

$$d=a_n-a_{n-1}=(181-n)\cdot\frac{100\ 000}{3}-\left(181-(n-1)\right)\cdot\frac{100\ 000}{3}=-\frac{100\ 000}{3},\ \text{ýagny}\ d=-\frac{100\ 000}{3}$$

-e deň.

Görnüşi ýaly, 15 ýyl 180 aýdan ybarat, şonuň üçin $1\le n\le 180$ bolýar. Diýmek,

$$a_1=6\ 000\ 000,\ a_{180}=\frac{100\ 000}{3}$$

bolup, arifmetik progressiýanyň 180 agzasynyň jemi

$$S_{180}=\frac{a_1+a_{180}}{2}\cdot 180=\frac{6\ 000\ 000+\frac{100\ 000}{3}}{2}\cdot 180=$$

$$=\frac{18\ 000\ 000+100\ 000}{3}\cdot 90=18\ 100\ 000\cdot 30=543\ 000\ 000$$

bolýar. Diýmek, müşderi banka jemi

$$360\ 000\ 000+543\ 000\ 000=903\ 000\ 000$$

som gaýtarmaly eken. Munda bankyň peýdasy 543 000 000 som bolýar.

Radioaktiw dargama

Ýarym dargama döwri. Käbir himiki elementler öz ýadrolaryndan bölejikler çykaryp durýar. Şeýle elementlere *radioaktiw elementler* diýip aýdylýar, olaryň öz ýadrolaryndan bölejik çykarmak prosesine ***radioaktiw dargama*** diýilýär. Radioaktiw dargama netijesinde başlangyç himiki element başga himiki elemente öwrülýär.

Başlangyç himiki elementiň massasy m_0 bolup, onuň ýarysy dargamagyna gidýän wagt T_1 bolsun. Onda $t_1=T_1$ wagtdan soň dargaman galan elementiň massasy $m_1=\frac{m_0}{2}$ bolup, m_1 massanyň ýarysy dargamagy üçin T_2 wagt sarplansyn. $t_2=T_1+T_2$ wagtdan soň dargaman galan elementiň massasy $m_2=\frac{m_1}{2}=\frac{m_0}{2^2}$ bolup, massanyň ýarysy dargamagy üçin T_3 wagt sarplansyn. Edil şonuň ýaly, $t_3=T_1+T_2+T_3$ wagtdan soň dargaman galan elementiň massasy $m_3=\frac{m_2}{2}=\frac{m_0}{2^3}$ bolup, m_3 massanyň ýarysy dargamagy üçin T_4 wagt sarplansyn. Bu proses çäksiz dowam etdirilen bolsun.

Uzak ýyllyk tejribe netijesinde $T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots$ bolýandygy subut edilen. Diýmek, hut bir elementiň massasynyň ýarysy dargamagy üçin gidýän wagt hemişelik mukdar eken. Bu mukdara ***elementiň ýarym dargama döwri*** diýilýär we T arkaly belgilenýär:

$$T=T_1=T_2=T_3=\ldots=T_n=T_{n+1}=\ldots.$$

Netijede

$$t_1 = T_1 = T\,,$$
$$t_2 = T_1 + T_2 = 2T\,,$$
$$t_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 3T\,,\ldots,$$
$$t_n = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n = nT$$

deňlikler emele gelýär. Başlangyç massasy m_0 bolan elementiň $t_n = nT$ wagtdan soň dargaman galan böleginiň massasy $m_n = \frac{m_0}{2^n} = 2^{-n} m_0$ bolýan eken. Bu ýerde $n = \frac{t_n}{T}$ bolýandygyny hasaba alsak, $m_n = 2^{-\frac{t_n}{T}} m_0$ deňlige eýe bolýarys. Bu formula islendik t moment üçin hem ýerlikli:

$$m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0.$$

Şeýdip, radioaktiw elementiň dargaman galan böleginiň massasy wagtyň görkezijili funksiýasy eken.

2-nji mysal. Sutkanyň ilkinji 8 sagadynda radioaktiw maddanyň işjeňligi 4 esse kemeldi. Sutkanyň dowamynda maddanyň işjeňligi näçe esse kemeler?

Çözülişi. Garalýan maddanyň başlangyç massasy m_0 bolup, ýarym dargama döwri T bolsun. 8 sagatdan soň onuň massasy $m(8) = \frac{m_0}{4}$ bolan. Bu berlenler üçin $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ formulany ulanyp, maddanyň ýarym dargama döwri tapylýar:

$$m(8) = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_0}{4} = 2^{-\frac{8}{T}} m_0 \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{8}{T}} = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{T} = 2 \quad \Rightarrow \quad T = 4 \text{ sagat.}$$

Indi $m(t) = 2^{-\frac{t}{T}} m_0$ formula ýene bir gezek $t = 24$ (bir sutka = 24 sagat) üçin ulanylyp, radioaktiw maddanyň işjeňligi sutkanyň dowamynda näçe esse kemelendigi tapylýar:

$$m(24) = 2^{-\frac{24}{T}} m_0 = 2^{-6} m_0 = \frac{m_0}{64}.$$

Şeýdip, sutkanyň dowamynda radioaktiw maddanyň işjeňligi 64 esse kemelýär.

Goşmaça baha salgydy

Goşmaça baha salgydy gysgaça GBS diýlip atlandyrylýar.

Siz *salgyt* düşünjesi bilen tanyşsyňyz. Harytlary öndüriji ýa-da import ediji (lomaý satyjy ýa-da bölekleýin satyjy) döwlete söwda salgydyny tölemeli. *Goşmaça baha salgydy* – öndürijiden çekip tä bölekleýin satyja çenli üpjünçilik zynjyrynyň köp nokatlarynda hökümet tarapyndan amala aşyrylýan salgyt. Her bir basgançakda diňe haryda goşmaça baha söwda salgydyna çekilýär. Söwda salgydynyň jemleýji ýagdaýy sarp edijide galýar.

Bu asyl öndürijiden satyja harytlaryň her bir geçirilişinde goşulan baha salgydy.

Aýdaly, GBS stawkasy 10% we telekeçi 8 000 000 soma önüm satyn aldy, ol töleýän salgyt = 8 000 000 somuň 10 göterimi = 800 000 som.

Indi, eger ol edil şu önümi 11 500 000 soma satsa,

ondan alynýan salgyt = 11 500 000-iň 10% = 1 150 00 som.

Telekeçi üçin GBS = 1 150 000 – 800 000 = 350 000 som bolýar.

MYSALLAR *(kalkulýatordan peýdalanmak mümkin)*

1. Başlangyç bahasy 360 million som bolan kwartirany ýyllyk 18% bilen 20 ýyla ipoteka karzy arkaly alan maşgala möhletiň ahyrynda banka näçe pul gaýtaran bolýar? Bankyň peýdasy näçe bolar?

2. Ýyllyk 8% bilen 3 ýyl möhlete 5000 ABŞ-nyň dollary boýunça çylşyrymly göterimleri tapyň.

3. Wahid 50 million som karz aldy we birinji, ikinji we üçünji ýyl üçin degişlilikde 10%, 12% we 14% stawkada göterim tölemäge razy boldy. 3 ýyldan soň tölemeli bolan umumy mukdary tapyň.

4. Bir adam banka 100 million som goýupdyr. Munuň öwezine ol 1,331 million som aldy. Bank ýylyna 10% göterim berdi. Ol puly näçe wagt bankda saklapdyr?

5. Amanatçy 26 million somy bank hasabyna geçirdi. 18 aýdan soň onuň hasabynda 32 million som boldy. Ýyllyk göterim stawkasy näçe?

6. Mende 400 dollar bar. Dostum maňa banka maýa goýumyny girizmegi teklip etdi. Men ýyllyk 13% daşary ýurt walýutadaky hasap belgisine we her aýda 1% doldurylýan summanyň hasabyna maýa goýumyny girizdim.

a) Eger walýuta hasap belgisine pul girizsem, bir ýylda näçe alaryn?

b) Eger men bu puly soma doly öwrüp, summanyň hasabyna goýan bolsam, bir ýylda nähili mukdarda dollar alaryn? Dollar bilen somuň kursunyň üýtgeýşini hasaba alyň.

7. Myrat 10 million soma haryt satyn alsa, 7% salgyt töleýär. Ol edil şu harydy 13 million soma satsa, 9% salgyt alýar. Myrat töleýän GBS-ny tapyň.

8. Telekeçi önümi 7,5 milliona satsa, hyrydardan 12% stawkada söwda salgydy alýar. Eger ol 180 000 som mukdaryda GBS tölese, telekeçi tölän salgydy hasaba alsak bilen başlangyç bahany anyklaň.

9. Öndüriji öz önüminiň bahasyny her biri üçin 12 million diýip yglan etdi. Ol lomaý satyja 30% arzanlatmaga rugsat berdi, lomaý satyjy bolsa, öz nobatynda, bölekleýin satyja yglan edilen bahadan 20% arzanlatmaga rugsat berdi. Eger haryt üçin bellenen söwda salgydy stawkasy 10% bolsa we bölekleýin satyjy ony sarp edijä yglan edilen bahada satsa, lomaý we bölekleýin satyjy tölän goşmaça baha salgydyny tapyň.

10 Bölekleýin satyjy lomaý satyjydan önümi 80 000 soma satyn aldy we lomaý satyjy bellenen 8% mukdarynda söwda salgydyny aldy. Bölekleýin satyjy bahany 100 000 som edip belläp goýdy we edil şu stawkada söwda salgydyny sarp edijiden alýar. Bölekleýin satyjy döwlete näçe GBS töleýär?

IV BAP. TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR

- TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR. DÖWÜRLEÝIN PROSESLER
- TERS TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR

TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR WE OLARYŇ HÄSIÝETLERI, GRAFIGI. DÖWÜRLEÝIN PROSESLER

Trigonometrik funksiýalar. Döwürleýin prosesler

Tebigatda, tehnikada, önümçilikde we başga ugurlarda wagtyň geçmegi bilen gaýtalanýan hadysalar we prosesler köp duşýar. Meselem, gün çykmagy, pasyllaryň çalyşmagy, içinden ýandyrylýan dwigatelde porşeniň hereketi we başgalar wagtyň geçmegi bilen gaýtalanýar. Şeýle prosesler ***döwürleýin prosesler*** diýip atlandyrylýar. Döwürleýin prosesler trigonometrik funksiýalar arkaly häsiýetlenýär.

Trigonometrik funksiýalary öwrenmekde:

1) burçuň ululygynyň gradus ölçegini;

2) 1° burçuň 60-dan bir bölegi 1 *minut* (belgilenişi 1′), 1′ -yň 60-dan bir bölegi 1 *sekunt* (belgilenişi 1″) bolýandygyny, ýagny

$$1' = \frac{1^\circ}{60},\quad 1'' = \frac{1'}{60} = \frac{1^\circ}{3600}$$

deňlikleri;

3) burçuň ululygynyň radian ölçegini;

4) burçuň radian ölçeginden gradus ölçegine geçmek

$$\alpha\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\cdot\alpha\right)^\circ$$

formulasyny;

5) burçuň gradus ölçeginden radian ölçegine geçmek

$$\alpha^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\cdot\alpha\right) rad$$

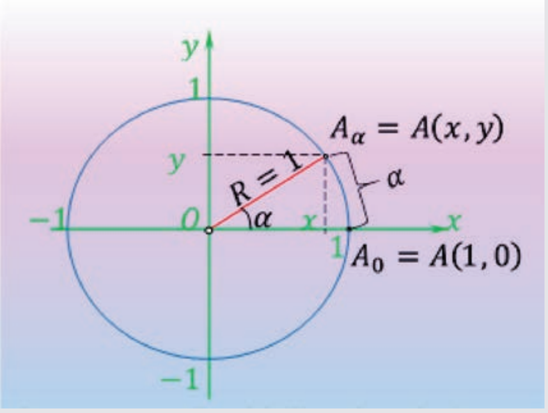
formulasyny;

6) getirme formulalary bilmek talap edilýär.

Burçuň sinusy, kosinusy, tangensi we kotangensi

Oxy Dekart koordinatalar ulgamy girizilen tekizlikde merkezi koordinatalar başlangyjynda bolan **birlik töwerege** (ýagny radiusy 1-e deň töwerege) garap geçýäris. $A_\alpha = A\ (1;\ 0)$ nokady belläp alýarys. Töwerekde A_0 nokatdan sagat miliniň hereketine garşy (ýagny **položitel**) ugurda uzynlygy α deň duga bölüp alýarys we onuň ahyryny A_α arkaly belgileýäris (1-*nji surat*). Burçuň ululygynyň radian ölçegi anyklanyşyna görä A_0OA_α burçuň ululygy α radiana deň bolýar:

1-nji surat



α radian birlik töwerekdäki uzynlygy α bolan $\overset{\frown}{A_0A_\alpha}$ duganyň merkezi burçunyň burç ululygydyr

$$\alpha = \angle A_0OA_\alpha.$$

Üns beriň! A_α nokat *Oxy* tekizliginde käbir koordinata eýe bolýar.

Aýdaly, A_α nokadyň *Oxy* tekizligindäki koordinatalary $(x; y)$ bolsun.

Kesgitleme

1) x ululyk α burçuň *kosinusy* diýilýär we $\cos\alpha$ arkaly belgilenýär.

2) y ululyk α burçuň *sinusy* diýilýär we $\sin\alpha$ arkaly belgilenýär.

3) $\frac{y}{x}$ gatnaşyk α burçuň *tangensi* diýilýär we $tg\alpha$ arkaly belgilenýär.

4) $\frac{x}{y}$ gatnaşyk α burçuň *kotangensi* diýilýär we $ctg\alpha$ arkaly belgilenýär.

Diýmek, kesgitlemä görä:

$$\cos\alpha = x, \qquad \sin\alpha = y, \qquad tg\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\alpha = \frac{x}{y} \tag{1}$$

bolýar.

Ýatlatma! Eger birlik tözerek ýerine islendik R radiusly tözerek alynsa, onda

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \qquad \sin\alpha = \frac{y}{R}, \qquad tg\,\alpha = \frac{y}{x}, \qquad ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \tag{1'}$$

deňlikler emele gelýär.

Görnüşi ýaly, töwerekdäki A_0 nokady berlen burça aşakdaky ýaly iki ugurda merkezi öwürmek mümkin:

Položitel öwürmek: öwürmek sagat mili hereketine garşy ugurda ýerine ýetirilýär.

Otrisatel öwürmek: öwürmek sagat mili hereketi ugry boýunça ýerine ýetirilýär.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$ funksiýalar we olaryň häsiýetleri, grafigi

Her bir x sana birlik töwerekdäki A_0 nokatdan başlap x burça öwürmekde emele gelýän A_x nokady laýyk goýalyň. Onda töwerekdäki A_x nokat üçin $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ bahalary hasaplamak mümkin. Netijede x sana $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ bahalary laýyk goýýan we ***trigonometrik funksiýalar*** diýip atlandyrylýan şu

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = tgx, \; y = ctgx$$

funksiýalara eýe bolýarys.

Bu funksiýalar döwürleýin, ýagny her bir $k \in Z$ üçin aşakdaky deňlikler ýerlikli bolýar:

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

$$tg(x + \pi k) = tgx$$

$$ctg(x + \pi k) = ctgx$$

Diýmek, $y = sinx$ we $y = cosx$ funksiýalaryň esasy döwri $T_0 = 2\pi$ hem-de $y = tgx$ we $y = ctgx$ funksiýalaryň esasy döwri $T_0 = \pi$ eken.

$y = cosx$ funksiýa jübüt:

$$f(-x) = cos(-x) = cos\,x = f(x).$$

$y = sinx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ funksiýalar bolsa täk:

$$f(-x) = sin(-x) = -sin\,x = -f(x)$$

$$f(-x) = tg(-x) = -tg\,x = -f(x)$$

$$f(-x) = ctg(-x) = -ctg\,x = -f(x)$$

Görnüşi ýaly,

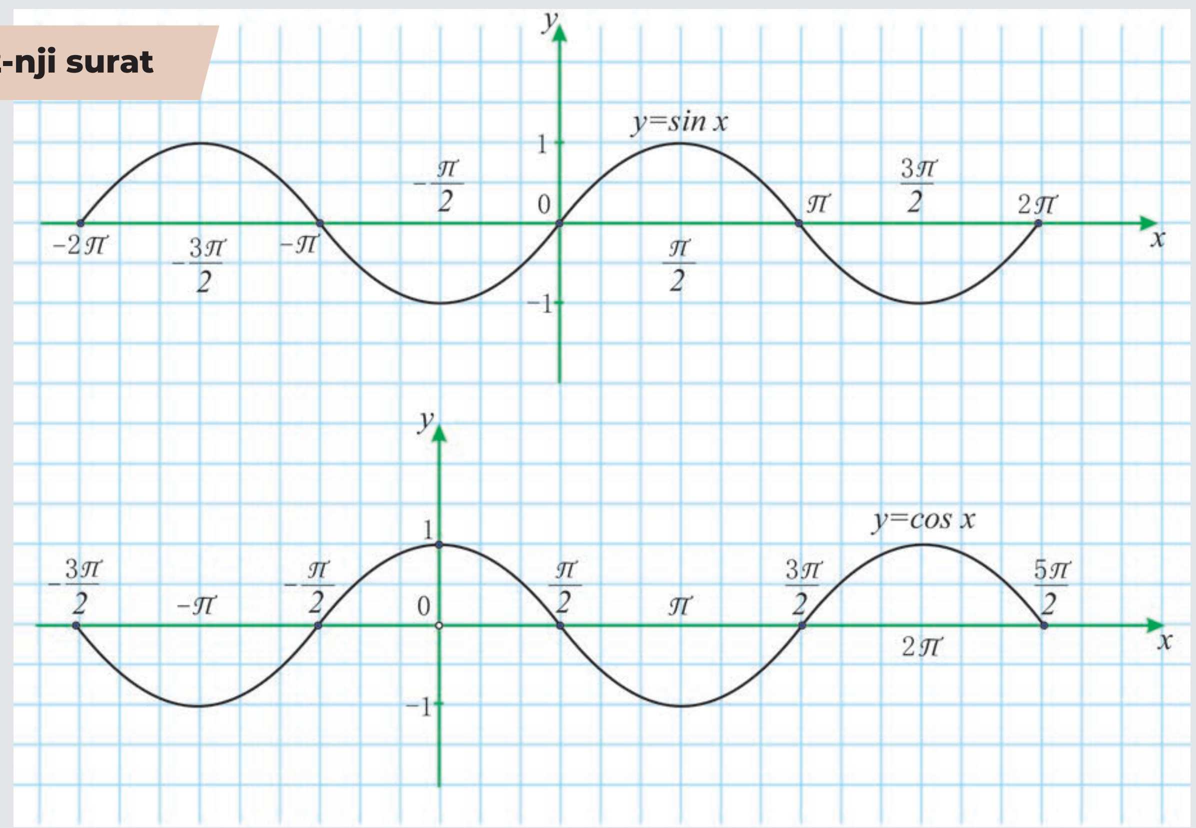
$y = sinx$ we $y = cosx$ funksiýalar üçin $D(y) = (-\infty; +\infty)$, $E(y) = [-1; 1]$,

$y = tgx$ funksiýa üçin $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$,

$y = ctgx$ funksiýa üçin $D(y) = (\pi k;\ \pi + \pi k)$, $k \in Z$, $E(y) = (-\infty, +\infty)$ bolýar.

Aşakdaky suratlarda trigonometrik funksiýalaryň grafikleri getirilen.

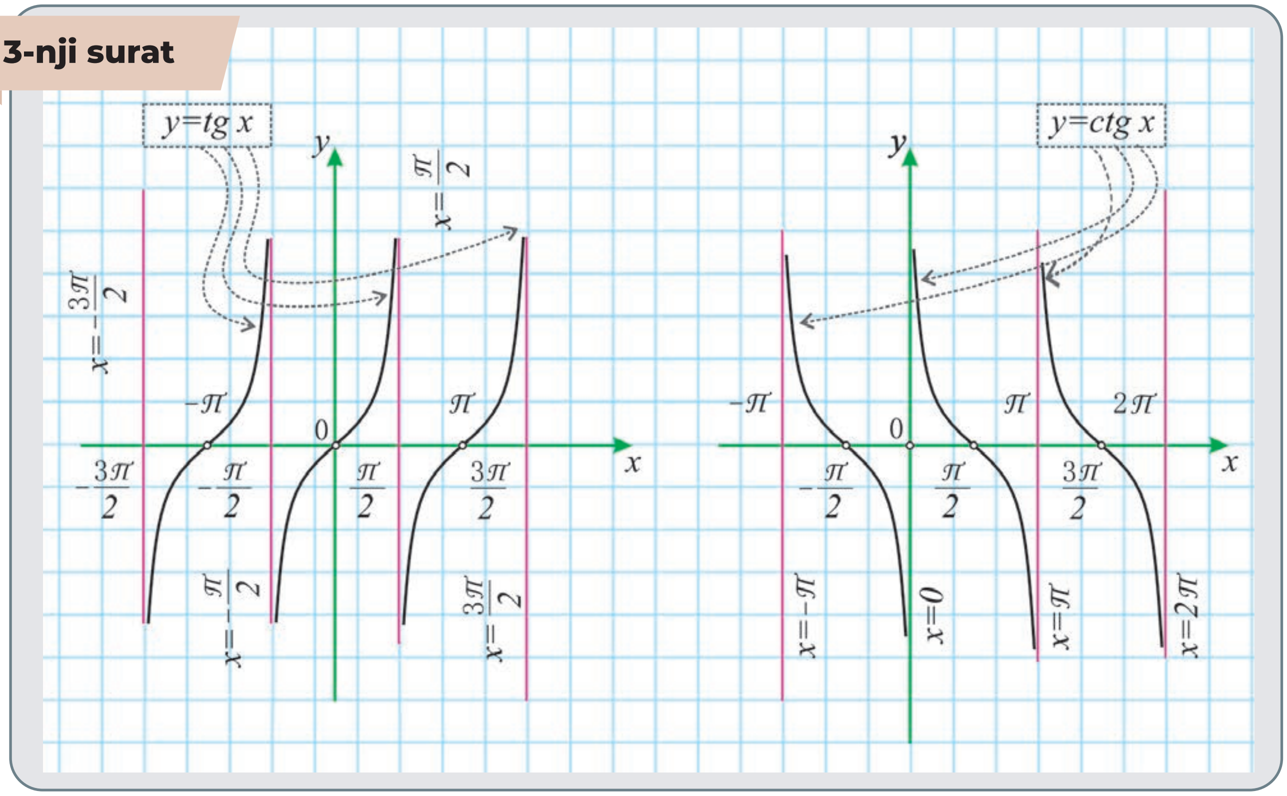
2-nji surat



Bu grafiklerden aşakdaky möhüm netijeler gelip çykýar:

1) $y = sinx$ funksiýa $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykda artýar we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $[-1; 1]$ kesimdäki ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

3-nji surat



2) $y = cosx$ funksiýa $[0; \pi]$ aralykda kemelýär we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $[-1; 1]$ kesimdäki ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

3) $y = tgx$ funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda artýar we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $(-\infty; +\infty)$ aralykdaky ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

4) $y = ctgx$ funksiýa $(0; \pi)$ aralykda kemelýär we bu aralykdan alnan her bir x-a y-iň $(-\infty; +\infty)$ aralykdaky ýeke-täk bahasy laýyk gelýär.

Kesgitleniş ýaýlasyny tapmaga degişli mysallary çözende kä halatlarda funksiýa kesgitlenen nokatlary görkezmek ýeterli bolýar.

1-nji mysal. $y = 2tg(3x-1)$ funksiýanyň **k**esgitleniş ýaýlasyny tapyň.

Çözülişi. Mälim bolşy ýaly, $y = tgx$ funksiýa $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ nokatlarda kesgitlenmedik, şonuň üçin $y = 2tg(3x-1)$ funksiýa argumentiň $3x - 1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$ bahalarynda kesgitlenmedik. Bu ýerden $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Jogaby: $y = 2tg(3x-1)$ funksiýa $x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ nokatlardan başga ähli hakyky sanlarda kesgitlenen.

2-nji mysal. $y = 2 - \frac{1}{3}cos(5x-4)$ funksiýanyň bahalar toplumyny tapyň.

Çözülişi. Bu mysaly çözende

$$-1 \le cos\,x \le 1$$

goşa deňsizlik x-yň ähli bahalarynda ýerlikli bolýanlygyndan peýdalanýarys. Diýmek,

$$-1 \le cos(5x-4) \le 1$$

Ýokardaky goşa deňsizligi $-\frac{1}{3}$ -e köpeldýäris we aşakdaky goşa deňsizligi alarys:

$$-\frac{1}{3} \le -\frac{1}{3} cos(5x-4) \le \frac{1}{3}$$

Bu goşa deňsizligiň her bir tarapyna 2-ni goşsak,

$$2-\frac{1}{3} \le 2-\frac{1}{3} cos(5x-4) \le 2+\frac{1}{3}$$

$$1\frac{2}{3} \le 2-\frac{1}{3} cos(5x-4) \le 2\frac{1}{3}$$

ýa-da

$1\frac{2}{3} \le y \le 2\frac{1}{3}$ emele gelýär.

Jogaby: Berlen funksiýanyň bahalar toplumy $\left[1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right]$ kesimden ybarat, ýa-da $E(y)=\left[1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right]$
.

Mälim bolşy ýaly, $y=f(x)$ funksiýanyň esasy döwri T bolsa, $y=af(kx+b)$ funksiýa üçin $\frac{T}{|k|}$ mukdar iň kiçi položitel döwri bolýar. k noldan tapawutly san.

3-nji mysal. $y=2\,sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ funksiýanyň iň kiçi položitel döwrüni tapyň.

Çözülişi. $y=sin\,x$ funksiýanyň esasy döwri 2π-e deň. Şonuň üçin $y=2\,sin\left(\frac{4}{3}x+7\right)$ funksiýanyň iň kiçi položitel döwri

$$T=\frac{2\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{2} \text{ bolýar.}$$

Jogaby: Berlen funksiýanyň iň kiçi položitel döwri $\frac{3\pi}{2}$.

MYSALLAR

1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y=cos\,3x$ b) $y=sin\frac{2x-1}{5}$ c) $y=sin\frac{1}{x+5}$ d) $y=sin\sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$

e) $y=tg3x$ f) $y=ctg\frac{2x}{5}$ g) $y=tg\frac{1}{x}$

2. Funksiýanyň bahalar toplumyny tapyň.

a) $y=-1+cos\,x$ b) $y=-6\,sin\,3x\,cos\,3x$ c) $y=2+cos\,x$ d) $y=-3\,sin\,2x+2$

e) $y=5tg4x$ f) $y=3-4\,cos\,5x$ g) $y=-5+\frac{1}{2}cos\,x\,sin\,x$

3. Funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini anyklaň.

a) $y=2xtgx$ b) $y=x^3-tg^3x$ c) $y=tgx\,sin^2 x$ d) $y=tg2x+2\,sin\,x$

e) $y=x^2+tg^2x$ f) $y=tg10|x|$ g) $y=\dfrac{x^2+\cos x}{2}$ h) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{x+5}$

4. $y = sinx$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini guruň.

a) $y = -sinx$ b) $y = 2sinx$ c) $y = -0{,}5sinx$ d) $y = |sinx|$

e) $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ f) $y = |sin|x||$ g) $y = 1 + sinx$ h) $y = sin2x$

5. $y = cosx$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp aşakdaky funksiýalaryň grafiklerini guruň.

a) $y = -cosx$ b) $y = 0{,}5cosx$ c) $y = cos2x$ d) $y = |cosx|$

e) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ f) $y = |cos|x||$ g) $y = 2 - cosx$ h) $y = cos4x$

6. Funksiýanyň grafigini guruň.

a) $y=tg2x$ b) $y=ctg\dfrac{x}{2}$ c) $y=2tgx$ d) $y=\dfrac{1}{3}ctgx$

7. Funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini anyklaň.

a) $y=\dfrac{\cos 2x-\sin^2 x}{x^2}$ b) $y = ctg3x + 5sinx$ c) $y = sin5x$

d) $y = 2sin^2x$ e) $y = sin^2x + sinx$ f) $y = 5sin^3x + 2sinx$

8. $f(x)$ funksiýa $(-\infty;\infty)$ aralykda kesgitlenen bolsun:

a) $f(x)+f(-x)$ jübüt funksiýa bolýandygyny görkeziň.

b) $f(x)-f(-x)$ täk funksiýa bolýandygyny görkeziň.

9. Funksiýanyň iň kiçi položitel döwrüni tapyň.

a) $f(x) = cos(3x+1)$ b) $f(x)=\sin\left(\dfrac{x}{4}-3\right)$ c) $f(x)=tg(2x+1)$

d) $f(x) = sin2\pi x$ e) $f(x)=\cos\sqrt{3x}$ f) $f(x)=tg(4\pi x-3)$

10. Berlen $f(x)$ funksiýanyň iň kiçi položitel döwrüni tapyň:

a) $f(x)=\sin\dfrac{3x}{2}+tg7x$ b) $f(x)=\cos x+2\sin\left(\dfrac{3x}{5}+\dfrac{\pi}{6}\right)$

c) $f(x) = ctg(x-1) - 3sin3x$ d) $f(x)=\sin 3x+\cos\dfrac{3x}{4}+\dfrac{1}{2}tg\dfrac{9x}{5}$

11. $T=-5\pi$ sany $f(x)=\sin 6x$ funksiýanyň döwri bolýandygyny görkeziň.

12. $T=\pi$ sany $f(x)=\sqrt{\sin 2x+1}$ funksiýanyň döwri bolýandygyny görkeziň.

13. Aşakdaky funksiýalardan haýsylaryny iň kiçi položitel döwri π-ge deň.

a) $y = sinx$ b) $y = cosx$ c) $y=tgx$ d) $y=ctgx$

14. Funksiýanyň grafigini guruň.

a) $y=|\sin x|$ b) $y=|\cos x|$ c) $y=|tgx|$ d) $y=|ctgx|$

TERS TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR WE OLARYŇ HÄSIÝETLERI, GRAFIGI

Ters trigonometrik funksiýalar

Gündelik durmuşymyzda desgalar, köprüler, transport serişdelari, elektrostansiýalar, samolýot we başga gurluşlary weýran edýän rezonans hadysasy duşup durýar. Rezonans hadysasy döwürleýin prosesleriň özara sazlaşygy netijesinde bolýar. Şeýle ýagdaýlaryň öňüni almak üçin trigonometrik funksiýalar berlen bahany argumentiň nähili bahasynda kabul edýändigini, ýagny ters trigonometrik funksiýalary bilmeli.

Ters trigonometrik funksiýalary öwrenmekde aşakdakylary bilmek talap edilýär:

1) trigonometrik funksiýalaryň döwürleýinligini we olaryň esasy döwürlerini;

2) $y = sinx$ funksiýa $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykda artýar we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $[-1; 1]$ kesimdäki ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

3) $y = cosx$ funksiýa $[0; \pi]$ aralykda kemelýär we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $[-1; 1]$ kesimdäki ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

4) $y = tgx$ funksiýa $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda artýar we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $(-\infty; +\infty)$ aralykdaky ýeke-täk bahasy laýyk gelýär;

5) $y = ctgx$ funksiýa $(0; \pi)$ aralykda kemelýär we bu aralykdan alnan her bir x-e y-iň $(-\infty; +\infty)$ aralykdaky ýeke-täk bahasy laýyk gelýär.

y = arcsinx funksiýa we onuň häsiýetleri, grafigi

$$y = sinx$$

deňleme $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykda x üýtgeýjä görä bir bahaly çözülýär we bu kök

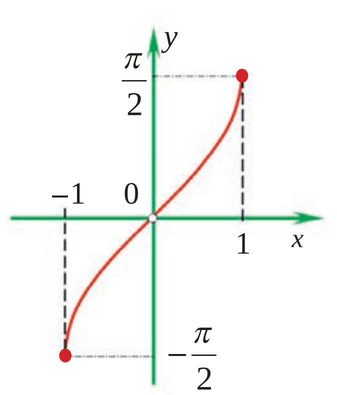
$$\boldsymbol{x = arcsiny}$$

görnüşde ýazylýar. Bu deňlik bilen $[-1; 1]$ toplumyň her bir y elementine $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ toplumyň ýeke-täk x elementini laýyk goýýan arksinus funksiýasy anyklanýar. Kesgitlenen bu laýyklykda argumenti x arkaly, funksiýany bolsa y arkaly belläp, ony

$$\boldsymbol{y = arcsinx}$$

görnüşde ýazýarys (1-*nji surat*).

1-nji surat



***y = arcsinx* funksiýanyň grafigi**

y = arcsinx funksiýa ***y = sinx*** funksiýa ters funksiýa bolýar:

$$sin(arcsinx) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$arcsin(sinx) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$y = \arcsin x$ funksiýanyň häsiýetleri:

- $D(y) = [-1;1]$;
- $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = \arcsin x$ – artýan funksiýa;
- $y = \arcsin x$ funksiýanyň iň uly bahasy $\frac{\pi}{2}$ -e, iň kiçi bahasy $-\frac{\pi}{2}$ -e deň;
- $y = \arcsin x$ funksiýanyň grafigi koordinata başlangyjyndan geçýär;
- $y = \arcsin x$ – täk funksiýa, ýagny $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;
- $y = \arcsin x$ funksiýa döwürleýin däl.

1-nji mysal. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

Çözülişi. Aýdaly, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = x$ bolsun. Onda berlen ýumşy başgaça goýmak mümkin: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deňligi kanagatlandyrýan x -iň $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ aralykdaky bahasyny tapyň. Mälim bolşy ýaly, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ deňlik $x = \frac{\pi}{3}$ bolanda ýerine ýetirilýär. Diýmek, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Aşakdaky jedwelde $\arcsin x$ aňlatmanyň käbir bahalary getirilen.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

$y = \arccos x$ funksiýa we onuň häsiýetleri, grafigi

$$y = \cos x$$

deňlik $[0; \pi]$ aralykda x üýtgeýjä görä bir bahaly çözülýär we bu çözüw

$$x = \arccos y$$

görnüşde ýazylýar. Bu deňlik bilen $[-1; 1]$ toplumyň her bir y elementine $[0; \pi]$ toplumyň ýeke-täk x elementini laýyk goýýan arkkosinus funksiýasy anyklanýar. Kesgitlenen bu laýyklykda argumenti x arkaly, funksiýany bolsa y arkaly belläp, ony

$$y = \arccos x$$

görnüşde ýazýarys (2-*nji surat*).

$y = \arccos x$ funksiýa **$y = \cos x$** funksiýa ters funksiýa bolýar:

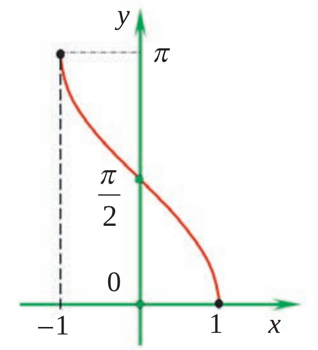
$$\cos(\arccos x) = x, \quad x \in [-1; 1]$$

$$\arccos(\cos x) = x, \quad x \in [0; \pi]$$

$y = \arccos x$ funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe:

- $D(y) = [-1;1]$;
- $E(y) = [0;\pi]$;
- $y = \arccos x$ – kemelýän funksiýa;
- $y = \arccos x$ funksiýanyň iň uly bahasy π-e, iň kiçi bahasy 0-a deň;
- $y = \arccos x$ funksiýanyň grafigi Ox okuny abssissasy $x = 1$ bolan (1; 0) nokatda, Oy okuny bolsa ordinatasy $y = \frac{\pi}{2}$ bolan $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nokatda kesip geçýär;
- $y = \arccos x$ – täk hem däl, jübüt hem däl. Bu ýerde $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ deňlik ýerlikli bolýar;
- $y = \arccos x$ funksiýa döwürleýin däl.

2-nji surat



y = arccosx funksiýanyň grafigi

2-nji mysal. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

Çözülişi. Aýdaly, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = x$ bolsun. Onda berlen wezipäni aşakdaky ýaly aňlatmak mümkin: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňligi kanagatlandyrýan x-iň $[0; \pi]$ aralykdaky bahasyny tapyň. Mälim bolşy ýaly, $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňlik $x = \frac{\pi}{4}$ bolanda ýerine ýetirilýär. Diýmek,

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Aşakdaky jedwelde $\arccos x$ aňlatmanyň käbir bahalary getirilen.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

$y = \operatorname{arctg} x$ funksiýa we onuň häsiýetleri, grafigi

$$y = \operatorname{tg} x$$

deňlik $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralykda x üýtgeýjä görä bir bahaly çözülýär we bu çözüw

$$x = \operatorname{arctg} y$$

görnüşde ýazylýar. Bu deňlik bilen $R = (-\infty; +\infty)$ toplumyň her bir y elementine $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

toplumyň ýeke-täk x elementini laýyk goýýan arktangens funksiýasy anyklanýar. Kesgitlenen bu laýyklykda argumenti x arkaly, funksiýany bolsa y arkaly belläp, ony

$$y = arctgx$$

görnüşde ýazýarys (3-*nji surat*).

y* = *arctgx funksiýa ***y* = *tgx*** funksiýa ters funksiýa bolýar:

$$tg(arctgx) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$arctg(tgx) = x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

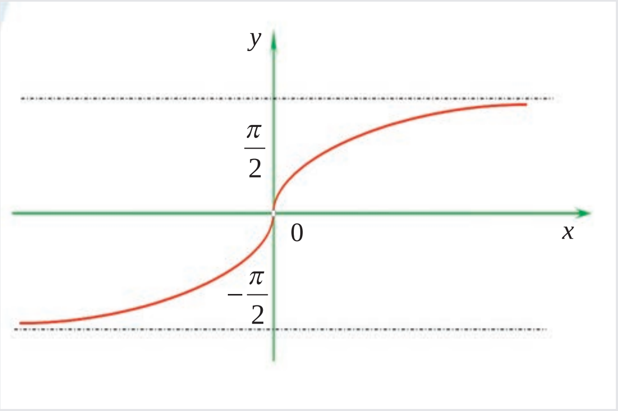
♦ *y* = *arctgx* funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
- $y = arctgx$ – artýan funksiýa;
- $y = arctgx$ funksiýa iň uly we iň kiçi bahalary almaýar;
- $y = arctgx$ funksiýanyň grafigi koordinata başlangyjyndan geçýär;
- $y = arctgx$ – täk funksiýa, ýagny

$$arctg(-x) = -arctgx;$$

- $y = arctgx$ funksiýa döwürleýin däl.

3-nji surat



***y* = *arctgx* funksiýanyň grafigi**

3-nji mysal. $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

Çözülişi. Aýdaly, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x$ bolsun. Onda $tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ deňligi kanagatlandyrýan x-iň bahasyny tapmak talap edilýär.

Mälim bolşy ýaly, $tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ bolýar. Diýmek, $arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

Aşakdaky jedwelde *arctgx* aňlatmanyň käbir bahalary getirilen.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arctgx$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

$y = arcctgx$ funksiýa we onuň häsiýetleri, grafigi

$$y = ctgx$$

deňlik $(0; \pi)$ aralykda x üýtgeýjä görä bir bahaly çözülýär we bu çözüw

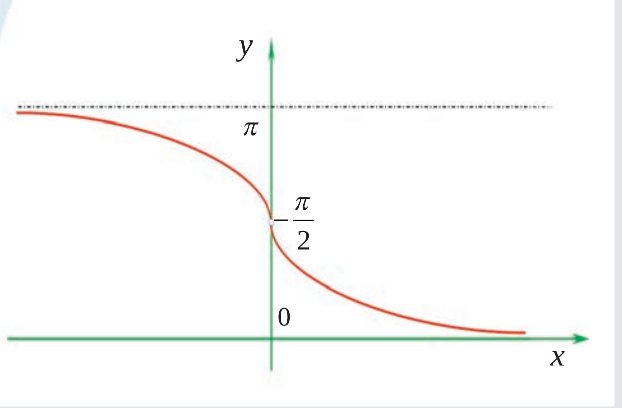
$$x = arcctgy$$

görnüşde ýazylýar. Bu deňlik bilen $R = (-\infty; +\infty)$ toplumyň her bir y elementine $(0; \pi)$ toplumyň ýeke-täk x elementini laýyk goýýan arkkotangens funksiýasy anyklanýar. Kesgitlenen bu laýyklykda argumenti x arkaly, funksiýany bolsa y arkaly belläp, ony

$$y = arcctgx$$

görnüşde ýazýarys (4-*nji surat*).

4-nji surat



$y = arcctgx$ funksiýanyň grafigi

$y = arcctgx$ funksiýa $y = ctgx$ funksiýa ters funksiýa bolýar:

$$ctg(arcctgx) = x, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad arcctg(ctgx) = x, \quad x \in (0; \pi).$$

$y = arcctgx$ funksiýa aşakdaky häsiýetlere eýe:

- $D(y) = (-\infty; +\infty)$;
- $E(y) = (0; \pi)$;
- $y = arcctgx$ – kemelýän funksiýa;
- $y = arcctgx$ funksiýa iň uly we iň kiçi bahalary almaýar;
- $y = arcctgx$ funksiýanyň grafigi Ox oky bilen kesişmeýär, Oy oky bilen bolsa ordinatasy $y = \frac{\pi}{2}$ bolan $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nokatda kesişýär;
- $y = arcctgx$ – täk hem däl, jübüt hem däl. Bu funksiýa üçin $arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$ deňlik ýerine ýetirilýär;
- $y = arcctgx$ funksiýa döwürleýin däl.

4-nji mysal. $arcctg\sqrt{3}$ aňlatmanyň bahasyny tapyň.

Çözülişi. Aýdaly, $arcctg\sqrt{3} = x$ bolsun. Onda $ctgx = \sqrt{3}$ deňligi kanagatlandyrýan x-iň bahasyny tapmak talap edilýär. Mälim bolşy ýaly, $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ bolýar. Diýmek, $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

Aşakdaky jedwelde *arcctgx* aňlatmanyň käbir bahalary getirilen.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$arcctgx$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

MYSALLAR

1. Aşakdaky aňlatmalar mana eýemi?

a) $arcsin(\sqrt{3}-1)$ b) $arcsin(4-\sqrt{5})$ c) $arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

d) $arccos\left(\sqrt{2}\right)$ e) $arctg(\sqrt{2})$ f) $arcctg(-100)$

2. Hasaplaň:

a) $arcsin\frac{1}{2}$ b) $arcsin\ (-1)$ c) $arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) $arcsin\,0$

e) $arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ g) $arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ h) $arccos\frac{1}{2}$

i) $arccos\,0$ j) $arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ k) $arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ l) $arctg\,0$

m) $arctg(-1)$ n) $arctg\frac{1}{\sqrt{3}}$ o) $arctg\sqrt{3}$ p) $arctg1$

q) $arctg(-\sqrt{3})$ r) $arcctg\sqrt{3}$ s) $arcctg(-1)$ t) $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. Hasaplaň.

a) $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}-\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right)$ b) $arccos\left(\frac{10+5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}-\frac{\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})}{10+5\sqrt{5}}\right)$

c) $arctg\left(\frac{1-2(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right)$ d) $arcctg\left(\frac{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}-\frac{1-\sqrt{\frac{7}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{\frac{7}{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)$

4. Hasaplaň.

a) $cos\left(arctg2\right)$ b) $sin\left(arctg7\right)$ c) $cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right)$

d) $ctg\left(arctg5\right)$ e) $sin\left(arctg11\right)$ f) $sin\left(arccos\frac{1}{5}\right)$

g) $cos\left(arcctg\left(-4\right)\right)$ h) $ctg\left(arcsin\left(-0{,}9\right)\right)$ i) $sin\left(arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$

j) $ctg\left(arctg\left(-15\right)\right)$ k) $tg\left(arccos\left(-0{,}3\right)\right)$ l) $ctg\left(arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$

5. Hasaplaň.

a) $cos\left(2arcsin0{,}2\right)$ b) $sin\left(2\,arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$ c) $sin\left(2arcctg\sqrt{26}\right)$

d) $tg\left(2arccos0{,}6\right)$ e) $tg\left(2arcsin\frac{7}{9}\right)$ f) $cos\left(2arccos\left(-0{,}8\right)\right)$

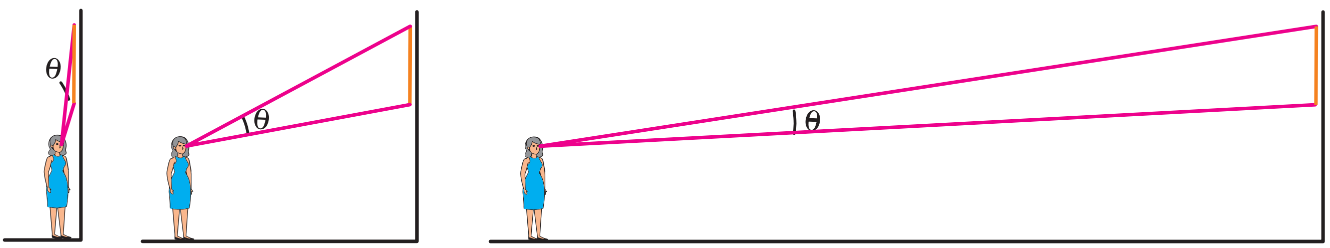
g) $tg\left(2arcctg\left(-3\right)\right)$ h) $sin\left(2arcsin\left(-0{,}1\right)\right)$ i) $tg\left(2arcctg20\right)$

TASLAMA IŞI

KINOTEATRDA NIREDE OTURMALY?

Obýektiň görünýän ölçegi onuň tomaşaçydan uzaklygyna baglydygyny hemme bilýär. Obýekt näçe uzakda bolsa, onuň görünýän ölçegi şonça kiçi bolýar. Görünýän ölçeg obýektiň tomaşaçynyň gözüne garaýan burçy bilen kesgitlenýär.

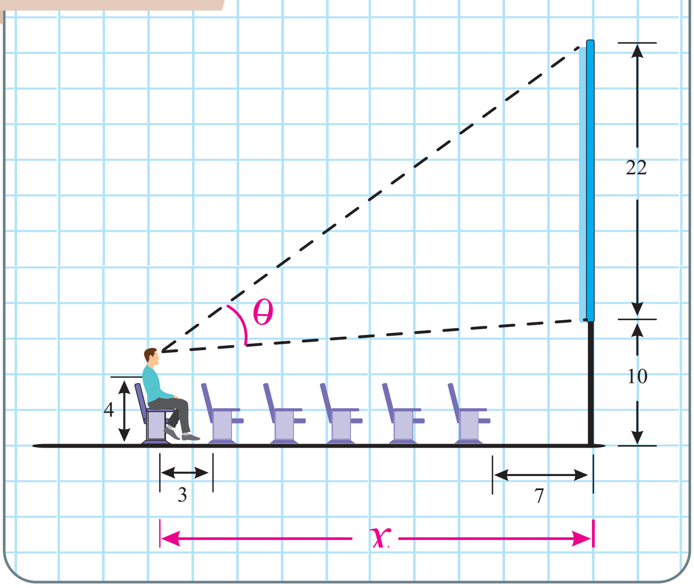
Diwara asylan surat gözüňize maksimal görnüşe eýe bolmagy üçin ondan näçe aralyk uzaklykda durmalysyňyz? Surat gözüň derejesinden ýokarda asylan bolsa, onda 1-nji suratda görkezilişi ýaly siz örän ýakyn ýa-da örän uzak bolsaňyz, gözüň nazary astyndaky burçuň kiçidigi anyk.



Edil şu ýagdaý kinoteatrda oturgyç saýlanda-da bolýar.

1. Kinoteatrdaky ekran 22 fut beýiklikde we tekiz poldan 10 fut beýiklikde ýerleşen. Oturgyçlaryň birinji hatary ekrandan 7 fut, hatarlar bolsa 3 fut aralykda ýerleşen. Siz maksimal görnüşe eýe bolan hatara oturmagy karar etdiňiz, ýagny ekranyň gözüňiziň nazaryndaky burçy θ maksimal bolan ýerde. Aýdaly, gözleriňiz suratdaky ýaly poldan 4 fut beýiklikde we siz ekrandan x aralykda otyrsyňyz (1 fut = 0,3048 m) (2-*nji surat*).

2-nji surat



Aşakdakyny subut ediň: $\theta = arctg6x - arctg28x$

Aşakdakyny getirip çykarmak üçin tapawudyň tangensi formulasyndan peýdalanyň:

$$\theta = arctg\left(\frac{22x}{x^2+168}\right)$$

Geogebra goşmaçasyndan peýdalanyp θ -niň x-e görä funksiýa hökmünde grafigini düzüň. x-iň haýsy bahasy θ-ni maksimal derejede artdyrýar? Haýsy hatarda oturmaly? Şu hatardaky görüş burçy nähili?

Indi çak edeliň, birinji hatardaky oturgyçlardan başlap oturgyçlar gorizontal tekizlikden ýokarda we kinoteatryň poly α burç astynda ýapgytlykda. Siz oturan ýerden pola çenli aralyk, suratda görkezilişi ýaly, x-e deň (3-nji surat).

1. Aşakdakyny getirip çykarmak üçin kosinuslar formulasyndan peýdalanyň:

$$\theta = arccos\left(\frac{a^2+b^2-484}{2ab}\right).$$

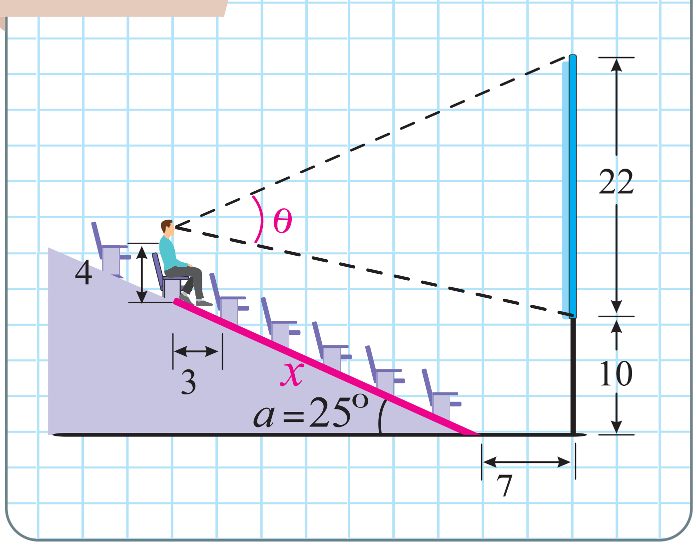
Bu ýerde

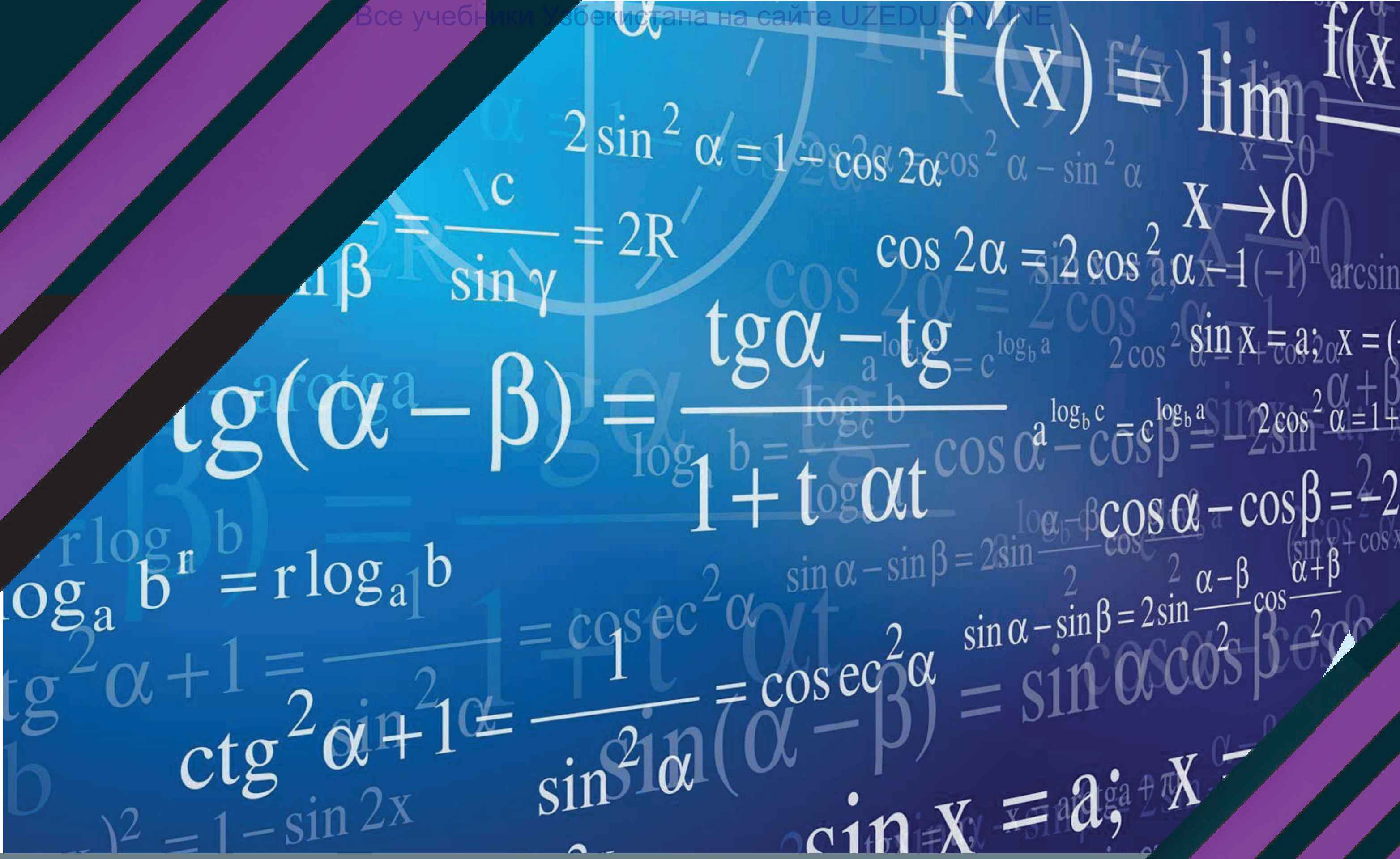
$$a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - x\sin\alpha)^2$$

$$\text{we } b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha - 6)^2$$

2. ***Geogebra*** grafik goşmaçasyndan peýdalanyp θ-niň x-iň funksiýasy hökmünde grafigini düzüň we θ -ni maksimallaşdyryjy x-iň bahasyny tapyň. Haýsy hatarda oturmaly? Bu hatardaky görüş burçy nähili?

3-nji surat





V BAP. TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER WE DEŇSIZLIKLER

- TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER
- KÄBIR TRIGONOMETRIK DEŇLEMELERI ÇÖZMEGIŇ USULLARY
- TRIGONOMETRIK DEŇSIZLIKLER

TRIGONOMETRIK DEŇLEMELER

Iň ýönekeý trigonometrik deňlemeler

Döwürleýin funksiýalar bilen häsiýetlenýän prosesler haçan nähili baha kabul edýändigini bilmek möhüm ähmiýete eýe. Munuň üçin döwürleýin funksiýalar gatnaşýan

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ tgx = a,\ ctgx = a$$

görnüşdäki iň ýönekeý trigonometrik deňlemeleri çözmegi bilmeli.

Iň ýönekeý trigonometrik deňlemeleri çözmegi öwrenmek üçin:

1) deňleme düşünjesini;

2) deňlemäniň köki düşünjesini; kökler toplumynyň «çözüw» diýip atlandyrylyşyny;

3) trigonometrik funksiýalaryň döwürleýinligini, trigonometrik deňlemäniň kökleriniň çäksiz köp bolýandygyny;

4) tapylan çäksiz köp kökleri umumylaşdyryp, gysga formulalar arkaly ýazyp bilmegi (munda her bir k bitin san üçin $n=2k$ aňlatma jübüt sany, $n=2k+1$ aňlatma bolsa täk sany aňladýandygyny) bilmek talap edilýär.

1-nji mysal. $\sin x = \frac{1}{2}$ deňlemäni çözüň.

Çözülişi. Mälim bolşy ýaly, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ bolýar. $\sin x = \frac{1}{2}$ deňlik x-iň $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ bahasynda hem ýerine ýetirilýär (1-*nji surat*). Sinusyň döwürleýin funksiýadygy sebäpli islendik n bitin san üçin

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

ýa-da

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

bolanda hem $\sin x = \frac{1}{2}$ bolýar (2-*nji surat*). Bu iki deňligi aşakdaky ýaly umumylaşdyrmak mümkin:

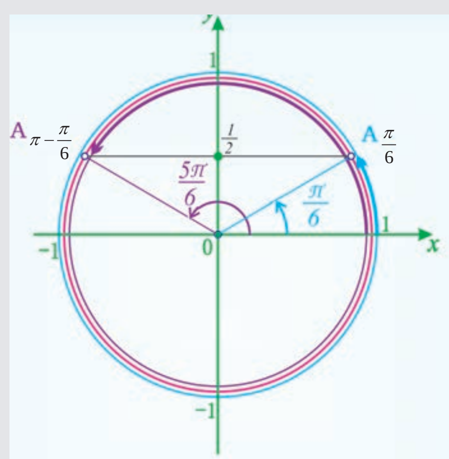
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Hakykatdan hem, n jübüt bolsa, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ deňlige; n täk bolsa, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ deňlige eýe bolýarys. Şeýdip, $\sin x = \frac{1}{2}$ deňlik x-iň

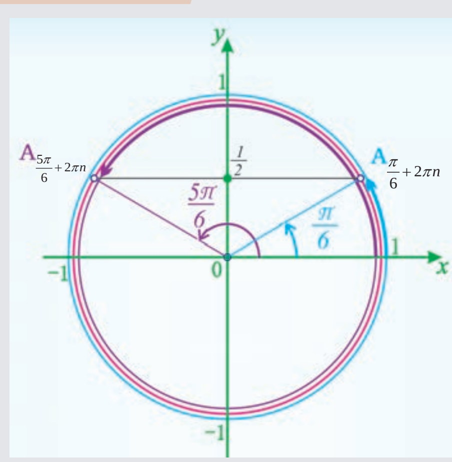
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

bahalarynda ýerine ýetirilýän eken.

1-nji surat



2-nji surat



sinx = a görnüşdäki deňleme

$a>1$ ýa-da $a<-1$ bolsa, onda $\sin x=a$ deňleme köke eýe bolmaýar. Şonuň üçin şeýle ýagdaýlarda $\sin x=a$ deňlemäniň çözüwi boş toplum ∅ dan ybarat diýen jogap ýazylýar;

$-1\le a\le 1$ bolsa, $\sin x=a$ deňlemäniň çözüwi

$$x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in Z$$

görnüşde bolýar.

***Hususy hallar*.**

1) *sinx* = –1 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

2) *sinx* = 0 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

3) *sinx* = 1 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

cosx = a görnüşdäki deňleme

$\boldsymbol{\cos x=a}$ görnüşdäki deňlemede

eger $a>1$ ýa-da $a<-1$ bolsa, onda $\cos x=a$ deňleme köke eýe bolmaýar. Şeýle ýagdaýlarda $\cos x=a$ deňlemäniň çözüwi ∅ diýen jogap ýazylýar;

$-1\le a\le 1$ bolsa, $\cos x=a$ deňlemäniň çözüwi

$$x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in Z$$

bolýar.

Hususy hallar

1) *cosx* = –1 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=\pi+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

2) *cosx* = 0 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

3) *cosx* = 1 deňlemäniň çözüwi *x*-iň

$$x=2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$$

bahalaryndan ybarat.

2-nji mysal. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deňlemäni çözüň.

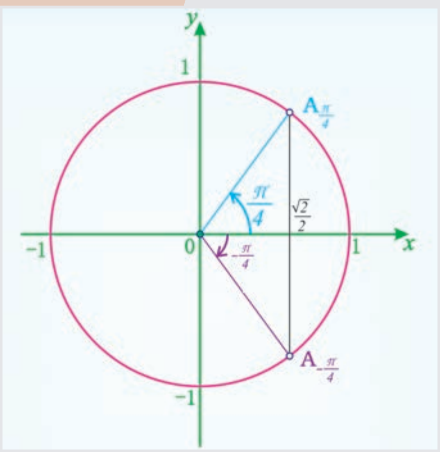
Çözülişi.

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolmagy mälim (3-*nji surat*). Kosinusyň döwürleýin funksiýadygy sebäpli islendik n bitin san üçin

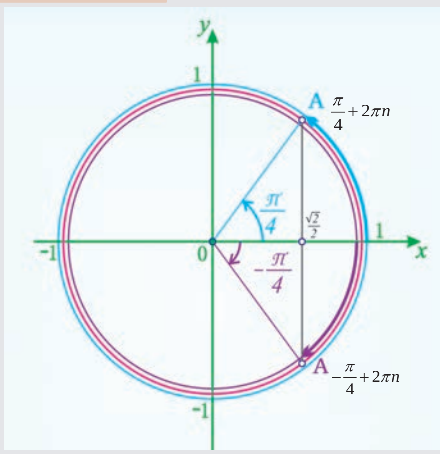
$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ ýa-da } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

bolanda hem $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bolýar (4-*nji surat*). Bu iki deňligi aşakdaky ýaly umumylaşdyrmak mümkin: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

3-nji surat



4-nji surat



tgx = *a* görnüşdäki deňleme

Her bir n bitin san üçin x-iň

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

bahalary $\operatorname{tg} x = a$ deňlemäniň köki bolýar. Munda çözüw

$$\boxed{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z}$$

görnüşde bolýar.

ctgx = *a* görnüşdäki deňlemeler

Her bir n bitin san üçin x-iň

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$$

bahalary $\operatorname{ctg} x = a$ deňlemäniň köki bolýar. Munda çözüw

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z}$$

görnüşinde bolýar.

3-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1$

Çözmek

$tg\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=-1,\ \ x+\frac{\pi}{7}=arctg(-1)+\pi k, k\in Z,\ \ x+\frac{\pi}{7}=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\ \ x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

Jogaby: $x=-\frac{11\pi}{28}+\pi k, k\in Z$.

4-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$.

Çözülişi.

$ctg\frac{3x}{2}=\sqrt{3}$, $\frac{3x}{2}=arcctg\sqrt{3}+\pi k,\ k\in Z,$ $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$, $3x=\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$,

$x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

Jogaby: $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k, k\in Z$.

MYSALLAR

1. Deňlemeleri çözüň.

a) $sin2x=1$ b) $sin\frac{x}{3}=-1$ c) $sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

d) $2sin4x=\sqrt{5}$ e) $sin(4x-1)=-\frac{\pi}{3}$ f) $sinx=\frac{1}{2}$

g) $sinx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ h) $sin4x=1$ i) $sin2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $sin\left(x+\frac{\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ k) $sin\frac{2x}{3}=-1$ l) $sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)=0$

m) $sin(3x+1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ n) $sin(-x)=-\frac{1}{2}$ o) $sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=1$

2. Deňlemeleri çözüň.

a) $cos\frac{2x}{5}=1$ b) $cos\left(2x-\frac{\pi}{7}\right)=-1$ c) $cos8x=0$

d) $cos3x=1,2$ e) $2cos(x-1)=\frac{11}{2}$ f) $cosx=\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $cosx=-\frac{1}{2}$ h) $cosx=-1$ i) $cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}$ k) $cos\frac{3x}{4}=0$ l) $cos\,4x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

m) $\sqrt{3}+2cos\frac{\pi x}{9}=0$ n) $1-2cos\frac{3\pi x}{4}=0$ o) $cos\left(\pi\left(x-3\right)\right)=1$

p) $sin^2\frac{2}{3}x=\frac{3}{4}$ q) $cos^2\frac{3}{2}x=\frac{1}{4}$ r) $2cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$

3. Deňlemeleri çözüň.

a) $tgx=\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $tgx=-1$

d) $tgx=\sqrt{3}$ e) $tg\frac{2x}{5}=-\sqrt{3}$ f) $tg\left(x+\frac{7\pi}{3}\right)=1$

g) $tg\left(\frac{\pi}{4}(x-1)\right)=0$ h) $1-\sqrt{3}tg\frac{2\pi x}{7}=0$ i) $tg9x=tg45°$

j) $tg6x=tg\frac{2\pi}{3}$ k) $3tg\left(x+\frac{5\pi}{36}\right)+\sqrt{3}=0$

4. Deňlemeleri çözüň.

a) $ctgx=\sqrt{3}$ b) $ctgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $ctg4x=sin0°$

d) $ctg\left(\pi(2x+3)\right)=cos\,0°$ e) $\sqrt{3}+ctg\frac{\pi x}{5}=0$ f) $ctg7x=-\sqrt{3}$

g) $ctg\frac{3x}{2}=1$ h) $ctg3x=\sqrt{3}$ i) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

5. Deňlemeleriň berlen kesimdäki köklerini tapyň.

a) $sin\,3x=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad[0;2\pi]$ b) $cos\,3x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad[-\pi;\pi]$

c) $tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad[0;\pi]$ d) $ctg\,4x=-1,\quad[-3\pi;3\pi]$

6. a-nyň nähili bahalarynda $tgx=\frac{a+1}{a-1}$ deňlik ýerlikli bolmagy mümkin?

7. a-nyň nähili bahalarynda $sin\,x=a+\frac{1}{a}$ deňlik ýerlikli bolmagy mümkin?

8. a-nyň nähili bahalarynda $5cos(2x-3)=a-\frac{6}{a}$ deňleme çözüwe eýe?

KÄBIR TRIGONOMETRIK DEŇLEMELERI ÇÖZMEGIŇ USULLARY

Kwadrat deňlemä getirilýän deňlemeler

1-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Çözülişi.

Bu deňleme $\sin x$-e görä kwadrat deňlemedir. $\sin x = t$ diýip belgilesek, $2t^2 - 3t + 1 = 0$ mundan $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$ gelip çykýar.

1) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ 2) $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Jogaby: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$.

Çözülişi.

$\cos^2 x$ ni $1 - \sin^2 x$ bilen çalşyp, $2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$ ýa-da $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ ni,

$\sin x = y$ belgileme girizip, $2y^2 + 5y - 3 = 0$ -y alýarys. Mundan $y_1 = -3$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

$\sin x = -3$ deňleme çözüwe eýe däl, çünki $|-3| > 1$.

$\sin x = \frac{1}{2}$ deňlemäni çözýäris. Mundan $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$ bolýandygyny göreris.

Jogaby: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

3-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $tgx - 2ctgx + 1 = 0$.

Çözülişi.

$tgx - \frac{2}{tgx} + 1 = 0$, mundan $tg^2 x + tgx - 2 = 0$. $tgx = t$ diýip belgilesek,

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1$, $t_2 = -2$

1) $tgx = 1$, $x = arctg1 + \pi n$, $n \in Z$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$

2) $tgx = -2$, $x = -arctg2 + \pi n$, $n \in Z$

Jogaby: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -arctg2 + \pi n$, $n \in Z$.

4-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $3\sin^2 x+5\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Çözülişi.

Deňlemäni agzama-agza $\cos^2 x$ -e bölýäris. $3tg^2x+5tgx+2=0$

$tgx=t$ diýip belgilesek, $3t^2+5t+2=0$. Mundan $t_1=\frac{-5-1}{6}=-1,\quad t_2=\frac{-5+1}{6}=-\frac{2}{3}$

$$1)\ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \text{n}\in Z$$

$$2)\ tgx=-\frac{2}{3},\ x=-arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ \text{n}\in Z$$

Jogaby: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ x=-arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ \text{n}\in Z$.

$a\sin x+b\cos x=c$ görnüşdäki deňlemeler

5-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $3\sin x-2\cos x=0$.

Çözülişi.

1) Deňlemäniň iki tarapyny *cosx*-e bölüp, $3tgx-2=0$ deňlemäni alarys.

2) $3tgx-2=0$, $tgx=\frac{2}{3},\ \ x=arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ \ n\in Z$.

asinx + *bcosx* = 0 deňlemäni *cosx* (ýa-da *sinx*) bolanda berlen deňlemä deň güýçli deňleme emele gelýär (*cosx* = 0 we *sinx* = 0 deňlikler bir wagtda ýerine ýetirilmeýär).

Jogaby: $x=arctg\frac{2}{3}+\pi n,\ \ n\in Z$.

6-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $2\sin x+\cos x-2=0$.

Çözülişi.

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},\quad \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},\quad 2=2\cdot 1=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$ formulalara görä,

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}\quad\Rightarrow\quad 3\sin^2\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=0$$

Deňlemäni $\cos^2\frac{x}{2}$ -e bölýäris. $3tg^2\frac{x}{2}-4tg\frac{x}{2}+1=0$ $tg\frac{x}{2}=t$ diýip belgileme girizýäris.

$3t^2-4t+1=0,\qquad D=16-12=4$

$t_1=\frac{4+2}{6}=1,\qquad t_2=\frac{4-2}{6}=\frac{1}{3}$

1) $tg\frac{x}{2}=1,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \text{n}\in Z$ 2) $tg\frac{x}{2}=\frac{1}{3},\ x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,\ \text{n}\in Z$

Jogaby: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=2arctg\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

7-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $sinx + cosx = 1$.

Çözülişi.

Deňlemäniň iki tarapyny $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ -ä bölýäris.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ bolany üçin deňlemäni aşakdaky ýaly ýazýarys:

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad x-\frac{\pi}{4}=\pm arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2\pi n,\ n\in Z$$

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z \quad\Rightarrow x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$$

Jogaby: $x=2\pi n,\ \ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \ n\in Z.$

Çep bölegini köpeldijilere dagydyp çözülýän deňlemeler

8-nji mysal. Deňlemäni çözüň: $\sin 9x-\sin x=\cos 5x$.

Çözülişi.

$$2\sin 4x\cos 5x=\cos 5x \qquad\Rightarrow\qquad \cos 5x\left(2\sin 4x-1\right)=0$$

1) $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in Z$

2) $\sin 4x=\frac{1}{2},\ 4x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z,\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in Z$

Jogaby: $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ x=\left(-1\right)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ \ n\in Z$.

9-njy mysal. Deňlemäni çözüň: $2\sin x\cos x+5\sin x+5\cos x+1=0$.

Çözülişi.

$2\sin x\cos x+5\left(\sin x+\cos x\right)+1=0$, $\sin x+\cos x=t$ diýip belgilesek, $2\sin x\cos x=t^2-1$ bolýar.

$$t^2-1+5t+1=0 \ \Rightarrow\ t^2+5t=0 \ \Rightarrow\ t(t+5)=0 \ \Rightarrow\ t_1=-5;\ t_2=0$$

1) $\sin x+\cos x=-5$ deňleme köklere eýe däl

2) $\sin x+\cos x=0,\ \ tgx+1=0,\ \ tgx=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

Jogaby: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \ n\in Z$.

MYSALLAR

Deňlemeleri çözüň.

1. $2cos^2x-5cosx+2=0$
2. $cos^2x-cosx-2=0$
3. $2ctg^2 3x-3ctg3x+1=0$
4. $tg^2x-2tgx=3$
5. $2cos^2x+sinx-1=0$
6. $3sin^2 2x+7cos2x-3=0$
7. $2cosx=1-\sqrt{cosx}$
8. $sin2x=cos^4x-sin^4x$
9. $sin5x=\frac{2}{3}cos^2 5x$
10. $cos^4\frac{x}{5}+sin^2\frac{x}{5}=1$
11. $3tg2x-2ctg2x-1=0$
12. $2tgx-2ctgx=3$
13. $\sqrt{3}sinx-cosx=0$
14. $sin2x+cos2x=0$
15. $sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$
16. $\sqrt{3}sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=0$
17. $cosx-sinx=1$
18. $sinx+cosx=\sqrt{2}$
19. $sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}=-1$
20. $\sqrt{3}sinx+cosx=\sqrt{2}$
21. $3sinx+4cosx=3$
22. $sin4x+cos4x=4$
23. $sin2x=cos^4\frac{x}{2}-sin^4\frac{x}{2}$
24. $cos2x=\sqrt{2}(cosx-sinx)$
25. $cos3xcos2x=sin3xsin2x$
26. $sin5xcos4x-cos5xsin4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
27. $cos9x-cos7x+cos3x-cosx=0$
28. $cos7x+sin8x=cos3x-sin2x$
29. $sin3x+sin5x=sin4x$
30. $sin2xsin6x=cosxcos3x$
31. $(2cosx-3)\cdot ctgx=0$
32. $(tgx-3)(cosx-\frac{1}{2})=0$
33. $tg3xcosx=0$
34. $sin2xtgx=0$
35. $\frac{cos2x}{1+tgx}=0$
36. $\frac{1-2cos2x}{cos2x-2}=0$
37. $\frac{tgx}{sin5x}=0$
38. $\frac{cosx}{1-cos4x}=0$
39. $|cos2x-1|-2|cos2x+2|=0$
40. $sin^3x+cos^4x=1$
41. $cosx\sqrt{sinx}=0$
42. $cos3x+2cosx=0$
43. $sin^{13}x+cos^{13}x=1$
44. $sin9x=2sin3x$

TRIGONOMETRIK DEŇSIZLIKLER

Iň ýönekeý trigonometrik deňsizlikleri çözende:
1) *Oy* oky **sinuslar oky** diýip atlandyrylyşyny;
2) *Ox* oky **kosinuslar oky** diýip atlandyrylyşyny;
3) x üýtgeýjiniň her bir bahasynda $-1 \le sinx \le 1$ bolýandygyny;
4) x üýtgeýjiniň her bir bahasynda $-1 \le cosx \le 1$ bolýandygyny bilmek talap edilýär.

Aýdaly, $f(x)$ ýazuw $sinx$, $cosx$, tgx ýa-da $ctgx$ trigonometrik funksiýalardan birini aňlatsyn, ýagny $f(x) = sinx$, $f(x) = cosx$, $f(x) = tgx$ ýa-da $f(x) = ctgx$ bolsun.

Onda käbir a sany üçin $f(x) < a$, $f(x) \le a$, $f(x) > a$, $f(x) \ge a$ görnüşdäki deňsizlikler ***trigonometrik deňsizlikler*** diýip aýdylýar.

$sinx < a$ we $sinx \le a$ deňsizligi çözmek

1) $a \le -1$ bolsa, $sinx < a$ deňsizligiň çözüwi $\varnothing$ bolýar (1-*nji a surat*).

2) $a > 1$ bolsa, $sinx < a$ deňsizligiň çözüwi $(-\infty; +\infty)$ bolýar (1-*nji b surat*).

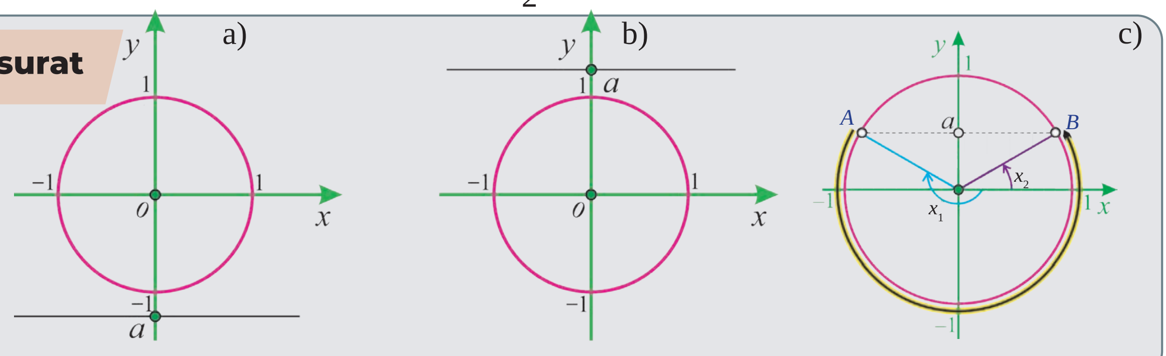
3) $a < -1$ bolsa, $sinx \le a$ deňsizligiň çözüwi $\varnothing$ bolýar.

4) $a \ge 1$ bolsa, $sinx \le a$ deňsizligiň çözüwi $(-\infty; +\infty)$ bolýar.

5) $a = -1$ bolsa, $sinx \le -1$ deňsizligiň çözüwi $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ bolýar.

6) $a = 1$ bolsa, $sinx < 1$ deňsizligiň çözüwi $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ bolýar.

1-nji surat



7) $-1 < a < 1$ bolanda $sinx < a$ deňsizligiň çözüwi (1-*nji c surat*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = -\pi - arcsina$$

$$x_2 = arcsina$$

$$\boldsymbol{-\pi - arcsina + 2\pi n < x < arcsina + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ bolsa, onda $sinx \le a$ deňsizligiň çözüwi

$$\boldsymbol{-\pi - arcsina + 2\pi n \le x \le arcsina + 2\pi n,\ n \in Z}$$

1-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sin x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Çözülişi.

$$-\pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n \le x \le \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Jogaby: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

deňsizligi çözmek

1-nji ýagdaý. $a < -1$ bolsa, $\sin x \le a$ deňsizligiň çözüwi $\varnothing$ bolýar.

2-nji ýagdaý. $a = -1$ bolsa, $\sin x \le a$ deňsizligiň çözüwi bolýar.

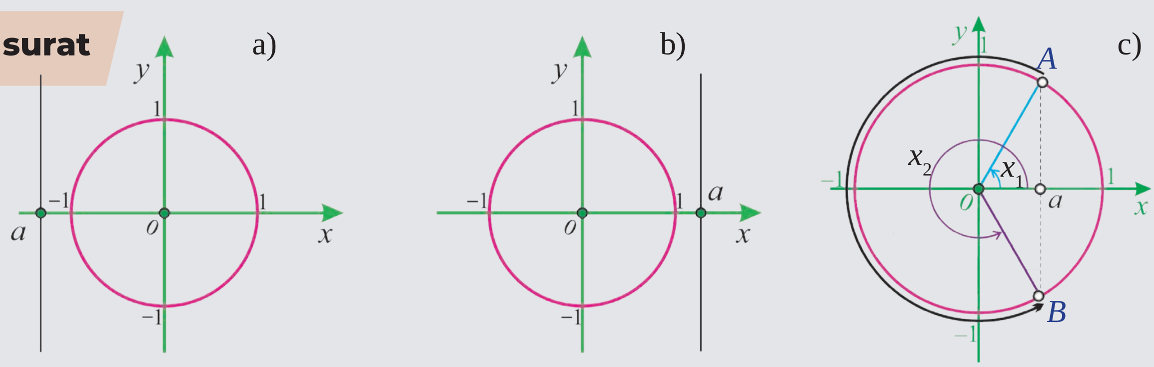
3-nji ýagdaý. $a \ge 1$ bolsa, $\sin x \le a$ deňsizligiň çözüwi $(-\infty; +\infty)$ bolýar.

4-nji ýagdaý. $-1 < a < 1$ bolsa, onda $\sin x \le a$ deňsizligiň çözüwi

$$-\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z \text{ bolýar.}$$

$\cos x < a$ we $\cos x \le a$ deňsizligi çözmek

2-nji surat



7) $-1 < a < 1$ bolsa, $\cos x < a$ deňsizligiň çözüwi (2-*nji c surat*).

$$x_1 < x < x_2$$

$$x_1 = \arccos a$$

$$x_2 = 2\pi - \arccos a$$

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$$

8) $-1 < a < 1$ bolsa, $\cos x \le a$ deňsizligiň çözüwi

$$\boxed{\arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi,\ n \in Z.}$$

2-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

Çözülişi.

$$-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n \leq x \leq \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, \quad n \in Z$$

$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n \leq x \leq \frac{2\pi}{3}+2\pi n, \; n \in Z$$

Jogaby: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right], \; n \in Z$.

tgx < a we *tgx ≤ a* deňsizligi çözmek

tgx < *a* deňsizligi *y* = *tgx* funksiýanyň grafiginden peýdalanyp çözeliň.

3-nji suratdan görnüşi ýaly, *tgx* < *a* deňsizlik *x*-iň

$$-\frac{\pi}{2} < x < arctga$$

goşa deňsizligi kanagatlandyrýan bahalarynda ýerine ýetirilýär. *y* = *tgx* funksiýanyň döwürleýinliginden *tgx* < *a* deňsizligiň çözüwi

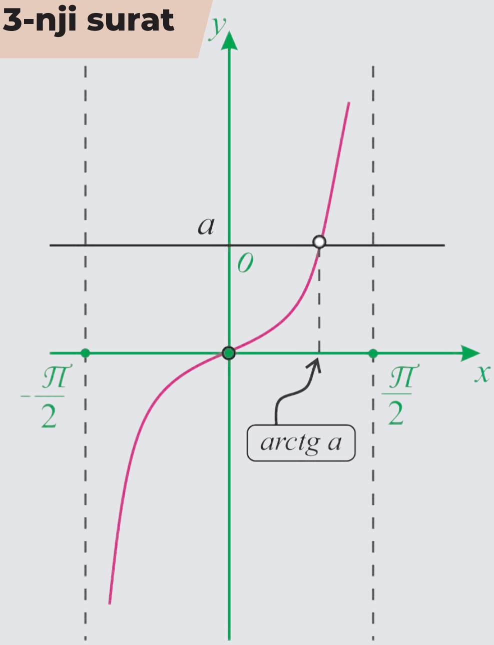
$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < arctga+\pi n, \; n \in Z$$

bolýandygy gelip çykýar. Edil şonuň ýaly, *tgx* ≤ *a* deňsizligiň çözüwi

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < x \leq arctga+\pi n, \; n \in Z$$

bolýar.

3-nji surat



3-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $tg\frac{x}{4} \leq -1$.

Çözülişi.

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq arctg(-1)+\pi n, \; n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < \frac{x}{4} \leq -\frac{\pi}{4}+\pi n, \; n \in Z$$

$$-2\pi+4\pi n < x \leq -\pi+4\pi n, \; n \in Z$$

Jogaby: $(-2\pi+4\pi n; -\pi+4\pi n], \; n \in Z$.

$ctgx < a$ we $ctgx \le a$ deňsizligi çözmek

$ctgx < a$ deňsizligi $y = ctgx$ funksiýanyň grafiginden peýdalanyp çözýäris.

Görnüşi ýaly, $ctgx < a$ deňsizlik x üýtgeýjiniň

$$arcctga < x < \pi$$

goşa deňsizligi kanagatlandyrýan bahalarynda ýerine ýetirilýär (4-*nji surat*). $y=ctgx$ funksiýa döwürleýindigi sebäpli $ctgx < a$ deňsizligiň çözüwi gelip çykýar.

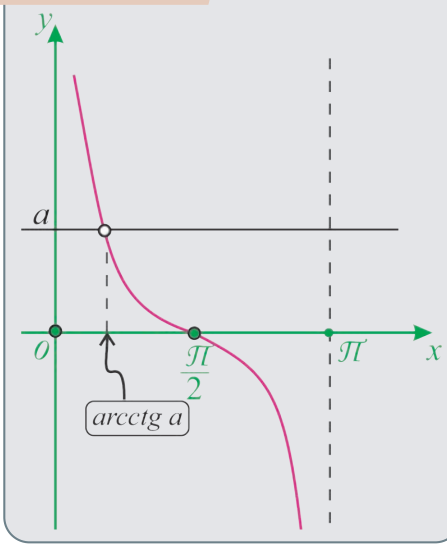
$$\boldsymbol{arcctga + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in Z}$$

Edil şonuň ýaly-da, $ctgx \le a$ deňsizligiň çözüwi

$$\boldsymbol{arcctga + \pi n \le x < \pi + \pi n,\ \ n \in Z}$$

bolýar.

4-nji surat



4-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $ctg\,\dfrac{x}{5} < -\sqrt{3}$.

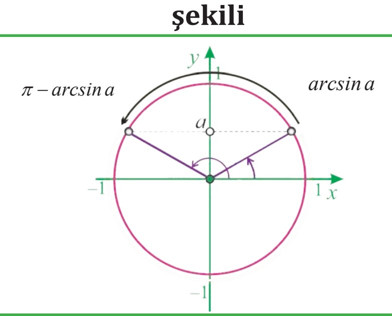
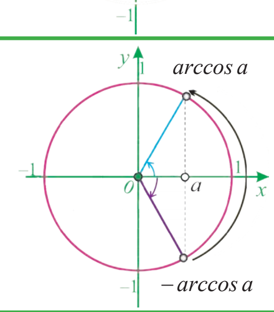
Çözülişi.

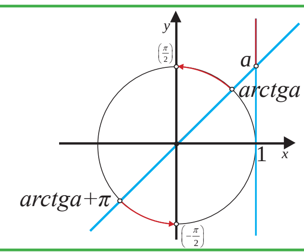
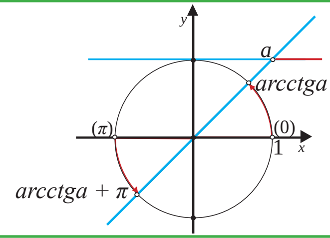
$$arcctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ n \in Z \quad \Rightarrow \quad \frac{5\pi}{6} + \pi n < \frac{x}{5} < \pi + \pi n,\ \ n \in Z \quad \Rightarrow$$

$$\frac{25\pi}{6} + 5\pi n < x < 5\pi + 5\pi n,\ \text{n} \in Z$$

Jogaby: $\left(\dfrac{25\pi}{6} + 5\pi n; 5\pi + 5\pi n\right)$, $\text{n} \in Z$.

Käbir deňsizlikleriň çözüwi

Deňsizlik	Çözüwi	Trigonometrik töwerekdäki şekili
$\boldsymbol{sinx > a}$	$arcsin\,a + 2\pi n < x < \pi - arcsin\,a + 2\pi n,\ \ n \in Z$	
$\boldsymbol{cosx > a}$	$-arccos\,a + 2\pi n < x < arccos\,a + 2\pi n,\ \ \ n \in Z$	

tgx > a	$arctga+\pi n<x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}$	
ctgx > a	$\pi n < x < arcctga + \pi n,\ n \in Z$	

5-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $sinx>\dfrac{1}{2}$.

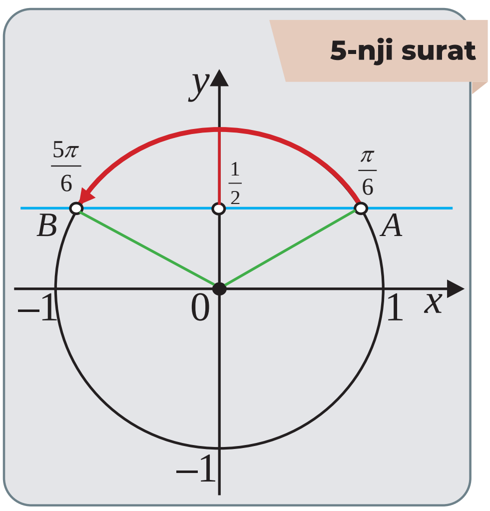
Çözülişi.

Birlik töweregi (5-*nji surat*) *A* we *B* nokatlarda kesip geçýän $y=\dfrac{1}{2}$ göni çyzygy geçirýäris. *sinx*-iň soralýan bahalary şu göni çyzygyň ýokarsynda ýerleşen bolýar. $y=sinx$ we $y=\dfrac{1}{2}$ lar $x=\dfrac{\pi}{6}$ we $x=\dfrac{5\pi}{6}$ -de kesişýär. Suratdan görnüşi ýaly, *x*-iň $\dfrac{\pi}{6}$-den uly we $\dfrac{5\pi}{6}$-den kiçi bahalarynda *sinx* aňlatma $\dfrac{1}{2}$-den uly bolýar.

Şeýdip, $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5\pi}{6}$ bolýar. $\sin x>\dfrac{1}{2}$ deňsizligiň ähli çözüwleri şu

$\dfrac{\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$ formula bilen tapylýar.

Jogaby: $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n<x<\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$



5-nji surat

6-njy mysal. Deňsizligi çözüň: $cos\,x\,cos\dfrac{\pi}{4}-sin\,x\,sin\dfrac{\pi}{4}\geq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Çözülişi.

Deňsizligiň çep tarapyny jemiň kosinusy formulasyndan peýdalanyp ýönekeýleşdirýäris:

$$cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Birlik tözerekde (6-*njy surat*) $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ göni çyzygy geçirýäris. Bu göni çyzyk töweregi $x+\dfrac{\pi}{4}$ -niň $-\dfrac{3\pi}{4}$ we $\dfrac{3\pi}{4}$ bahalaryna laýyk nokatlarda kesip geçýär.

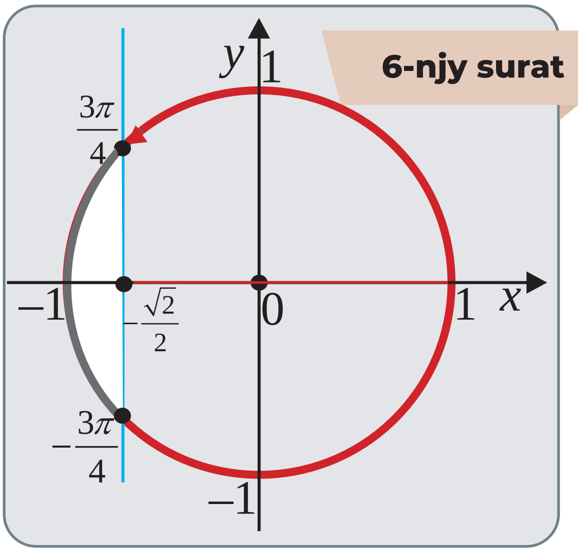
Bize $x+\frac{\pi}{4}$ -niň şu bahalary gerek:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le x+\frac{\pi}{4}\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Goşa deňsizligiň her bir agzasyndan $\frac{\pi}{4}$-ni aýyr-ýarys we aşakdakyny alarys:

$$-\pi+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$$

Jogaby: $x\in\left[-\pi+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z.$



7-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\ge 1$

Çözülişi.

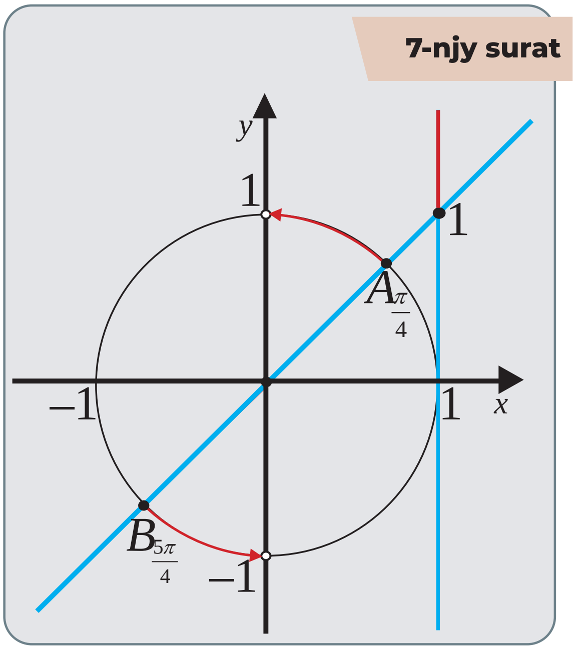
9-njy suratdan $2x-\frac{\pi}{4}$ mukdar şu şertleri ýerine ýetirmegi gelip çykýar:

$$\frac{\pi}{4}+\pi n\le 2x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{2}+\pi n\le 2x<\frac{3\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\le x<\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$$

Jogaby: $\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\right),\ k\in Z$



8-nji mysal. Deňsizligi çözüň: $\sin x>\cos x$.

Çözülişi.

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0\ \Rightarrow\ 2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}>0\ \Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\arcsin 0+2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi-\arcsin 0+2\pi n,\ n\in Z$$

$$2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n, n\in Z\ \Rightarrow\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

Jogaby: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z.$

MYSALLAR

1. Deňsizlikleri çözüň.

a) $sinx > 1$ b) $sinx \geq 1$ c) $sinx < 1$ d) $sinx \leq 1$

e) $sinx > -1$ f) $sinx \geq -1$ g) $sinx < -1$ h) $sinx \leq -1$

i) $sinx > 1{,}5$ j) $sinx \geq -1{,}2$ k) $sinx < 1{,}1$ l) $sinx \leq -2$

2. Deňsizlikleri çözüň.

a) $cosx > 1$ b) $cosx \geq 1$ c) $cosx < 1$ d) $cosx \leq 1$

e) $cosx > -1$ f) $cosx \geq -1$ g) $cosx < -1$ h) $cosx \leq -1$

i) $cosx > 2$ j) $cosx \geq -1{,}6$ k) $cosx < 1{,}4$ l) $cosx \leq -1{,}7$

3. Deňsizlikleri çözüň.

a) $sin\,2x \geq 0$ b) $cos\,3x \leq 0$ c) $cos\,x \leq \frac{1}{2}$ d) $sin\,x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $cos\,2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $sin\,3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2} - 2\,sin\,x > 0$ h) $2\,cos\,x + \sqrt{3} \leq 0$

4. Deňsizlikleri çözüň.

a) $sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ b) $cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 0$

c) $cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Deňsizlikleri çözüň.

a) $tg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq \sqrt{3}$ b) $tg\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) > 0$ c) $ctg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ e) $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ f) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$

6. $sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < -\frac{1}{2}$ deňsizligiň $[0;\,\pi]$ aralykdaky çözüwlerini tapyň.

7. $tg\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < -\sqrt{3}$ deňsizligiň $\left[-\frac{3}{8}; \frac{21}{8}\right]$ aralykdaky çözüwlerini tapyň.

8. Deňsizlikleri çözüň.

a) $cos^2x - 3cosx < 0$ b) $2sin^2x - 5sinx + 3 \geq 0$

c) $3cos^2x + 7cosx + 4 \leq 0$ d) $tg^2x - 4tgx + 3 < 0$

9. Deňsizlikleri çözüň.

a) $cos\left(3\,sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $sin\left(cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) > -\frac{1}{2}$

VI BAP. ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETI

- TÖTÄNLEÝIN HADYSALAR
- ÄHTIMALLYGYŇ KESGITLEMELERI
- GAÝTALAMAK

TÖTÄNLEÝIN HADYSALAR

Ähtimallyklar nazaryýeti matematikanyň bölümi bolup, häzirki zaman matematikasynyň esasy ugurlaryndan biridir. Ähtimallyklar nazaryýeti predmeti tötänleýin hadysalar bilen dolandyrylýan kanunalaýyklyklary öwrenmekden ybarat. Onuň esasy düşünjeleri tejribe we hadysa hasaplanýar.

Tejribe diýlende anyk şertler toplumyny amala aşyrmak düşünilýär. Tejribe netijesi ***hadysa*** diýilýär.

Hadysalar üç hili, ýagny mümkin bolmadyk (hiç haçan ýerine ýetirilmeýär), gutulgysyz (hemişe ýerine ýetirilýär) we tötänleýin (ýerine ýetirilmegi hem mümkin, ýerine ýetirilmezligi-de mümkin) bolup, bulardan iň esasysy tötänleýin hadysa ähtimallyklaryny hasaplamagy öwrenmekdir.

Tebigat we jemgyýet kanunlarynda duşýan islendik hadysalar tötänleýinlige baglydyr. Meselem, olardan käbirlerini öňünden aýtmak mümkin, käbirleri bolsa ýakynlaşan çak edilýär: howa ýagdaýyny, nyrhlary, hasylyň bol bolmak-bolmazlygy we başgalary öňünden anyk aýtmak kyn.

XVII asyryň ortalarynda töwekgelçilige esaslanan oýunlarda bolýan hadysalaryň käbir kanunalaýyklyklaryny öwrenmäge Paskal, Ferma, Bernulli ýaly alymlar uly üns berip, prosesleri öwrenipdirler we netijede ähtimallyklar nazaryýeti diýip atlandyrylýan ylmyň emele gelmegine uly goşant goşupdyrlar. Ähtimallyklar nazaryýeti dürli pudaklarda, şol sanda, ykdysadyýete, biologiýada, lukmançylykda, oba hojalygynda, tehnikada we başga ugurlarda giň gerimde ulanylýar.

Islendik hadysa gözegçilik ýa-da tejribe hökmünde öwrenmek mälim synaglary geçirmek arkaly amala aşyrylýar.

Hadysalar barada düşünje

Kesgitleme. Tejribe synaglarynyň islendik netijesine ***hadysa*** diýilýär. Hadysalar latyn elipbiýiniň baş harplary bilen – ***A, B, C, ...*** ýaly belgilenýär.

Adaty durmuşda, amaly işde hem-de ylmy barlaglarda netijeleri doly ynam bilen öňünden aýtmak mümkin bolmadyk tejribeler we synaglar ýygy-ýygydan duşýar.

Meselem, teňňäni taşlanda ol ýa-da bu tarapynyň düşjegini doly ynam bilen aýtmak mümkin däl; nyşana ok atanda degjegi ýa-da degmezligi anyk däl; bije (kubik) taşlandy, munda 6 sifriň düşjegi öňünden mälim däl; käbir sifrli lotereýa biletine utuş çykjagyny hem öňünden aýdyp bolmaýar.

Kesgitleme. Tejribe netijesinde hökman bolup geçýän hadysa ***gutulgysyz hadysa*** diýilýär we ol adatda Ω harpy bilen belgilenýär.

Meselem, bije taşlananda 1-den 6-a çenli bolan bitin sanlaryň düşmegi, töwekgellik bilen saýlanan sözde 1000-den artyk bolmadyk harpyň bolmagy, günden soň gijäniň gelmegi we başgalar gutulgysyz hadysalardyr.

Kesgitleme. Tejribe netijesinde hiç haçan bolup geçmeýän hadysa bolsa ***mümkin bolmadyk hadysa*** diýilýär we adatda $\varnothing$ belgisi bilen belgilenýär.

Meselem, bir lotereýa iki utuş çykmagy, kosmos gämisiniň güne gonup gaýdyp gelmegi we başgalar mümkin bolmadyk hadysalardyr.

Kesgitleme. Tejribe netijesinde bolmagy-da, bolmazlygy-da mümkin bolan hadysa ***tötänleýin hadysa*** diýilýär.

Meselem, teňňe taşlanda gerbli tarapyň düşmegi, ok atylanda nyşana degmegi, lotereýa biletine utuş çykmagy, bije taşlananda 6 sifriniň düşmegi we başgalar tötänleýin hadysalara mysal bolýar.

Kesgitleme. Biri bolup geçende başgasy ýüze çykmaýan hadysalar ***bilelikde däl (bilelikde bolmadyk)*** hadysalar diýilýär.

1-nji mysal. Detallar salnan gutudan töwekgellik bilen bir detal alyndy. Munda oňat hilli detal çykmagy hili pes detal çykmagyny ýoga çykarýar ýa-da tersine. «Oňat hilli detal çykdy» we «hili pes detal çykdy» hadysalary bilelikde däl.

2-nji mysal. Teňňe taşlanda gerbli tarapynyň düşmegi sifrli tarapyň düşmegini ýoga çykarýar. «Gerbli tarap düşdi» we «Sifrli tarap düşdi» hadysalary bilelikde däl.

Kesgitleme. Eger hadysalar bir wagtda bolup geçmegi mümkin bolsa, şeýle hadysalara ***bilelikde bolan hadysalar*** diýilýär.

Meselem, «gün çykdy» we «gün sowuk» – bu hadysalar bilelikde bolmagy mümkin bolan hadysalar bolýar.

Kesgitleme. Tejribäniň her bir netijesini aňladýan hadysa ***elementar hadysa*** diýilýär.

Kesgitleme. Elementar hadysalara bölmek mümkin bolan hadysa ***çylşyrymly hadysa*** diýilýär.

Kesgitleme. Eger birnäçe hadysalardan islendik biriniň tejribe netijesinde bolup geçmegi başgalaryna garanda ulurak mümkinçilige eýe diýmäge esas bolmasa, şeýle hadysalar ***deň mümkinçilikli hadysalar*** diýilýär.

Meselem, teňňe taşlananda gerbli ýa-da sifrli tarapy düşmegi ýa-da bije taşlananda bir sifriniň düşmegi, iki sifriniň düşmegi,... alty sifriniň düşmegi – bularyň ählisi deň mümkinçilikli hadysalar bolýar.

Kesgitleme. A hadysa ***garşylykly hadysa*** diýip A hadysanyň bolup geçmezliginden ybarat hadysa aýdylýar we $\overline{A}$ ýaly belgilenýär.

Bagly we bagly bolmadyk hadysalar barada düşünje

Kesgitleme. Eger iki hadysadan biriniň bolup geçmegi ikinji hadysanyň bolmak ýa-da bolmazlygyna bagly bolmasa, bu hadysalary ***erkli (bagly bolmadyk) hadysalar*** diýilýär.

3-nji mysal. Teňňe iki gezek taşlanan. Birinji taşlanda gerbli tarap düşmek (A hadysa) ähtimallygy ikinji taşlanda gerbli tarap düşmek ýa-da düşmezligine (B hadysa) bagly däl. Öz nobatynda, ikinji tejribede gerbli tarap düşmek ähtimallygy birinji tejribe netijesine bagly däl. Şeýdip, A we B hadysalar erkli.

4-nji mysal. Teňňe we bije taşlanda *A* – teňňede gerbli tarapy, *B* – bijede jübüt sifri düşmek hadysalary bolsun. Bu ýerde *A* we *B* bagly däl hadysalardyr.

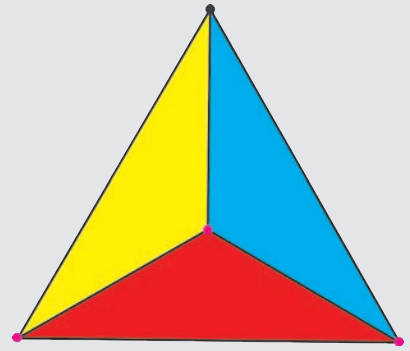
5-nji mysal. Iki bije taşlanda *A* – birinji bijede, *B* – ikinji bijede jübüt sifri düşmek hadysalary bolsun. Bu ýerde *A* we *B* bagly däl hadysalardyr.

Kesgitleme. Birnäçe hadysanyň islendik ikisi bagly bolmasa, olara ***jübüt-jübüt erkli*** diýilýär.

6-njy mysal. Teňňe 3 gezek taşlanan. *A*, *B*, C degişlilikde birinji, ikinji we üçünji tejribelerde gerbli tarap düşmek hadysasy bolsun. Görnüşi ýaly, garalýan hadysalardan her ikisi (ýagny *A* we *B, A* we *C*, *B* we *C*) bagly däl. Şeýdip, *A, B* we *C* jübüt-jübüt erkli.

7-nji mysal. Dogry tetraedriň bir grany gyzyl, başga bir grany sary, üçünji grany gök hem-de dördünji grany şu üç sany reňkde (1-*nji surat*). Tetraedri taşlanda gyzyl reňkiň düşmegi *A* hadysa, sary reňkiň düşmegi *B* hadysa, gök reňkiň düşmegi *C* hadysalar jübüt-jübüt erklidir.

1-nji surat



Kesgitleme. Eger iki hadysadan biriniň bolup geçmegi ikinji hadysanyň bolmak ýa-da bolmazlygyna bagly bolsa, bu hadysalara ***bagly*** diýilýär.

8-nji mysal. Gapda 80 sany ak, 20 sany gara şar bar. Töwekgellik bilen bir şar alnyp, gaýtaryp goýulmaýar. Eger birinji alanda ak şar çykmagy *A* hadysa bolsa, onda ikinji alandaky şaryň ak çykmagy *B* hadysasynyň bolup geçmegi *A* hadysa bagly bolýar, ýagny *A* we *B* hadysalar baglydyr.

ÄHTIMALLYGYŇ KESGITLEMELERI

«Ähtimallyk» düşünjesi ähtimallar nazaryýetiniň esasy düşünjelerinden biridir.

Gapda gowy garylan şarlar bolup, olardan 5-si gyzyl, 4-si gara we galan 3-si ak reňkde. Gapdan alnan şaryň gyzyl ýa-da gara bolmak mümkinçiligi ak reňkli bolmak mümkinçiliginden köpräk. Bu mümkinçiligi san bilen häsiýetlendirmek mümkinmi? Hawa, mümkin. Ine şu san ***hadysanyň ähtimallygy*** diýlip atlandyrylýan ululykdyr.

Şeýdip, ähtimallyk – hadysanyň bolmak mümkinçiligini häsiýetlendirýän sandyr.

Biz öz öňümize töwekgellik bilen alnan şaryň gyzyl ýa-da gara reňkli bolmak mümkinçiligini mukdar taýdan bahalamak wezipesini goýalyň. Gyzyl ýa-da gara reňkli şar çykmagyny A hadysa hökmünde garaýarys. Tejribede (tejribe gapdan şar almakdan ybarat) mümkin bolan netijeleriň hersini, ýagny bolup geçmegi mümkin bolan her bir hadysany elementar hadysa diýip atlandyrýarys. Elementar hadysalary $E_1, E_2, E_3, E_4, ...$ bilen belgileýäris. Biziň mysalda aşakdaky 12 sany elementar hadysa bolmagy mümkin: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 – gyzyl şar çykýar; E_6, E_7, E_8, E_9– gara şar çykýar; E_{10}, E_{11}, E_{12}– ak şar çykýar.

Bu netijeler ýeke-täk mümkin bolan (bir şar, elbetde, çykýar) we deň mümkinçilikli (şar töwekgellik bilen alynýar, şarlar birmeňzeş we gowy garylan) hadysadygyny aňsatja görmek mümkin.

Bizi gyzyklandyrýan hadysanyň bolup geçmegine getirýän elementar hadysalary bu hadysanyň bolup geçmegine amatlylyk döredýän diýýäris. Biziň mysalda A (gyzyl ýa-da gara reňkli şar çykmagy) hadysanyň bolup geçmegine aşakdaky 9 sany elementar hadysa amatlylyk döredýär: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8, E_9$. A hadysanyň bolup geçmegine amatlylyk döredýän elementar hadysalaryň sanynyň olaryň umumy sanyna gatnaşygyna A hadysanyň ähtimallygy diýilýär we $P(A)$ bilen belgilenýär. Garalýan mysalda elementar hadysalar jemi 12 sany, olardan 9-y A hadysa amatlylyk döredýär. Diýmek, alnan şaryň gyzyl ýa-da gara bolmak ähtimallygy: $P(A)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$. Tapylan san (ähtimal) biz öňümize goýan meseledäki gyzyl ýa-da gara şar çykmak mümkinliginiň mukdar taýdan bahasyny berýär.

Ähtimallygyň dürli kesgitlemeleri bar bolup, olar klassyk, statistik we geometrik kesgitlemelerdir.

Ähtimallygyň klassyk kesgitlemesi

Kesgitleme. ***A hadysanyň ähtimallygy*** diýip, tejribäniň bu hadysa bolup geçmegine amatlylyk döredýän netijeleriniň sany – m-iň tejribäniň mümkin bolan ähli elementar hadysalarynyň sany – n-e gatnaşygyna aýdylýar we aşakdaky görnüşde belgilenýär:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Ähtimallyk kesgitlemesinden aşakdaky häsiýetler gelip çykýar:

1. Gutulgysyz hadysanyň ähtimallygy 1-e deň, ýagny $P(\Omega)=1$.

Hakykatdan-da, eger hadysa gutulgysyz bolsa, onda tejribäniň islendik netijesi şu hadysanyň bolup geçmegine amatlylyk döredýär. Munda, $m=n$. Diýmek:

$$P(\Omega)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

1-nji mysal. Gapda 20 sany şar bolup, olar 1-den 20-ä çenli nomerlenen. Gapdan töwekgellik bilen bir şar alyndy. Bu şaryň tertip nomeri 20-den uly bolmazlyk (A hadysa) ähtimaly nähili?

Çözülişi. Ýaşikdäki islendik şarlaryň tertip nomeri 20-den geçmeýär. Şonuň üçin bu hadysanyň bolup geçmegine amatlylyk döredýän hadysalar sany we ähli mümkin bolan ýagdaýlaryň sany özara deň: $m = n = 20$ we $P(A)=\frac{m}{n}=1$. Munda A hadysa gutulgysyz hadysadyr.

2. Mümkin bolmadyk hadysanyň ähtimallygy nola deň.

Hakykatdan hem, eger hadysa ýüze çykmaýan bolsa, onda tejribäniň hiç bir elementar netijesi bu hadysanyň bolup geçmegine amatlylyk döretmeýär. Munda, $m = 0$. Diýmek:

$$P(\varnothing)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

2-nji mysal. Gutuda 10 sany şar bolup, olardan 4-si ak, galanlary gara reňkde. Şu gutudan töwekgellik bilen bir şar alyndy. Onuň gyzyl şar bolmak (A hadysa) ähtimaly nähili?

Çözülişi. Gutuda gyzyl şar ýok, ýagny $m = 0$, ýöne $n=10$. Diýmek, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$. Munda A hadysa umuman ýüze çykmaýan, ýagny mümkin bolmadyk hadysadyr.

3. Tötänleýin hadysanyň ähtimallygy položitel san bolup, ol 0 we 1 aralygynda bolýar.

Hakykatdan hem, tötänleýin hadysanyň bolup geçmegine tejribäniň ähli elementar hadysalarynyň diňe bir bölegi amatlylyk döredýär. Munda $0<m<n$. Şonuň üçin $0<\frac{m}{n}<1$. Diýmek, $0<P(A)<1$.

Şeýdip, islendik hadysanyň ähtimallygy aşakdaky goşa deňsizligi kanagatlandyrýar:

$$0\le P(A)\le 1$$

Aşakdaky mysallary çözmezden öň bir formulany getirip geçýäris.

Gapda n sany şar bolup, olardan n_1 sanysy ak, n_2 sanysy gara, n_3 sanysy gyzyl we başga n_k sanysy sary. Şu gapdan töwekgellik bilen m sany şar alnanda, olardan m_1 sanysy ak, m_2 sanysy gara, m_3 sanysy gyzyl we başga m_k sanysy sary bolmak A hadysasynyň ähtimallygyny tapmak formulasy:

$$P(A)=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n_k}^{m_k}}{C_n^m},$$

Ýatlatma: $P_n=n!$, $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

3-nji mysal. Haltada 12 sany şar bar: 3 sany ak, 4 sany gara we 5 sany gyzyl. Töwekgellik bilen bir şar alyndy. Onuň gara şar bolmagy (A hadysa) ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. Bize amatlylyk döredýän elementar hadysalar sany $m = 4$, hem-de jemi elementar hadysalar sany $n = 12$, diýmek, A hadysanyň ähtimallygy:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4-nji mysal. Ýaşikde 10 sany şar bar: 6 sany ak we 4 sany gara. Tötänlik bilen 2 sany şar alyndy. Iki şar hem ak bolmagy (A hadysa) ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. Bu meselede mümkin bolan ähli ýagdaýlar sany $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$-e deň.

A hadysa amatlylyk döredýän ýagdaýlar sany bolsa $m = C_6^2 = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$-e deň. Mundan $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$. gelip çykýar.

5-nji mysal. 2 000 lotereýa bileti satylan. Munda 1 sany bilete 100 000 som, 4 sany bilete 50 000 som, 10 sany bilete 20 000 som, 20 sany bilete 10 000 som, 165 sany bilete 5 000 som, 400 sany bilete 1 000 somdan utuş çykmagy bellenen, galan biletler utuşsyz. Bir bilete 10 000 somdan kem bolmadyk utuş çykmak ähtimaly nähili?

Çözülişi. Bu ýerde $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$. Çünki, 35 sany bilete 10 000 somdan ýokary utuşlar bellenen. Şonuň üçin,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{2000} = 0,0175.$$

6-njy mysal. Dükanda 6 erkek we 4 aýal adam işleýär. Tabeldäki tertip nomeri boýunça tötänleýin ýagdaýda 7 adam saýlap alyndy. Saýlap alnanlaryň arasynda 3 adam aýal bolmagy ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. Umumy ýüze çykmalar sany, ýagny 10 adamdan 7 adamy näçe hili usulda saýlamak mümkinligi. Bu bolsa, $n = C_{10}^7 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$-ä deň we indi amatlylyk döredýän elementar hadysalar sanyny tapmaly. Munuň üçin 7 adamlyk topary aşakdaky görnüşde düzýäris: 4 sany aýaldan 3-sini we 6 erkekden 4-sini almalydyrys, ýagny $m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4}{1} \cdot \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 60$. Diýmek, bu hadysanyň ähtimallygy $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$-e deň.

7-nji mysal. 2 sany matematika, 2 sany fizika we 2 sany himiýa kitaplary şkafyň bir tekjesine goýulýar. Himiýa kitablarynyň ýanaşyk gelmek ähtimallygy nämä deň?

Çözülişi. Ähli orun çalyşmalar sanyny tapyp alýarys, ýagny 6 sany kitabyň orun çalyşmalar sany $n = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ sany. Indi himiýa kitaplary ýanaşyk gelmegi üçin himiýa kitaplaryny 1 sany kitap diýip garap, ähli orun çalyşmalar sany – $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$-ni tapýarys we himiýa kitaplaryny hem orun çalyşmalar sanynda hasaba almalydyrys, ýagny $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$.

Mundan bolsa, $m = P_5 \cdot P_2 = 120 \cdot 2 = 240$ emele gelýär. Diýmek, ähtimallygyň klassyk kesgitlemesi boýunça $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3}$-e deň eken.

8-nji mysal. Abonent telefon belgisini ýyganda ahyrky üç sany sifri ýatdan çykardy. Ýöne sifrler dürli bolýandygyny bilýär. Ähli synanyşyklardan dogry sifri ýygmak ähtimallygy nämä deň bolýar?

Çözülişi. Dogry sifri ýygmak hadysasyny *A* bilen, onuň ähtimallygyny bolsa $P(A)$ bilen belgileýäris.

Ahyrky üç sany sifri A_{10}^3 usul bilen ýygmak mümkin. Şonda jemi synaglar sany $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$-ä deň bolýar. Gözlenýän telefon belgisi şu 720 sanydan biri bolýar, ýagny $m = 1$. Ähtimallygyň klassyk kesgitlemesi boýunça $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$ bolýar.

Ähtimallygyň statistik kesgitlemesi

Otnositel (görä) ýygylyk ähtimal bilen bir hatarda ähtimallar nazaryýetiniň esasy düşünjelerinden biri hasaplanýar.

Kesgitleme. ***Hadysanyň otnositel ýygylygy*** diýip, hadysa ýüze çykýan tejribeler sanynyň aslynda geçirilen jemi tejribeler sanyna gatnaşygyna aýdylýar. Şeýdip, *A* hadysanyň otnositel ýygylygyň aşakdaky formula bilen kesgitlenýär:

$$W(A) = \frac{M}{N}$$

bu ýerde *M* sany – *A* hadysanyň *N* tejribede ýüze çykmalar sany.

Kesgitleme. Statistik ähtimallyk – tejribeler sanynyň uly bahalardaky otnositel ýygylygy.

Ähtimallyk we otnositel ýygylyk kesgitlemelerini deňeşdirip aşakdaky netijä gelýäris: ähtimallygyň kesgitlemesinde tejribeleriň hakykatdan geçirilenligi talap edilmeýär, otnositel ýygylyýň kesgitlemesinde bolsa tejribeleriň aslynda geçirilenligi talap edilýär. Ýönekeýräk aýdanda, ähtimal tejribeden öň, otnositel ýygylyk bolsa tejribeden soň hasaplanýar.

Eger *M*=*N* bolsa, ýagny geçirilen tejribeler sany hadysanyň ýüze çykmalar sanyna deň bolsa, bu hadysany şertli ýagdaýda gutulgysyz hadysa diýip atlandyrmak mümkin.

Eger *M*=0 bolsa, ýagny geçirilen tejribe netijesinde hadysa käbir gezek hem bolmasa, onda bu hadysany şertli ýagdaýda mümkin bolmadyk hadysa diýip hasaplamak mümkin.

1-nji mysal. Mergen nyşana tarap 30 sany ok atdy. Munda olardan 23-si nyşana degendigi mälim bolsa, mergeniň oklarynyň nyşana degmeginiň otnositel ýygylygyny tapyň.

Çözülişi. Mergeniň oklarynyň 23-si nyşana degdi, diýmek, hadysanyň ýüze çykmalar sany *M* = 23 we jemi atylan oklar sany *N* = 30, diýmek, bu hadysanyň otnositel ýygylygy $W(A) = \frac{23}{30}$ bolýar.

2-nji mysal. Ilkinji 1000 sany natural sanlaryň içinden alnan sanyň 5-e kratnyly bolýandygynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

Çözülişi. Bu ýerde sanyň 5-e kratnyly çykmak hadysasyny A bilen, onuň otnositel ýygylygyny bolsa $W(A)$ bilen belgileýäris. Geçirilen jemi synaglar $N = 1000$-e, ilkinji 1000 natural sanlaryň içinde 5-e kratnyly 200 natural san bar, diýmek, $M = 200$, otnositel ýygylyk bolsa $W(A) = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5}$

3-nji mysal. Bir ýurtda daşary ýurtdan gelen syýahatçylar we şu ýurduň çäginde syýahat eden raýatlar (içki syýahatçylar) barada aşakdaky maglumatlar berlen bolsun.

Ýyllar	Daşary ýurt syýahatçylar sany	Içki syýahatçylar sany	Jemi syýahatçylar sany
2018	610 623	403 989	1 014 612
2019	746 224	348 953	1 095 177
2020	822 558	316 897	1 139 455
2021	774 262	346 103	1 120 365
2022	811 314	351 028	1 162 342
$\sum$	3 764 981	1 766 970	5 531 951

Garalýan ýyllarda ýurduň içinde syýahat eden ýurduň raýatlary sanynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

Ýurduň içinde syýahat eden ýerli raýatlar sany: $M = 1\,766\,970$.

Daşary ýurtly syýahatçylar sany: $K = 3\,764\,981$.

Umumy syýahatçylar sany: $\boldsymbol{N} = 1\,766\,970 + 3\,764\,981 – 5531951$.

$$W = \frac{M}{N} = \frac{1766970}{5531951} \approx 0{,}3194.$$

Ähtimallygyň geometrik kesgitlemesi

Ähli nokatlary deň mümkinçilige eýe bolan käbir Ω ýaýla (kesim, figura ýa-da jisim) berlen bolup, bu ýaýla taşlanan nokadyň oňa düşmegi gutulgysyz bolsun. Şu berlen ýaýladan kiçijik ω ýaýla (kesim, figura ýa-da jisim) bölüp alalyň. Ω ýaýla taşlanan nokadyň bölüp alnan ω ýaýla düşmek ähtimallygy soralan bolsun. Bölüp alnan ýaýla näçe uly bolsa, düşmek ähtimallygy hem barha ulalýar, ω ýaýla Ω ýaýla deňleşende bolsa düşmek ähtimallygy gutulgysyz hadysa öwrülýär. Diýmek, taşlanan nokadyň ω ýaýla düşmek ähtimallygy ω ýaýlanyň ululygyna göni proporsional bolup, ony geometrik nukdaýnazardan beýan etmeli bolýar. Şeýle ýagdaýlarda ähtimallygyň geometrik kesgitlemesinden peýdalanmak amatlydyr.

Eger taşlanan nokadyň Ω ýaýla düşmegi gutulgysyz bolsa, onda bu nokadyň şu ýaýladan bölüp alnan ω ýaýla düşmek ähtimallygy ω ýaýlanyň ölçeginiň Ω ýaýlanyň ölçegine gatnaşygyna deň bolýar:

$$P(A)=\frac{m(\omega)}{m(\Omega)}$$

Bu ýerde ω – ýaýlanyň ölçegi, ýagny bir ölçegli ýagdaýda uzynlyk, iki ölçeglide meýdan, üç ölçeglide göwrüm we başgalar.

Eger Ω ýaýlanyň ölçegi L kesim we ω ýaýlany l kesim diýip alsak, L kesime çenli taşlanan nokadyň l kesime düşmek ähtimallygy aşakdaky ýaly bolýar:

$$P(A)=\frac{l}{L}$$

Eger Ω ýaýlanyň S meýdan we ω ýaýlany s meýdan diýip alsak, S meýdana taşlanan nokadyň s meýdana düşmek ähtimallygy aşakdaky ýaly bolýar:

$$P(A)=\frac{s}{S}$$

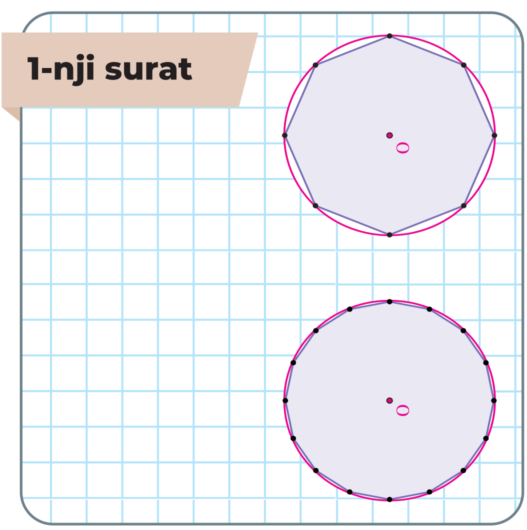
Eger Ω ýaýlany V göwrüm we ω ýaýlany v göwrüm diýip alsak, V göwrüme taşlanan nokadyň v göwrüme düşmek ähtimallygy aşakdaky ýaly bolýar:

$$P(A)=\frac{v}{V}$$

Geometrik kesgitlemeden wagta görä hem peýdalanmak mümkin. Eger waka T wagtyň içinde bolmagy gutulgysyz bolsa, bu wakanyň t wagtyň içinde bolmak ähtimallygy aşakdaky ýaly bolýar:

$$P(A)=\frac{t}{T}$$

1-nji surat



1-nji mysal. R radiusly tegelege nokat ähtimallyk bilen taşlanan. Taşlanan nokadyň tegelegiň içinden çyzylan dogry n-burçlugyň içine düşmek ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $S(D_n)$ – n-burçlugyň meýdany, $S(D)$ – tegelegiň meýdany (1-*nji surat*). Onda

$$P(B_n)=\frac{S(D_n)}{S(D)}=\frac{n\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{\pi R^2}=\frac{n\cdot\sin\frac{2\pi}{n}}{2\pi}=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

a) R radiusly tegelege nokat ähtimallyk bilen taşlanan. Taşlanan nokadyň tegelegiň içinden çyzylan dogry üçburçlugyň içine düşmek ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $S(D_3)$ – üçburçlugyň meýdany, $S(D)$ – tegelegiň meýdany (2-*nji surat*).

B_3 – nokadyň üçburçluga düşmek hadysasy.

Onda

$$P(B_3)=\frac{S(D_3)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\approx 0,4137$$

b) R radiusly tegelege nokat ähtimallyk bilen taşlanan. Taşlanan nokadyň tegelegiň içinden çyzylan kwadratyň içine düşmek ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $S(D_4)$ – kwadratyň meýdany, $S(D)$ – tegelegiň meýdany (3-*nji surat*).

B_4 – nokadyň kwadrata düşmek hadysasy.

Onda

$$P(B_4)=\frac{S(D_4)}{S(D)}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}\approx 0,637$$

c) R radiusly tegelege nokat ähtimallyk bilen taşlanan. Taşlanan nokadyň tegelegiň içinden çyzylan dogry altyburçlugyň içine düşmek ähtimallygyny tapyň.

Çözülişi. $S(D_6)$ – altyburçlugyň meýdany, $S(D)$ – tegelegiň meýdany (4-*nji surat*).

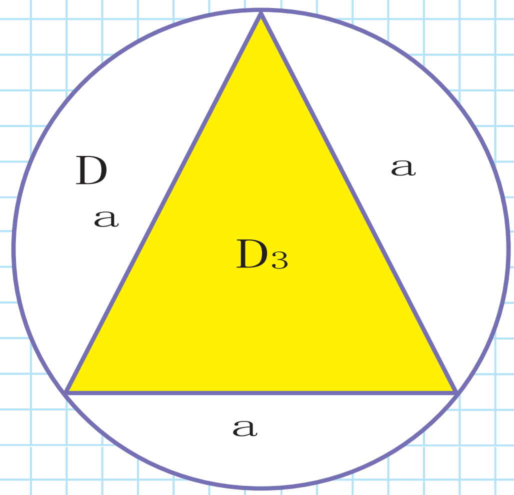
B_6 – nokadyň altyburçluga düşmek hadysasy. Onda

$$P(B_6)=\frac{S(D_6)}{S(D)}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,8274$$

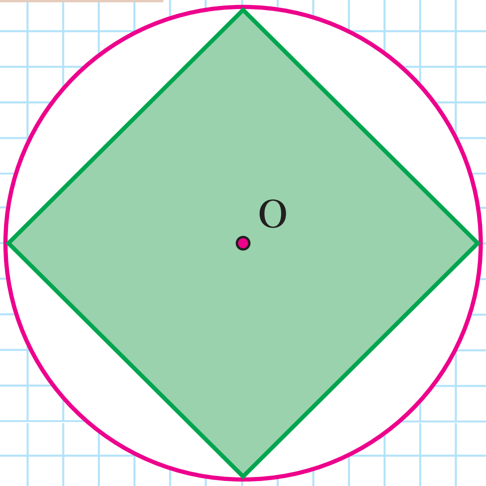
2-nji mysal. Uzynlygy 30 cm bolan L kesime uzynlygy 12 cm bolan l kesim ýerleşdirilen. Uly kesime töwekgellik bilen goýlan nokadyň kiçi kesime hem düşmek ähtimallygyny tapyň. Nokadyň kesime düşmek ähtimallygy kesimiň uzynlygyna göni proporsional bolup, onuň ýerleşişine bagly däl, diýip çak edilýär.

Çözülişi. Taşlanan nokadyň L kesime düşmegi gutulgysyz. $P(E)$ – bu L kesimde ýerleşen l kesime düşmek ähtimallygyny tapýarys (5-*nji surat*). Suratda diňe üç ýagdaý görkezilen. Ýöne l kesim L-iň islendik böleginde ýerleşen bolmagy mümkin.

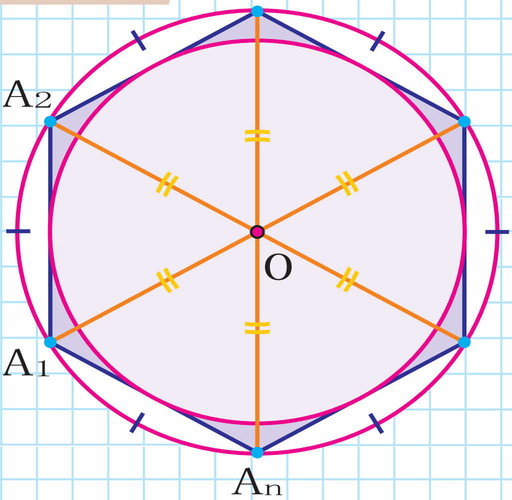
2-nji surat



3-nji surat



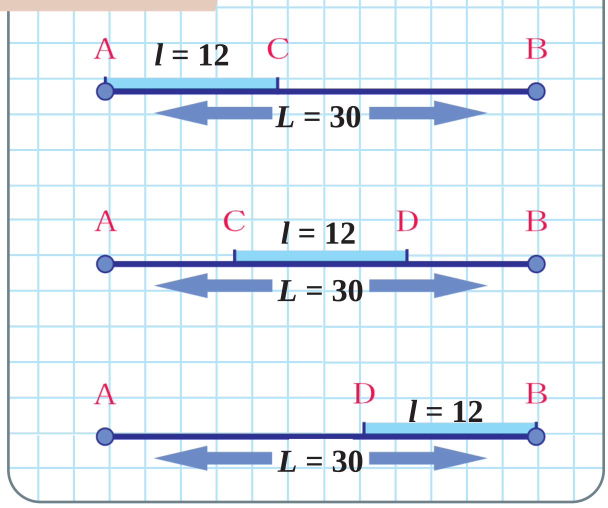
4-nji surat



$$P(E)=\frac{l}{L}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$$

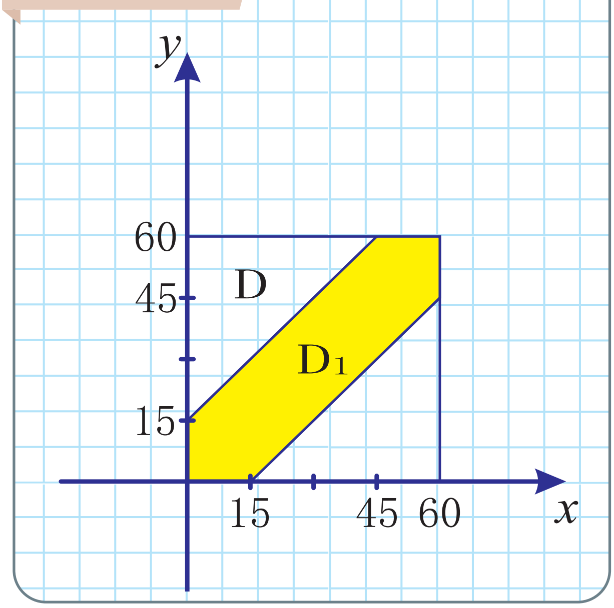
3-nji mysal. Iki dost sagat 9 bilen 10 arasynda duşuşmakçy boldular. Birinji gelen adam dostuna 15 minudyň dowamynda garaşmalydygy öňünden ylalaşylan. Eger bu wagtyň dowamynda dosty gelmese, onuň gitmegi mümkin. Eger olar sagat 9 bilen 10-uň arasyndaky islendik wagtda gelmegi mümkin bolup, gelmeli wagtlary görkezilen wagtyň dowamynda tötänleýin bolsa we özara ylalaşylan bolmasa, bu iki dostuň duşuşmak ähtimallygy nämä deň?

5-nji surat



Çözülişi. Birinji adamyň gelmeli wagt momenti x, ikinjisiniňki bolsa y bolsun. Olaryň duşuşmaklary üçin $|x-y|\le 15$ deňsizligiň ýerine ýetirilmegi zerur we ýeterlidir. x we y-leri tekizlikdäki Dekart koordinatalary hökmünde şekillendirýäris we masştab birligi diýip minutlary alýarys. Bolup geçmegi mümkin bolan ähli mümkinçilikler taraplary 60 bolan kwadratyň nokatlaryndan we duşuşmaga amatlylyk döredýän mümkinçilikler boýalan zolagyň nokatlaryndan ybarat (6-*njy surat*).

6-njy surat



Diýmek, ähtimallygyň geometrik kesgitlemesine görä, gözlenýän ähtimallyk boýalan zolagyň meýdanynyň kwadratyň meýdanyna bolan gatnaşygyna deň:

$S(D_1)-$ boýalan zolagyň meýdany, $S(D)-$ kwadratyň meýdany bolsun (6-*njy surat*). A – dostlaryň duşuşma hadysasy.

$$S(D_1)=60\cdot 60-2\cdot\frac{45\cdot 45}{2}=1575 \qquad S(D)=60\cdot 60=3600$$

Gözlenýän ähtimallyk:

$$P(A)=\frac{S(D_1)}{S(D)}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}; \qquad P(A)=\frac{7}{16}$$

MESELELER

1. Lotereýada 1000 sany bilet bar. Olardan 500 sanysy utuşly, 500 sanysy utuşsyz. Iki bilet satyn alyndy. Iki biletiň hem utuşly bolmak ähtimallygyny tapyň.

2. Teňňe iki gezek taşlandy. Iki gezek hem gerbli tarapy düşmek ähtimallygyny tapyň.

3. 20 sany kitap şkaflara töwekgellik bilen ýerleşdirildi. 20 sany kitapdan anyk 5-siniň ýanaşyk durmak (A hadysa) ähtimallygy nämä deň?

4. Iki bije daşy taşlanan. Olaryň granlarynda çykan sifrleriň jemi – jübüt san. Şunuň bilen birlikde, taşlanan bijeleriň iň bolmanda birinde hemişe 6 sifri düşmek ähtimallygyny tapyň.

5. Iki bije taşlanan. Olaryň granlarynda çykan sifrleriň jemi 5-e, köpeltmek hasyly bolsa 4-e deň bolmak ähtimallygyny tapyň.

6. Iki bije taşlanan bolup, olaryň granlarynda çykan sifrleriň jemi 7-ä deň bolmak ähtimallygyny tapyň.

7. Sifrleri dürli ikibelgili san oýlanan. Oýlanan san tötänden aýdylan ikibelgili san bolmak ähtimallygyny tapyň.

8. Gutuda 20 sany şar bar: 10 sany gara we 10 sany ak. Gutudan tötänleýin ýagdaýda bir şar alyndy. Bu şar: a) ak; b) gara şar bolmak ähtimallygyny tapyň.

9. Tehniki gözegçilik bölümi tötänden bölüp alnan 100 sany kitapdan ybarat partiýada 5 sany ýaramsyz kitap tapdy. Ýaramsyz kitaplar çykmagynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

10. Nyşana 20 sany ok atylan. Şundan 18 sanysy nyşana degeni bellik edildi. Nyşana degmegiň otnositel ýygylygyny tapyň.

11. Önümler partiýasyny synamakda ýaramly önümleriň otnositel ýygylygy 0,9-a deň boldy. Eger jemi 200 sany önüm barlanan bolsa, ýaramly önümleriň sanyny tapyň.

12. Bir şäherde 920 sany adamdan işe nähili ýetip gelýändikleri soralanda, olardan 350-si maşynda, 420 sanysy jemgyýetçilik transportynda, 80 sanysy welosipedde, 70 sanysy pyýada gelýändikleri mälim boldy.

1) maşynda;
2) jemgyýetçilik transportynda;
3) welosipedde;
4) pyýada barýanlaryň sanynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

13. Radiusy 20 cm bolan tegelegiň içinde bir-biri bilen kesişmeýän we biriniň radiusy 5 cm, ikinjisiniňki 10 cm bolan iki töwerek geçirilen. Uly tegelegiň içinde töwekgellik bilen alnan nokat kiçi töwereklerden biriniň içinde bolmak ähtimallygyny tapyň.

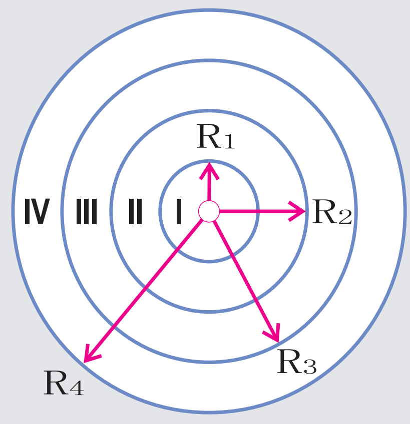
14. Iki dost mälim ýerde sagat 10 bilen 11 arasynda duşuşmagy ylalaşdylar. Birinji gelen ikinjisini 20 minudyň dowamynda garaşýar, şondan soň gidýär. Eger görkezilen wagt aralygynda dostlaryň gelmeli momentleri deň mümkinçilikli bolsa, olaryň duşuşmak ähtimallygyny tapyň.

15. Gaty tupan netijesinde 40-njy we 70-nji kilometrleriň aralygynda telefon simi üzülen. Üzülme 50-nji we 55-nji kilometrleriň arasynda bolmak ähtimallygyny tapyň.

16. Tegelegiň içinden kwadrat çyzylan. Tegelegiň içine tötänleýin goýlan nokat kwadratyň içinde bolup galmak ähtimallygy näçe?

17. Nyşan radiuslary $R_1 = r,\ R_2 = 2r,\ R_3 = 3r,\ R_4 = 4r$ bolan konsentrik tegelekden ybarat. Eger nyşana oklanan naýzanyň tegelege degmegi gutulgysyz bolsa, onda naýzanyň her bir zolaga düşmek ähtimallygyny tapyň (7-*nji surat*).

7-nji surat



18. Iki bije deň taşlandy. Düşen sanlaryň jeminiň bäşe deň bolmak ähtimallygyny tapyň.

19. Toparda 30 sany talyp bolup, olardan 10 sanysy matematika gurnagyna gatnaşýar. Toparyň içinden tötänleýin 6 sany talyp saýlap alyndy. Olaryň içinden hiç bolmanda biri matematika gurnagyna gatnaşýan talyp bolmak ähtimallygyny tapyň.

20. 3 sany gök we 4 sany ýaşyl şarlardan islendik saýlanan 3 sany şaryň 2 sanysy gök, 1 sanysy ýaşyl reňkde bolmak ähtimallygyny tapyň.

21. Bije bir gezek taşlananda jübüt sifr düşmek ähtimallygyny tapyň.

22. Daşalan wagtda 10 000 sany garpyzdan 26 sanysy ýarylypdyr. Ýarylan garpyzlaryň sanynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

23. Gutuda 7 sany ak, 3 sany gara şar bar. Ondan tötänleýin alnan şaryň ak bolmak ähtimallygyny tapyň.

24. Telefonda sifr ýygýan abonent ahyrynda iki sifrini ýatdan çykardy we diňe bu sifrleriň her hili bolýandygyny bilmek bilen olary tötänleýin ýygdy. Gerekli sifrler ýygylanlygynyň ähtimallygyny tapyň.

25. Gurluş 5 sany elementden ybarat bolup, olaryň 2 sanysy könelen. Gurluş işe düşürilende tötänleýin ýagdaýda 2 sany element birikdirildi. Işe düşürende könelmedik elementler birikdirilen bolmak ähtimallygyny tapyň.

26. Gutuda *m* sany ak we *n* sany gara şarlar bar. Gutudan tötänleýin bir şar alnan. Alnan şaryň ak bolmak ähtimallygyny tapyň.

27. Tötänleýin 20-den uly bolmadyk natural san saýlananda, onuň 5-e kratnyly bolmak ähtimallygyny tapyň.

GAÝTALAMAK

FUNKSIÝA WE ONUŇ HÄSIÝETLERI

1. Funksiýalaryň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ b) $y=\sqrt{3x-x^3}$ c) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}$

d) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ f) $y=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{2x-3}{x+1}$

2. Eger $f(x) = x^2$ we $g(x) = 2x-1$ bolsa, x-iň näçe bahasynda $f(g(x)) = g(f(x))$ bolýar?

3. Eger $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$ bolsa, $f(x) = ?$

4. Eger $f(x)=\sqrt{x^3-1}$ bolsa, $f\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)$ nämä deň?

5. Eger $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ bolsa, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{f(x)}$ nämä deň?

6. Funksiýalar nähili bahalary kabul edýär?

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ b) $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ c) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+2$

d) $y=-x^4+2x^2+5$ e) $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x^2-4x+5}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

7. Berlen funksiýalardan haýsysy jübüt funksiýa?

a) $y=\dfrac{5x^2}{(x-3)^2}$ b) $y=\dfrac{x(x-2)(x-4)}{x^2-6x+8}$ c) $y=x^2+|x+1|$

d) $f(x)=x^3-\dfrac{2}{x^3}$ e) $y=\begin{cases}-x^2, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$ f) $y=\sqrt{x^2-6x+11}$

8. Berlen funksiýalardan haýsysy täk funksiýa?

a) $y=3x^5+x^3$ b) $y=(0,25)^x+(0,25)^{-x}$ c) $y=\begin{cases}x, x<0\\ -x, x\geq 0\end{cases}$

d) $y=|x|-1$ e) $y=\dfrac{x^4-2x^2}{3x}$ f) $y=\sqrt{3-x^2-2x}$

RASIONAL DEŇLEMELER

Deňlemeleri çözüň (2-21)

1. t-niň nähili bahalarynda $18x+7=5$ we $18x+7+t=5+t$ deňlemeler deň güýçli bolýar?

2. $\frac{4x^2-7x-2}{x^2-5x+6}=0$

3. $2+\frac{4}{x^2}=\frac{9}{x}$

4. $1-\frac{15}{x}=\frac{16}{x^2}$

5. $\frac{9}{x}+\frac{13}{2x}=2$

6. $\frac{2}{x-3}=\frac{x}{x+3}$

7. $\frac{x^3-3x^2}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2}=0$

8. $\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}$

9. $\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{3x-x^2}=\frac{3}{2x+6}$

10. $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2=0$

11. $\frac{1}{x}+\frac{36}{9x-x^2}-\frac{x-5}{9-x}=0$

12. $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}$

13. $5-\frac{x^2-14x-51}{x^2-x-12}=\frac{3}{x-4}$

14. $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$

15. $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{18x+7}{x^3-1}$

16. $\frac{x^2-3x}{x-2}+\frac{x-2}{x^2-3x}=2,5$

17. $\frac{4}{x^2-3x+2}-\frac{3}{2x^2-6x+1}+1=0$

18. $\frac{x-2}{x+1}+\frac{4(x+1)}{x-2}=5$

19. $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

20. $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$

21. $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{40}{9}$

22. Otly ýolda 30 minut togtap durdy. Otly jedwel boýunça ýetip gelmegi üçin sürüji maşinist 80 km aralykda tizligi 8 km/h-a artdyrdy. Otly jedwel boýunça nähili tizlik bilen ýöremelidi?

23. Derýanyň akymy boýunça motorly gaýykda 28 km we akyma garşy 25 km geçildi. Munda bütin ýola sarplanan wagt ýata suwda 54 km-i geçmek üçin giden wagta deň. Eger derýanyň akymynyň tizligi 2 km/h bolsa, motorly gaýygyň ýata suwdaky tizligini tapyň.

Deňlemeleri çözüň (24-38)

24. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$

25. $\frac{1+x}{6}-\frac{6}{1+x}=\frac{4}{x+1}-\frac{x+1}{4}$

26. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=3\frac{1}{3}$

27. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{2x-1}{2x+1}=5,2$

28. $\frac{x^2-2x}{x-1}-\frac{2x-1}{1-x}=3$

29. $\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x^2-4x}=0,625$

30. $\dfrac{(x^2+1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{10}{9}$

31. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x+6}$

32. $x^2+\dfrac{1}{x^2}-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

33. $x^4-6x^3+10x^2-6x+1=0$

34. $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$

35. $\dfrac{x+3}{4x^2-9}-\dfrac{3-x}{4x^2+12x+9}=\dfrac{2}{2x-3}$

36. $\dfrac{30}{x^2-1}+\dfrac{7-18x}{x^3+1}=\dfrac{13}{x^2-x+1}$

37. $\dfrac{2x+7}{x^2+5x-6}+\dfrac{3}{x^2+9x+18}=\dfrac{1}{x+3}$

38. $2x^4+x^3-x^2+x+2=0$

RASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY

Deňlemeler ulgamyny çözüň (1-8)

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2,5\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y+\dfrac{x}{y}=9\\ \dfrac{(x+y)x}{y}=20\end{cases}$

3. $\begin{cases}2xy-\dfrac{3x}{y}=15\\ xy+\dfrac{x}{y}=15\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=3\\ \dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}=\dfrac{1}{2}\\ x^3-\dfrac{y^3}{8}=-28\end{cases}$

6. $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{25}{12}\\ x^2-y^2=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}\dfrac{4y}{x}+\dfrac{x}{y}=5\\ xy=4\end{cases}$

8. $\begin{cases}x+y=5\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=-\dfrac{13}{6}\end{cases}$

Deňlemeler ulgamyny çözüň (9-13)

9. $\begin{cases}\dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}\end{cases}$

10. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}\\ 2x^2+y^2=27\end{cases}$

11. $\begin{cases}\dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7\\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1\end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

RASIONAL DEŇSIZLIKLER

Deňsizlikleri çözüň.

1. $(-4x+3)(-5x+4)>0$

2. $(x^2-16)^3(x+7)<0$

3. $(x-2)^2(x-1)(x+7)(x-5)\geq 0$

4. $\dfrac{(x+6)^3(x-4)}{(7-x)^5}<0$

5. $(x^2-1)(x^2+5x+6)(x^2-5x+6)\leq 0$

6. $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^2+2x+\dfrac{1}{x}-12<0$

7. $\dfrac{5x+4}{x-2}<1$

8. $\dfrac{3x+2}{x-3}>1$

9. $\dfrac{x-4}{x^2-9x+14}>0$

10. $\dfrac{x^4-10x^2+9}{6-2x}<0$

11. $\dfrac{x^2+1}{x-3}>0$

12. $\dfrac{x+3}{x^2+7}<0$

13. $(3-\sqrt{10})(2x-7)<0$

14. $\dfrac{(x^2-x-2)^2}{x^2+7x-8}\geq 0$

15. $\dfrac{3x-1}{x^2+x+1}\leq 0$

16. $\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+5x-8}\leq 0$

17. $\dfrac{2}{x+2}<\dfrac{1}{x-3}$

18. $\dfrac{3}{2-x}>\dfrac{1}{x+3}$

19. $\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{1}{2x-1}$

20. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$

21. $\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x-3}\leq 0$

22. $\dfrac{6}{x-1}\leq\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}$

23. $\dfrac{14x(2x+3)}{x+1}<\dfrac{(9x-30)(2x+3)}{x-4}$

24. $\dfrac{(5x+4)(3x-2)}{x+3}\leq\dfrac{(3x-2)(x+2)}{1-x}$

25. $(x-3)^2+\dfrac{1}{x^2-6x+9}>2$

26. $\dfrac{2x-3}{4\sqrt{6}-10}>5+2\sqrt{6}$

RASIONAL DEŇSIZLIKLER ULGAMY

Deňsizlikler ulgamyny çözüň.

1. $\begin{cases} 2x-14<0 \\ -3x+9<0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x-1>9-4x \\ 3-2x<x+16 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3(2-3x)+2(3-2x)>x \\ 6<x^2-x(x-8) \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5\left(1-\dfrac{x-4}{4}\right)-7(2x-3)>0 \\ \dfrac{3x-14}{5}-\dfrac{3x-10}{20}-0,7(x+8)<0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2\le 9 \\ x+1>0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+\dfrac{2x-3}{2}>\dfrac{7x-5}{2} \\ \dfrac{7x-2}{3}-2x>\dfrac{5(x-2)}{4} \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{4}-\dfrac{4x+1}{3}\ge\dfrac{x+2}{4}-7 \\ \dfrac{4x}{3}-1-\dfrac{6x+2}{2}>x+\dfrac{6}{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 13-\dfrac{3-7x}{10}+\dfrac{x+1}{2}<14-\dfrac{7-8x}{2} \\ 7(3x-5)+4(17-x)>18-\dfrac{5(2x-6)}{2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3x-1}{6}<\dfrac{2-x}{12}-\dfrac{x+1}{2}+3 \\ x>\dfrac{5x-4}{10}-\dfrac{3x-1}{5}-2,5 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{3}{4}(x-1)+\dfrac{7}{8}<\dfrac{1}{4}(x-1)+\dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{2x-3}{3}<2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+x+8<0 \\ x^2+6x+5\ge 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x\ge 2 \\ -0,3x^2+4,8<0 \\ -2x^2+17x+19\ge 0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2-5x\le 0 \\ x-x^2\ge 0 \\ -4x^2-5x+21\ge 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{x-4}{4}-x+1<\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{x-3}{3} \\ 3-x>2x-10 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}-1<3-2(1-2x) \\ 3x-5>1-2(1-x) \\ 1-2x<3(2x-1) \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7<2x+1<11 \\ \dfrac{x+2}{x-5}<\dfrac{x-6}{x-3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} -2<2-x<1 \\ \dfrac{x+3}{1-x}\le\dfrac{8-x}{x-4} \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{2}{7}<2^n<3 \\ 3^n>2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1<(\dfrac{2}{3})^n<3 \\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^n<1,5 \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{1}{5}<3^n<4 \\ 2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^n<10 \end{cases}$

IRRASIONAL DEŇLEMELER

Deňlemeleri çözüň.

1. $\sqrt{x-1}=-4$
2. $\sqrt{x}=8$
3. $\sqrt{x}=-16$
4. $\sqrt[3]{x+1}=2$
5. $\sqrt[4]{x-7}=-3$
6. $\sqrt{x^2+2x-6}\cdot\sqrt{x-9}=0$
7. $1+\sqrt{x+3}=0$
8. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$
9. $\sqrt{x-4}+\sqrt{x^2-3}=0$
10. $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$
11. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x+4}=-11$
12. $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$
13. $\sqrt{x^2-7x+12}=2x-6$
14. $\sqrt{4-x}=\sqrt{x-7}$
15. $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$
16. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$
17. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$
18. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$
19. $\sqrt{x-5}+\sqrt{1-x}=7$
20. $(x^2-5x+6)\cdot\sqrt{2-x}=0$
21. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}=12-6x$
22. $(x-1)\cdot\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-1}}=0$
23. $(4x-x^2-3)\cdot\sqrt{x^2-2x}=0$
24. $\sqrt[3]{9x+1}=1+3x$
25. $\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}=12$
26. $x^2+11+\sqrt{x^2+4}=42$
27. $x^2+5x+\sqrt{x^2+5x-5}=17$
28. $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$
29. $\sqrt{4-x}+\sqrt{x-4}=0$
30. $\sqrt{7-5x}+\sqrt{5x-7}=29$
31. $\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}+\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}=\dfrac{10}{3}$
32. $\sqrt{5+2x}=10-3\sqrt[4]{5+2x}$
33. $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}=(x-7)^2\cdot(x-5)$
34. $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$
35. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+2}=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}}{4-x}$
36. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$
37. $\sqrt{x^3+4x-1-8\sqrt{x^4-x}}=\sqrt{x^3-1}+2\sqrt{x}$
38. $6x^2+7x\sqrt{1+x}=24(1+x)$
39. $\sqrt{(x^2+8x)^2}=x^2+8x$
40. $\sqrt{(4x^2-5x)^2}=5x-4x^2$
41. $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2-\sqrt{x-4}$
42. $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=x-\dfrac{1}{x}$

43. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=x^2+2x$

44. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6$

45. $\sqrt{x+8\sqrt{x-16}}+\sqrt{x-8\sqrt{x-16}}=2\sqrt{x-16}$

46. $\dfrac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2}=0$

IRRASIONAL DEŇLEMELER ULGAMY

Deňlemeler ulgamyny çözüň.

1. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=15\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{xy}=12\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=7\end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ x-y=12\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2\\ \sqrt{2x-y+2}=1\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$

6. $\begin{cases}3\sqrt{x}-\sqrt{y}=8\\ \sqrt{x}+2\sqrt{y}=19\end{cases}$

7. $\begin{cases}25y+x=100-10\sqrt{xy},\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4,\end{cases}$

8. $\begin{cases}xy=64\\ x-y+\sqrt{xy}=20\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\end{cases}$

10. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=7\\ xy=9\end{cases}$

11. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=26\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=6\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3\\ xy=8\end{cases}$

13. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\dfrac{3}{4}\\ xy=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=5\\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\end{cases}$

15. a) $\begin{cases}5x+3\sqrt{xy}+4y=12\\ 3x+2\sqrt{xy}+3y=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6\sqrt{xy}+7y=9\\ x-4\sqrt{xy}+5y=6\end{cases}$

16. a) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\ x+y+4\sqrt{xy}=37\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ x+y-3\sqrt{xy}=1\end{cases}$

17. a) $\begin{cases}x\sqrt{x}+12y\sqrt{x}=28\\ 8y\sqrt{y}+6x\sqrt{y}=36\end{cases}$ b) $\begin{cases}x\sqrt{x}+27y\sqrt{x}=36\\ 27y\sqrt{y}+9x\sqrt{y}=28\end{cases}$

GÖRKEZIJILI DEŇLEMELER

1. Deňlemäni çözüň.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{1024}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^{2x-1} = (0{,}8)^{x-2}$ c) $0{,}5^{\sqrt{x+1}} \cdot 0{,}5^{-1} = 0{,}5^{\sqrt{x}}$

d) $4^{x-1} - 4^{x+1} + 4^{x+2} = 49$ e) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ f) $5^{x+1} + 3 \cdot 5^{x-1} - 6 \cdot 5^x + 10 = 0$

2. $49^x+7^x+1= 57$ deňleme näçe köke eýe?

3. $9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$ deňlemäniň iň uly köküni tapyň.

GÖRKEZIJILI DEŇSIZLIKLER

1. Deňsizligi çözüň.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-3x} \le \frac{3}{2}$ b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+4} \cdot 7\sqrt{7} < \frac{1}{7}$ c) $(0,04)^{2x} > (0,2)^{x(3-x)}$

d) $25^x + 5^x > 0$ e) $3^{\frac{x-1}{x+1}} > 27$ f) $3{,}2^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \ge 3{,}2\sqrt{3{,}2}$

g) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$ h) $0,5^{4x+3} \le 0,5^{6x-1}$ i) $2\sqrt{2} \cdot 2^{x-3} \ge \frac{1}{2}$

2. Deňsizligiň çözüwini kanagatlandyrýan natural sanlar näçe?

a) $8^{-2x+8} > 512$ b) $2^{5x-7} \le 16$ c) $2^{5x-7} \ge 16$ d) $0,1^{4x-5} > 0,001$

3. Deňsizligiň iň uly bitin çözüwini tapyň.

a) $2,5^{2x+3} \le 6,25$ b) $1,1^{5x-3} < 1,21$ c) $0,7^{9x+4} > 0,343$ d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-9} \ge \frac{8}{125}$

LOGARIFM DÜŞÜNJESI. LOGARIFMIK FUNKSIÝA

1. $A(-2;-1)$ nokat haýsy funksiýanyň grafigine degişli däl?

1) $y = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ 2) $y = \log_2|x|$ 3) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x|$ 4) $y = -\log_2(-x)$

2. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y = \lg(x+2) + \lg(3-x)$ b) $y = \ln(x+|x|)$

3. $y = \log_x(x+1)$ funksiýa $x \in \{2;3;4;5;6\}$ bolanda argumentiň haýsy bahasynda iň uly bahany alýar?

4. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ funksiýanyň grafigini $y = \log_3 x$ funksiýanyň grafiginden nähili usul bilen almak mümkin?

LOGARIFMIK AŇLATMALARY TOŽDESTWOLAÝYN ÇALŞYRMA

1. Aňlatmanyň bahasyny hasaplaň.

a) $\log_{12} \sqrt[5]{144}$ b) $\log_3 5 - \log_3 \frac{5}{27}$ c) $\frac{\log_{27} 2}{\log_3 8}$

d) $\frac{\log_{11} 12}{\log_{11} 6} + \frac{\log_5 3}{\log_5 6}$ e) $\frac{3\log_7 2 - \frac{1}{2}\log_7 64}{4\log_5 2 + \frac{1}{3}\log_5 27}$ f) $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_3 4} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$

g) $\frac{1}{2}\log_3 \log_5 125$ h) $-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}$

LOGARIFMIK DEŇLEMELER

1. Deňlemäni çözüň.

a) $\log_5 x = 2$ b) $\log_{0,2} x = 4$ c) $\log_{\frac{1}{3}} x = -1$ d) $\log_7 x = \frac{1}{3}$

2. Deňlemäni çözüň.

a) $\log_3 x + \log_{\frac{1}{3}} x + 2 = 0$ b) $3\log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$

c) $\log_2(3x-6) = \log_2(2x-3)$ d) $\log_6(14-4x) = \log_6(2x+2)$

3. Deňlemäni çözüň.

a) $\log_2^2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$ b) $\log_{\frac{1}{2}}^2(x^2+x) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2+x) = 0$

c) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$ d) $\log_2^2 x + 7\log_2 x + 49 = \frac{-218}{\log_2 \frac{x}{128}}$

4. Deňlemäni çözüň.

a) $x^{5+\log_2 x} = \frac{1}{16}$ b) $5^{2(\log_5 2 + x)} - 2 = 5^{x + \log_5 2}$

c) $lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-15}}\right) = 0$ d) $x^{\lg 2} + 2^{\lg x} = 4$

5. $\log_2(x+4) = -2\log_2 \frac{1}{2-x}$ deňlemäniň näçe bitin köki bar?

GÖRKEZIJILI WE LOGARIFMIK DEŇLEMELER ULGAMY

1. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} 3\cdot 7^x + 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 15 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{-x}\cdot 2^y = \frac{4}{9} \\ x + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2^x + 2y = 1 \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1} \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3\cdot 2^x + y = 13 \\ 2^{2x+1} + 3y = 35 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3\cdot 7^x - 3^y = 12 \\ 7^x \cdot 3^y = 15 \end{cases}$

2. Deňlemeler ulgamyny çözüň.

a) $\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ 2^x+2^y=12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9 \\ 2^{\frac{x+y}{2}}=1024 \end{cases}$

LOGARIFMIK DEŇSIZLIKLER

1. Deňsizligi çözüň.

a) $\log_4(x+5)<0$ b) $\log_3(2-5x)<1$ c) $\log_{\frac{1}{7}}(x+5)>-1$

d) $\log_{0,2}(x-3)+2\geq 0$ f) $\log_{\frac{1}{2}}(2x+3)>\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ g) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+1)\leq 0$

h) $\log_3(13-4^x)>2$ i) $2\log_3 x-\log_x 81<2$ j) $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)\geq 3$

2. $\dfrac{1}{\log_3 x-2}>\dfrac{1}{\log_3 x}$ deňsizligiň 5-den kiçi natural çözüwleri näçe?

3. $2\log_5 x-\log_x 125<1$ deňsizligiň natural çözüwleriniň jemini tapyň.

4. $\log_x(3-x)>1$ deňsizligiň näçe bitin çözüwi bar?

TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR

1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y=\dfrac{1}{\sin x}$ b) $y=\dfrac{1}{\cos x}$ c) $y=\dfrac{\cos x}{\sin x-2\sin^2 x}$

d) $y=\dfrac{3x}{2\cos x-1}$ e) $y=\cos x+\sin x$ f) $y=\cos x+ctgx$

2. Funksiýanyň bahalar toplumyny tapyň.

a) $y=3\cos x-1$ b) $y=2-\sin x$ c) $y=1-2\sin^2 x$ d) $y=2\cos^2 x-1$

3. Berlen funksiýanyň jübüt ýa-da täkligini anyklaň.

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ b) $y=x\cos x$ c) $y=\sin x+x^2$ d) $y=\cos x-x^2$

4. Funksiýanyň iň kiçi položitel döwrüni tapyň.

a) $y=\sin\dfrac{x}{2}$ b) $y=\cos(3x-1)$ c) $y=tg2x$ d) $y=\cos\dfrac{x}{3}$

5. Funksiýanyň iň uly we iň kiçi bahasyny tapyň.

a) $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ b) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $y=1-2|\sin 3x|$

6. Funksiýanyň nollaryny tapyň.

a) $y=\sin x-2$ b) $y=2\cos x+1$ c) $y=x\cos x$ d) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

TERS TRIGONOMETRIK FUNKSIÝALAR

1. Funksiýanyň kesgitleniş ýaýlasyny tapyň.

a) $y = arccos\dfrac{2x+3}{4}$ b) $y = arcsin(2 + 3x)$

c) $y = arcsin\left(3\sqrt{x}+2\right)$ d) $y = arccos\dfrac{4-x}{3}$

2. Deňeşdiriň.

a) $arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ we $arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $arctg(-1)$ we $arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $arccos\sqrt{3}$ we $arcsin1$ d) $arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ we $arcsin\dfrac{1}{2}$

3. Aňlatmalaryň bahasyny tapyň.

a) $2arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arctg(-1)+arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $arcsin\dfrac{1}{2}+4arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+arctg\left(-\sqrt{3}\right)$

c) $arctg\left(-\sqrt{3}\right)+arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+arccos1$ d) $arcsin1-\dfrac{1}{2}+arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+6arctg\sqrt{3}$

4. Hasaplaň.

a) $2arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ b) $2arc\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2arc\,tg1+3arctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ d) $2arc\,tg(-1)+3arctg\left(\sqrt{3}\right)$

5. Hasaplaň.

a) $sin\left(arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $tg\left(arccos\dfrac{1}{2}\right)$ c) $tg\left(arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

d) $sin(4arcsin1)$ e) $cos(arcsin1)$ f) $sin\left(arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

TRIGONOMETRIK DEŇLEME WE DEŇSIZLIKLER

1. $0 \le x < 360^\circ$ aralykda deňlemeleri çözüň.

a) $sinx = -0{,}3$ b) $sinx = 0{,}15$ c) $cosx = 0{,}6$ d) $cosx = -0{,}43$

2. Aralyklary hasaba almak bilen x-iň bahasyny tapyň.

a) $4sinx + 2 = 0,\ 0 \le x < 2\pi$ b) $ctgx - \sqrt{3} = 0,\ 0 \le x < 2\pi$

c) $2sin^2x + 5sinx = 3\quad 0 \le x < 2\pi$ d) $cos2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le x < 2\pi$

3. $0 \le x < 360^\circ$ aralykda deňlemeleri çözüň.

a) $7-6\cos^2 x = 5\sin x$ b) $7 + 2cosx = 8sin^2x$ c) $2sinx - 3cosx = 0$

4. Deňlemeleri çözüň.

a) $\sin 10x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 10x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $tg10x = \sqrt{3}$ d) $ctg10x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5. Deňlemeleri çözüň.

a) $\sin 4x \cos 3x \, tg 8x = 0$ b) $\cos 4x = -\cos 5x$ c) $tg5x = -tg\frac{x}{3}$

6. Deňlemeleri çözüň.

a) $2\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$ b) $2\sin^2 x + \cos x = 0$ c) $\sin x \cos x = 0$

7. Deňlemeleri çözüň.

a) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$ b) $7\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$

c) $\cos^2 2x - 10\sin 2x\cos 2x + 21\sin^2 2x = 0$ d) $8\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

8. Ýerine goýmak usulyndan peýdalanyp çözüň.

a) $\cos^2 2x + 1 = 2\cos^2 x$ b) $3\cos^2 x\sin x + 1 = 3\cos^2 x + \sin x$

c) $6\cos^2 x + 6\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ d) $5\sin^2 x\cos x + 6\cos^2 x - 10\cos x + 6 = 0$

9. Deňlemeleri çözüň.

a) $\cos 2x + \cos x = 0$ b) $\cos 3x = 2\cos 2x - 1$

c) $2\cos^2 x = 4\sin x\cos x - 1$ d) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$

10. Deňlemeleri $\sin x + \cos x = t$ çalşyrmanyň kömeginde çözüň.

a) $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ b) $\sin x + \cos x = 1 + \frac{\sin 2x}{2}$

11. Deňlemeleri bahalamak usuly bilen çözüň.

a) $2\sin^8 x - 3\cos^8 x = 5$ b) $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 - 4\cos^2 3x$

12. Deňlemeleri kömekçi burç girizmek usuly bilen çözüň.

a) $12\cos x - 5\sin x = -13$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

13. Deňsizlikleri çözüň.

a) $\sqrt{2}\cos 2x \le 1$ b) $2\sin 3x > -1$ c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\left(\frac{x}{4} - 3\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\cos\left(\frac{x}{3} + 2\right) < \frac{1}{2}$

14. Deňsizligi çözüň.

a) $\sin^2 x + 2\sin x > 0$ b) $\cos^2 x - \cos x < 0$

ÄHTIMALLYKLAR NAZARYÝETI

1. Lotereýada 2000 sany bilet bolup, olardan 400 sanysy utuşly. Töwekgellik bilen alnan 2 sany biletden diňe biri utuşly bolmak ähtimallygyny tapyň.

2. Iki bije daşy taşlanan bolup, olaryň granlarynda çykan oçkolaryň jemi 7-ä, köpeltmek hasyly 6-a deň bolmak ähtimallygyny tapyň.

3. 7 sany gara we 8 sany ak şar bolan gapdan tötänleýin ýagdaýda bir şar alnanda onuň: a) ak; b) gara şar bolmak ähtimallygyny tapyň.

4. Töwekgellik bilen 25 -den uly bolmadyk natural san saýlaňanda onuň 3 -e kratnyly bolmak ähtimallygyny tapyň.

5. Neşirýatda tötänden bölüp alnan 1000 sany kitapdan ybarat partiýada 7 sanysy ýaramsyz diýip hasaplandy. Ýaramsyz kitaplar çykmagynyň otnositel ýygylygyny tapyň.

6. Tegelegiň içinden kwadrat çyzylan. Kwadrata töwekgellik bilen goýlan nokadyň tegelegiň içinde bolup galmak ähtimallygyny tapyň.

7. Iki bije daşy deň taşlananda düşen sanlaryň jemi altydan kiçi bolmak ähtimallygyny tapyň.

8. Ýaşikde 11 sany ak we 9 sany gara şar bar. Töwekgellik bilen alnan 4 sany şardan 2 sanysy ak bolmak ähtimallygyny tapyň.

9. Gapda 7 sany gyzyl we 13 sany gök pökgi bar. Töwekgellik bilen alnan 2 sany pökginiň dürli reňkli bolmak ähtimallygyny tapyň.

10. Gutuda 7 sany ak, 3 sany gara şar bar. Ondan töwekgellik bilen alnan 2 sany şaryň dürli reňkde bolmak ähtimallygyny tapyň.

11. Telefon sifrini ýygýan abonent ahyrynda üç sany sifrini ýatdan çykardy. Töwekgellik bilen sifri ýyganda gerekli sifrler ýygylanlygy ähtimallygyny tapyň.

12. Gutuda 100 sany lampoçka bolup, olaryň 10 sanysy ýaramsyz. Töwekgellik bilen 4 sany lampoçka alnanda, olardan 2 sanysynyň ýaramsyz bolmak ähtimallygyny tapyň.

13. 3 sany gök, 4 sany gyzyl we 5 sany ýaşyl şardan islendik saýlanan 3 sany şaryň dürli reňkde bolmak ähtimallygyny tapyň.

14. Ýaramlylygynyň otnositel ýygylygy 0,8-e deň bolan önümler partiýasynda 250 sany önüm barlanan bolsa, ýaramly önümleriň sanyny tapyň.

15. Haltada 5 sany gök we 7 sany sary şar bolup, tötänleýin ýagdaýda alnan iki şaryň dürli reňkde bolmak ähtimallygy tapyň.

16. Sebetde 5 sany ýaşyl, 7 sany sary we 8 sany gyzyl alma bar. Islendik ýagdaýda alnan 3 sany almanyň dürli reňkde bolmak ähtimallygyny tapyň.

17. Gutujykda 6 sany birmeňzeş nomerlenen dänejikler bar. Töwekgellik bilen bir-birden ähli dänejikler alnanda dänejikleriň nomerleriniň kemelýän tertipde çykmak ähtimallygyny tapyň.

18. Gutuda 12 sany ak, 18 sany gyzyl şar bar. Töwekgellik bilen alnan 4 sany şaryň 3 sanysy gyzyl bolmak ähtimallygyny tapyň.

19. Synpda 36 sany okuwçy bolup, olardan 13 sanysy küşt gurnagyna gatnaşýar. Şu synpdan töwekgellik bilen alnan 7 sany okuwçydan hiç bolmanda biri küşt gurnagyna gatnaşýan bolmagynyň ähtimallygyny tapyň.

O'quv nashri

ALGEBRA
VA ANALIZ ASOSLARI

Umumiy o'rta ta'lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik
(Turkman tilida)

Terjime eden Kamiljan Hallyýew
Redaktor Şahnoza Ahmedowa
Çeper redaktor Sarwar Farmanow
Tehniki redaktor Akmal Suleýmanow
Suratçy Behzad Zufarow
Dizaýner Ilham Baltaýew
Sahypalaýjy Rustam Hudaýberganow
Korrektor Aýnura Alymjanowa

Çap etmäge 2022-nji ýylyň 9-njy sentýabrynda rugsat edildi.
Möçberi 60×84 1/8. «Cambria» garniturasy. Kegli 12. Ofset çap ediliş usuly.
Şertli çap listi 22,32. Neşirýat-hasap listi 22,10.
1177 nusgada çap edildi. Buýurma № 1150.

print.uz
ОПЕРАТИВНО и КАЧЕСТВЕННО

«PRINTUZ» JÇJ-niň çaphanasynda çap edildi.
100105, Daşkent ş, Mirabad etraby, Koşköprik köçesi, 28/1-öý

Kärendä berilýän dersligiň ýagdaýyny görkezýän jedwel

№	Okuwçynyň ady, familiýasy	Okuw ýyly	Dersligiň alnandaky ýagdaýy	Synp ýolbaşçy-synyň goly	Dersligiň tabşyrylan-daky ýagdaýy	Synp ýolbaşçy-synyň goly
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Derslik kärendesine berlip, okuw ýylynyň ahyrynda gaýtarylyp alnanda ýokardaky jedwel synp ýolbaşçysy tarapyndan aşakdaky baha bermek ölçeglerine esaslanylyp doldurylýar:

Täze	Dersligiň birinji gezek peýdalanmaga berlendäki ýagdaýy.
Ýagşy	Sahaby bütin, dersligiň esasy böleginden aýrylmandyr. Ähli sahypalary bar, ýyrtylmadyk, goparylmadyk, sahypalarynda ýazgylar we çyzyklar ýok.
Kanagat-lanarly	Kitabyň daşy ýenjilen, ep-esli çyzylan, gyralary gädilen, dersligiň esasy böleginden aýrylan ýerleri bar, peýdalanyjy tarapyndan kanagatlanarly abatlanan. Goparylan sahypalary täzeden ýelmenen, käbir sahypalary çyzylan.
Kanagat-lanarsyz	Kitabyň daşy çyzylan ýyrtylan, esasy böleginden aýrylan ýa-da bütinleý ýok, kanagatlanarsyz abatlanan. Sahypalary ýyrtylan, sahypalary ýetişmeýär, çyzylyp taşlanan. Dersligi dikeldip bolmaýar.