ГЕОМЕТРИЯ

10

Жалпы орта білім беретін мектептердің
10-сыныбына арналған оқулық

Өзбекстан Республикасы Халыққа білім
беру министрлігі баспаға ұсынған

Жаңа басылым

Ташкент – 2022

УЎК 514(075.3)
КБК 22.151я72
Г 31

Құрастырушылар:

Боходир Хайдаров
Наргиза Таштемирова
Исак Асроров

Пікір жазғандар:

З. Р. Бабаева – Сырдария облысы, Гүлістан қаласындағы №11 жалпы орта білім беретін мектептің математика пәні мұғалімі.

М. Х. Усманов – Наманган облыстық халыққа білім беру басқармасының құзырындағы №3 мамандандырылған мемлекеттік жалпы білім беретін мектеп-интернаттың математика пәні мұғалімі.

А. К. Алибекова – Ташкент қаласы Шайхонтохур ауданы №180 мамандандырылған мемлекеттік жалпы білім беретін мектеп-интернаттың математика пәні мұғалімі.

Геометрия [Мәтін]:10-сыныбына арналған оқулық / Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асроров – Ташкент: Республикалық білім орталығы, 2022. − 192 б.

Өзбекстан Республикасы Ғылым академиясының В. И. Романовский атындағы математика институтының қорытындысы негізінде жетілдірілді.

Түпнұсқа макет пен дизайн тұжырымдамасы Республикалық білім орталығында жасалды.

Республикалық мақсатты кітап қоры қаржысы есебінен шығарылды.

ЮНИСЕФ-тің Өзбекстандағы өкілдігімен ынтымақтастықта дайындалды.

ISBN 978-9943-8459-7-8

© Республикалық білім орталығы, 2022

СӨЗБАСЫ

Құрметті оқушылар! Сендер геометрияның бөлімін – стереометрия курсын үйренуді бастадыңдар. Стереометрия кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйренуге арналған. 10-сыныпта стереометрия аксиомалары және олардың нәтижелерімен, кеңістіктегі түзулер, жазықтықтардың параллельдігі және перпендикулярлығымен танысасың.

Ұсынылған теориялық материалдар мүмкіндігінше қарапайым және жатық тілмен берілген. Барлық тақырып пен ұғымдардың мәні сан алуан өмірлік мысалдар арқылы ашылған. Әрбір тақырыптан кейін берілген сұрақтар, дәлелдеуге, есептеуге және салуға байланысты көптеген есеп пен мысалдар оқушыны шығармашылықпен ойлауға баулиды, игерген білімін тереңдетуге және бекітуге көмектеседі. Оқулық өзінің ерекше дизайнымен және сабақ материалын көрнекі етіп беруімен ерекшеленеді. Ондағы берілген суреттер мен сызбалар сабақ материалдарын жақсы түсінуге қызмет етеді.

Үйренілген геометриялық ұғымдар мен қасиеттер өмірлік мәселелерді шешу және оларды іс жүзінде қолдану қабілетіңді дамытады. Стереометрия бойынша игерілген білім мен дағдылардың күнделікті өмірде, көптеген кәсіп иелері мен мамандар – сәулетшілер, құрылысшылар, дизайнерлер, токарлар, тағы басқалардың кәсіби қызметіне қажет екеніне сенімді боласың.

Барлық материалдар тарауларға, ал тараулар тақырыптарға бөлінген. Әрбір тақырып бойынша теориялық материалдар мен тапсырмалар бар. Теорияны үйрену кезінде қалың әріптермен жазылған мәтінге ерекше назар аудар. Бұл ең маңызды анықтамалар мен қасиеттер. Мәселелерді шешуде олардың түсіну, есте сақтау және қолдана білу керек. Тақырыптар мәтінінде кейбір мәселелерді шешу мен есептерді шығарудың үлгілерін де таба аласың.

Әрбір тақырыптан кейін берілген сұрақтар тақырып материалының қалай игерілгенін тексеруге және оны қайталауға көмектеседі. Әр тараудың соңында бақылау сұрақтары мен тест тапсырмалары беріліп, олардың көмегімен тарау тақырыптарының қалай игерілгенін тексеруге болады. Оқулықтағы сұрақтар мен тапсырмалардың үш күрделілік дәрежесі бар. Тақырыптың соңындағы сұрақтар және шеңбермен (°) белгіленген кейбір есептер бастапқы күрделі дәрежеде болып, теориялық материалды жақсы түсінетініне сенімді болмаған оқушылар үшін дайындық жаттығулары болып табылады. Ешқандай белгісі жоқтары – орташа күрделіліктегі тапсырмалар мен жаттығулар. Оларды шешуді үйреніп, академиялық жетістіктеріңнің жеткілікті деңгейін сенімді түрде көрсете аласың. Күрделілігі жоғары тапсырмалар жұлдызшамен (*) белгіленеді. Егер сен оларды бірден шеше алмасаң, алаңдама, бірақ сабырлы әрі табанды бол. Күрделі тапсырманы шешудің қуанышы сенің сыйың болады. Жауаптардағы нұсқаулар осы тапсырмалардың кейбірін шешу жолдарын табуға көмектеседі.

Ғылымды, әсіресе геометрияны оқытуда көзделген маңызды нәтиже оқушылардың тиісті құзыреттіліктерді – оқу пен дағдыға негізделген білім және өмірдегі табысты іс-әрекет үшін біліктілікті меңгеруі. Оқулықта берілген тапсырмалар мен жаттығулар осы мақсатты жүзеге асыруға бағытталған.

Авторлар

ОҚУЛЫҚТЫ ПАЙДАЛАНУ БОЙЫНША ҰСЫНЫСТАР

Оқулықтан стереометрияны сәтті меңгеру үшін төмендегілерге мойынсұнуды ұсынамыз:

- әрбір кеңістіктегі денені үйренуді оның моделін жасаудан бастау және осы модельдер негізінде олардың қасиеттерін үйрену;
- кеңістіктегі денелерді дәптерде кескіндеуге ерекше назар аудару;
- көбірек өмірлік, күнделікті мәселелерді шешу, яғни құзыреттіліктерді қалыптастыруға көңіл бөлу;
- суретті есептерден мәтінді есептерге біртіндеп көшу;
- сабақта сан алуан предметтерге, тұрмыстық заттарға кеңістіктегі дененің моделі ретінде қарап, олардың қасиеттерін үйренуге байланысты есептерді көбірек шешу;
- сан алуан қасиеттер мен формулаларды дәлелдеуден гөрі олардың мәні мен қолданылуына көбірек көңіл бөлу.

ОҚУЛЫҚТА ПАЙДАЛАНЫЛҒАН БЕЛГІЛЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МАҒЫНАСЫ:

 – геометриялық ұғымның анықтамасы.

 – теореманың сипаттамасы.

 – аксиоманың сипаттамасы.

 – тақырып бойынша сұрақтар.

 – белсенділендіретін жаттығу.

 – есепті шешу үлгісі.

 – практикалық жаттығу мен қолдану.

 – геометриялық зерттеу.

 – тарихи көріністер.

 – геометриялық басқатырмалар.

 – мультимедиалық қосымшалар.

 – электронды ресурстар.

М А З М Ұ Н Ы



I ТАРАУ
ПЛАНИМЕТРИЯНЫ ЖҮЙЕЛІ ҚАЙТАЛАУ

1. Геометрияның логикалық құрылымы 8
2. Геометриялық есептер және оларды шешу тәсілдері 15
3. Тарауды қайталауға қатысты практикалық жаттығулар 26



II ТАРАУ
СТЕРЕОМЕТРИЯҒА КІРІСПЕ

4. Стереометрияның негізгі ұғымдары 32
5. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтар 39
6. Кеңістіктегі геометриялық фигуралар. Көпжақтар 44
7. Көпжақтарды кескіндеу және моделін жасау 58
8. Көпжақтардың қарапайым қималарын салу 64
9. Жоба жұмысы бойынша жаттығу 74
10. Тарауды қайталауға қатысты практикалық жаттығулар 77



III ТАРАУ
КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

11. Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы.....88
12. Айқас түзулер 95
13. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы 98
14. Кеңістіктегі жазықтықтардың өзара орналасуы 103
15. Кеңістіктегі параллель проекциялау 109
16. Тарауды қайталауға қатысты практикалық жаттығулар.....113

IV ТАРАУ
КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ



17. Кеңістіктегі перпендикуляр түзулер мен жазықтықтар 120
18. Кеңістіктегі перпендикуляр, көлбеу мен қашықтық 127
19. Үш перпендикуляр туралы теорема 135
20. Кеңістіктегі жазықтықтардың перпендикулярлығы 142
21. Кеңістікте ортогональ проекция және оны техникада пайдалану 148
22. Тарауды қайталауға қатысты практикалық жаттығулар.....152

V ТАРАУ
ҚАЙТАЛАУ



23. Қайталауға қатысты есептер.....162
Геометрияға қатысты негізгі деректер 175

10-СЫНЫП “ГЕОМЕТРИЯ” ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН ТАҒЫЛЫМДЫҚ ОЙЫНДАР

10-СЫНЫП “ГЕОМЕТРИЯ” ОҚУЛЫҒЫ ҮШІН БЕЙНЕСАБАҚТАР



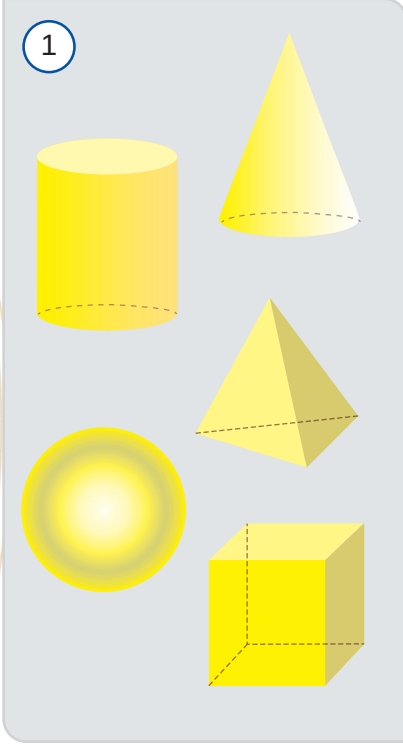
I ТАРАУ

ПЛАНИМЕТРИЯНЫ ЖҮЙЕЛІ ҚАЙТАЛАУ

Осы тарауды үйрену нәтижесінде 7-9-сыныптарда геометрияның планиметрия бөлімі бойынша қалыптастырған келесі білім мен дағдыларды пысықтап аласың:

- геометрияның логикалық (аксиоматикалық) құрылымымен танысасың;
- планиметрияның негізін құрайтын аксиомалар жүйесін үйренесің;
- геометрияның дербес ғылым ретінде қалыптасуына үлкен үлес қосқан ғалымдармен танысасың;
- геометрия тарихы туралы деректермен танысасың;
- геометриялық есептерді шешудің аналитикалық, синтетикалық, тура және кері, алгебралық, аудандар, векторлар, координаталар және геометриялық ауыстыру тәсілдерімен танысасың;
- жоғарыдағы тәсілдерге сүйене отырып, планиметрияға байланысты есептерді шығарасың.

1 ГЕОМЕТРИЯНЫҢ ЛОГИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ



Геометрия негіздері мысырлықтарға біздің заманымыздан бұрынғы 3-мыңжылдықтың басында белгілі болған. Сол дәуірлерде, пирамидалар құрылысы қызу жүріп жатқан кезде, олар бұл білімін белсене пайдаланған. Ғалымдардың анықтауына қарағанда, ежелгі мысырлық инженерлер тең қашықтықтағы 12 түйінмен бөлінген, үш қазыққа тартылған арқан тікбұрышты құрайтынын білген. Олар ауыл шаруашылығы егіндерін егу үшін Ніл жазықтығының аумақтарын белгілеп, геометриялық білімдерін қолданған.

Геометрия нақты өмірдегі предметтердің мөлшерлік көрсеткіштері мен кеңістіктегі фигураларын үйренетін пән. Заттардың басқа қасиеттерін басқа пәндер үйренеді. Егер бір нәрсе үйренілгенде, оның тек кеңістіктегі фигурасы мен өлшемдері ғана ескерілсе, онда *геометриялық фигура* деп аталатын абстракт объектіге ие боламыз.

"Геометрия" грекше сөз болып, "жер өлшеу" деген мағынаны білдіреді. Мектепте үйренілетін геометрия ежелгі грек ғалымы Эвклидтің атымен *Эвклид геометриясы* деп аталады. Геометрия екі бөліктен: *планиметрия* және *стереометриядан* құралған. *Планиметрия* – жазықтықтағы, ал *стереометрия* кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйренеді *(1-сурет)*.

Геометриялық фигуралардың бір-бірінен айырмашылығын білу үшін олардың ерекшелігі сипатталады, яғни оларға *анықтама* беріледі. Бірақ барлық фигураларға анықтама беруге болмайды. Олардың бастапқы бірнешеуін анықтамасыз қабылдауға мәжбүрміз. Оларды анықтама берілмейтін, *бастауыш (негізгі) геометриялық фигуралар* деп аламыз.

Геометрияның логикалық құрылымы төмендегі тәртіппен жүзеге асырылады:

1. Алдымен негізгі (бастауыш) геометриялық фигуралар анықтамасыз қабылданады;
2. Негізгі геометриялық фигуралардың негізгі қасиеттері дәлелсіз қабылданады;
3. Басқа геометриялық фигуралар негізгі фигуралар мен олардың қасиеттеріне сүйене анықтама беріледі және олардың қасиеттері оған дейін белгілі болған қасиеттерге сүйене дәлелденеді.

Пәннің мұндай құрылымын *аксиомалық құрылым* деп аталады. *Аксиома* деп дұрыстығы дәлелсіз қабылданған қасиетке айтылады

Осы кезге дейін біз үйренген планиметрияның негізгі фигуралары нүкте, түзу мен жазықтық еді. Оларды анықтамасыз қабылдадық. Ал кесінді, сәуле, үшбұрыш, басқа да геометриялық фигураларға анықтама бердік. Сондай-ақ, төмендегі қасиеттерді (растауларды) дәлелсіз аксиома ретінде қабылдадық.

I. Тиістілік аксиомалары тобы:

1.1. Жазықтықта қандай түзу алынса да, онда осы түзуге тиісті нүктелер де, тиісті емес нүктелер де болады.

1.2. Кез келген екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

II. Тәртіп аксиомалары тобы:

2.1. Бір түзудегі кез келген үш нүктенің тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатады.

2.2. Кез келген түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі.

III. Өлшеу аксиомалары тобы:

3.1. Кез келген кесінді нөлден ерекшеленген белгілі бір ұзындыққа ие болып, ол оң санмен өрнектеледі. Кесіндінің ұзындығы оның кез келген нүктесі бөлген бөліктері ұзындықтарының қосындысына тең болады.

3.2. Кез келген бұрыштың нөлден үлкен белгілі бір градустық өлшемі бар болып, оның мәні оң санмен өрнектеледі. Жазыңқы бұрыштың градустық өлшемі 180°-қа тең. Бұрыштың градустық өлшемі бұрыш қабырғаларының арасынан өтетін кез келген сәулемен бөлінетін бұрыштардың градустық өлшемдерінің қосындысына тең.

IV. Тең фигураны салу аксиомалары тобы:

4.1. Кез келген сәулеге оның ұшынан бастап, берілген кесіндіге тең бір ғана кесіндіні салуға болады.

4.2. Кез келген сәуледен белгілі бір жарты жазықтықта берілген, жазыңқы болмаған бұрышқа тең бір ғана бұрышты салуға болады.

4.3. Кез келген үшбұрыш үшін оған тең үшбұрыш бар және оны сәуледен белгілі бір жарты жазықтыққа бір ғана түрде салуға болады.

V. Параллельдік аксиомасы

5.1. Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады.

Қандай да бір растаудың дұрыстығын логикалық тұжырымдар арқылы келтіріп шығару *дәлел* деп аталады. Ал дұрыстығы дәлелдеу жолымен негізделінетін растау *теорема* деп аталады. Теорема, әдетте, *шарт* пен *қорытынды* бөліктерден құралады. Теореманың бірінші – шарт бөлігінде ненің берілгені баяндалады. Екінші – қорытынды бөлігінде нені дәлелдеу қажеттілігі өрнектеледі.

Теореманы дәлелдеу – оның шартын пайдаланып, оған дейін дәлелденген және қабылданған қасиеттерге сүйеніп, тұжырым жасап, қорытынды бөлігінде өрнектелген сөздердің дұрыстығын туындату. Теореманың шарт және қорытынды бөліктерін анықтап алу – теореманы айқындайды, оны түсіну және дәлелдеу процесін жеңілдетеді.

Грек ғалымы *Платон* геометрияда ғажап бір заңдылықты байқаған: бұрын үйренілген, дұрыстығы дәлелденген қасиеттерден логикалық пікірлеу арқылы жаңа қасиеттерді

Геометрия математиканың маңызды бөлігі. Оның келіп шығуы бірнеше мың жылдарға барып тіреледі және алғашқы кезекте қолөнершілік, мәдениет, өнер, адам еңбегі және қоршаған ортаны бақылаудың дамуымен байланысты. Мұны геометриялық фигуралардың атаулары да растайды. Мысалы, “трапеция” терминінің атауы грекше “trapesiya” (орындық) сөзінен, “конус” грекше “konos” (қарағай конусы) сөзінен келіп шыққан.



Эвклид (эрамыздан бұрынғы 356–300 жылдар)

Геометрияны зерттеген ең ұлы ғалымдардың бірі – Эвклид. Оның құрметіне осы ғылымның классикалық саласы "Эвклид геометриясы" деп аталады. Оның өзі 465 теореманы дәлелдеген. Қазірге дейін бұл рекордты ешкім жаңалаған жоқ.

туындатуға болады екен. Осы ғажап мүмкіндікті пайдаланып, қалған қасиеттер теоремалар көрінісінде өрнектеледі және аксиомалар мен осы кезге дейін дұрыстығы дәлелденген қасиеттерге негізделіп, логикалық тұжырым жасаумен дәлелденеді.

Тұжырым жасау үдерісінде дәлелденбеген қасиеттерді (олардың дұрыстығы айқын көрініп тұрған болса да) пайдалануға тыйым салынады.

Сөйтіп, геометрияға бір ғимарат деп қарайтын болсақ, бастапқы ұғымдар мен аксиомалар оның іргетасын құрайды. Осы іргетастың үстіне қаланған "қыштардан" – анықтама берілген жаңа ұғымдар мен теоремалар көрінісіндегі дәлелденген қасиеттерден құралған болады.

Геометрияны жеке пән ретінде негіздеуде ежелге грек ғалымдары үлкен үлес қосқан. Мысалы, *Гиппократ* геометрия негіздері туралы бастапқы көзқарастарды баяндаған. Бұл сала бойынша негізгі істерді ұлы грек ғалымы Эвклид жүзеге асырған. Оның негізгі шығармасы "Бастамалар" планиметрия, стереометрия және сандар теориясының кейбір мәселелерін, сондай-ақ алгебра, қатынастар жалпы теориясы, аудан және көлемді есептеу тәсілі мен лимиттер теориясы элементтерін қамтыған. Эвклид "Бастамаларында" ежелгі грек математикасының барлық жетістіктерін жинақтап, оның дамуына негіз жаратты.

"Бастамалар" 13 кітаптан құралған болып, бұл шығармада эрамыздан бұрынғы V – IV ғасырлардағы грек математиктері шығармалары қайта өңделген. Шығармада 23 анықтама, 5 постулат және 9 аксиома берілген. Шығармада тік төртбұрышқа, квадратқа, шеңберге дұрыс анықтамалар берілген. Нүкте мен түзуге төмендегідей анықтамалар берілген: "Нүкте деп бөліктерге ие емес нәрсеге айтылады", "Түзу деп ені жоқ ұзындыққа айтылады".

"Бастамаларда" 9 аксиома – дәлелсіз қабылданған тұжырымдар баяндалған. Геометриялық салуды жүзеге асыру мүмкіндігін баяндайтын төмендегі бес математикалық тұжырым (постулат) айтылған:

I. Кез келген екі нүктеден тек бір ғана түзу өткізуге болады.

II. Түзудің кесіндісін шексіз жалғастыруға болады.

III. Кез келген центрден кез келген радиуста шеңбер салуға болады.

IV. Барлық тікбұрыштар өзара тең.

V. Бір жазықтықта жатқан екі түзуді үшінші

түзу қиып, бір жақты ішкі бұрыштар пайда етсе және бұрыштар екі тікбұрыштан кіші болса, осы түзулер жалғастырылғанда олардың қосындысы екі тікбұрыштан кіші болған бұрыштар жағында қиылысады.

Бұл шығарма үлкен және алыс мерзімді атаққа ие болды. Әсіресе, V постулат үлкен ғылыми пікірсайыстарға себеп болды. Оны төмендегідей сипаттауға болады: айталық, a және b түзулерді қиюшы қиып өткенде пайда болған ішкі айқыш бұрыштар α және β болсын *(2-сурет)*. Онда егер $\alpha+\beta<180°$ болса, a және b түзулер осы бұрыштар жатқан жақта қиылысады.

Көріп тұрғанындай, ол жоғарыдағы қысқа және айқын сипатталған 4 постулаттарға ұқсамайды. Ол көбірек теоремаға ұқсап кетеді. Дәл осы себепті оған постулат емес, теорема ретінде қарап, дәлелдемек болғандар өте көп болған. Постулатты дәлелдеу жолында оған тепе-тең бірқатар тұжырымдар пайда болды. Мысалы, ағылшын математигі *Ян Плейфер*дің (1748–1819) *параллельдік аксиомасы* солардың бірі: жазықтықтағы түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге бір ғана параллель түзу өткізуге болады.

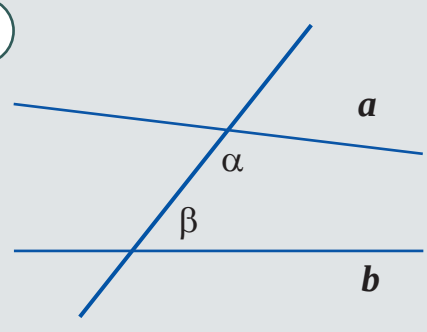
Математик, ақын, астраном және философ *Омар Хайям* да бұл мәселемен шұғылданған. Хайям "Эвклид кітабының кіріспесіндегі қиындықтарға түсініктемелер" атты шығармасында V постулатқа тоқталған. Ол Эвклидтің постулаты теорема екенін дәлелдеу үшін төменгі екі бұрышы тік және бүйір қабырғалары тең болған тік төртбұрышты қарастырған *(3-сурет)*. Бұл төртбұрыштардың төменгі екі бұрышы да тік болса, жоғарыдағы екі бұрышы да тік болуы қажет деген қорытындыға келген. Омар Һайям "Бір түзуге перпендикуляр болған екі түзу түзудің екі жағында да қиылыспайды", – дейді. Осымен Омар Хайям V постулат мәселесін айқындауға бір қадам қалған. Омар Хайямның бұл еңбектерінен хабарсыз болған Дж. Саккери (1667–1733) де V постулатпен шұғылданып, жоғарыдағы төртбұрышқа жүгінген. Геометрия негіздеріне бұл тік төртбұрыш *Хайям – Саккери* төртбұрышы атауымен енген.

Бұл проблеманы орыс математигі *Николай Иванович Лобачевский* (1792–1856) шешті және эвклидтік емес геометрияны жаратты.

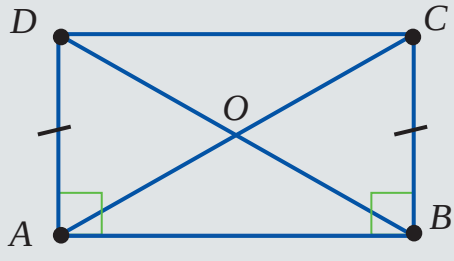


Омар Хайям (1048–1131)

2



3





Н.И. Лобачевчкий (1792–1856)

Лобачевский бірінші рет Эвклидтің V постулаты геометрияның басқа аксиомаларына байланысты емес екенін дәлелдеді. Бұл геометрия Эвклид геометриясынан түбегейлі ерекшеленетін еді. Бірақ ол логикалық қарама-қарсылыққа (қайшылыққа) кездесуі керек еді, өйткені – екі геометрияның бір уақытта бар болуы мүмкін емес. Соған қарамастан, Лобачевский жаңа нәтижелерді туындата бастады, олар логикалық қарама-қарсылыққа кездеспеді. Жаңа геометрия мен Эвклид геометриясындағы бірінші төрт топ аксиомалар дәлме-дәл түсті. Бұл аксиомалар топтары мен олардың нәтижелері *абсолют геометрия* деп атала бастады.

Бірақ эвклидтік емес (Лобачевский) геометрияның Эвклид геометриясынан айтарлықтай айырмашылығы бар. Мысалы, Лобачевский геометриясында үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы π-ден кіші, онда ұқсас немесе тең болмаған үшбұрыштар жоқ, берілген түзуден бірдей алыстаған нүктелердің жиыны түзу емес, қисық сызық саналады, тағы сол сияқтылар.

Эвклидтік емес геометрияны жаратуға венгер математигі *Янош Бойяи* (1802–1860) мен неміс математигі *Карл Фридрих Гаусс* (1777–1855) үлкен үлес қосқан. Сондай-ақ итальян математигі *Эудженио Белтрами* (1835–1900) мен неміс математигі *Бернхард Риман* (1826–1866) жаңа геометрияны сипаттауда үлкен істерді атқарды.

Эвклид бастаған аксиоматика белгілі бір мағынада неміс математигі *Давид Гильберт* (1862–1943) пен орыс математигі *Вениамин Федорович Каган* (1859–1953) еңбектерінде соңына жеткізілді.

Біздің заманымыздан бұрынғы V ғасырда геометрияның дамуында шешуші бетбұрыс болды. Ол Милет қаласында туып-өскен Фалес есімімен байланысты. Бастапқыда саудагер болған Фалес бос уақытында математикамен айналысты және ол математика тарихындағы ең үлкен жаңалықты ашты: Ол көптеген геометриялық заңдылықтарды тәжірибе арқылы емес, пайымдау (дәлелдеу) арқылы шығаруға болатынын анықтады. Осының негізінде ол бірқатар теоремаларды дәлелдеді. Біздің заманымызға дейінгі III ғасырға қарай геометрия өзінің аксиомалары (бастапқы қасиеттері) бар және басқа барлық қасиеттер (теоремалар) дәлелдеу арқылы бекітілетін ғылымға айналды. Фалестің пікіріне қарағанда, Евдокс, Эвклид және Архимед геометрияның дамуына үлкен үлес қосқан.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен тапсырмалар

1. Геометрия аксиомалары жүйесін баяндаған Эвклид туралы не білесің?

2. Эвклидтің "Бастамалар" шығармасы туралы әңгімелеп бер.

3. Анықтама не? Жазықтықтағы қайсы фигуралар негізгі (бастапқы) фигуралар ретінде анықтамасыз қабылданған?

4. Теорема мен аксиома бірінен-бірі несімен ерекшеленеді?

5. Планиметрия аксиомаларын санап өт және оларға түсініктеме бер.

6. Геометрия пәнінің құрылымы қандай?

7. Эвклидтің V постулаты не туралы және оны не үшін дәлелдеуді қалаған?

8. V постулатты дәлелдеуге әрекет жасаған ғалымдар мен олардың еңбектері туралы әңгімелеп бер.

9. Лобачевский жаңа геометрияның жаратылуына қандай үлес қосқан?

10. Эвклидтік емес геометрияны жаратқан ғалымдар мен олардың еңбектері туралы әңгімелеп бер.

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

1.1. Мектептегі геометрия курсында төмендегі геометриялық фигуралардың қайсысы анықтамасыз қабылданған (негізгі) және қайсыларына анықтама берілген?

a) нүкте b) бұрыш c) жазықтық

d) кесінді e) сәуле f) түзу

g) үшбұрыш h) сүйір бұрыш

1.2. Мектептегі геометрия курсында геометриялық фигуралардың келесі қасиеттерінің қайсылары аксиома (яғни дәлелдеусіз қабылданған), қайсылары теорема (яғни олардың дұрыстығы дәлелденуі шарт) ретінде берілген?

a) Кез келген екі нүкте арқылы бір ғана түзу өтеді.

b) Көршілес бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.

c) Үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.

d) Параллелограммның диагональдары қиылысу нүктесінде теңдей екіге бөлінеді.

e) Бір түзудегі кез келген үш нүктенің тек біреуі ғана қалған екеуінің арасында жатыр.

f) Жазықтықтағы түзуден тыс нүктеден осы түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады.

1.3. Келесі сөйлемдерді оқы. Сөйлем ақиқат болса, жанындағы ұяшыққа “+”, жалған болса “–” деп жаз.

1	Планиметрия жазықтықтағы, ал стереометрия кеңістіктегі геометриялық фигуралардың қасиеттерін зерттейді.	
2	Бастапқы (негізгі) геометриялық фигуралар анықтамасыз қабылданады.	
3	Жазықтықтағы түзуден тыс алынған нүктеден осы түзуге қалауынша параллель түзу жүргізуге болады.	
4	Эвклид өзінің “Бастамалар” атты еңбегінде геометрияға қатысты барлық жетістіктерін жинақтап, оның дамуына үлкен үлес қосты.	

1.4. Геометрияның дамуына кім қандай үлес қосты? Төмендегі кестенің бірінші бағанындағы ғалымдардың есімдеріне екінші бағандағы анықтамалардың сәйкесін таңда.

Омар Хайям	Эвклидтік емес геометрияны жаратты.
Н.И. Лобачевский	Эвклидтің V постулатын нақтылау бойынша зерттеулер жүргізді.
Бернхард Риман	Геометрияны ғылым ретінде сипаттады.
Эвклид	Эвклидтік емес геометрияны сипаттауда үлкен жұмыс атқарды.

1.5. Төмендегі растаулардың қайсысын Эвклид V постулат ретінде сипаттаған? Олардың қайсысы осы постулатқа тең күшке ие болып саналады?

A. Бір жазықтықта жатқан екі түзуді үшінші түзу қиып, бір жақты ішкі бұрыштар пайда етсе және бұрыштардың қосындысы екі тікбұрыштан кіші болса, осы түзулер жалғастырылғанда, олардың қосындысы екі тік бұрыштан кіші болған бұрыштар жағында қиылысады.

B. a және b түзулерді қиюшы қиып өткенде пайда болған ішкі бір жақты α және β бұрыштар үшін $\alpha+\beta<180°$ болса, онда берілген түзулер осы бұрыштар жатқан жақта қиылысады.

C. Жазықтықта берілген түзуде жатпайтын нүкте арқылы осы түзуге тек бір ғана параллель жүргізуге болады.

D. Кез келген екі нүкте арқылы тек бір ғана түзу жүргізуге болады.

1.6*. “Хайям-Саккери төртбұрышы”, яғни төменгі табанындағы екі бұрышы тік және бүйір қабырғалары тең болған төртбұрыш *(3-сурет)* берілген. Осы төртбұрыштың жоғарғыдағы екі бұрышы да тік болатынын параллельдік аксиомасын қолданбай дәлелдеуге әрекет етіп көр. Мұның лажы бар ма? Неге?

2 ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕР ЖӘНЕ ОЛАРДЫ ШЕШУ ТӘСІЛДЕРІ

Жоғарыда айтылғанындай, геометрияның ең ғажап ерекшелігі – бұрын үйренілген, дұрыстығы дәлелденген қасиеттерден логикалық пікірлеу арқылы жаңа қасиеттерді туындатуға болады. Осы ғажап мүмкіндікті пайдаланып, қалған қасиеттер теоремалар немесе есептер көрінісінде өрнектелген және акисомалар мен осы кезге дейін дұрыстығы дәлелденген қасиеттерге негізделіп, логикалық тұжырымдар арқылы дәлелденген. Осылайша математикалық немесе геометриялық есептер пайда болған.

Математикалық есепте қандай да бір нәрсе (шарттар) берілген болады. Оларды пайдаланып, сол нәрсені табу (есептеу) немесе дәлелдеу, я болмаса салу талап етіледі. Қойылған талапты орындау есепті шешуді білдіреді.

Геометриялық есептер қойылған талапқа орай есептеуге, дәлелдеуге, қолдануға және салуға қатысты есептер болып бөлінеді.

Математикалық есепті шешу үшін тек теорияны білу жеткілікті емес. Есепті шешу дағдысы мен тәжірибесіне де ие болу қажет. Мұндай дағдыға өз кезегінде қарапайым есептерден бастап, барған сайын күрделірек есептерді шешу арқылы қол жеткізіледі. Сондай-ақ есептерді шешудің түрлі тәсілдері де бар болып, оларды тек көп есептерді шешу арқылы ғана игеруге болады. Әрбір тәсіл белгілі бір топқа тиісті есептерді шешу үшін қолданылады. Қанша көп тәсіл иегерілсе, соншама есеп шешу дағдысы қалыптасады.

Төменде геометриялық есептерді шешудің кейбір маңызды тәсілдеріне тоқталамыз.

Есеп шешу тәсілдері құрылысына орай, синтетикалық, аналитикалық, кері жорамалдау, тағы басқа да түрлерге бөлінеді. Ал математикалық аппараттың қолданылуына орай, алгебралық, векторлық, координаталық, аудандар тәсілі, ұқсастық тәсілі, геометриялық алмастырулар сияқты түрлерге бөлінеді.

Синтетикалық тәсілде есеп шартында берілгендерді пайдаланып, тұжырым жасау арқылы логикалық пікірлер тізбегі жасалады. Тұжырымдар тізбегінің ең соңғы бөлігі есеп талабымен дәлме-дәл түскенше жалғасады.

1-мысал. Тік төртбұрыш бұрышының биссектрисасы оның қабырғасын 7 $см$ және 9 $см$ ұзындықтағы кесінділерге бөледі *(1-сурет)*. Тік төртбұрыштың периметрін тап.

Шешуі. $ABCD$ – тік төртбұрыш, AK биссектриса,

Аксиоматикалық құрылым тұрғысынан сан алуан геометриялар бар және олардың барлығында үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең емес. Лобачевский геометриясында үшбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-тан кіші, ал Риман геометриясында 180°-тан үлкен.

$K \in BC$, $BK = 7\ cm$, $KC = 9\ cm$ (немесе $BK = 9\ cm$, $KC = 7\ cm$) болсын.

1. $BC \parallel AD$ және AK қиюшы болғандықтан: $\angle 1 = \angle 2$ (1)

болады, өйткені бұл бұрыштар ішкі айқыш бұрыштар.

2. AK – биссектриса: $\angle 2 = \angle 3$ (2)

3. Онда (1) мен (2)-ге орай $\angle 1 = \angle 3$;

4. Бұл жағдайда ABK теңбүйірлі үшбұрыш және $AB = BK$

5. Осы нәтижені пайдаланып, есептеуді орындаймыз:

1-жағдайда: $AB = BK = 7\ cm$.

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7 + 16) = 46\ (cm)$.

2-жағдайда: $AB = BK = 9\ cm$.

$P = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (9 + 16) = 50\ (cm)$.

Бұл есеп тірек есептердің қатарына енеді, өйткені көптеген есептер дәл осы идеяның айналасына құрылады. Параллелограмм мен трапеция бұрышының биссектрисасы осы фигуралар жазықтығынан теңбүйірлі үшбұрышты қиып алады. Мұндай тірек фактілерді әрдайым есте сақтау қажет. Олар басқа есептерді шешетін кезде өте пайдалы болады.

Аналитикалық тәсілде теореманың (есептің) қорытынды бөлігінен туындап, бұрыннан белгілі растауларды пайдаланып, тұжырым жасау арқылы логикалық пікірлеу тізбегі жасалады. Тұжырымдар тізбегінің ең соңғы бөлігі есеп шартының нәтижесі екенін анықтағанға дейін жалғасады.

2-мысал. Кез келген төртбұрыштың қабырғаларының центрі параллелограмның төбелері болуын дәлелде.

Дәлелдеу. Мысалы, $ABCD$ – төрбұрыш *(2-сурет)*, $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ болсын.

Төртбұрыштың AC және BD диагоналдарын жүргіземіз.

1. $\triangle ABC$ да KL центрлік түзу: $KL \parallel AC$ (1);

2. $\triangle ADC$ да PQ PQ центрлік түзу: $AC \parallel PQ$ (2);

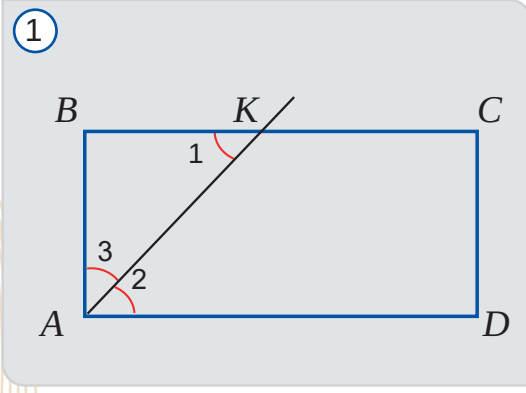
3. (1) мен (2)-ден: $KL \parallel PQ$ (3);

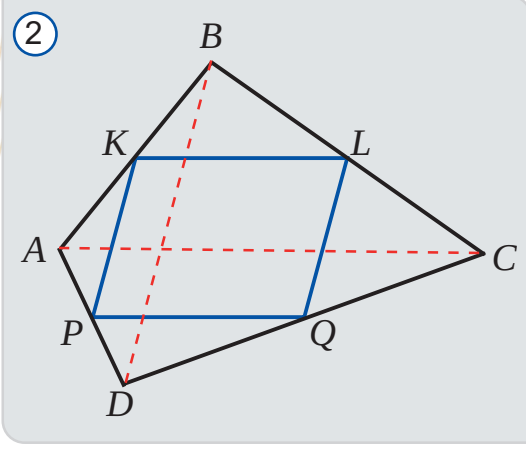
4. Жоғарыдағыға ұқсас: $KP \parallel LQ$ (4);

5. (3) пен (4)-тен: $KLQP$ – параллелограмм.

Жоғарыда қарастырылған синтетикалық және аналитикалық тәсілдер дұрыс тәсілдер деп те аталады. Есепті дұрыс тәсілдермен шешкенде, алдымен есептің мазмұны талданады. Талдау нәтижесіне орай тәсіл таңдалады.

Одан соң сурет көрінісіндегі есепті шешу





моделі (сызбасы) құрастырылады және сызбаның үстінде тұжырым жасалады. Осылай тұжырым жасалып, есептің шартынан қорытынды бөліміне қарай барады.

Есепті шешудің кері тәсілі де бар. Онымен көп рет кездескенбіз. Ол *кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілі* деп аталады. Осы тәсілді қолдану алгоритмін қарастырайық.

Кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілін қолдану алгоритмі

Теорема (дұрыс растау)	Егер A орындалса, B орындалады. ***(A және B – қандай да бір пікірлер)***
Дәлел.	
Кері жорамалдау:	Теоремада келтірілген растауға кері жорамал жасаймыз, яғни теореманың шарты орындалып, бірақ қорытындысы орындалмасын: ***Егер A орындалса, B орындалмайды.***
Тұжырым жасау:	Дұрыстығы бұрын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомаларға сүйеніп логикалық тұжырым жасаймыз.
Қайшылыққа тірелу:	Дұрыстығы бұрын дәлелденген теорема немесе қабылданған аксиомалардың біріне қайшы болған растауға кездесеміз.
Қорытынды шығару:	Демек, жорамалымыз қате, яғни берілген теорема дұрыс екен.
Теорема дәлелденді.	

3-мысал. Егер екі түзудің әрбірі үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель болады.

Мысалы, a және b түзулері берілген болып, олардың әрбірі үшінші c түзуге параллель болсын. Теореманы кері жорамалдау тәсілімен дәлелдейміз.

Дәлелдеу. Кері жорамал жасаймыз: a және b түзулерінің әрбірі үшінші c түзуге параллель болсын, бірақ олар өзара параллель болмасын, яғни белгілі бір A нүктеде қиылысатын болсын *(3-суретке қара)*.

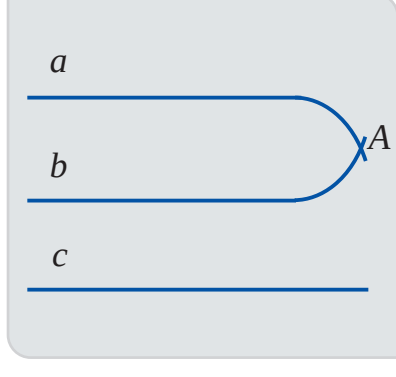
Онда A нүкте арқылы с түзуге екі – a және b параллель түзулер өтеді. Бұл параллельдік аксиомасына қайшы. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті. Яғни a және b түзулерінің әрбірі үшінші – c түзуге параллель болса, олар өзара параллель болады.

Теорема дәлелденді.

Бұл тәсіл төмендегі логика заңына негізделген: бір-біріне қайшы екі растаудың тек біреуі ғана ақиқат, екіншісі жалған болады, үшінші жағдайдың болуы мүмкін емес.

Енді геометриялық есептерді шешудің басқа да тәсілдеріне тоқталайық.

3



Э вклид геометриясында берілген түзудің бойында жатпайтын кез келген нүкте арқылы тек бір ғана түзу өткізуге болады. Бірақ Лобачевскийдің геометриясында кем дегенде екеуін өткізуге болады.

Алгебралық тәсіл

Геометриялық есепті алгебралық тәсілмен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) есеп мазмұнын талдау және оның сызба моделін құрастыру;

2) белгісізді әріппен белгілеу;

3) есеп шартын өрнектейтін теңдеу немесе теңдеулер жүйесін құрастыру;

4) құрылған теңдеу немесе теңдеулер жүйесін шешу;

5) табылған шешімді талдау;

6) жауапты жазу.

4-мысал. Тікбұрышты үшбұрыштың периметрі 36 cm-ге тең. Гипотенузаның катетке қатынасы 5:3. Үшбұрыштың қабырғаларын тап.

$\triangle ABC$ берілген болып, онда $\angle\angle C = 90°$, $P = 36\ cm$, $AB : AC = 5 : 3$ болсын.

Шешуі. Пропорциональдық коэффициентін k-мен белгілейміз.

Онда $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Пифагор теоремасына орай: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ немесе $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Бұдан, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$.

Шартқа орай:

$P = 36\ cm$; $AB + AC + BC + P$; $5k + 3k + 4k = 36$; $k = 3$; $AB = 5k = 15\ (cm)$, $AC = 3k = 9\ (cm)$, $BC = 4k = 12\ (cm)$.

Жауабы: $15\ cm$, $9\ cm$, $12\ cm$.

Аудандар тәсілі

Кейбір геометриялық есептерді шешуде аудандарды есептеу формулаларын пайдалану күтілген нәтижені жылдам береді. Бұл жағдайда табу талап етілген белгісіз есептегі жәрдемші фигуралардың ауданын теңестіру нәтижесінде туындаған теңдеу арқылы табылады. Мұны төмендегі мысалда көреміз.

5-мысал. Үшбұрыштың қабырғалары $13\ cm$, $14\ cm$ және $15\ cm$. Ұзындығы 14-ке тең қабырғаға түсірілген биіктікті тап.

Шешуі. Мысалы, $\triangle ABC$ берілген болып, онда $a < b$ және $b < c$, яғни $a = 13\ cm$, $b = 14\ cm$, $c = 15\ cm$ және h_b – ізделінген биіктік болсын.

Герон формуласымен: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84\ \ (cm^2)$

Басқа формула бойынша: $S_\Delta = \frac{1}{2} b h_b$ -ға иеміз.

Онда $\frac{1}{2}bh_b = 84$ немесе $h_b = \frac{84}{2b} = \frac{84}{2 \cdot 14} = 12$,

h_b = 12 (cm).

Жауабы: 12 cm.

Векторлар тәсілі

Геометриялық есепті векторлар тәсілімен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) Есепті векторлар тіліне аудару, яғни есептегі кейбір шамаларға вектор ретінде қарап, оларға қатысты векторлық теңдеулерді құру;

2) Векторлардың белгілі қасиеттерін пайдаланып, векторлық теңдеулердің пішінін алмастыру және белгісізді табу;

3) Векторлар тілінен геометрия тіліне қайту;

4) Жауапты жазу.

Векторлар тәсілімен төмендегі геометриялық есептерді шешу мақсатқа сай болады:

a) түзулердің (кесінділердің) параллельдігін анықтау (дәлелдеу);

b) кесінділерді берілген қатынаста бөлу;

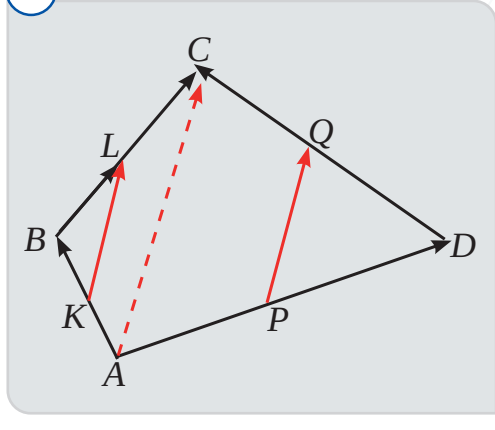
c) үш нүктенің бір түзудің бойында жатқанын көрсету;

d) төртбұрыштың параллелограмм (ромб, трапеция, квадрат, тік төртбұрыш) екенін көрсету.

6-мысал. Дөңес төртбұрыштың қабырғаларының центрлері параллелограммның төбелері болуын дәлелде.

Мысалы. $ABCD$ төртбұрыш берілген, онда $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ болсын *(4-сурет).*

4



Дәлелдеу. 1. Берілген кесінділерді сәйкесінше $AB, AC, BC, DC, AD, KL, PQ, BL, KB$ векторлармен алмастырып, есепті вектор тіліне өткіземіз.

2. Векторларды қосудың үшбұрыш ережесін пайдаланамыз:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},\ \overline{KB} + \overline{BL} = \overline{KL},\ \overline{KB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$$

және $\overline{BL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ екенін ескеріп,

$$\overline{KL} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Дәл осылайша, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ болады.

3. $KL = PQ$, яғни бұл векторлар бірдей бағытталған және ұзындығы тең. Бұл $KLQP$ төртбұрыштың паралеллограмм екенін білдіреді.

Координаталар тәсілі

Геометриялық есепті координаталар тәсілімен шешкен кезде төмендегі алгоритм негізінде жұмыс жасау мақсатқа сай болады:

1) есеп мазмұнын талдау және оны координаталар тіліне аудару;

2) өрнектердің пішінін алмастыру және мәнін есептеу;

3) нәтижені геометрия тіліне аудару;

4) жауапты жазу.

Координаталар тәсілімен төмендегі геометриялық есептерді шешу мақсатқа сай: а) нүктелердің геометриялық орнын табу; b) геометриялық фигуралардың сызықты элементтерінің арасындағы байланысты табу.

Есепті координаталар тәсілімен шешкенде, координаталардың басын дұрыс таңдау маңызды. Берілген фигураны координаталар жазықтығына орналастырғанда мүмкіндігінше нүктелердің координаталары нөлге немесе бірдей санға тең болсын.

7-мысал. Диагональдары тең параллелограммның тік төртбұрыш болатынын дәлелде.

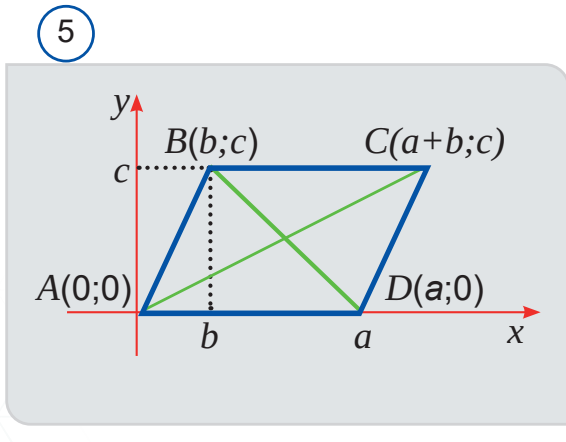
Дәлелдеу. Координаталар жүйесін параллелограммның төбелері төмендегі координаталарға ие болатындай етіп таңдаймыз (5-суретке қара):

$A(0; 0), B(b; c), C(a+b; c), D(a; 0),$

мұнда $a > 0, b \geq 0, c > 0.$

A, B, C, D *нүктелердің арасындағы қашықтықты олардың координаталары арқылы өрнектейміз:*

5



$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}$$

$$BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$(a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2$$

Бұдан, 4ab = 0.

Бірақ $a > 0$, *онда* $b = 0$. *Ал бұл, өз кезегінде,* $B\,(b; c)$ *нүкте* Oy *осінде жататынын білдіреді. Сондықтан* BAD *тікбұрыш болады.*

Бұдан $ABCD$ *параллелограмның тік төртбұрыш екені белгілі болады.*

Геометриялық алмастырулар тәсілі

Геометриялық алмастырулар тәсіліне бұру, симметриялық бейнелеу, параллель көшіру, гомотетия сияқты алмастыруға сүйенетін тәсілдер енеді. Геометриялық алмастырулардың көмегімен есепті шешу үдерісінде берілген геометриялық фигуралармен бірге жаңа, қолданылған геометриялық алмастыру арқылы жасалған фигуралар да қарастырылады. Жаңа фигуралардың қасиеттері анықталып, берілген фигураға өткізіледі. Соң есепті шешу жолы табылады. Жоғарыда айтылған, геометриялық фигуралардың қасиеттеріне негізделген барлық тәсілдер бір ғана ортақ атаумен *геометриялық тәсілдер* деп айтылады.

Маңызды ескерту!

Бұл бөлімдегі материалдар планиметрияны қайталау үшін берілген. Қайталау үшін есептер кересінен де көп берілген. Олардың барлығын сыныпта қарастыруға уақыт жетпеуі мүмкін. Соған қарамастан, оларды өз бетіңше шешуіне кеңес береміз. Бұл сендердің 10-сыныпта геометрияны үйренуді табысты жалғастыруларыңа негіз болады.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар

1. *Математикалық есеп дегенде нені түсінесің?*
2. *Геометриялық есептің қандай түрлерін білесің?*
3. *Есепті шешудің қандай түрлерін білесің?*
4. *Геометриялық есепті шешудің синтетикалық, аналитикалық тәсілдері туралы әңгімелеп бер.*
5. *Есепті шешудің дұрыс және кері тәсілдері туралы не білесің?*
6. *Кері жорамал жасап дәлелдеу тәсілінің маңызы неде?*
7. *Геометриялық есепті алгебралық тәсілде шешу алгоритмін түсіндір.*
8. *Геометриялық есепті векторлар тәсілінде шешу алгоритмін түсіндіріп бер.*
9. *Векторлар тәсілімен әдетте қандай есептер шешіледі?*
10. *Геометриялық есепті координаталар тәсілінде шешу алгоритмін түсіндіріп бер.*
11. *Координаталар тәсілімен әдетте қандай есептер шешіледі?*
12. *Геометриялық алмастырулар тәсілін түсіндіріп бер.*

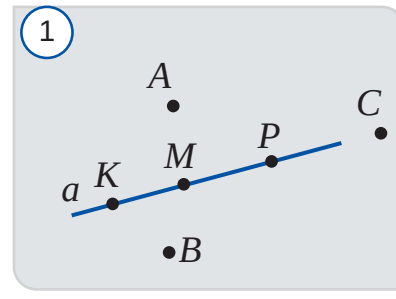


Атақты ғалым, өнертапқыш Архимед геометрияны әлемдегі ең маңызды ғылым деп есептеген. Ол геометрия дүниенің барлық ережелерін түсіндіре алады, деп сенген және өзінің геометриялық білімінің арқасында өз заманынан озық болған көптеген механизмдерді ойлап тапқан.

Практикалық жаттығулар

2.1. 1-суретті пайдаланып, дұрыс математикалық растауды тап.

A) $A \in a$ B) $K \notin a$ C) $C \in a$ D) $M \notin a$



2.2. Бір түзуде A, B, C нүктелер таңдалған, $AB = 2{,}7\ dm$, $BC = 1{,}3\ dm$, $AC = 1{,}3\ dm$. Бір нүктенің қалған екеуінің арасында жататыны туралы дұрыс растауды тап.

A) $A \in BC$ B) $B \in AC$ C) $C \in AB$ D) $C \notin AB$.

2.3. AC кесінді BC кесіндіден үш есе ұзын. Бұл қатынас көрсетілген екі пунктті анықта.

A) $AC = 3BC$ B) $3AC = BC$ C) $AC + BC = 4AC$ D) $BC = \frac{1}{3}AC$

2.4. AC кесінді BC кесіндіден 2 cm-ге қысқа. Осы қатынас көрсетілген екі пунктті анықта.

A) $AC - BC = 3\ cm;$ B) $BC - AC = 2\ cm$

C) $AC - 2\ cm = BC;$ D) $AC + 2\ cm = BC$

2.5. A, B, C нүктелерінің қайсы бірі қалған екеуінің арасында жатады?

A) $AC = 3, AB = 8, BC = 5$ D) $AC = 9\ mm, BC = 21\ mm, AB = 12\ mm$

B) $AC=7, BC = 12, AB= 19$ E) $AC = 21\ m, BC = 37\ m, AB = 16\ m$

C) $AC=27\ m, BC=5\ m, AB=22\ m$ F) $BC=18\ dm, AC=33\ dm, AB =15\ dm$

2.6. O нүкте AB кесіндіні ұзындығы 18 cm және 14 cm болған бөліктерге бөледі. Егер K және M нүктелер AO және BO кесінділердің ортасы болса, KM кесіндінің ұзындығын тап.

2.7. Ұзындығы 48 dm болған кесіндіде O нүкте белгіленген. Егер $AO : BO = 3 : 5$ болса, AO және BO кесінділердің ұзындықтарын тап.

2.8. A, B, C, M нүктелер бір түзуде жатады және $AC = 12\ m$, $CB = 5\ m$, M болса AC кесіндінің ортасы. MB кесіндінің ұзындығын тап.

2.9. $\angle KOC = 153^o$. OM сәуле бұрыш қабырғалары арасынан өтеді. Егер $\angle KOM = 2MOC$ болған жағдайда, KOM және MOC бұрыштарын анықта.

2.10*. Ұзындығы 75 cm болған AB кесіндіде M және K нүктелер белгіленген. Бұнда $N \in AK, K \in NB$. Сонымен қатар, AN кесінді NK кесіндіден 5 cm ұзын, $KB - AN$-дан 2 есе ұзын. Пайда болған 5 кесіндінің ұзындықтарын тап.

2.11*. Бұрыш қабырғалары арасынан өткен сәуле оны екі бұрышқа бөледі. Бұл бұрыштардың биссектрисалары арасындағы бұрыш берілген бұрыштан 2 есе кіші екенін дәлелде.

2.12*. a, b, c және d түзулер берілген. Оладың әр үшеуі де бір нүктеде қиылысады. Барлық түзулердің бір нүктеден өтетінін дәлелде.

2.13. Екі түзудің қиылысуынан төрт бұрыш пайда болады *(2-сурет)*. Төменде көрсетілген кестедегі әрбір шартқа (A – E) одан туындайтын қорытындыны (1 – 5) сәйкестендір.

A) $\angle 1 = \angle 3$ 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^o$

B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^o$ 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^o$

C) $\angle 1 = \angle 2 + 90^o$ 3) $\angle 1$ және $\angle 4$ – сыбайлас

D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^o$ 4) $\angle 1$ және $\angle 3$ – сүйір

E) $\angle 3 = 90^o$. 5) $\angle 2$ және $\angle 4$ – вертикаль

A	
B	
C	
D	
E	

2.14. Төменде кейбір бұрыштардың градустық өлшемдері (1–7) берілген. Олардың қайсы жұптары сыбайлас болуы мүмкін екенін анықта.

1) 18°; 2) 72°; 3) 128°; 4) 62°; 5) 28° ; 6) 108°; 7) 38°.

A) 1 және 2; B) 2 және 6; C) 3 және 4; D) 1 және 7; E) 2 және 5.

2.15. Егер 2-суретте $\angle 1 = \angle 7$ болса, дұрыс растауды тап.

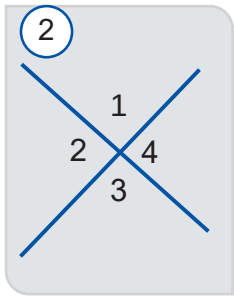
A) $a \parallel b$; *B)* $a \perp b$; *C)* a және b қиылыспайды;

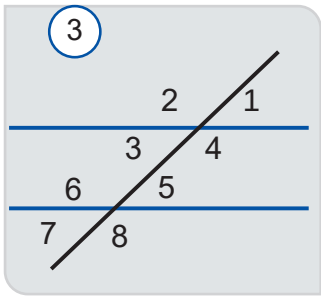
2.16. Егер 3-суретте $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 2 = 72^o$ болса, $\angle 3 = ?$

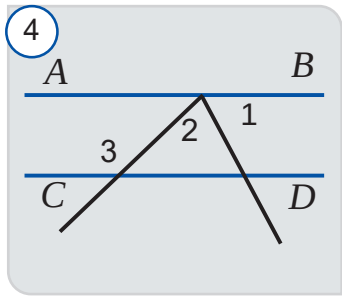
A) 72° B) 144° C) 108° D) 36° E) 124°

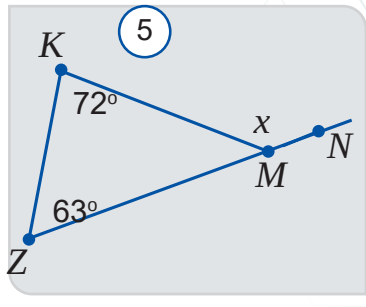
2.17. Егер теңбүйірлі үшбұрыш бұрыштары 3 : 4 : 3 қатынаста болса, оның төбесінің биссектрисасы мен бүйір қабырғасы арасындағы бұрышты тап.

A) 18° B) 36° C) 72° D) 60° E) 30°









2.18. 5-суретте бейнеленген KMZ үшбұрыш бұрышының сыртындағы KMN бұрыштың градустық бұрыштарын тап.

A) 135°; B) 108°; C) 45°; D) 125°; E) 117°.

2.19. Дұрыс теңдікті тап *(6-сурет)*.

A) $\triangle ABO = \triangle OCD$ B) $BA = CD$ C) $\triangle ABO = \triangle COD$

D) $\angle AOB = \angle DOC$ E) $\angle BAO = \angle DCO$ F) $\angle BAO = \angle CDO$

2.20. 7-суреттегі BOC үшбұрыш бұрыштарын тап.

A) 48°, 48°, 84° B) 24°, 132°, 24°

C) 132°, 48°, 48° D) 42°, 90°, 48° E) 48°, 32°, 20°

2.21. Әрбір алтыбұрыштың периметріне (A–E) оған сырттай сызылған шеңбер радиусының тиістісін (1–5) сәйкестендіріп, кестені толтыр.

A) $P = 42$ *cm* 1) $R = 2$ *cm*

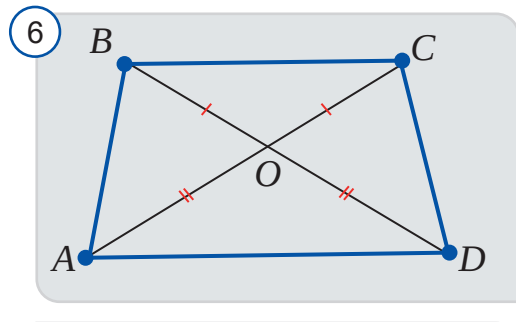
B) $P = 12$ *cm* 2) $R = 8$ *cm*

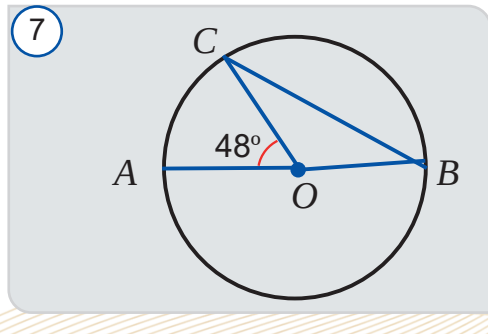
C) $P = 84$ *cm* 3) $R = 6$ *cm*

D) $P = 48$ *cm* 4) $R = 14$ *cm*

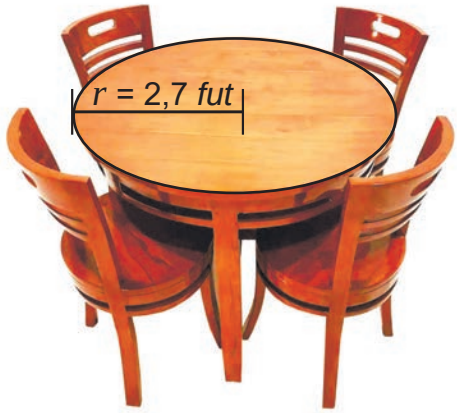
E) $P = 36$ *cm* 5) $R = 7$ *cm*

A	
B	
C	
D	
E	

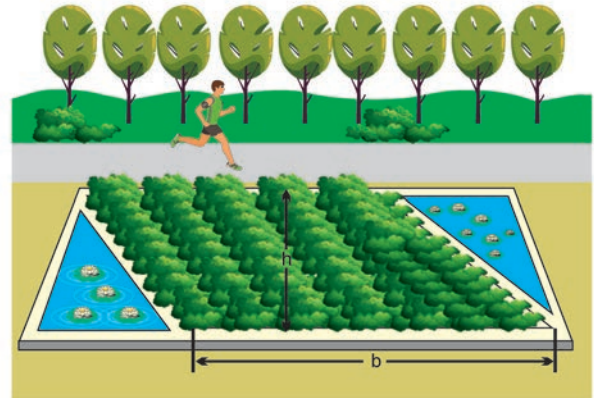




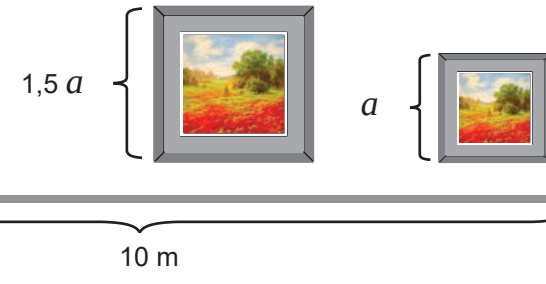
2.22. Шеңбер түріндегі үстел бетінің ауданын тап *(1 fut = 30,48 cm)*.



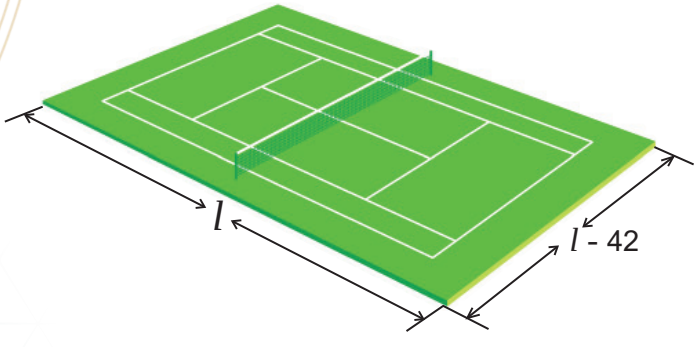
2.23. Егер $h = 3\ m$ және $b = 6\ m$ болса, суреттегі гүлбақтың ауданын тап.

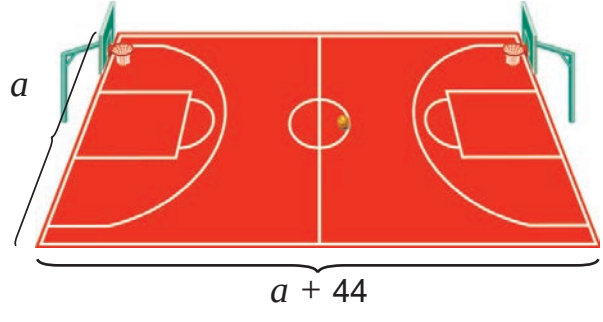


2.24. Квадрат түріндегі терезе рамкалары үшін 10 *m* ағаш жұмсалса, әрбір рамканың өлшемін тап.

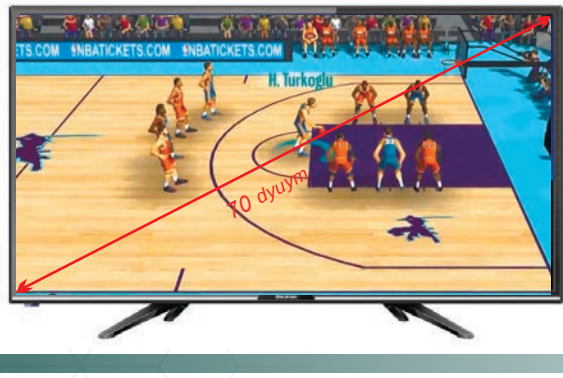


2.25. Баскетбол алаңының периметрі 288 *fut*, ал бойы енінен 44 *fut* ұзын болса, алаңның өлшемдерін метрмен тап *(1 fut = 30,48 cm)*.









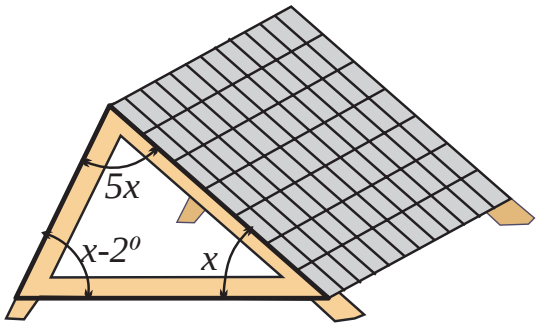
2.26. Теннис кортының периметрі 288 *fut*, бойы енінен 42 *fut* ұзын болса, алаңның өлшемдерін метрмен тап.
(1 fut = 30,48 cm).

2.27. Автомобиль тұрағындағы теңбүйірлі үшбұрыш пішіндегі алаңның ауданы 288 fut^2 және табаны 16 *fut* болса, оның биіктігін тап *(1 fut = 30,48 cm)*.

2.28. Суреттегі *HD* теледидар экранының бойы және ені ұзындығының қатынасы 16 : 9 түрінде болады. Диагоналы 70 дюйм болған *HD* теледидардың өлшемдерін *cm*-лерде тап.
(1 dyuym = 2,54 cm).

2.29. Суреттегі үй төбесінің бұрыштарын тап.

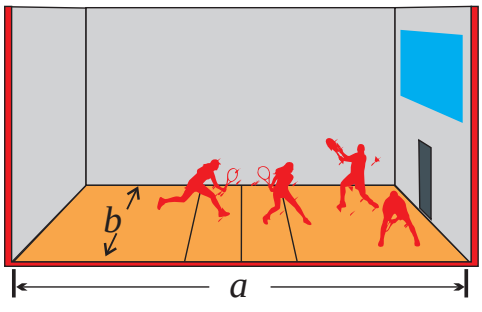
a)

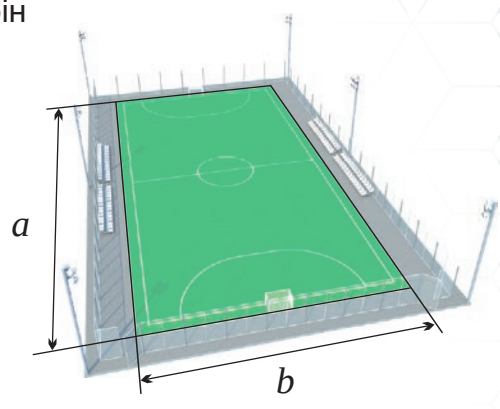


b)



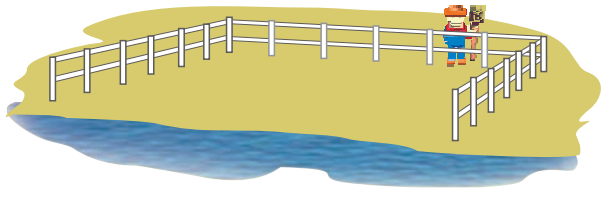
2.30. Жабық спорт алының периметрі *120 fut*, бойы енінен екі есе ұзын болса, алаңның өлшемдерін метрмен анықта. *(1 fut = 30,48 cm).*





2.31. Футбол алаңының периметрі 340 m, бойы енінен 50 m ұзын болса, алаңның өлшемдерін тап.

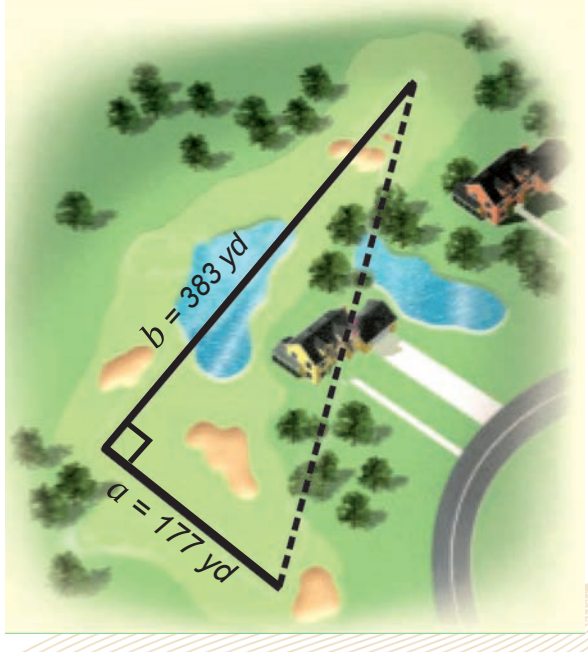
2.32. Фермер өзен бойындағы тік төртбұрыш пішініндегі алаңды қоршаумен орап алу ниетінде. 100 m ұзындықтағы қоршау қандай өлшемдегі ең үлкен ауданды алаңды орап алуы мүмкін?



2.33. Шеңбер түріндегі екі гүлбақтың ауданының қосындысы $90\pi\ m^2$, айырмасы $72\pi\ m^2$. Әрбір гүлбақтың радиусын тап.

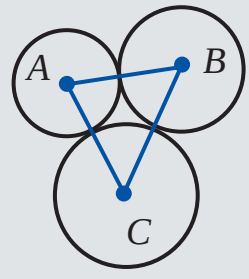


2.34. Гольф алаңының сызбасы берілген. Егер ойыншы бірінші соққыда допты a қашықтыққа, бірінші соққы бағытына перпендикуляр екінші соққыда b қашықтыққа алыстатқан болса, гольф добы бастапқы күйінен қанша қашықтыққа барып түскен?



3 ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА ҚАТЫСТЫ ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР

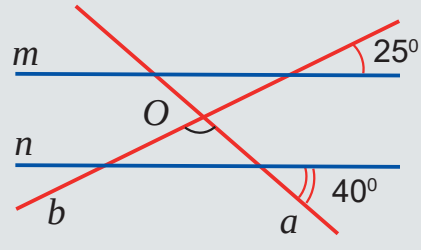
1



3.1. Үшбұрыштың төбелері, радиустары 6 $см$, 7 $см$ және 8 $см$ болған және жұбымен ұрынатын үш шеңбердің центрлерінде жатыр *(1-сурет)*. Осы үшбұрыштың периметрін тап.

A) 28 $см$ B) 29 $см$ C) 27 $см$ D) 42 $см$ E) 21 $см$

2



3.2. Квадраттың қабырғасы 20-ға тең. Осы квадратқа іштей сызылған шеңбердің радиусын тап.

A) 20 B) $10\sqrt{2}$ C) 10 D) $5\sqrt{2}$ E) 5

3.3. Трапецияның бір табаны екіншісіне 8 $см$-ге ұзын, ал ценр сызығы 10 $см$-ге тең. Трапецияның кіші табанын тап.

A) 2 $см$ B) 4 $см$ C) 6 $см$ D) 8 $см$ E) 10 $см$

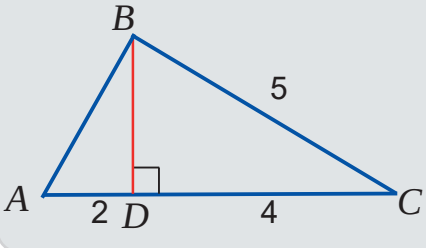
3.4. Диагональдары 10 $м$ және 36 $м$ болған ромбтың ауданын тап.

A) 90 $м^2$ B) 92 $м^2$ C) 180 $м^2$ D) *184* $м^2$ E) *36* $м^2$

3.5. 2-суреттегі m және n түзулер өзара параллель болса, a және b түзулердің арасындағы бұрышты тап.

A) 50° B) 80° C) 100° D) 65° E) 115°

3



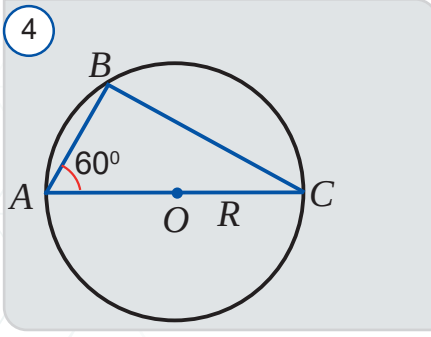
3.6. 3-суреттегі үшбұрыштың ауданын тап.

A) 6; B) 9 ; C) 12; D) 24; E) 30.

3.7. 4-суреттегі R радиусты шеңберге іштей сызылған ABC үшбұрыштың BC қабырғасын тап.

A) R B) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $R\frac{\sqrt{2}}{2}$

4



3.8. Ауданы 9π $см^2$ болған дөңгелекті орап тұрған шеңбердің ұзындығын тап.

A) 3π $см$; B) 9π $см$; C) 12π $см$; D) 18π $см$; E) 6π $см$.

3.9. Қабырғасы 6 $см$-ге тең квадратқа іштей сызылған дөңгелек ауданын тап.

A) 9 π $см^2$; B) 144 π $см^2$; C) 36 π $см^2$; D) 72π $см^2$; E) 18 π $см^2$.

3.10. Квадратқа іштей сызылған шеңбер радиусы 5 $см$. Квадраттың диагоналын тап.

A) $5\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $5\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $10\sqrt{3}$ E) $20\sqrt{3}$

3.11. Ішкі бұрыштарының қосындысы 1600° болған тұрақты көпбұрыштың қабырғаларының санын тап.

A) 12; B) 14; C) 16; D) 18; E) 20.

3.12. Диагоналдары 24 $см$ және 18 $см$ болған ромбтың периметрін тап.

A) *120 см;* B) *60 см;* C) *84 см;* D) *108 см;* E) *144 см.*

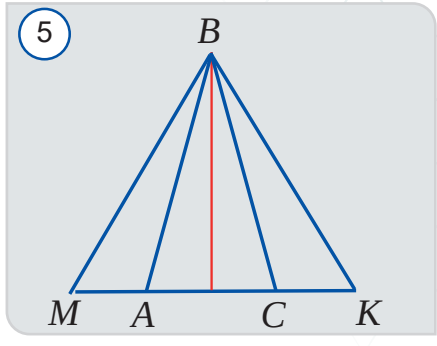
3.13. Параллелограмның периметрі 48 $дм$ болып, бір қабырғасы екіншісінен 8 $дм$-ге ұзын. Параллелограмның кіші қабырғасын тап.

A) 8 dm; *B) 16 dm;* *C) 6 dm;* *D) 12 dm;* *E) 10 dm.*

3.14. 5-суреттегі ABC теңбүйірлі үшбұрыштың сыртына екі тең ABM және CBK бұрыштар салынды. Осы бұрыштар қабырғалары AC қабырғаны, сәйкесінше, M және K нүктелерде қиып өтеді. MBC және KBA үшбұрыштардың теңдігін дәлелде.

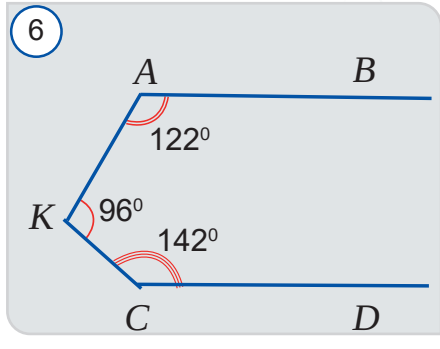
3.15. 6-суретте бейнеленген AB және CD түзулердің өзара орналасуын анықта. Жауабыңды негіздеп бер.

3.16. 7-суреттегі ABC үшбұрышқа іштей шеңбер сызылған. Шеңбердің N және Z түйісу нүктелері үшбұрыштың AB және AC қабырғаларын айырмасына сәйкес 3 cm және 4 cm болған кесінділерге бөледі $(AN > NB, AZ > ZC)$. Егер үшбұрыштың периметрі 28 cm болса, оның қабырғаларын тап.



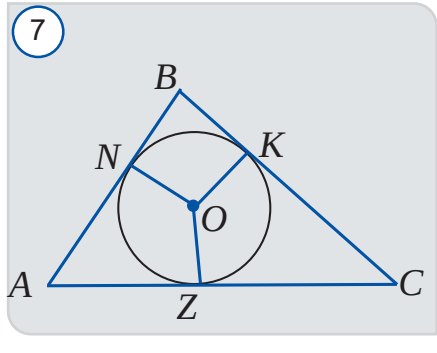
3.17. Теңқабырғалы үшбұрышқа радиусы $3\sqrt{3}$ болған шеңбер сырттай сызылған. Іштей сызылған шеңбердің радиусын тап.

3.18. Табанындағы бұрышы 30° болған теңбүйірлі трапецияға шеңбер сырттай сызылған. Трапецияның биіктігі 7 cm-ге тең болса, оның центр сызығын тап.



3.19. Табанындағы сыртқы бұрышы 150° болған теңбүйірлі трапеция шеңберге сырттай сызылған. Трапецияның центрлік сызығы $3\sqrt{3}$ ке тең болса, оның биіктігін тап.

3.20. Табаны 16 cm және осы табанға түсірілген биіктігі 15 cm болған теңбүйірлі үшбұрыштың бүйір қабырғасын тап.



3.21. ABC үшбұрыштың AO биіктігі оның BC қабырғасын BO және OC кесінділерге бөледі. Егер $AB = 10\sqrt{2}\ cm$, $AC = 26\ cm$ және $B = 45^{o}$ болса, OC кесіндінің ұзындығын тап.

3.22. Ромбтың қабырғасы 10 cm, диагоналдарының бірі 12 cm. Ромбқа іштей сызылған шеңбердің радиусын тап.

3.23. Радиусы 15 cm болған шеңберде оның центрінен 12 cm қашықтықта болған ватар өткізілген. Ватардың ұзындығын тап.

3.24. Шеңберде екі қиылысушы ватар өткізілген. Олардың бірі қиылысу нүктесімен тең екіге, ал екіншісі ұзындықтары 5 cm және 20 cm болған кесінділерге бөлінеді. Әрбір ватардың ұзындығын тап.

3.25. Шеңбердің сыртында жатқан нүктеден оған жанама және қиюшы өткізілген. Егер жанама өзінің сыртқы бөлігінен 5 cm ұзын, қиюшының ішкі бөлігінен 5 cm қысқа болса, оның ұзындығын тап.

3.26. Шеңбердан тыс жатқан нүктеден оған жанама және қиюшы өткізілген. Егер жанама және қиюшының ұзындықтарының қосындысы 15 cm, қиюшының сыртқы бөлігі жанамадан 2 cm қысқа болса, жанама және қиюшының ұзындықтарын тап.

3.27. Тікбұрышты үшбұрышта іштей сызылған дөңгелектің түйісу нүктесі гипотенузаны ұзындықтары 6 cm және 9 cm болған кесінділерге бөледі. Бұл үшбұрыштың ауданын тап.

3.28. Тік бұрышты трапецияның кіші табаны 8 $см$, кіші бүйір қабырғасы 6 $\sqrt{3}$ $см$-ге тең. Егер трапеция бұрыштарының бірі 120° болса, оның ауданын тап.

3.29. Табандары 40 $см$ және 14 $см$, биіктігі 39 $см$ болған трапецияға шеңбер сырттай сызылған. Шеңбердің радиусын тап.

3.30. Трапецияның диагональдары 20 $см$ және 15 $см$, биіктігі 12 $см$. Трапецияның ауданын тап.

3.31. Ромбтың үлкен диагоналы 24 $см$, іштей сызылған шеңбер радиусы 6 $см$. Ромбтың ауданын тап.

3.32. Үшбұрыштың қабырғалары 7 $см$, 25 $см$, 28 $см$. Центрі үлкен қабырға арасында болған шеңбер оның қалған екі қабырғасына жанасады. Дөңгелектің ауданын тап.

3.33. Қабырғалары 6 $см$ және 4 $см$, диагональдары арасындағы бұрышы 60°-қа тең болған параллелограмның ауданын тап.

3.34. Екі параллель түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болған бұрыштардың үшеуінің қосындысы 240°-қа тең. Пайда болған сыбайлас бұрыштың үлкенінің кішісіне қатынасын пайызбен өрнекте.

3.35. Екі параллель түзуді үшінші түзумен қиғанда пайда болған бұрыштардың бірі екіншісінен 3 есе үлкен болса, екі сүйір бұрыштардың қосындысын тап.

3.36. Шеңберде жатқан нүктеден өткізілген, бір-біріне перпендикуляр екі ватардың ұзындығы 8 $см$ және 15 $см$. Шеңбердің радиусын тап.

3.37. Шеңберде жатқан нүктеден өтетін екі ватар арасындағы бұрыш 30°. Шеңбердің радиусы 5 $см$ болса, ватарлардың соңын тұтастырған кесіндінің ұзындығын тап.

3.38. Шеңбердің 6 $см$-лік ватары оның центрінен 4 $см$ қашықтықта орналасқан. Шеңбердің ұзындығын тап.

3.39. Шеңберге сырттай сызылған трапецияның бүйір қабырғаларының қатынасы 7:9-ға тең, центр түзуі 32 $см$. Трапецияның бүйір қабырғаларын тап.

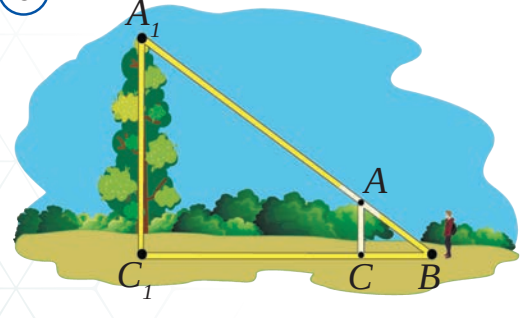
3.40. Радиусы 4 $см$ болған шеңберге трапеция іштей сызылған. Трапецияның диагоналы мен сүйір бұрышының биссектрисасы 30° бұрыш құрайды. Трапецияның биіктігін тап.

3.41. ABC үшбұрышта $\angle A = 45^o$, $\angle B = 60^o$, $BC = 3\sqrt{3}$ $см$ болса, AC қабырғасын тап.

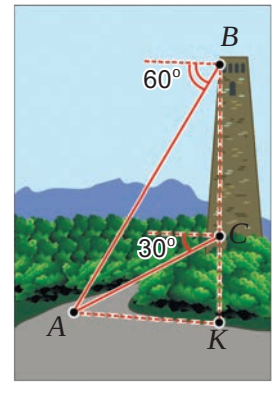
3.42. 8-суретте таяқ жәрдемінде ағаштың биіктігін табу процесін суреттелген. Оны түсіндіріп бер.

3.43. Қырда биіктігі 70 $м$ болған мұнара орналасқан *(9-сурет)*. Мұнара B төбесінен төмендегі A предмет горизонтпен салыстырғанда 60°-ты, мұнараның табанындағы C нүктеден 30°-ты бұрыш астында көрінеді. Қырдың биіктігін тап.

8



9



Математикалық есептердің қазынасы

Соңғы кездері ақпарат-коммуникациялық технологиялар жедел дамуда және жоғары қарқынмен білім беру жүйесіне де кіріп келеді. Қазір интернет желісіне соншалықты көп ақпарат деректері орналастырылған бұл қазынадан пайдалану әрбір жас ұрпақ үшін өте қажет әрі пайдалы. Интернеттен сен өзбек, орыс, ағылшын, тағы басқа тілдерде математика әлеміндегі ең соңғы жаңалықтарды, электронды кітапханаларда сақталатын көптеген электронды оқулықтарды, цифрлық ресурстарды табуыңа болады. Сонымен қатар әр түрлі теориялық материалдар, әдістемелік кеңестер, қисапсыз есептер, мысалдар және олардың шешімдері, түрлі мемлекеттерде өткізілетін математикалық байқаулар мен олимпиадалар жөніндегі мәліметтер және оларда ұсынылған қызықты математикалық есептермен, олардың шешімдерімен таныса аласың.



Электронды үлгілер





Бейнесабақтар

Төменде бірқатар дереккөздер берілуде. Олардан геометрияға қатысты өзіңді қызықтырған түрлі деректерді табуға, математиканы өзбетінше үйрену мүмкіндіктерін пайдалануға кеңес береміз:

1. http://www.uzedu.uz – Халыққа білім беру министрлігінің ресми сайты, ақпараттық білім беру порталы.
2. http://www.ziyonet.uz – "Ziyonet" білім беру порталы.
3. http://dr.rtm.uz – жаңа оқулықтар, оқытушылар үшін әдістемелік қолданбалардың электронды үлгілері, слайдтар, мультимедиалық қосымшалар, бейнесабақтар және сандық ресурстар платформасы.
4. http://www.maktab.uz – 1–11-сыныптарға арналған онлайн мектеп, мектеп оқу бағдарламасы бойынша бейнесабақтар және басқа материалдар платформасы.
5. http://www.stesting.uz – оқушыларға арналған "Халықаралық бағалау зерттеулеріне дайындық" электронды платформасы (өзбек тілінде).
6. http://www.masofa.uz – А. Авлони атындағы ұлттық-зерттеу институтының қашықтан оқыту порталы.



Слайдтар



Тесттер



Тапсырмалар



Қосымша материалдар

7. http://www.onlinedu.uz – А.Авлони атындағы ұлттық-зерттеу институтның “Үздіксіз кәсіптік білім” электронды платформасы.
8. http://www.skillgrover.com.uz – Финландияның математиканы үйрену және оқушылардың білімін бағалау платформасы (өзбек тілінде).
9. http://www.khanakademy.org – “Хан академиясы” қашықтықтан білім беру сайты (ағылшын тілінде).
10. http://www.xanakademiyasi.uz – математика, информатика, химия, физика, экономика, биология және астрономия сияқты ғылымдар бойынша бейнесабақтар платформасы (өзбек тілінде).
11. http://www.school.edu.ru – жалпы білім беретін портал (орыс тілінде).
12. http://www.problems.ru/ – математикадан есептер іздеу жүйесі (орыс тілінде).
13. http://geometry.net/ – алгебра және геометриядан оқу материалдары (ағылшын тілінде).
14. http://mathproblem.narod.ru/ – математикалық үйірмелер мен олимпиадалар (орыс тілінде).
15. http://www.ixl.com - қашықтықтан оқыту арқылы математикалық білім беру порталы (ағылшын тілінде).
16. http://www.mathkang.ru – “Kenguru” халықаралық математикалық байқауының сайты (орыс тілінде).
17. http://www.olimpia.uz – “Kenguru” халықаралық математикалық байқауының сайты (өзбек тілінде).
18. http://www.brilliant.org – математикадан қашықтықтан білім беру сайты (ағылшын тілінде).
19. http://www.geogebra.org – геометрия және алгебра пәндері бойынша динамикалық (“тікелей”) сызбалар сызу мүмкіндігін беретін тегін бағдарлама.
20. http://www.yaklass.ru – мектеп оқушылары мен оқытушыларына арналған онлайн білім беру платформасы.
21. www.schulen-ans-netz.de – Германияның “Интернет-Мектеп” сайты (неміс тілінде).
22. www.studienkreis.de – Германияның оқу үйірмелерінің сайты (неміс тілінде).
23. www.educasource.education.fr – Францияның білім беру сайты (француз тілінде).
24. www.educmath.inrp.fr – Францияның математикалық білім беру сандық ресурстары (француз тілінде).
25. http://mat-game.narod.ru/ – математикалық гимнастика. Математикалық есептер мен сөзжұмбақтар (орыс тілінде).



II ТАРАУ

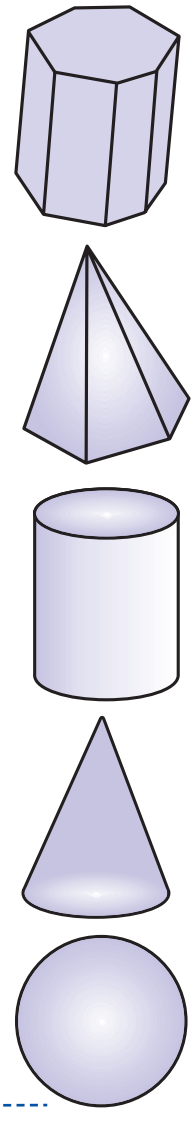
СТЕРЕОМЕТРИЯҒА КІРІСПЕ

Бұл тарауды үйрену нәтижесінде мынадай білім мен дағдыларға ие боласың:

- стереометрия аксиомаларын білу және оларды пайдалану;
- стереометрия аксиомаларынан келіп шығатын нәтижелерді білу және оларды қолдану;
- кеңістіктегі айқас, параллель және қиылысатын түзулердің анықтамасын білу және сызбада кескіндеу;
- түзудің жазықтыққа параллельдігінің анықтамасын білу;
- қиылысатын және параллель жазықтықтар туралы түсінікке ие болу;
- кеңістіктегі денелер, көпжақтар – призма, параллелепипед, куб, пирамида туралы бастапқы түсініктерге ие болу, жазықтықта кескіндей алу, оларды сызбада көрсету және сыртын табуға қатысты есептерді шешу;
- көпжақтардың қарапайым қималарын “іздер” және параллель көшіру тәсілдерін пайдаланып салу;
- үйренген ұғымдарды, фактілерді және әдістерді бейтаныс немесе өмірлік жағдайларда қолдану.

4 СТЕРЕОМЕТРИЯНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ

1



Геометриялық фигуралар толығымен жазықтықта жататына және жатпайтына қарап, *жазық* және кеңістіктегі фигураларға бөлінеді. Осы кезге дейін геометрия сабақтарында, негізінен, жазық геометриялық фигуралардың қасиеттерін үйрендік. Ал 9-сыныптың соңында кейбір кеңістіктегі фигуралар: призма, пирамида, цилиндр, конус пен шардың *(1-сурет)* қасиеттерін қарастырған едік.

Геометрияның планиметрия бөлімі жазық, ал *стереометрия* бөлімі кеңістіктегі геометриялық фигуралардың (немесе денелердің) қасиеттерін үйренеді. *Стереометрия* сөзі грекше *stereos* – “кеңістіктегі”, *metreo* – "өлшеймін" деген мағынаны береді.

2-суреттегі предметтер кеңістіктегі денелердің рәмізі ретінде олар жайлы көзқарасты туындатады. Айналамыздағы барлық предметтер үш өлшемді болып, олардың фигурасы қайсы бір кеңістіктегі геометриялық денеге ұқсас.

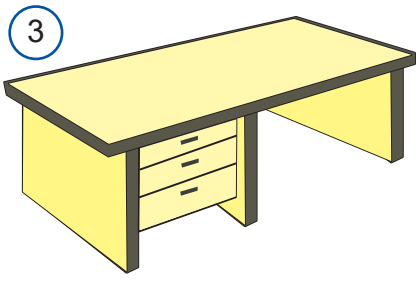
Кеңістіктегі негізгі геометриялық фигуралар *нүкте, түзу* және *жазықтық.* Олар стереометрияның негізгі ұғымдары, оларға анықтама берілмейді.

Нүктеге өлшемдері есепке алынбаса да болатын майда предметтер рәмізі ретінде, ал түзуге тегіс тартылған жіп немесе мектеп тақтасының қыры рәмізі ретінде қарауға болады. Нүктелер латын әліпбиінің бас әріптерімен – A, B, C, ал түзулер кіші әріптерімен – a, b, c ... белгіленеді.

2



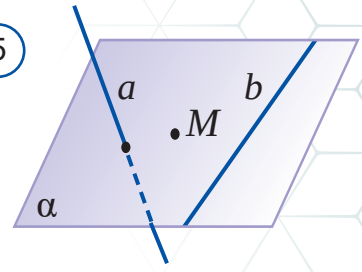
3



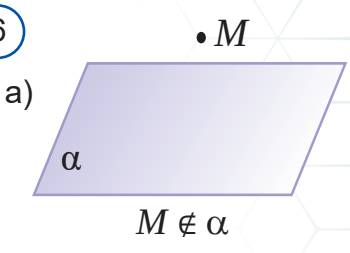
4

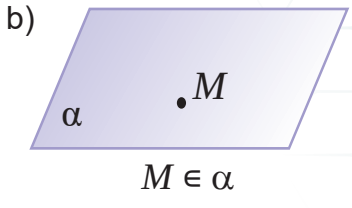


5

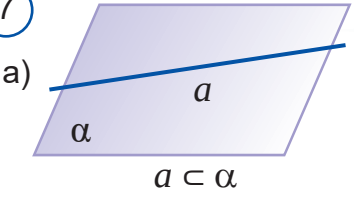


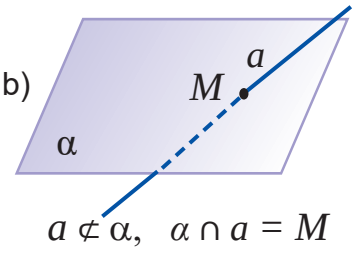
6



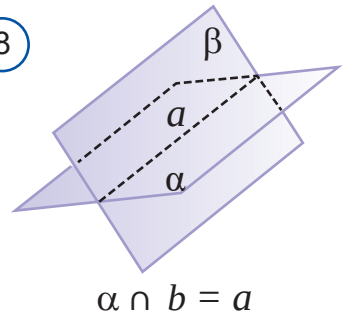


7

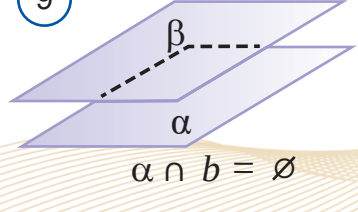




8



9



Жазықтықты үстелдің үсті сияқты тегіс сырт деп елестетуге болады *(3-сурет)*. Жазықтық та түзу сияқты шексіз. Суретте жазықтықтың тек бір бөлігін ғана бейнелейміз. Бірақ оны барлық жаққа қарай шексіз жалғасқан деп елестетеміз және әдетте сызбада параллелограмм түрінде кескіндейміз *(4-сурет)*.

Стереометрияда қолданылатын кейбір белгілеулер

Жазықтықтарды α, β, γ... – грек әріптерімен белгілейміз.

Кеңістікте жазықтық, түзу және нүктелер 5-суреттегідей кескінделеді.

Кеңістікте нүкте жазықтыққа тиісті болмауы *(6a-сурет)* немесе тиісті болуы *(6b-сурет)* мүмкін.

М нүкте α жазықтыққа тиісті болған түрде α жазықтық M нүктеден өтеді, деп те айтылады және $M \in a$ түрінде белгіленеді.

М нүкте α жазықтыққа тиісті болмаса, $M \notin a$ түрінде белгіленеді.

Сонымен қатар, кеңістікте түзу жазықтыққа тиісті болуы немесе тиісті болмауы да мүмкін.

a түзудің барлық нүктелері α жазықтыққа тиісті болса *(7a-сурет)*, a түзу α жазықтықта жатады немесе α жазықтық a түзу арқылы өтеді, деп айтылады және $a \subset \alpha$ түрінде белгіленеді.

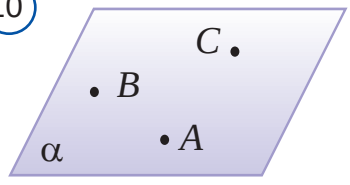
a түзу α жазықтыққа тиісті болмаса, $a \not\subset \alpha$ түрінде белгіленеді.

a түзудің тек бір нүктесі α жазықтыққа тиісті болса *(7b-сурет)*, a түзу α жазықтықты қиып өтеді, деп айтылады және бұл $\alpha \cap a$ = М түрінде жазылады.

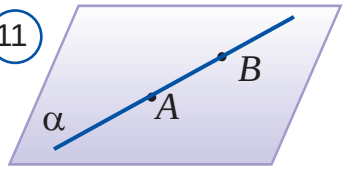
Егер α және β жазықтықтардың ортақ нүктелері a түзуді құраса *(8-сурет)*, бұл екі жазықтық a түзудің бойымен қиылысады, дейміз және мұны $\alpha \cap \beta = a$ түрінде жазамыз.

Егер α және β жазықтықтардың ортақ нүктелері болмаса *(9-сурет)*, бұл екі жазықтық өзара қиылыспайды, дейміз және мұны $\alpha \cap \beta = \varnothing$ түрінде жазамыз.

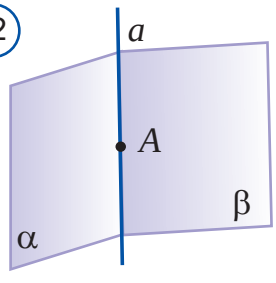
10



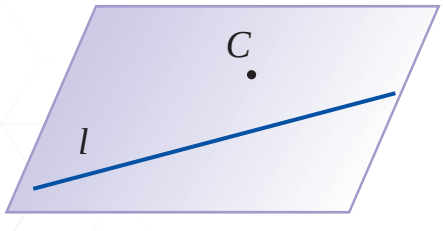
11



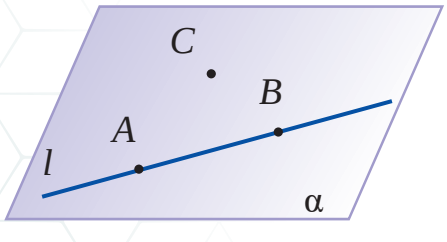
12



13 a)



b)



Стереометрия аксиомалары

Планиметриядағы тәрізді стереометрияда да кейбір геометриялық фигуралардың қасиеттері дәлелсіз қабылданады. Кеңістікте жазықтықтардың мынадай қасиеттерін дәлелсіз, S топ аксиомалары ретінде қабылдаймыз:

S_1 *Егер үш нүкте бір түзуде жатпаса, ол жағдайда олар арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады (10-сурет).*

S_2 *Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, ол жағдайда оның барлық нүктесі сол жазықтықта жатады (11-сурет).*

S_3 *Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, ол жағдайда жазықтықтар сол нүктеден өтетін ортақ түзуге де ие болады (12-сурет).*

Планиметрияда кіргізілген аксиомалармен біргелікте осы үш аксиома стерометрияның негізін құрайды. Планиметрияда біз қарастыратын барлық фигуралар орналастырылатын бір жазықтыққа ие едік. Стереометрияда мұндай жазықтықтар шексіз көп болып, олардың барлығында планиметрия аксиомалары және планиметрияда дәлелденген барлық қасиеттер орынды болады, деп қаралады. Сонымен қатар стереометрия курсында планиметрия аксиомаларына стреометрия нүктесі тұрғысынан қарауға тура келеді.

Стерометрия аксиомаларынан келіп шығатын нәтижелер

1-нәтиже. Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.

Дәлел. l – берілген түзу, C онда жатпайтын нүкте болсын *(13a-сурет)*.

Алдымен теореманың қорытынды бөлімінде айтылған жазықтықтың бар екенін көрсетеміз. l түзуде A және B нүктелерін аламыз. Шартқа сәйкес, A, B және C нүктелер бір түзуде жатпайды. Онда S_1 аксиомаға сәйкес, A, B және C нүктелер арқылы α жазықтықты өткізуге болады *(13b-сурет)*. S_2 аксиомаға сәйкес, α жазықтық l түзуден өтеді.

Демек, α іздеген жазықтық екен.

Енді бұл жазықтықтың бірегей жалғыз екенін көрсетеміз.

Кері жорамал жасаймыз: l – берілген түзу және онда жатпайтын C нүкте арқылы тағы бір β жазықтық өткізуге болады. Онда β жазықтық та A, B және C нүктелер арқылы өтеді. Бірақ S_1 аксиомаға орай, үш нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады. Қайшылық. Демек, жорамал қате. Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.

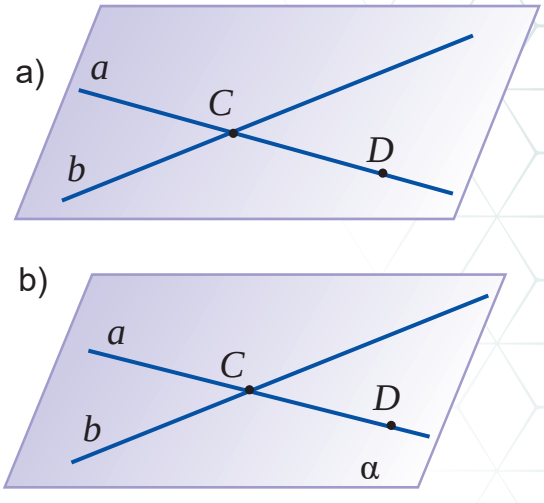
2-нәтиже. *Берілген қиылысушы екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.*

Дәлел. Берілген a және b түзулер C нүктеде қиылыссын *(14a-сурет)*.

a түзуде C нүктеден тыс тағы бір D нүктені аламыз. Ол жағдайда дәлелденген 1-нәтижеге сәйкес, b түзу және онда жатпаған D нүкте арқылы бір α жазықтық өтеді *(14b-сурет)*. Бұл жазықтық a түзудің C және D нүктелерінен өтеді. Онда S_2 аксиомаға сәйкес, α жазықтық a түзуден де өтеді.

Демек, α жазықтық берілген қиылысушы екі түзу арқылы өтеді. Бұл жазықтықтың бірегей жалғыз екенін өз бетіңше дәлелде.

14

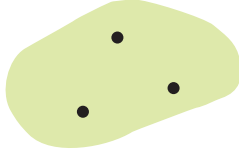
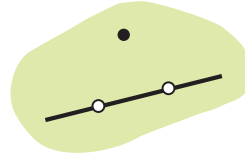
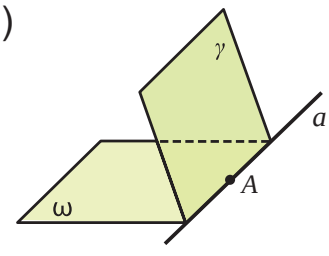
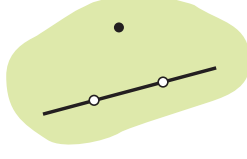
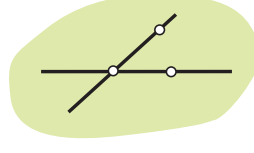
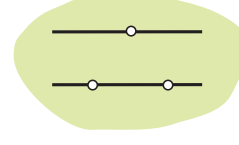


Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. *Кеңістіктегі негізгі геометриялық фигураларды ата. Оларды нелердің рәмізі ретінде алуға болады?*
2. *Стереометрияның S тобы аксиомаларын ата және түсіндір.*
3. *Стереометрияда планиметрия аксиомалары да қолданыла ма? Планиметрия аксиомаларына стереометрия тұрғысынан қарау дегенде нені түсінесің?*
4. *S_1 аксиомада үш нүктенің бір түзуде жатпайтыны тілге тиек етілген. Бұл талап соншалықты маңызды ма? Оны алып тастаса, аксиома орынды бола ма? Неге?*
5. *Стереометрия аксиомаларынан келіп шығатын нәтижелерді түсіндір.*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

4.1. Кестеде 4-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Стерометрия аксиомалары және олардан келіп шығатын нәтижелер		
a)  S_1 аксиома. Бір түзуде жатпаған үш нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.	b)  S_2 аксиома. Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, ол жағдайда оның барлық нүктесі сол жазықтықта жатады.	c)  S_3 аксиома. Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, ол жағдайда олар сол нүктеден өтетін ортақ түзуге де ие болады.
 1-нәтиже. Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.	 2-нәтиже. Қиылысатын екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.	 3-нәтиже. Параллель екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.

4.2. Төмендегі растауларға сәйкес келетін белгілі өрнекті тап.

Растау		Өрнек
1. M нүкте α жазықтыққа тиісті.		$\alpha \cap b = \varnothing$
2. M нүкте α жазықтыққа тиісті емес.		$M \in \alpha$
3. a түзу α жазықтықта жатады.		$M \notin \alpha$
4. a түзу α жазықтықта жатпайды.		$a \subset \alpha$
5. α және β жазықтықтар a түзу бойымен қиылысады.		$\alpha \cap b = a$
6. α және β жазықтықтар өзара қиылыспайды.		$a \not\subset \alpha$

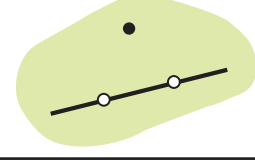
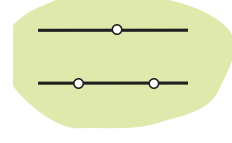
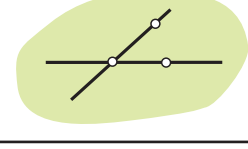
4.3. Сынып бөлмесінің қабырғаларын жазықтықтардың бөліктері деп елестет және төмендегілерді көрсет:

a) екі қиылысушы түзу;
b) екі қиылысушы жазықтық;
c) бір нүктеде қиылысушы үш түзу;
d) екі қиылыспайтын жазықтық;
e) екі қиылыспайтын түзу;
f) үш қиылысатын жазықтық.

4.4. Төмендегі сөйлемді оқы. Сөйлем дұрыс болса “+”, қате болса “–” таңбасын жанындағы торкөзге жаз.

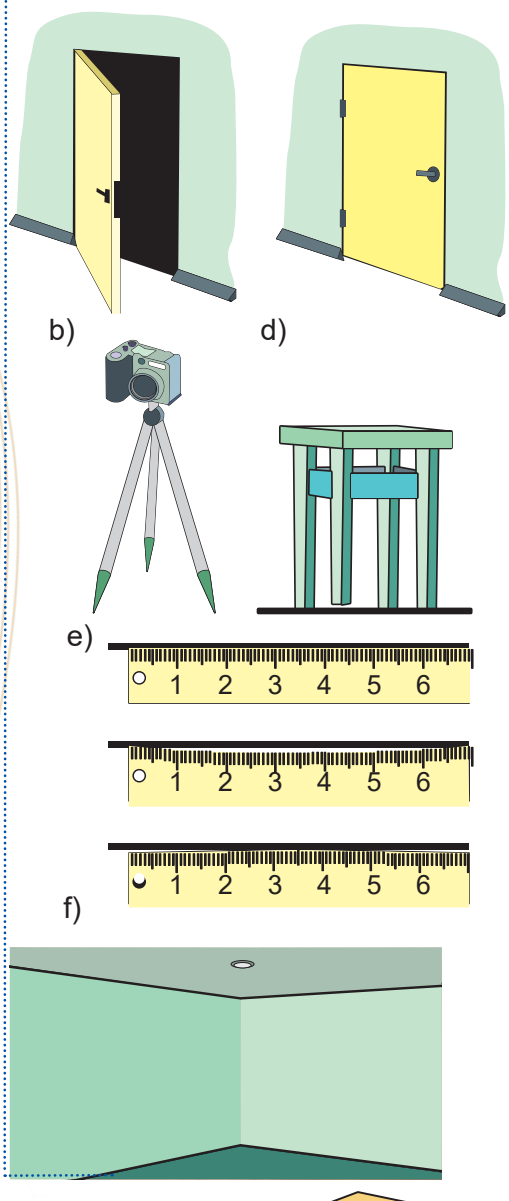
1	Екі жазықтық тек бір ортақ нүктеге ие болуы мүмкін.	
2	Екі жазықтық тек екі ортақ нүктеге ие болуы мүмкін.	
3	Екі жазықтық екі ортақ түзуге ие болуы мүмкін.	
4	Берілген қиылысушы екі түзу арқылы бір жазықтық өткізу мүмкін.	
5	Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.	
6	Егер үш нүкте бір түзуде жатпаса, ол жағдайда олар арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.	
7	Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, ол жағдайда оның барлық нүктесі сол жазықтықта жатады.	
8	Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, ол жағдайда бұл жазықтықтар сол нүктеден өтетін ортақ түзуге да ие болады.	

4.5. Төмендегі кеңістіктегі фигуралардың қасиеттеріне сәйкес суретті тап.

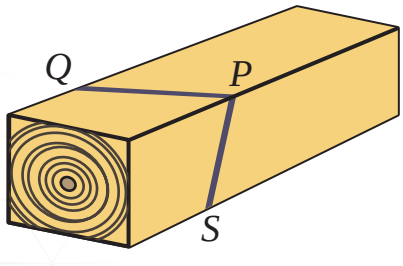
Қасиеттер		Суреттер
Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.		
Қиылысушы екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.		
Параллель екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.		

4.6. Кеңістікте екі нүктеден неше түзу өткізуге болады?
4.7. Кеңістікте үш нүктеден неше жазықтық өткізуге болады?
4.8. Кеңістікте бір түзуден неше жазықтық өткізуге болады?
4.9. Кеңістікте үш нүкте қалай орналасқанда олардан шексіз көп жазықтық өткізуге болады?
4.10. Кеңістікте: a) екі түзу; b) түзу және жазықтық; c) екі жазықтық неше ортақ нүктеге ие болуы мүмкін?
4.11. Кеңістікте: a) екі түзу; b) түзу және жазықтық; c) екі жазықтық; d) үш жазықтық бір ортақ нүктеге ие болуы мүмкін бе?
4.12. Бір түзуде жататын үш нүктеден жазықтық өткізу мүмкіндігін дәлелде. Мұндай жазықтықтардың саны нешеу болады?

15



16



17



4.13. A, B, C және D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. AB және CD түзулердің қиылыспайтынын дәлелде.

4.14. Берілген екі түзудің қиылысқан нүктесінен бұл түзулермен бір жазықтықта жатпайтын түзу өткізуге бола ма? Жауабыңды негізде.

4.15. A, B, C нүктелер екі түрлі жазықтықтың әрбірінде жатады. Бұл нүктелердің бір түзуде жататынын дәлелде.

4.16. Түзу арқылы екі түрлі жазықтық өтетінін дәлелде.

4.17. Түрлі: a) үш; b) төрт; c) бес; d) n дана нүкте жұптарынан ең көбі неше түзу өткізуге болады?

4.18. Түрлі: a) үш; b) төрт; c) бес; d) n дана нүкте үштігінен ең көбі неше жазықтық өткізуге болады?

Іс жүзіндік қолданулар

4.19. 15-суреттегі жағдайларды түсіндіруде қайсы аксиомаларға сүйенуге болады?

A) Неге ашық есік жел ескен кезінде ашылып-жабылып қозғалыста болады? Неге құлып ілінгенде мұндай қозғалыс байқалмайды?

B) Камера аяқтары неге үшеу болады?

C) Орындық жерде берік тұруы үшін оның аяқтары қалай тексеріледі?

D) Сызғыштың тегістігі қалай тексеріледі?

E) Екі қабырға стереометрия аксиомаларынан келіп шығатын қайсы нәтижені түсіндіруде тиімдірек?

4.20. 16-суретте шебердің тақтаны аралаудан бұрын сызған сызықтары берілген. Оның бұл жұмысын стереометрия аксиомаларынан келіп шығатын қайсы нәтижемен түсіндіруге болады?

4.21. 17-суретте теміршінің қисық темірді тегістеу үдерісі көрсетілген. Темір алдымен тегіс жерге қойылып, балғамен ұрып тегістеледі. Содан соң айналдырылып, тағы да соғып тегістеледі. Екі басқыштан құралған бұл жұмысты стереометрия аксиомаларынан келіп шығатын қайсы нәтижемен түсіндіруге болады?

5 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

Кеңістіктегі түзулер

Кеңістікте екі түзу бір жазықтықта жатуы немесе жатпауы мүмкін *(1-сурет)*. Кеңістікте бір жазықтықта жатпайтын екі түзу *айқас түзулер* деп аталады *(1a-сурет)*.

Бір жазықтықта жатқан және тек бір ортақ нүктеге ие болған түзулер *қиылысатын түзулер* деп аталады *(1b-сурет)*.

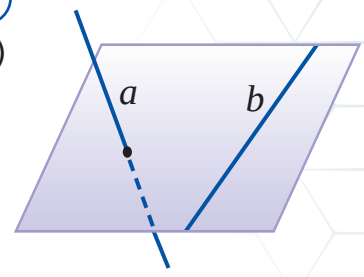
Бір жазықтықта жатқан және өзара қиылыспайтын түзулер *параллель түзулер* деп аталады *(1c-сурет)*.

Айқас түзулерге бірі көпірден, екіншісі көпірдің астынан өтетін жолдарды мысал ретінде келтіруге болады *(2-сурет)*. Сонымен қатар, 3-суреттегі параллелепипедтің MN және L_1M_1 қырлары жатқан түзулер да айқас болады.

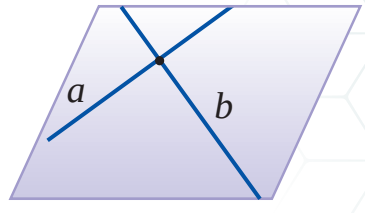
Айқас (параллель) түзулерде жатқан кесінді және сәулелерді де айқас (параллель) деп атаймыз.

1

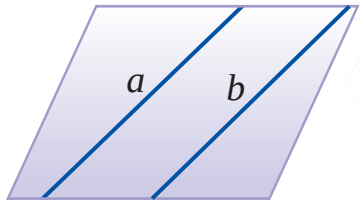
a)



b)



c)

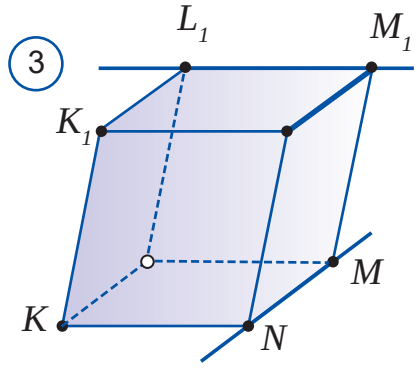


Кеңістіктегі түзу мен жазықтық

2



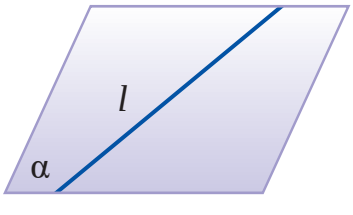
3



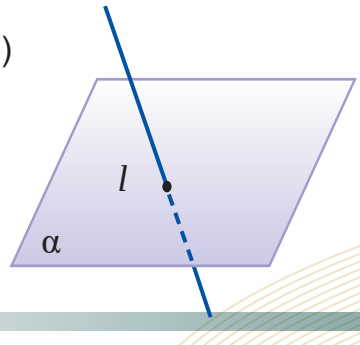
Түзу жазықтықта жатуы *(4a-сурет)*, оны қиып өтуі *(4b-сурет)* немесе қиып өтпеуі, яғни ортақ нүктеге ие болмауы *(4c-сурет)* мүмкін. Соңғы жағдайда түзу *жазықтыққа параллель* деп аталады.

4

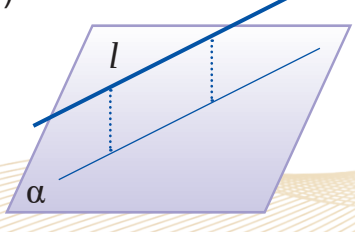
a)



b)



c)

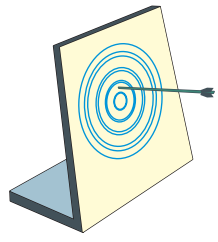


5

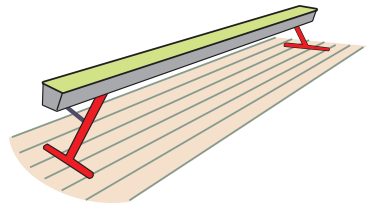
a)



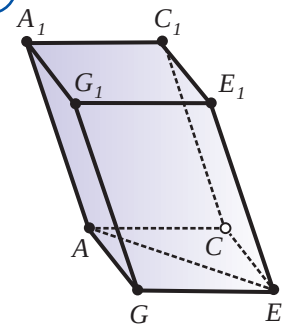
b)



c)

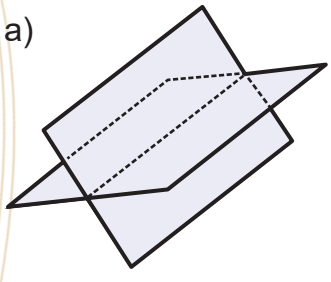


6

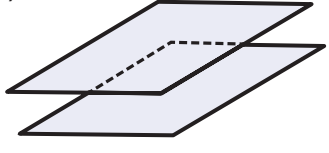


7

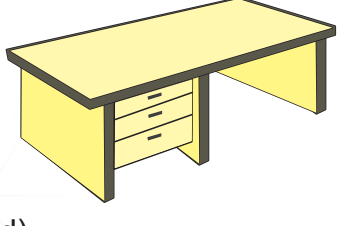
a)



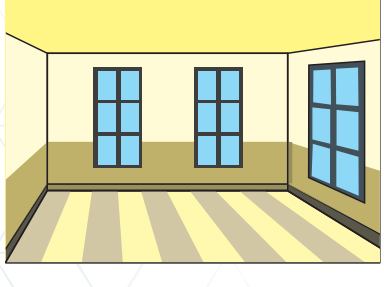
b)



c)



d)



Үстел үстінде жатқан қарындашты көріп жазықтықта жатқан түзуді *(5a-сурет)*, нысанаға қадалған оқ *(5b-сурет)* жазықтықты қиып өтетін түзуді, сондайақ еденде тұрған гимнастикалық ағаш *(5c-сурет)* жазықтыққа параллель түзуді көз алдымызға елестетеді.

6-суретте бейнеленген параллелепипедтің $AGEC$ табанының диагоналы AE жатқан түзу табан жазықтығында жатады, AGA_1G_1 жақ жатқан жазықтықпен қиылысып, $A_1G_1E_1C_1$ жоғары табан жазықтығына параллель болады.

Кеңістіктегі жазықтықтар

Енді кеңістіктегі жазықтықтардың өзара орналасуына тереңірек тоқталайық.

Кеңістікте жазықтықтар қандай да бір түзу бойымен қиылысуы *(7a-сурет)* немесе ортақ нүктеге ие болмауы мүмкін *(7b-сурет)*. Осыдан келіп шығып, бұл жазықтықтар сәйкес түрде *қиылысатын* немесе *параллель жазықтықтар* деп аталады.

7c-суреттегі үстелдің үстіңгі беті және бүйір жағы қиылысатын жазықтықтарды, бөлменің едені және төбесі *(7d-сурет)* параллель жазықтықтарды көз алдымызға елестетеді.

Сонымен қатар, 6-суреттегі параллелепипедтің қарама-қарсы болмаған бүйір жақтары қиылысатын жазықтықтарды, төменгі және жоғарғы табандарды, сондай-ақ қарама-қарсы бүйірлері параллель жазықтықтарды көз алдымызға елестетеді.

Параллельдік белгісі – “// ” бір ғана параллель түзуді ғана емес, тіпті жазықтыққа параллель түзуді және параллель жазықтықтарды белгілеуде де қолданылады:

$$a \parallel b,\ a \parallel \alpha \text{ va } \alpha \parallel \beta.$$

Кейде жазықтықтар бір түзуде жатпаған үш: A, B және C нүкте жәрдемінде “ABC жазықтық” түрінде де белгіленеді.

Тақырыпқа байланысты сұрақтар

1. *Жазықтықта жататын қандай түзулер: a) қиылысатын; b) параллель деп аталады?*
2. *Қандай түзулер айқас деп аталады? Мысал келтір.*
3. *Кеңістікте екі түзу қалай орналасады?*
4. *Қандай түзулер: a) жазықтықта жататын; b) жазықтыққа параллель деп аталады?*
5. *Кеңістікте түзу және жазықтық қалай орналасады?*
6. *Кеңістікте қандай жазықтықтар: a) қиылысатын; b) параллель деп аталады?*
7. *Кеңістікте екі жазықтық қалай орналасады?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

5.1. Кестеде 5-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Фигуралар	Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы		
a және b түзулер	Бір жазықтықта жатады	Бір ортақ нүктеге ие	Қиылысатын: $a \otimes b$
		Ортақ нүктеге ие емес	Параллель: $a // b$
	Бір жазықтықта жатпайтын		Айқас: $a \div b$

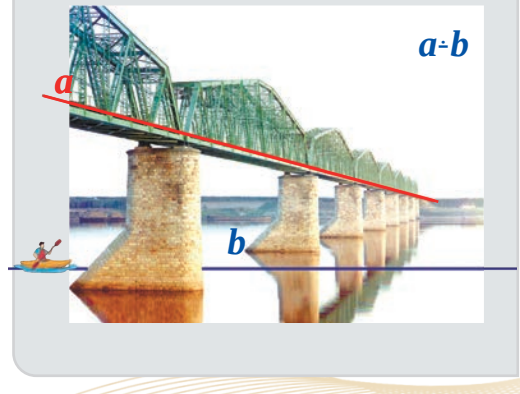
Фигуралар	Кеңістікте түзу мен жазықтықтардың өзара орналасуы		
a түзу және α жазықтық	a түзу α жазықтықта жатпайды.	a түзу α жазықтықта жатады.	Қиылысатын: $a \otimes \alpha$
		a түзу α жазықтықпен бір ортақ нүктеге ие.	Параллель: $a // \alpha$
	a түзу α жазықтықпен бір нүктеге ие емес.		$a \subset \alpha$

Фигуралар	Кеңістікте түзулердің өзара орналасуы	
α және β жазықтықтар	Ортақ нүктеге ие.	Қиылысатын: $\alpha \cap \beta = a$ түзу
	Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $\alpha // \beta$

5.2. 8-суретте кеңістіктегі айқас түзулерде нелер бейнеленгенін анықта.

5.3. Куб моделінде оның төмендегі элементтерінің жұптарын көрсет:
a) бір ортақ нүктеге ие екі қыры;
b) ортақ нүктеге ие болмаған екі қыры;
c) бір жазықтықта жатпайтын екі қыры;
d) бір ортақ нүктеге ие қыр немесе жақ;
e) ортақ нүктеге ие болмаған қыр мен жақ;
f) жақ немесе онда жатқан қыр;
g) қиылыспайтын екі жақ;
h) қиылысатын екі жақ.

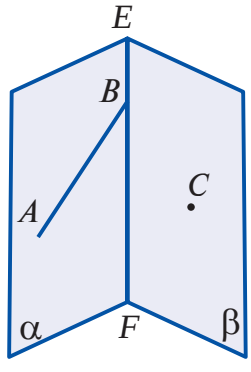
8



5.4. Төмендегі кестедегі екі түзудің қасиеттеріне сәйкес өзара орналасуын сәйкестендір.

Түзулердің қасиеттері	*Өзара орналасуы*
Бір жазықтыққа жатады және ортақ нүктеге ие емес.	Айқас
Бір жазықтықта жатады және ортақ нүктеге ие.	Параллель
Бір жазықтықта жатпайды.	Қиылысушы

9



5.5. 9-суреттегі α және β жазықтықтар EF түзу бойымен қиылысады. AB түзу α жазықтықта жатады. β жазықтықта жатқан C нүктеден сондай түзу өткіз, ол:

a) AB түзумен қиылыссын;

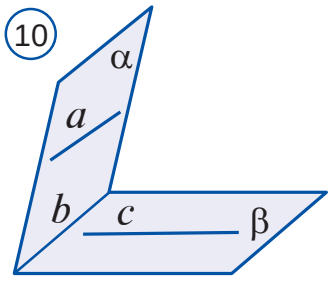
b) AB түзумен айқас болсын;

c) AB түзумен параллель болсын.

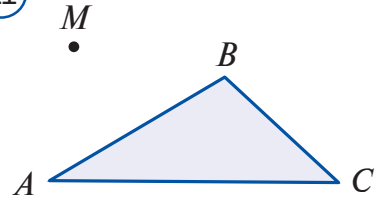
5.6. $a \parallel b$ және $a \parallel \alpha$ екені белгілі. b түзу мен α жазықтық өзара қалай орналасады?

5.7. $\alpha \parallel \beta$, $a \subset \alpha$ және $b \subset \beta$ екені белгілі. a және b түзулер өзара қалай орналасады?

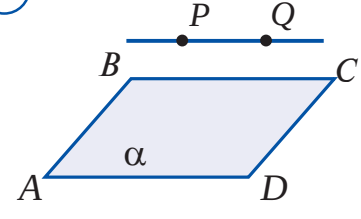
10



11



12



5.8. 10-суретте α және β жазықтықтар b түзу бойымен қиылысады. Егер $a \parallel b$, c және b түзулер параллель болмаса, a және c түзулер өзара қалай орналасады?

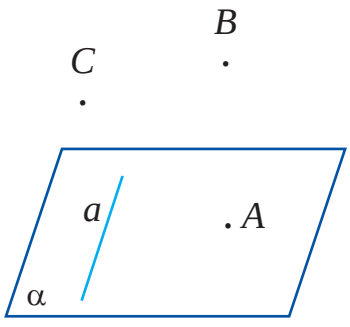
5.9. 11-суретте M нүкте ABC үшбұрыштың сыртында жатыр. MA, MC, MB түзулерге айқас түзулерді анықта.

5.10. 12-суретте PQ түзу $ABCD$ төртбұрыштың сыртында жатыр және BC-ға параллель: a) PQ және AB; b) PQ және CD; c) PQ және AD қандай түзулер?

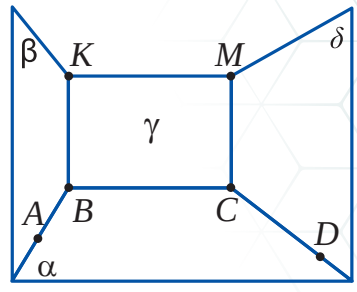
5.11. $ABCP$ үшбұрышты пирамида (тетраедр) берілген. Төмендегі кестеде келтірілген түзулер өзара қалай орналасады? Сәйкес ұяшыққа тиісті белгіні ($\otimes$ – қиылысады, $\div$ – айқас, // – параллель) қой.

	AB	BC	AC	PA	PB	PC
AB						
BC						
AC						
PA						
PB						
PC						

13



14



5.12. 13-суретте a түзу және A нүкте α жазықтыққа тиісті. C және B нүктелер бұл жазықтыққа тиісті емес. Төмендегілерден өтетін жазықтық берілген α жазықтықтан ерекше бола ма?

A) a түзу және B нүктеден; B) a түзу және C нүктеден;

C) AB және AC түзуден; D) AB және BC түзуден;

5.13. 14-суреттегі мәліметтерді пайдаланып кестені үлгіге сәйкес толтыр:

Жазықтықтар	α және β	αжәне γ	α және δ	β және γ	γ және δ
Ортақ нүктелері	A және B				
Ортақ түзу	AB				

5.14. Төмендегі сөйлемді оқы. Олардың әрқашан, кейде немесе ешқашан дұрыс болуын немесе болмайтынын анықтап, кестенің сәйкес торкөзіне “+” таңбасын қой. Жауабыңды негіздейтін мысалдар келтір.

	Сөйлем	Әрқашан	Кейде	Ешқашан
1	Кеңістіктегі түзу жазықтықта жатпайды.			
2	Екі жазықтық тек бір ғана ортақ нүктеге ие.			
3	Жазықтықтар түзу бойымен қиылысады.			
4	Екі жазықтық тек екі ортақ нүктеге ие.			
5	Екі жазықтық екі ортақ түзуге ие.			
6	Қиылысушы екі түзу арқылы бір ғана жазықтық өтеді.			
7	Түзу және нүкте арқылы бір жазықтық өтеді.			
8	Үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өтеді.			
9	Түзудің бір нүктесі жазықтықта жатса, оның барлық нүктесі де сол жазықтықта жатады.			
10	Екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, олар бетпе-бет түседі.			

6 КЕҢІСТІКТЕГІ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ФИГУРАЛАР. КӨПЖАҚТАР

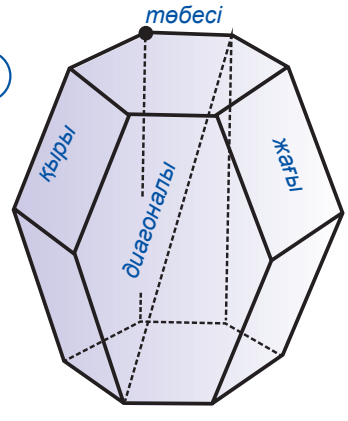
Өткен сыныптарда бірқатар кеңістіктегі геометриялық фигуралармен таныстық. Олардың кейбіреуін *кеңістіктегі денелер* деп те атадық. Кеңістіктегі денелерді қандай да бір материалдық дене иелеген болмыстың бөлігі ретінде елестетуге болады. Кеңістіктегі денені оның сырты шекаралап тұрады.

Көпжақ деп жазық көпбұрыштармен шектелген денеге айтылады. Жазық көпбұрыштар – *көпжақтардың жақтары,* көпбұрыштардың төбесі – *көпжақтың төбесі,* ал қабырғалары – *көпжақты қырлары* деп аталады. Бір ғана жаққа тиісті болмаған төбелерді біріктіретін кесінді *көпжақтың диагоналы деп аталады (1-сурет)*.

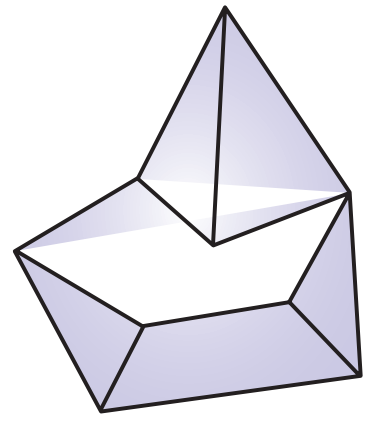
Көпжақтың шекарасын оның сырты деп атайды. Көпжақтың сырты кеңістікті екіге бөледі. Олардың шексіз бөлігі *көпжақтың сыртқы өрісі*, ал шектелген бөлігі *көпжақтың ішкі өрісі* деп аталады.

Көпжақ кез келген жағы жатқан жазықтықтың бір жағында жатса, мұндай көпжақ *дөңес көпжақ* деп аталады.

1



2

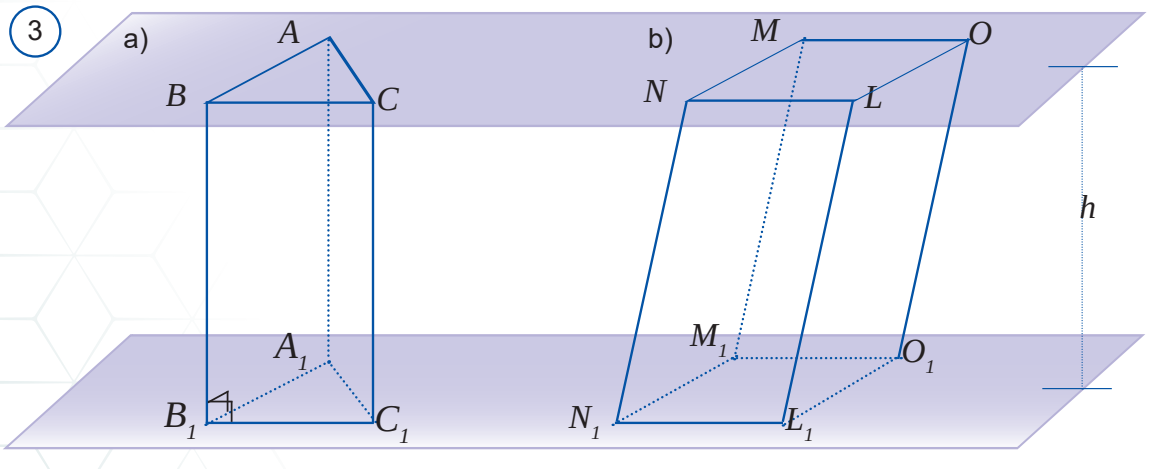


Мысалы, куб – дөңес көпжақ. Ал 2-суретте дөңес болмаған көпжақ бейнеленген. Алда ең қарапайым дөңес көпжақтар: призма мен пирамидаларды үйренеміз.

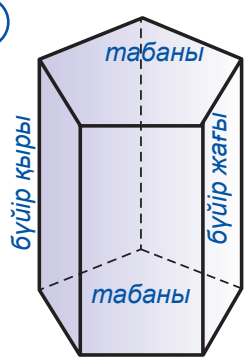
Призма деп екі жағы тең көпбұрыштан, ал қалған жағы параллелограмнан құралған көпжаққа айтылады *(3-сурет)*. Тең жақтар призманың *табандары*, ал параллелограмдар оның *бүйір жақтары* деп аталады *(4-сурет)*.

Табанындағы қабырғаларының санына қарай призмалар *үшбұрышты*, *төртбұрышты*, тағы басқа *n бұрышты призмалар* деп аталады. 3а-суретте үшбұрышты $ABCA_1B_1C_1$ призма, ал 3b-суретте төртбұрышты $MNLOM_1N_1L_1O_1$ призма бейнеленген.

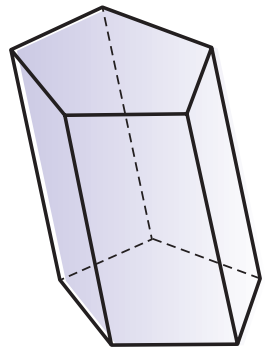
3



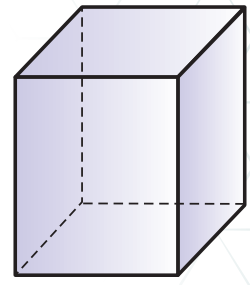
4



5



6



Бүйір жақтары тік төртбұрыштардан құралған призма *тік призма (4-сурет)* немесе көлбеу призма *(5-сурет)* деп аталады.

Табаны дұрыс көпбұрыштан құралған тік призма *дұрыс призма (6-сурет)* деп аталады.

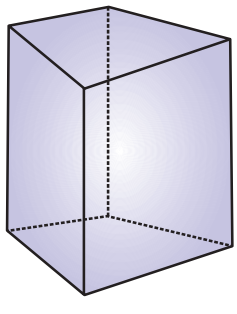
Табаны параллелограмнан құралған призма *параллелепипед* деп аталады *(7-сурет)*. Параллелепипедтер де призма сияқты тік *(8-сурет)* және көлбеу *(9-сурет)* болуы мүмкін. Тік параллелепипедтің бүйір жақтары тік төртбұрыштан құралады.

Табаны тік төртбұрыштан құралған тік параллелепипед *тікбұрышты параллелепипед* деп аталады *(8-сурет)*. Тікбұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тік төртбұрыштан құралатыны белгілі.

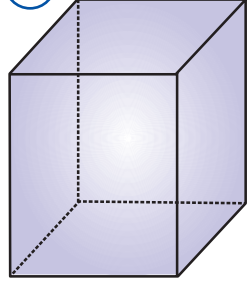
Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінен шығатын үш қырының ұзындықтары оның *өлшемдері* деп аталады.

Өлшемдері өзара тең болған тікбұрышты параллелепипед *куб* деп аталады. Кубтың барлық жақтары тең квадраттардан құралатыны белгілі.

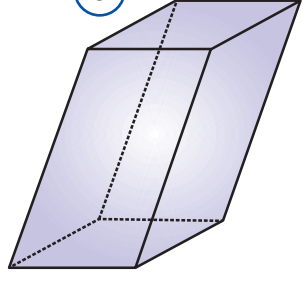
7



8



9



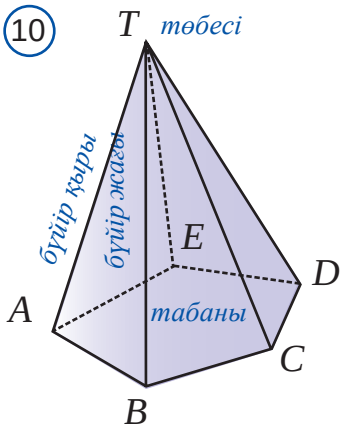
Пирамида деп бір жағы көпбұрыштан, қалған жағы бір төбеге ие үшбұрыштардан құралған көпжаққа айтылады. Көпбұрыш пирамиданың *табаны*, ал үшбұрыштар оның *бүйір жақтары* деп аталады. 10-суретте $TABCDE$ бесбұрышты пирамида бейнеленген. $ABCDE$ бесбұрышты пирамиданың табаны, ATB, BTC, CTD, DTE және ETA үшбұрыштар оның бүйір жақтары, ал T оның төбесі.

Табанындағы қабырғаларының санына қарай пирамидалар *үшбұрышты, төртбұрышты* және сол сияқты *n бұрышты пирамидалар* деп аталады. Үшбұрышты пирамида *тетраедр* деп те аталады.

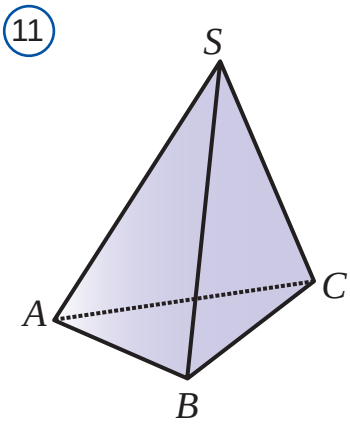
11-суретте үшбұрышты, 12-суретте төртбұрышты пирамида бейнеленген.

Дұрыс пирамида деп табаны дұрыс көпбұрыш пен бүйір жақтары өзара тең болған пирамидаға айтылады.

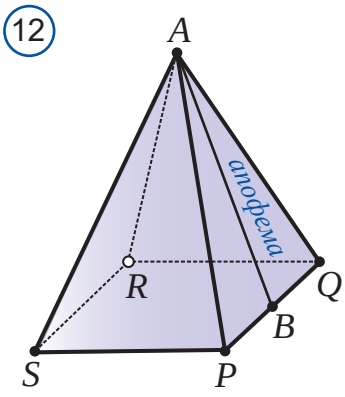
10



11



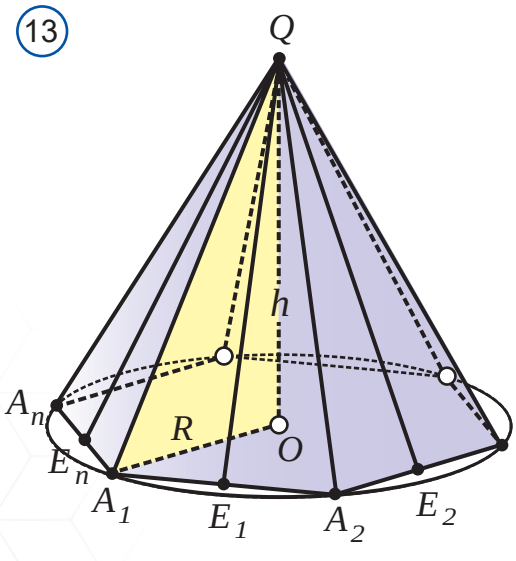
12



Дұрыс пирамиданың бүйір жағының пирамида төбесінен түсірілген биіктігі оның *апофемасы* деп аталады. 12-суретте $APQRS$ төртбұрышты дұрыс пирамида бейнеленген. Ондағы AB кесінді пирамида апофемаларының бірі болып табылады.

2.1-теорема. *Дұрыс пирамиданың: а) бүйір жақтары; б) бүйір қырлары; в) апофемалары өзара тең болады.*

13



Дәлелдеу. Айталық, $QA_1A_2 \ldots A_n$ дұрыс пирамида, O пирамида табанының центрі болсын *(13-сурет)*.

1) OA_1, OA_2, ... OA_n кесінділер дұрыс көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбер радиусынан құралғандықтан өзара тең болады. Тікбұрышты $QOA_1, QOA_2, \ldots, QOA_n$ үшбұрыштарда екі катет өзара тең болғаны үшін олар тең болады. Онда олардың гипотенузалары да тең болады:

$QA_1 = QA_2 = \ldots = QA_n$.

2) $QA_1A_2 \ldots A_n$ дұрыс пирамиданың бүйір қырлары өзара тең болғаны үшін оның бүйір жақтары теңбүйірлі үшбұрыштардан құралған болады. Осы үшбұрыштардың табандары дұрыс көпбұрыштың қабырғасы болғандықтан өзара тең болады.

Демек, дұрыс пирамиданың бүйір жақтары үш қабырғасы бойынша өзара тең.

3) дұрыс пирамиданың бүйір жақтары тең болғаны үшін, олардың Q төбесінен түсірілген биіктіктері де өзара тең болады.

Демек, дұрыс пирамиданың апофемалары да өзара тең.

2.2 -теорема. *Дұрыс пирамиданың бүйір сырты оның табанының жарты периметрі мен апофемасының көбейтіндісіне тең.*

Дәлелдеу. Айталық, $QA_1A_2 \ldots A_n$ дұрыс пирамида болсын *(13-сурет)*. Пирамиданың бүйір сырты оның бүйір жақтары аудандарының қосындысына тең. Оның бүйір жақтары өзара тең болғаны үшін теңбүйірлі үшбұрыштардан құралған. Өз кезегінде осы үшбұрыштардың биіктіктері де өзара тең апофемалардан құралған:

$QE_1 = QE_2 = \ldots = QEn.$

Бұдан $S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \ldots + S_{A_nQA_1} =$

$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \ldots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n =$

$= \frac{1}{2} (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1)\, QE_1 = p \cdot a,$

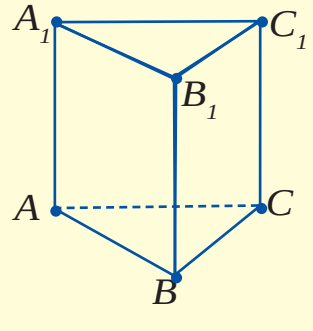
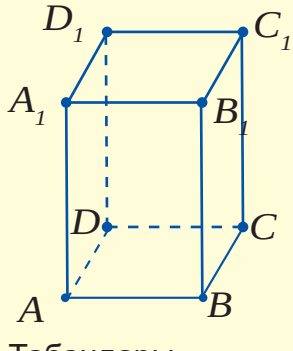
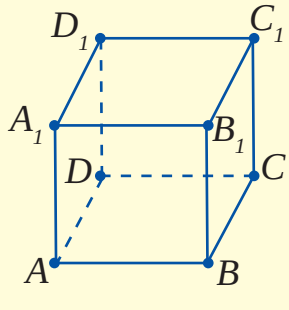
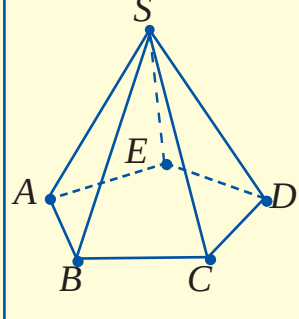
мұндағы p – пирамида табанының жарты периметрі, a – пирамида апофемасы.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар

1. *Қандай геометриялық фигуралар: а) жазық; b) кеңістіктегі деп аталады?*
2. *Кеңістіктегі дене деген не?*
3. *Қандай дене көпжақ деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
4. *Қандай дене призма деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
5. *Призманың қандай түрлерін білесің?*
6. *Тікбұрышты параллелепипедтің анықтамасын айт.*
7. *Қандай дене пирамида деп аталады? Оның элементтеріне анықтама бер.*
8. *Пирамиданың қандай түрлерін білесің?*
9. *Дұрыс пирамиданың қасиеттерін айт.*

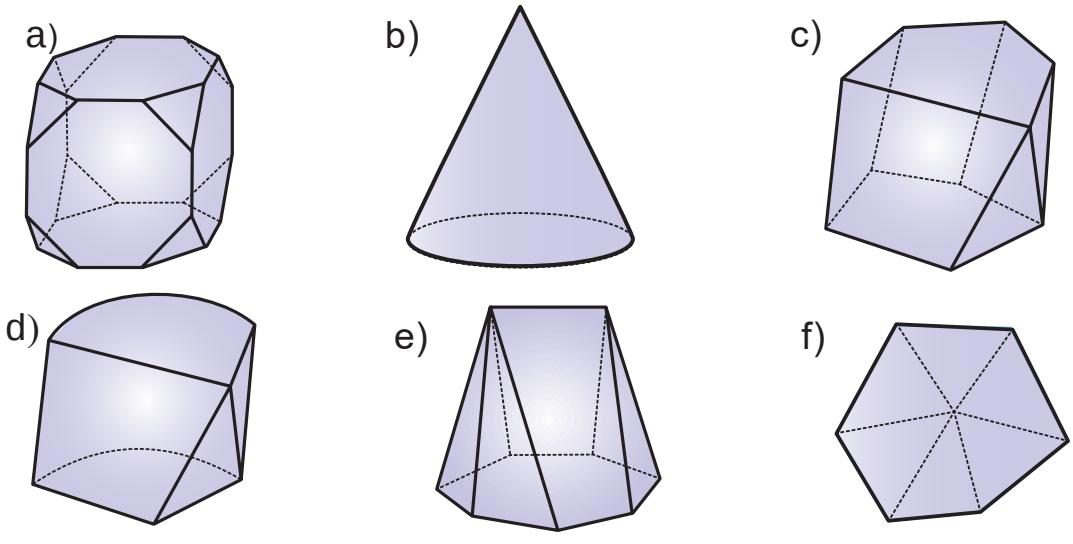
Практикалық жаттығулар мен қолданулар

6.1. Кестеде 6-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Көпжақтар			
Призма	**Тікбұрышты параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
Табандары – көпбұрыш, жақтары – параллелограмдар	Табандары – тік төртбұрыш, жақтары – тік төртбұрыш	Табандары – квадрат, жақтары – квадрат	Табаны – көпбұрыш, жақтары – үшбұрыш

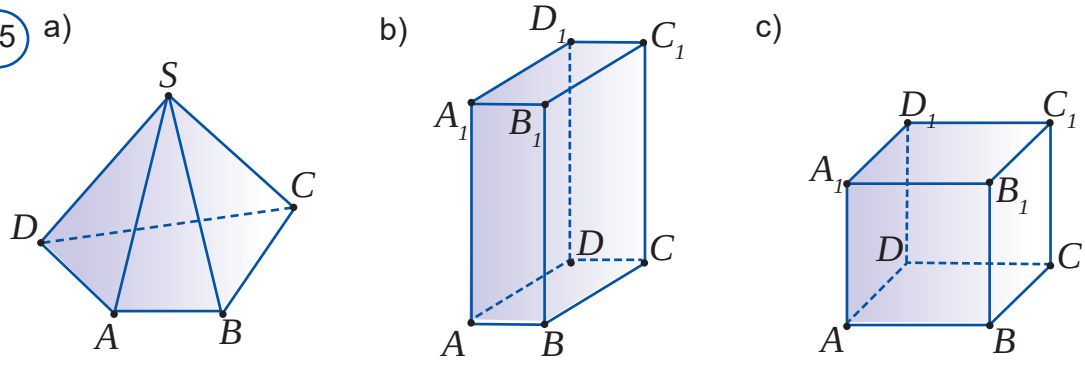
6.2. 14-суреттегі кеңістіктегі денелердің қайсылары көпжақ?

14

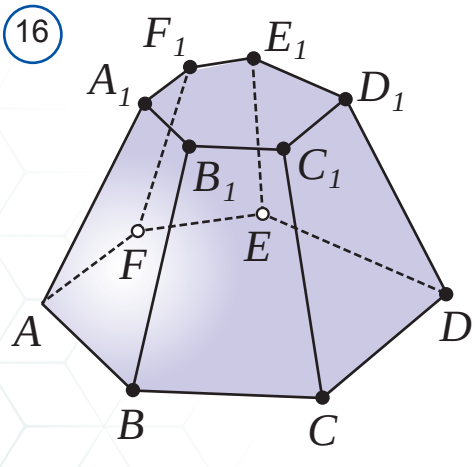


6.3. 15-суреттегі кеңістіктегі денелердің қайсылары: 1) куб; 2) пирамида; 3) призма?

15



16



6.4. 15a-суреттегі пирамиданың неше төбесі, қыры және жағы бар? Табаны қандай көпбұрыштан құралған? Бүйір жақтары ше?

6.5. 15b-суреттегі призманың неше төбесі, қыры және жағы бар? Табаны қандай көпбұрыштардан құралған? Бүйір жақтары ше?

6.6. 16-суретте $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ көпжақ бейнеленген. Ондағы:

a) CD қыр ортақ болған жақтарды;

b) DD_1 қыр ортақ болған жақтарды;

c) E төбе ортақ болған жақтарды;

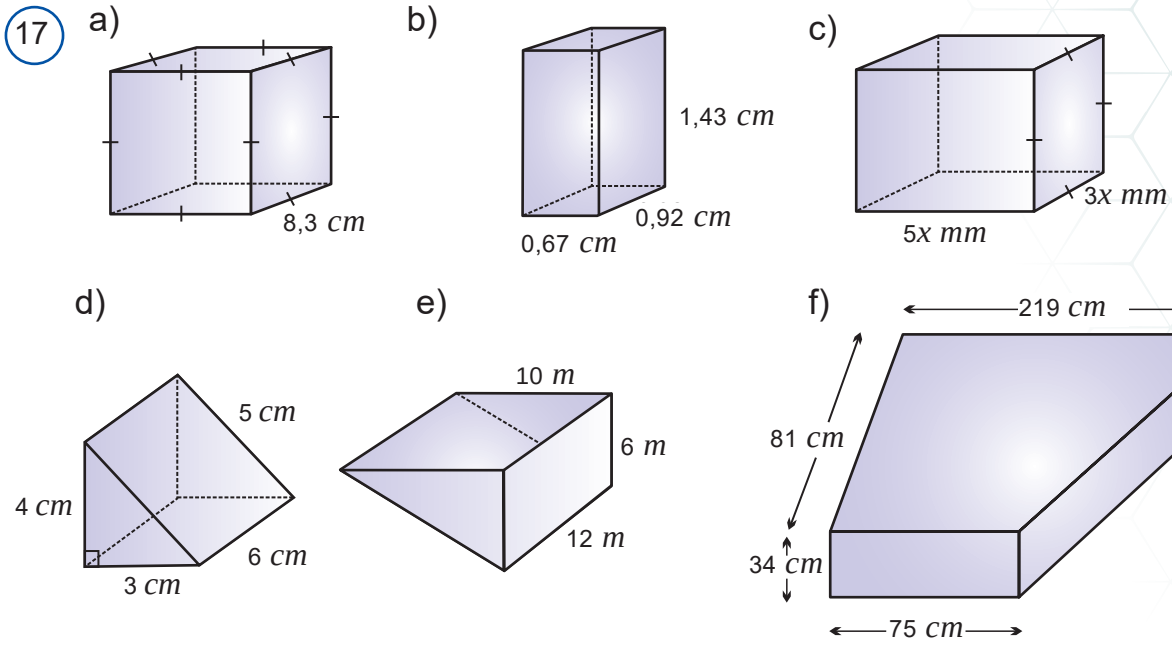
d) C_1 төбе ортақ болған жақтарды;

e) A төбе ортақ болған қырларды;

f) F_1 төбе ортақ болған қырларды айт.

6.7. Призманың: a) 9; b) 16 төбесі болуы мүмкін бе?

17



6.8. Кез келген призманың төбелерінің саны жұп болуын негізде.

6.9. Призманың: a) 14; b) 15 қыры болуы мүмкін бе?

6.10. Кез келген призманың қырларының саны 3-ке еселі болуын негізде.

6.11. Призманың a) 10 төбесі; b) 18 қыры; c) 8 жағы болса, оның түрін анықта.

6.12. Кез келген n бұрышты призманың: a) төбелері; b) қырлары; c) жақтарының санын есептеу формуласын келтіріп шығар.

6.13. Пирамиданың: a) 3; b) 7 төбесі болуы мүмкін бе?

6.14. Пирамиданың: a) 20; b) 21 қыры болуы мүмкін бе?

6.15. Кез келген пирамиданың қырларының саны жұп болатынын негізде.

6.16. Пирамиданың: a) 6 төбесі; b) 22 қыры; c) 10 жағы бар болса, оның түрін анықта.

6.17. Призманың: a) 9; b) 16 жағы болуы мүмкін бе?

6.18. 15 бүйір қыры бар призиманың табаны қандай көпбұрыштан құралған?

6.19. 32 қыры бар пирамиданың табаны қандай көпбұрыштан құралған?

6.20. Кез келген n бұрышты пирамиданың a) төбелері; b) қырлары; c) жақтарының санын есептеу формуласын келтіріп шығар.

6.21. 17-суреттегі мәліметтерді пайдаланып, көпжақтардың толық сыртын тап.

Франция императоры Наполеон Бонапарт өте өткір және жанды пікірге ие болып, геометрия бойынша зор білімді еді. Ол бұл ғылымды әскери істерде ғана емес, жалпы алғанда маңызды деп санаған. Император тіпті геометрияға байланысты бірқанша маңызды еңбектер де жазған. Оның құрметіне геометриялық мәселелердің бірі кейіннен “Наполеон мәселесі” деп аталған.

6.22. Дұрыс призманың бүйір жақтары тік төртбұрыш екенін дәлелде.

6.23. Дұрыс призма бүйір беті табанының периметрі мен және бүйір қырының көбейтіндісіне тең екенін дәлелде.

6.24. Түзу параллеепипедтің табаны – диагоналдары 10 *m* және 24 *m* болған ромбдан құралған. Егер параллелепипедтің бүйір қыры 8 *m* болса, оның толық бетін тап.

6.25. Тік бұрышты параллелепипедтің барлық жақтары тік төртбұрыш екенін дәлелде.

6.26. Үшбұрышты дұрыс призма табанының қабырғасы 6 *cm*, бүйір қыры 11 *cm*-ге тең. Призманың толық бетін тап.

6.27. *n* бұрышты дұрыс призма табанының қабырғасы a-ға, бүйір қыры *h*-қа тең. Егер: a) n = 3, a = 5, h = 10; b) n = 4, a = 10, h = 30; c) n = 6, a = 18, h = 32; d) n = 5, a = 16, h = 25 болса, призманың бүйір беті және толық бетін тап.

6.28. Үшбұрышты дұрыс пирамида апофемасы 15-ке, пирамида төбесін табан центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 12-ге тең. Пирамиданың: a) бүйір қыры мен табанының қабырғасын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

6.29*. Пирамида табанының қабырғалары 8 және 10, кіші диагоналы 6-ға тең болған параллелограмнан құралған. Пирамида төбесін табан диагоналдарының қиылысу нүктесімен қосатын кесіндінің ұзындығы 4-ке тең және бұл диагоналдарға перпендикуляр. Пирамиданың: a) бүйір қырларын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

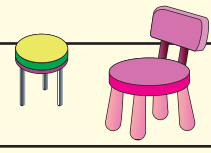
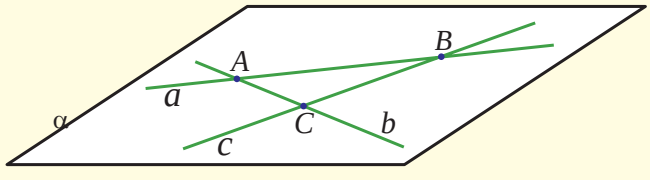
6.30*. Алтыбұрышты дұрыс пирамида табанының қабырғасы 10 *cm*-ге тең. Пирамида төбесін табан центрімен қосатын кесіндінің ұзындығы 69-ға тең. Пирамиданың: a) бүйір қыры мен апофемасын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

6.31. Алтыбұрышты дұрыс пирамида бүйір бетінің ауданы 150 m^2-ге, бүйір қыры 10 *m*-ге тең. Пирамида табанының ауданын тап.

6.32. Тік призманың табаны гипотенузасы 5 cm, катеті 4 *cm* болған тікбұрышты үшбұрыш. Егер ең кіші катет жатқан жақ квадрат болса, призманың бүйір бетінің ауданын тап.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР

1. Төмендегі сөйлемді оқы. Сөйлем дұрыс болса “+”, қате болса “–” таңбасын жанындағы торкөзге қой

A	A, B, C, D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. A, B, C және B, D, A нүктелерден өтетін екі жазықтық DB түзу бойынша қиылысады.	
B	Жерде 3 аяқты орындық 4 аяқты орындыққа қарағанда берік тұрады. 	
C	$ABCD$ төртбұрыштың тек үш – A, B, C қырлары бір жазықтықта жатады.	
D	Бір түзуде жатпаған үш нүктеден тек бір ғана жазықтық өткізуге болады.	
E	A, B, C, D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. Ол жағдайда бұл нүктелердің кез келген үшеуі бір түзуде жатпайды.	
F	Екі түрлі – a және b түзулер A нүктеде қиылысады. Бұл түзулерді қиып өтетін және A нүктеден өтпейтін түзулер бір жазықтықта жатады. 	
G	Екі түрлі – α және β жазықтықтар m түзу бойымен қиылысады. a түзу α жазықтықта, b түзу β жазықтықта жатады. a және b түзулер A нүктеде қиылысады. Ол жағдайда A нүкте m түзуде жатады.	
H	Екі түрлі жазықтық тек бір ортақ нүктеге ие болуы мүмкін.	

2. Кеңістікте a түзуде жатпайтын O нүктеден өтетін және бұл түзумен қиылыспайтын неше түзу өткізуге болады?
A) 3 B) шексіз C) ешқандай D) 1 E) 2

3. Түсіріліп қалдырылған сөзді таңдап, сөйлемді толықтыр:
Екі параллель жазықтық кеңістікті _____ бөлікке бөледі.
A) 3 B) 4 C) 6 D) 2

4. Үстел үстінде қонып тұрған маса түрлі жаққа қарай ұшып кетті. Қашан олар тағы бір жазықтықта орналасады?

5. Кеңістікте үшеуінің ешқайсысы бір жазықтықта жатпайтын төрт параллель түзу арқылы ең көбі неше жазықтық өткізуге болады?

6. Кеңістікте үшеуінің ешқайсысы бір жазықтықта жатпайтын, екеуінің ешбірі бір түзуде жатпайтын бір ортақ төбеге ие болған алты сәуле арқылы ең көбі неше жазықтық өткізуге болады?

7. Кеңістікте төртеуі де бір жазықтықта жатпайтын, үшеуінің еш біреуі де бір түзуде жатпайтын алты нүкте арқылы ең көбі неше жазықтық өткізуге болады?

8. Призманың 14 төбесі болса, оның түрін анықта.

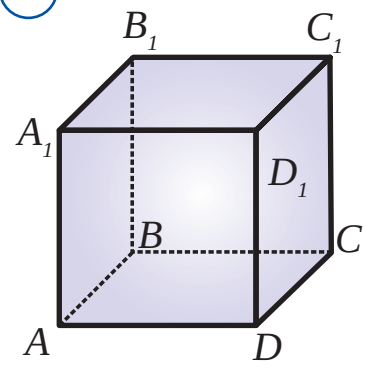
9. 27 қыры бар пирамиданың табаны қандай көпбұрыш?

10. Алтыбұрышты дұрыс пирамида бүйір бетінің ауданы 120 m^2-ге, апофемасы 10 m-ге тең. Пирамида табанының ауданын тап.

Қосымша тесттер мен есептер

1. Тест

1



1. Қайсы тұжырым қате?

A) Кеңістіктегі кез келген үш нүктеден тек бір ғана жазықтық өтеді.

B) Қиылушысы екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өтеді.

C) Параллель екі түзу арқылы тек бір ғана жазықтық өтеді.

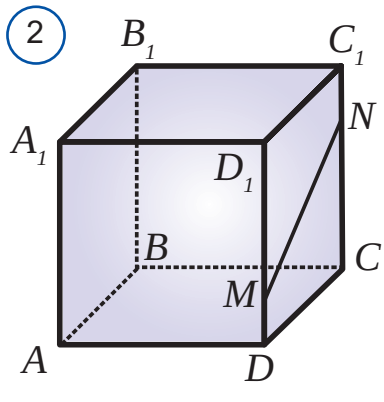
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб *(1-сурет)*. ABC және DD_1C_1 жазықтықтар ...

A) қиылысады;

B) қиылыспайды;

C) бетпе-бет түседі.

2



3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб *(2-сурет)*. MN түзу қайсы жазықтықты қиып өтпейді?

A) ABC;

B) AA_1B_1;

C) BB_1C_1.

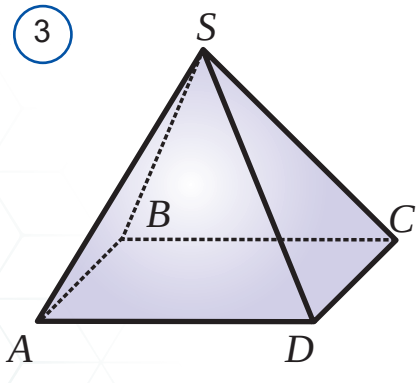
4. $SABCD$ – төртбұрышты пирамида *(3-сурет)*. SD түзу қайсы түзуді қиып өтпейді?

A) BC;

B) AD;

C) SC.

3



5. Екі әр түрлі жазықтық …

A) ортақ нүктеге ие емес

B) ортақ түзуге ие емес

C) бір түзуде жатпайтын үш ортақ нүктеге ие емес

6. m және k түзулер арқылы біреуден артық жазықтық өткізуге болады. Ол жағдайда m және k түзулер ...

A) қиылысады

B) параллель

C) бетпе-бет түседі

7. Нүкте a түзуге тиісті. Олар арқылы ...

A) кемінде бір жазықтық өткізуге болады

B) тек бір жазықтық өткізуге болады

C) біреуден артық жазықтық өткізуге болады

8. A, B, C және D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. AB va CD түзулер туралы не деуге болады?

A) қиылысады

B) параллель

C) айқас

9. Түзулер туралы қайсы тұжырым дұрыс *(2-сурет)*?

A) BC және MN қиылысады.

B) BC және MN айқас.

C) MN және DC қиылыспайды.

10. Екі түзудің өзара параллельдігін дәлелдеу үшін нені анықтау жеткілікті?

A) олардың қиылыспайтынын;

B) олардың кез келген түзуге перпендикулярлығын;

C) олардың қиылыспайтынын және бір жазықтықта жатпайтынын.

11. Қайсы тұжырым қате?

A) $\parallel b,\ b \parallel c \to a \parallel c$

B) $a \parallel b,\ c \perp a \to c \perp b$

C) $a \perp b,\ b \perp c \to a \parallel c$

12. F нүкте $ABCD$ параллелограмм жазықтығында жатпайды. K нүкте DF кесіндінің, N нүкте BF кесіндінің центрі. Ол жағдайда AK және CN түзулер...

A) айқас

B) қиылысады

C) параллель

13. a түзу α жазықтыққа параллель. Төмендегі тұжырымдардың қайсы бірі қате?

A) a түзу α жазықтықта жатқан кез келген түзуге параллель.

B) a түзу α жазықтықта жатқан ешқайсы түзуді қиып өтпейді.

C) α жазықтықта жататын және a түзуге параллель түзу бар.

14. Қайсы тұжырым қате?

A) Егер жазықтық басқа жазықтыққа параллель болған түзуден өтіп, бұл жазықтықты қиып өтсе, ол жағдайда жазықтықтардың қиылысу сызығы берілген сызыққа параллель болады.

B) Егер түзу қиылысатын екі жазықтыққа параллель болса, ол жағдайда олардың қиылысу сызығына параллель болады.

C) Бір жазықтыққа параллель болған түзулер параллель.

15. $ABCD$ трапецияның MN центр сызығы α жазықтықта жатады. Трапецияның A төбесі бұл жазықтыққа тиісті емес. Ол жағдайда BC түзу...

A) α жазықтықта жатады

B) α жазықтықты қиып өтеді

C) α жазықтыққа параллель

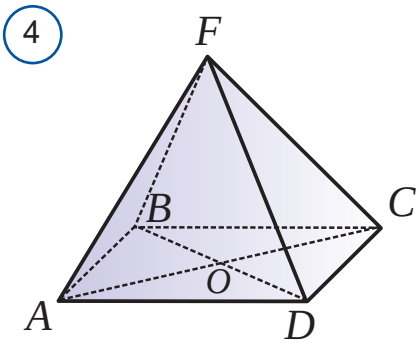
16. M нүкте a түзуде жатпайды. Ол жағдайда қайсы тұжырым қате?

A) M нүкте арқылы a түзуді қиып өтпейтін тек бір түзу өткізуге болады.

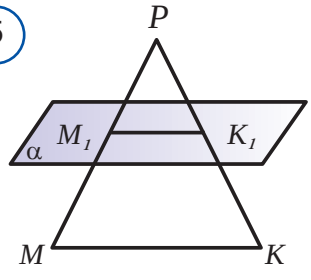
B) M нүкте арқылы a түзуге параллель тек бір түзу өткізуге болады.

C) M нүкте арқылы a түзуді қиып өтпейтін шексіз көп түзу өткізуге болады.

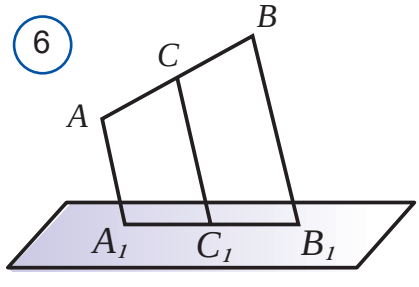
4



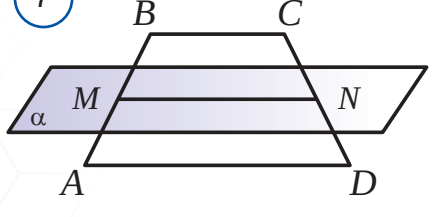
5



6



7



17. a түзу α жазықтыққа параллель, b түзу де β жазықтыққа параллель. a және b түзулер туралы не дейміз?

A) параллель

B) қиылысады

C) айқас

18. a түзу бойымен екі жазықтық қиылысады. a және b түзулер айқас және a, c түзулер параллель. b және с түзулер туралы не деуіміз мүмкін?

A) бұл жазықтықтардың бірінде жатады;

B) берілген түрлі жазықтықтарда жатады;

C) бұл жазықтықтармен қиылысады (жауап оң болса, a және b түзулердің өзара орналасуын көрсет).

2. Есептер

1. A, B және C нүктелер бір түзуде жатады, D нүкте онда жатпайды. Әр үш нүктеден өткізілген жазықтықтардың саны нешеу?

2. α және β жазықтықтар m түзу бойымен қиылысады. A нүкте α жазықтықта, B нүкте β жазықтықта жатады. Қайсы жағдайда AB түзу сызығы β жазықтықта жатады?

3. Бес жазықтық сызылған. Олардың әр екеуі қиылысады. Жұп-жұп қиылысатын жазықтықтардың қиылысу түзулерінің ең көп саны неге тең?

4. $ABCD$ – параллелограмм *(4-сурет)*. $F \notin ABC$. AFC және BFD жазықтықтар қайсы түзу бойымен қиылысады?

5. MKP үшбұрыш берілген *(5-сурет)*. MK түзуге параллель жазықтық MP қабырғаны M_1 нүктеде, PK қабырғаны K_1 нүктеде қиып өтеді. $MK = 18$ *см*, $MP : M_1P = 12 : 5$. M_1K_1 кесіндінің ұзындығын тап.

6. AB кесінді α жазықтықпен қиылыспайды *(6-сурет)*. Кесіндінің төбелері және оның центрі C нүкте арқылы параллель түзулер өткізілген. Бұл түзулер α жазықтықты сәйкес түрде A_1, B_1 және C_1 нүктелерінде қиып өтеді. $AA_1 = 6$ *см*, $CC_1 = 9$ *см*. BB_1 кесіндінің ұзындығын тап.

7. $ABCD$ трапеция табандарына параллель болған жазықтық AD және CD қабырғаларын сәйкес түрде M және N нүктелерде қиып өтеді *(7-сурет)*. $CN = ND$. $AD = 6$ *см*, $BC = 4$ *см*. MN кесіндінің ұзындығын тап.

8. $ABCD$ пирамидада M, H және P нүктелер сәйкес түрде AD, DC және AB қырларының центрі *(8-сурет)*. $KH \,//\, ABD$. $AC = 8$ *см*, $BD = 10$ *см*. $MHKP$ төртбұрыштың периметрін тап.

9. Екі түрлі жазықтықтың бір түзуде жатпайтын үш ортақ нүктесі болуы мүмкін бе?

10. a түзу α жазықтықта жатады. β жазықтық α жазықтықты b түзу бойымен қиып өтеді. a түзу b жазықтықты В нүктеде қиып өтеді. В нүкте қай жерде жатады?

11. Бір жазықтықта жатпайтын a, b және c түзулер бір нүктеден өтеді. Бұл түзулердің жұбы арқылы неше түрлі жазықтықтарды өткізуге болады?

12. A, B нүктелер және CD түзу бір жазықтықта жатпайды. CD және AB түзулер өзара қалай орналасқан?

13. Квадраттың екі сыбайлас төбесі және диагональдарының қиылысу нүктесі α жазықтықта жатады. Квадраттың қалған екі төбесі де сол жазықтықта жататынын дәлелде.

14. a және b түзулер айқас. c түзу b түзуге параллель. a және c түзулер қиылысуы мүмкін бе?

15. M нүкте $ABCD$ параллелограмм жазықтығынан сырттай орналасқан.

1) MAD және MBC үшбұрыштарының центр сызықтары параллель екенін дәлелде.

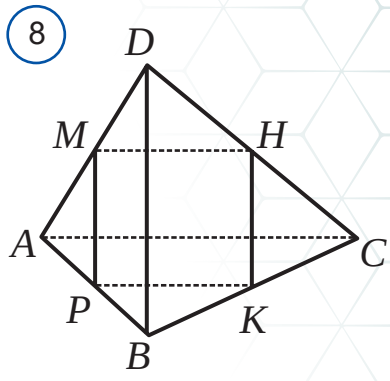
2) $ABCD$ параллелограмның табаны 5-ке тең. Биіктігі 4-ке тең және ол түсірілген қабырғаны екіге бөледі. MAD және MBC үшбұрыштарының центрлік түзулерін тап.

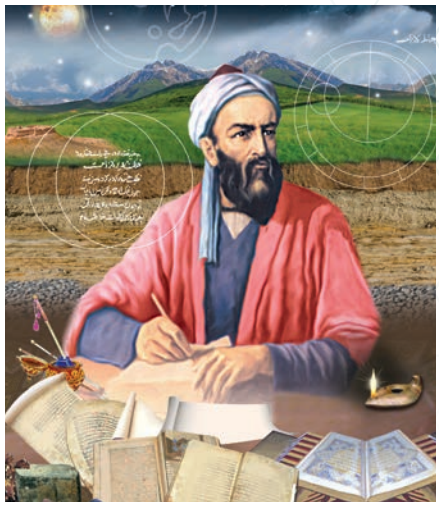
16. α жазықтық ABC үшбұрыштың AB және BC қабырғаларын сәйкес түрде M және N нүктелерде қиып өтеді. $BN : NC = 5 : 8$ және $MB : AB = 5 : 13$.

1) $AC \,//\, \alpha$ екенін дәлелде.

2) AC = 26 болса, MN-ны тап.

8





Әбу Райхан Беруни — дүние пәні тарихында жарқын із қалдырған ұлы энциклопедист ғалымдардың бірі. Оның шығармаларында геометрияның барлық салалары (планиметрия, стереометрия және қатынастар теориясына) қатысты құнды мәліметтер өз көрінісін тапқан. Мысалы, "Жұлдызтану өнері негіздерін түсіндіру кітабының" геометрия бөлімінде негізгі геометриялық фигуралар, олардың анықтамалары мен қасиеттері, жазықтықтағы фигуралардың сыртқы бетін есептеу жолдары, сондай-ақ кеңістіктегі денелердің сыртқы мен көлемін табуға байланысты ережелер толық түсіндірілген. Әу Райхан Берунидің бұл еңбегі Шығыс елдерінде ұзақ уақыт математикадан оқулық ретінде қолданылып келген.

“GeoGebra”ны қолдану

“GeoGebra” – математикалық “жанды” сызбалар бағдарламасы

GeoGebra – геометрия, алгебра, тағы басқа пәндер бойынша білім берудің түрлі деңгейінде пайдалану үшін динамикалық (“жанды”) сызбаларды жасауға мүмкіндік беретін тегін бағдарлама. Ол геометриялық фигуралармен, алгебралық өрнектермен, кестелермен, графиктермен және статистикамен жұмыс істеудің кең мүмкіндіктерін ұсынады.

- Бұл бағдарламаны 2002 жылы австриялық математик Маркус Хохэнвартер жаратқан, қазіргі күнде оны миллиондаған адамдар пайдаланады.
- **GeoGebra бағдарламасының артықшылығы:**
- тегін;
- көптілді интерфейске ие;
- графикалық интерфейс қарапайым және пайдалану оңай;
- түрлі операциялық жүйелерге (тіпті планшеттер мен смартфондарда) орнату мүмкіндігі және онлайн нұсқасының болуы;
- пайдаланушыларға өз материалын қосу үшін ашық базаның болуы.

“GeoGebra” – бағдарламасының бөлімдерінің міндеттері

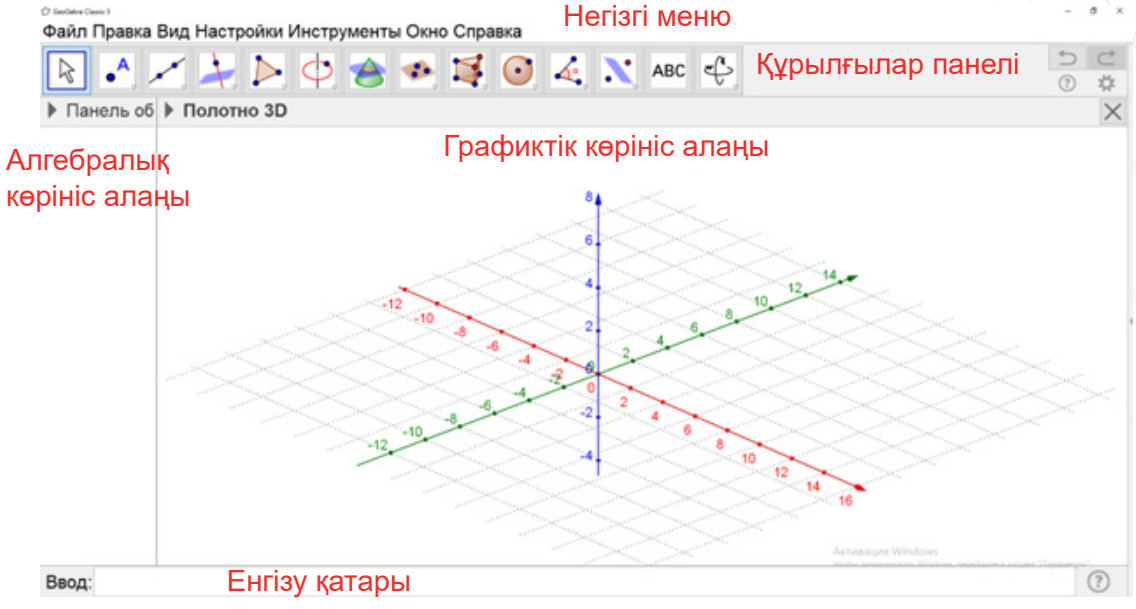
	Калькуляторлар жинағы Функцияларды тексеру, теңдеулерді шешу, геометриялық фигуралар-ды және 3D нысандарды құру		**Геометрия** Түрлі геометриялық фигураларды сызу және олардың пішіндерін алмастыру
	3D калькулятор Түрлі сызбалар, 3D (үш өлшемді) геометриялық фигуралар мен нысандарды сызу	x=	**CAS калькулятор** Түрлі теңдеулерді шешу, алгебралық өрнектердің пішінен алмастыру, туынды және интегралдарды есептеу
	Кестелі калькулятор Түрлі функциялардың графиктерін құру, теңдеулерді қолдану және деректерді бейнелеу		**Классикалық GeoGebra** Геометрия, деректерді бейнелеу, ықтималдықтарды және өлшемдерді есептеу

Практикалық тапсырма

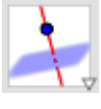
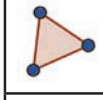
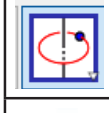
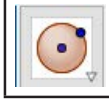
1. **“GeoGebra”**ның ресми вебсайтынан (http://www.geogebra.org/) **“GeoGebra”** туралы толық мәлімет ал және оны компьютер, планшет немесе смартфоныңа осы вебсайттан орнатып ал.
2. **“Youtube”** каналында (https://www.youtube.com/GeoGebraChannel) **“GeoGebra”**ны үйренуге арналған бейнесабақтарды және оны пайдалануға қатысты мысалдарды қарап шық.
3. 3D калькуляторда жаратылған қарапайым жұмыстарды үйренуге әрекет ет.

“GeoGebra” 3D калькуляторы интерфейсінің көрінісі

“GeoGebra” бағдарламасы “3D Калькулятор“ режиміне өткізілгеннен кейін мынадай көріністегі терезе пайда болады:



3D калькулятордың панеліндегі негізгі құрылғылардың міндеттері

	**Перемещать** (Жылжыту) – түрлі объектілер (нүкте, түзу, көпбұрыш және басқаларды) жылжыту. Бір уақыттың өзінде бірнеше объектілерде таңдау үшін Ctrl түймешігін басып, тышқанмен бірізділікпен белгілеу керек.
	**Точка** (Нүкте) – жазықтыққа нүкте салу. Нүкте салу үшін жазықтықтағы орынды белгілеу керек.
	**Прямая** (Түзу) **–** жазықтықта берілген екі нүкте арқылы түзу салу. Сызбада бар нүктелерді таңдауыңа немесе тышқанмен орнын белгілеуіңе болады.
	**Перпендикулярная линия** (Перпендикулярлық түзу) **–** берілген нүкте арқылы түзуге перпендикуляр түзу өткізу. Перпендикуляр өткізу үшін жазықтықта перпендикуляр құратын түзу мен түзу өтетін нүктені көрсету керек.
	**Многоугольник** (Көпбұрыш) – жазықтықта кез келген түрдегі көпбұрышты салу.
	**Окружность по точке и оси** (Осіне және нүктесіне қарай шеңбер) – берілген ось және нүктеге қарай белгілі бір радиусты шеңбер салу.
	**Плоскость через три точки** (Үш нүкте арқылы жазықтық) – берілген үш нүкте арқылы жазықтық өткізу. Сонымен қатар, параллель және перпендикуляр жазықтықтар да өткізуге болады.
	**Пирамида** (Пирамида) – берілген нүктелері арқылы пирамида, призма, конус, цилиндр және куб сияқты кеңестіктегі денелерді салу.
	**Сфера по центру и точке** (центріне және нүктесіне қарай сфера) – центрі және сырттай берілген нүкте арқылы сфера жасау.

7 КӨПЖАҚТАРДЫ КЕСКІНДЕУ ЖӘНЕ МОДЕЛІН ЖАСАУ

Көпжақтарды жазықтықта кескіндеу

Геометриялық есептерді шешуде есептің шартына сәйкес сызбаны сызу өте маңызды. Кейде дұрыс сызылған сызба – есептің "жартылай шешіміне" тең. Стереометрияда есептің сызбасын дұрыс сызу өте маңызды, өте жауапты және кейде өте күрделі жұмыс саналады. Өйткені стереометриялық фигуралар үш өлшемді болып, оларды жазықтықта, дәптердің бетінде кескіндеу қажет болады. Қате сызылған сызба қате шешімге немесе басы бітеу көшеге бастайды.

Призманы бейнелеу төмендегі тәртіппен жүргізіледі *(1-сурет)*. Алдымен көпбұрыш пішініндегі табандардың бірі сызылады. Сосын оның әрбір төбесінен өзара параллель және тең кесінділер, яғни призманың жасаушылары сызылады. Кесіндінің соңы сәйкес түрде қосылып сызылады. Мұнда екінші табан пайда болады.

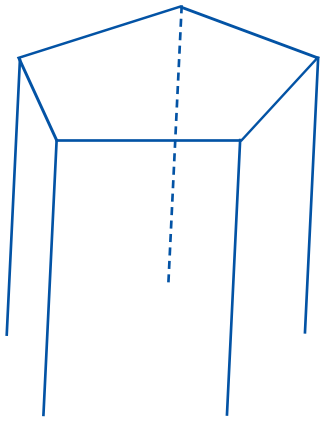
Сызбада призманың көрінбейтін қырлары штрих-пунктир сызықпен сызылады.

Пирамиданы кескіндеу де осыған ұқсас тәртіппен жүргізіледі *(2-сурет)*. Алдымен көпбұрыш пішініндегі табаны сызылады. Сосын пирамиданың төбесі белгіленіп, осы нүкте табанның әрбір төбесімен қосылып сызылады. Сызбада пирамиданың көрінбейтін қырлары пунктир сызықпен сызылады.

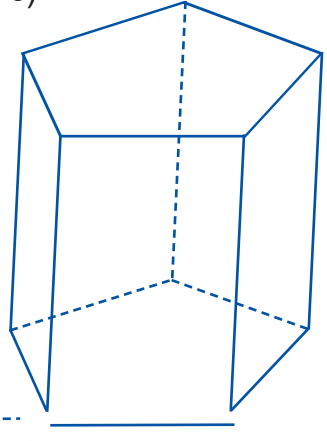
1 a)



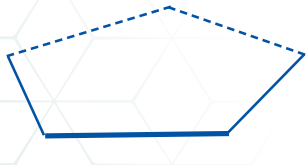
b)

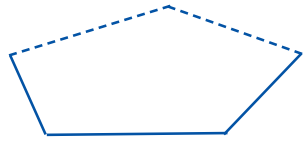


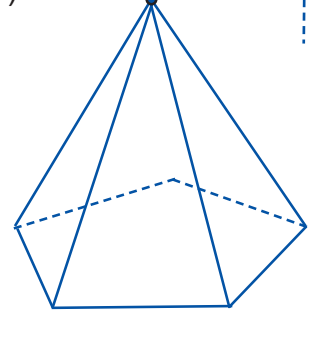
c)



2 a) b) c)





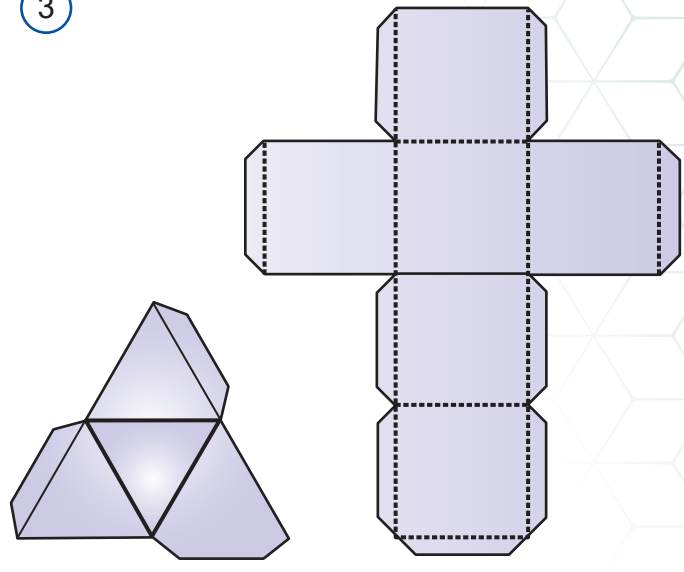


Кеңістіктегі фигуралардың модельдерін жасау

Көпжақты кейбір қырларының бойымен қиып, жазықтыққа жайғанда көпжақтың барлық жақтары сол жазықтыққа жатса, бұл жазық фигура *жазық көпжақ* деп аталады. 3-суретте куб және үшбұрышты пирамиданың жайылмасы берілген.

Көпжақтың макетін жасау үшін алдымен оның жайылмасын қалың қағазға салып, соң қайшымен қиып, тиісті қырларын желімдеп шығуға болады. Желімдеу қолайлы болуы үшін желімделетін қырларында белгілі бір қалыңдықта жиектер тастап сызылады және қиылады.

3

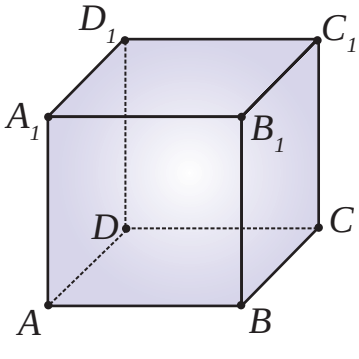


Практикалық жаттығулар мен қолданулар

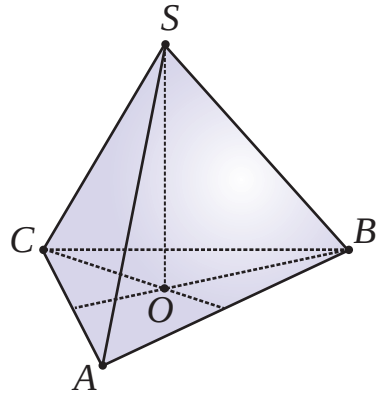
7.1. 4-суретте келтірілген кеңістіктегі фигураларды дәптердің торкөздерін пайдаланып сал және түрін айт. Үзік сызықтардың қолданылуына назар аудар.

4

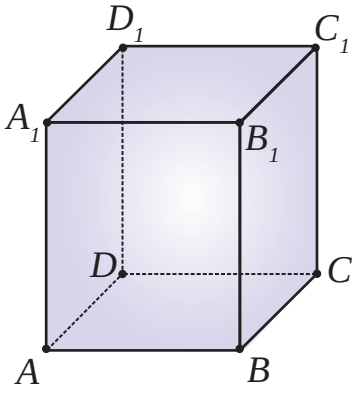
a)



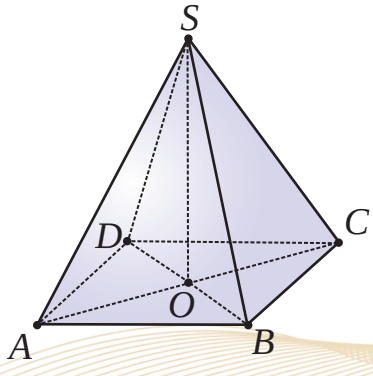
b)



c)



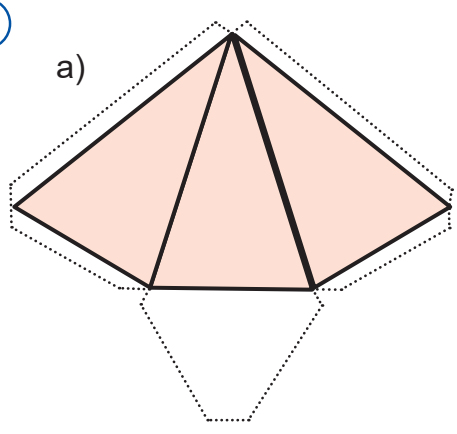
d)



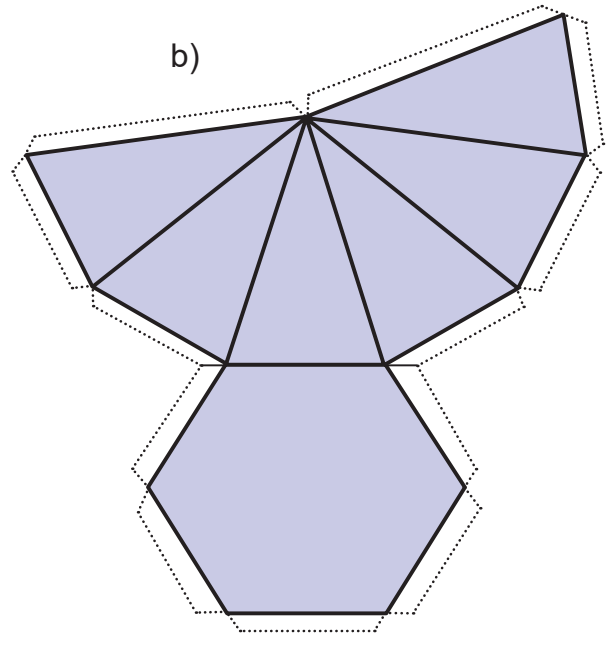
7.2. Кеңістіктегі денелерді жақсырақ көз алдымызға келтіру үшін олардың моделін пайдаланған жөн. Кеңістіктегі денелердің моделін олардың жайылмасын пайдаланып жасауға болады *(5-сурет)*. Көрініп тұрғанындай, кеңістіктегі денелердің жайылмасы жазық геометриялық фигуралардан құралған. Төмендегі жайылмаларды пайдаланып тікбұрышты параллелепипедтің, кубтың, пирамидалардың моделін жаса.

5

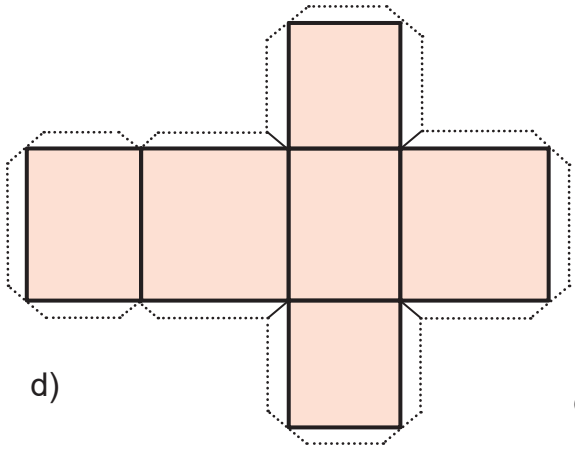
a)



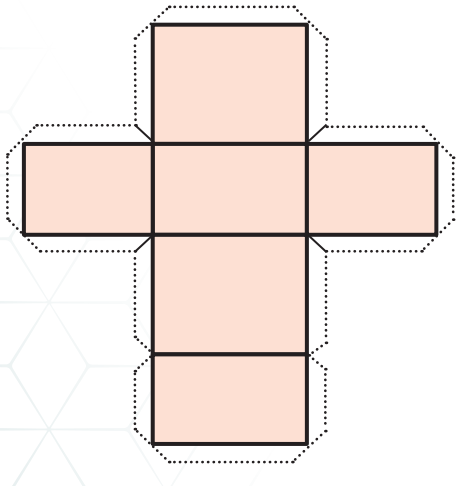
b)



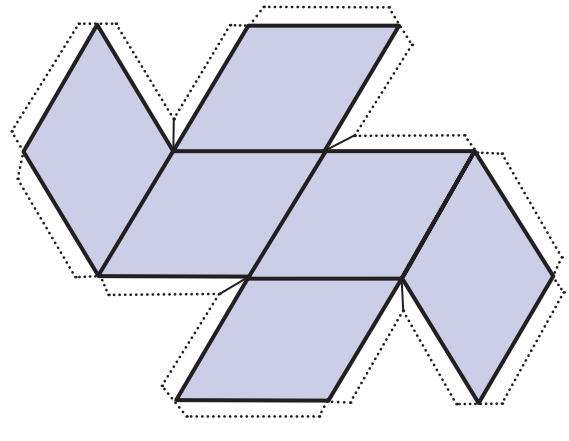
c)



d)



e)



7.3. Тікбұрышты параллелепипед және төртбұрышты дұрыс пирамиданың жайылмасын сал.

7.4. 6-суреттегі жайылмалардың қайсылары кубтың жайылмасы болады?

7.5. 7-суреттегі жайылмалардың қайсылары призмалардың жайылмасы болады? Призмалардың түрін анықта.

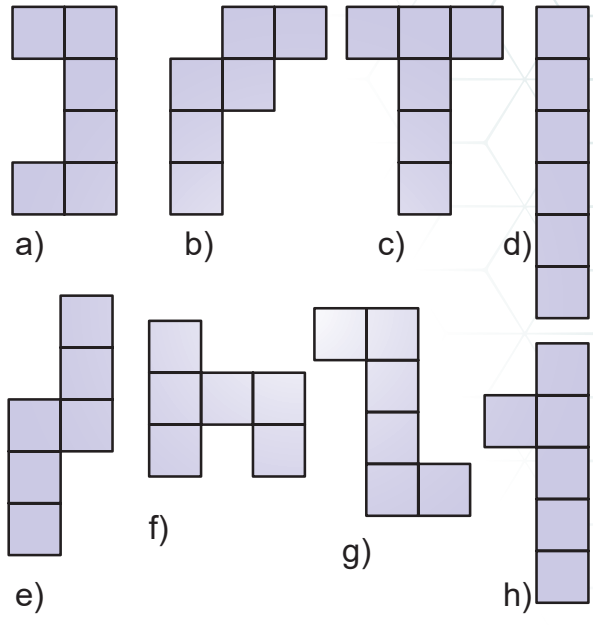
7.6. 8-суреттегі жайылмалардың қайсылары пирамидалардың жайылмасы болады? Пирамидалардың түрін анықта.

7.7. Үш түрлі түспен кубты оның сыбайлас жақтары әр түрлі түспен боялатындай етіп бояуға бола ма? Кубтың моделін жаса және сәйкес түске боя.

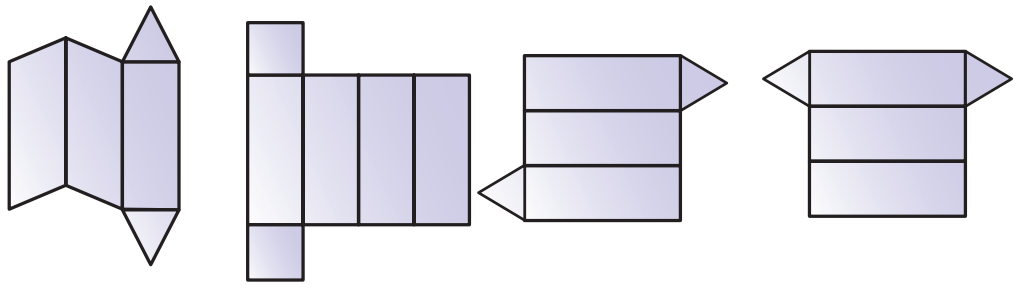
7.8. 9 сіріңке шырпысынан 7 тең үшбұрыш жаса.

7.9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың сыртындағы A төбесінен C_1 төбесіне баратын ең қысқа жолды тап.

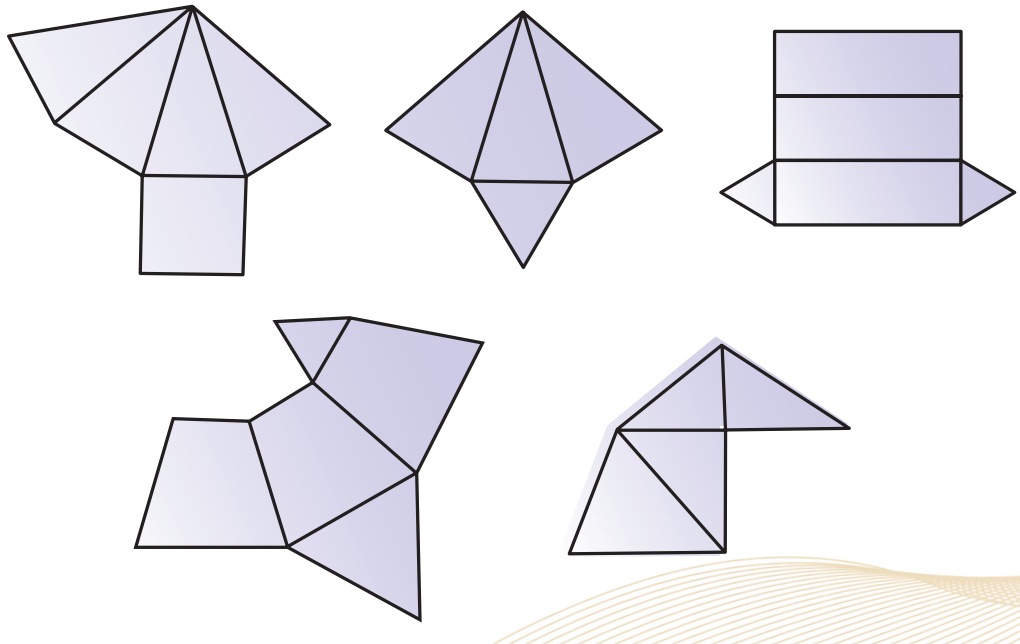
6



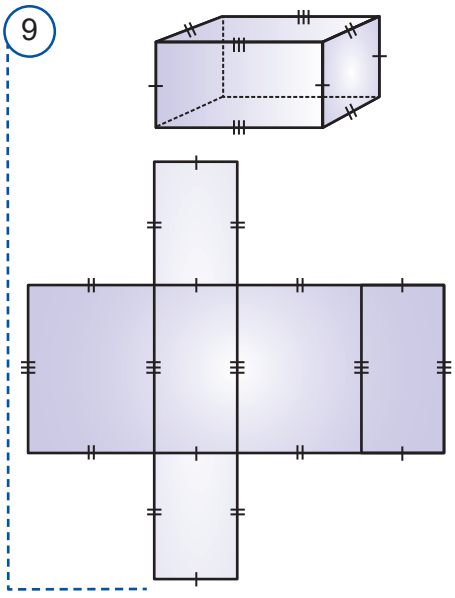
7



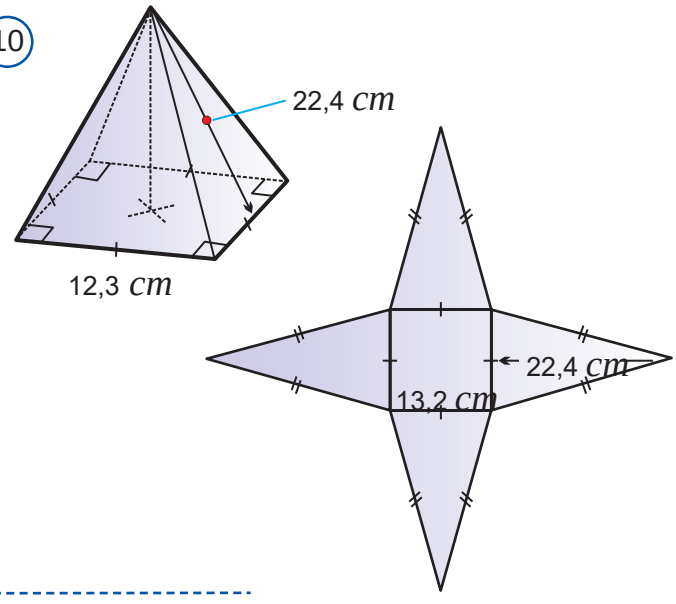
8



9



10



7.10. 9-суреттегі тікбұрышты параллелепипедтің жайылмасына сәйкес оның толық бетінің формуласын тап.

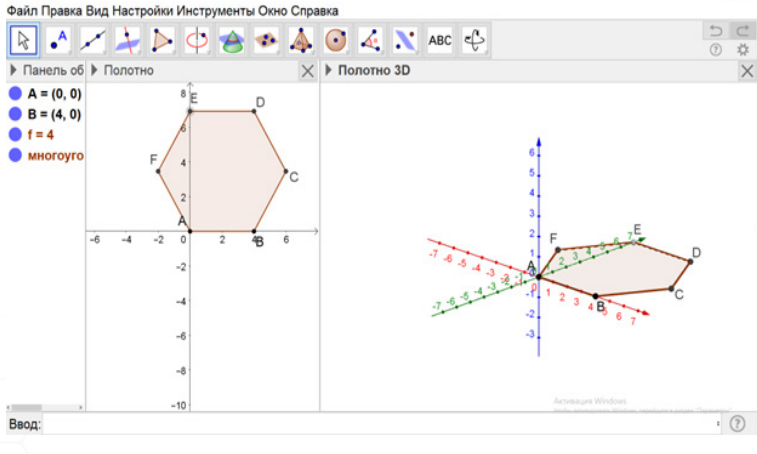
7.11. 10-суреттегі төртбұрышты дұрыс пирамида жайылмасына сәйкес оның толық бетінің формуласын тап және берілген деректерге сай есепте.

“GeoGebra”ны қолдану

Алтыбұрышты дұрыс призманы және оның жайылмасын жасау

1. Призма жасау үшін алдымен дұрыс алтыбұрыш (призма табаны) жасалады. Ол үшін **“Вид”** меньюсінен **“Полотно”** бұйрығы таңдалады. Нәтижеде екі арнайы жұмысшы терезесі пайда болады. Сол жақтағы жұмысшы терезеде **“Правильный многоугольник”** құрылғысымен дұрыс алтыбұрыш жасалады. Ол үшін көпбұрыштың бір қабырғасының ұзындығын және қабырғаларының санын кіргізу жеткілікті.

2. Нәтижеде жұмысшы терезенің оң жағындағы дұрыс алтыбұрыш кескіні пайда болады.



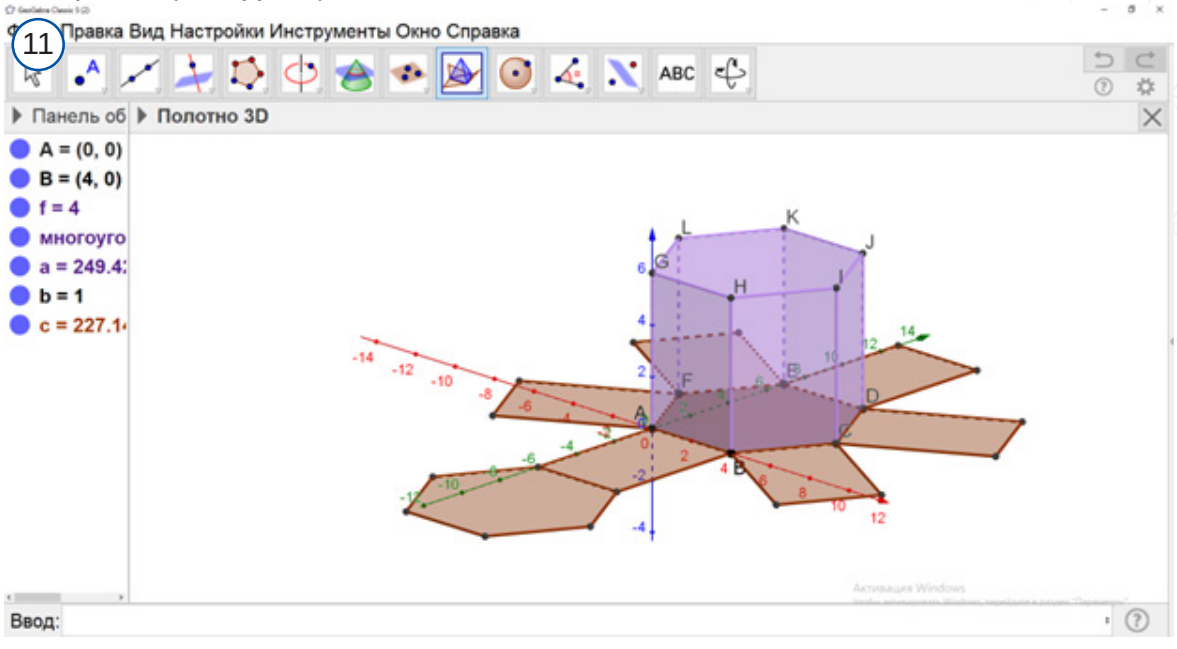
3. Сол жақтағы терезе жабылады.

4.  – **“Призма”** құрылғысын пайдаланып, тышқанның сол түймешігі сызылған дұрыс алтыбұрыш нүктелерінің үстінде бірізділікпен басылады. Содан соң координата осінің керекті жеріне басу арқылы алтыбұрышты дұрыс призма жасалады.

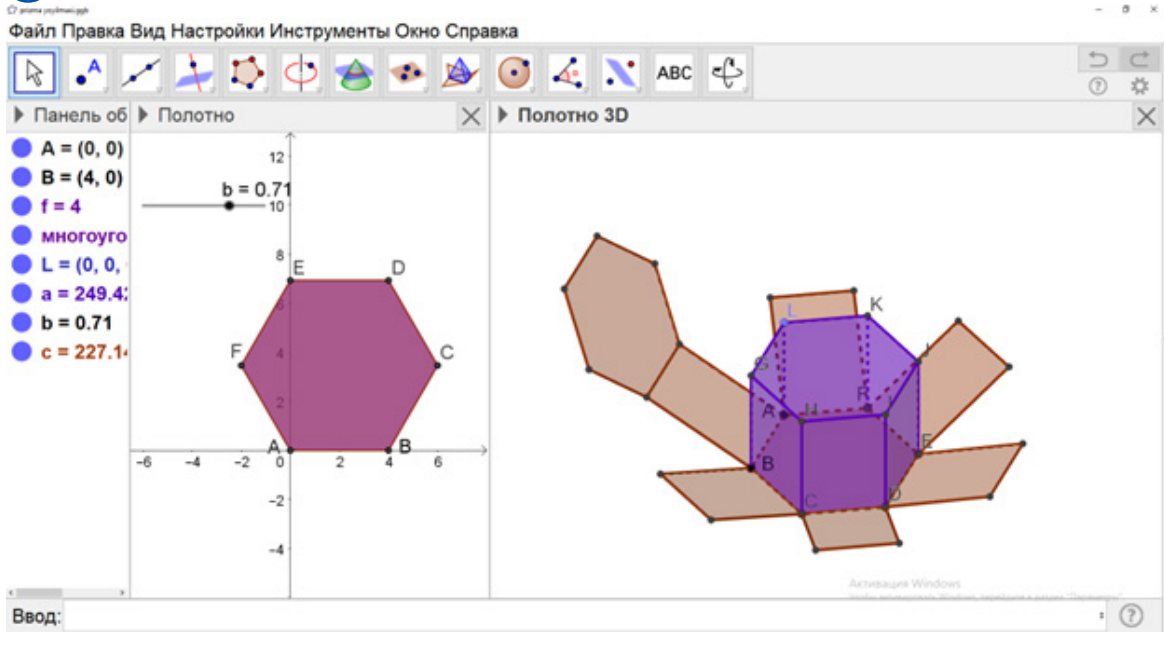
5.  – **“Развёртка”** құрылғысы белсендіріледі және призма үстене тышқанның сол түймешігі басылады. Нәтижеде алтыбұрышты дұрыс призма жайылмасы пайда болады *(11-сурет)*.

6. “Вид” менюінен **“Полотно”** бұйрығын таңдаймыз. Сол терезедегі **“Ползунок”** (жүгірткі) түймешігімен сызбаның жайылмасы қозғалысқа келтіріледі *(12-сурет)*.

11



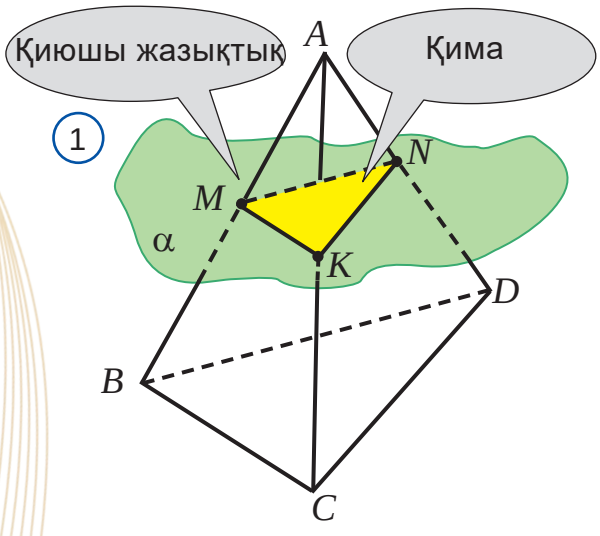
12



Өз бетіңше орындауға арналған тапсырмалар

1. Алтыбұрышты дұрыс пирамида және оның “тікелей” жайылмасын жаса.
2. Үшбұрышты дұрыс призма және оның “тікелей” жайылмасын жаса.

8 КӨПЖАҚТАРДЫҢ ҚАРАПАЙЫМ ҚИМАЛАРЫН САЛУ

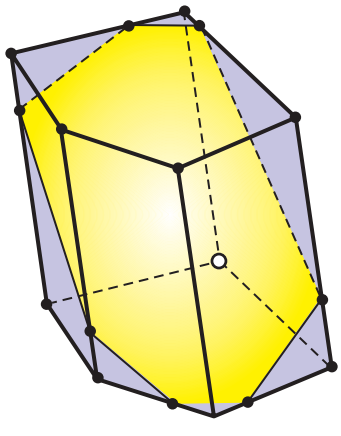


1

Кеңістіктегі геометриялық фигуралардың өзара орналасуын дұрыс көз алдымызға келтіргенде ғана, оның сызбасын дұрыс сызуымызға болады. Кеңістіктегі фигуралардың бірі – көпжақ, ал екіншісі жазықтық болғанда, түрлі қималарды кескіндеуге тура келеді. Төменде көпжақтардың қималарын салумен шұғылданамыз.

Мысалы, көпжақты қандай да бір жазықтық қиып өткен болсан. *Көпжақтың қимасы* деп көпжақтың қиылысатын жазықтыққа тиісті нүктелерінен құралған геометриялық фигураға айтылады.

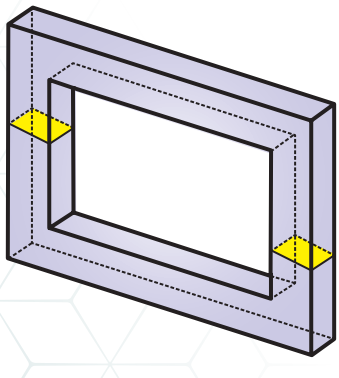
Қиюшы жазықтық көпжақтың сыртын кесінділер бойынша қиып өтеді. Сондықтан қима қиылысатын жазықтықта жататын көпбұрыштардан құралады. 2-суретте бесбұрышты призманың жетібұрыштан құралған қимасы кескінделген. 3-суреттегі терезенің рамкасын жазықтықпен қиған кезде пайда болған қимасы екі төртбұрыштан құралған.


2

Көпбұрыштың қимасын кескіндеу үшін оның жақтарының қиылысатын жазықтықпен ортақ нүктелерін анықтау жеткілікті.

Қиманың қабырғаларының саны көпжақтың жақтары санынан үлкен бола алмайды.

Мысалы, бесбұрышты призманың қималары: үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш, алтыбұрыш және жетібұрыш болуы мүмкін *(4-сурет)*. Бірақ сегізбұрыш бола алмайды. Неліктен?


3

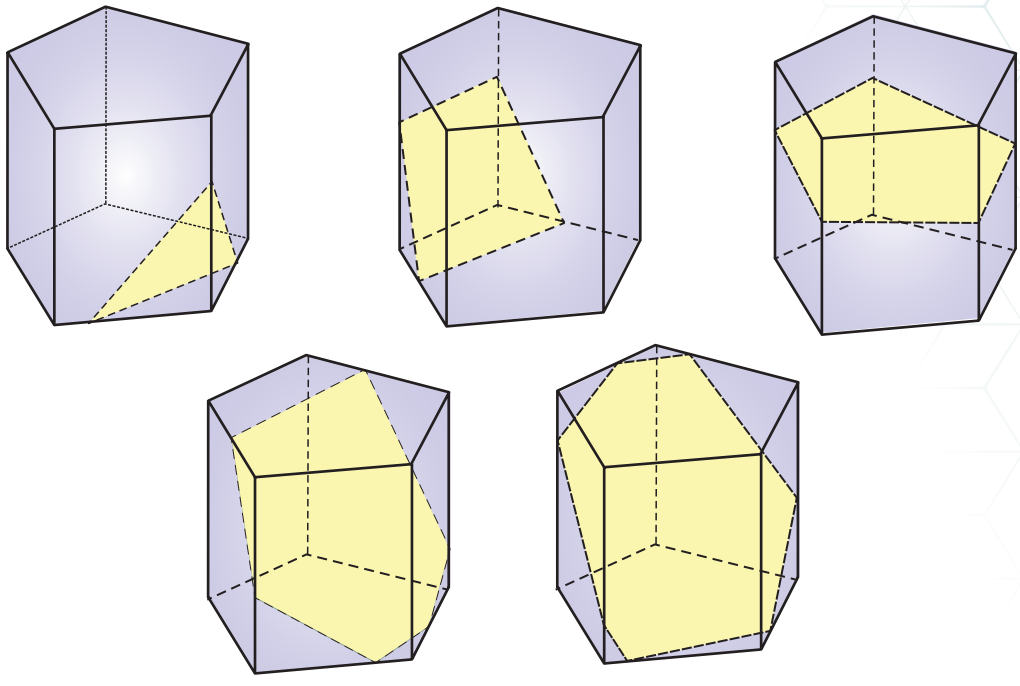
1-есеп. $QABC$ үшбұрышты пирамиданың AB, AQ және CQ қырларын сәйкесінше, K, L және M нүктелерде қиып өтетін α жазықтықпен қиғанда пайда болған қимасын саламыз *(5-сурет)*.

Салу. Қиюшы α жазықтық пирамиданың AQB жағымен екі: K және L ортақ нүктелерге ие. Онда қиылысатын жазықтық осы жақты KL кесіндінің бойымен қиып өтеді.

Дәл осыған ұқсас, α жазықтық пирамиданың AQC жағымен екі – M және L ортақ нүктелерге ие болғаны үшін осы жақты ML кесіндінің бойымен қиып өтеді.

Қиюшы α жазықтық пирамиданың ABC жағымен бір K ортақ нүктелерге ие. Осы жазықтықтың BC қырды қиып өтетін нүктесін табамыз.

4



Осы жазықтыққа тиісті LM және AC түзулерді жалғастырып, олардың қиылысу нүктесі – X-ті табамыз. X нүкте AQC және ABC жазықтықтарда жатады.

Қиюшы α жазықтық пирамиданың ABC жағымен екі – K және X ортақ нүктелерге ие. Онда қиылысатын жазықтық осы жақты KX кесіндінің бойымен қиып өтеді.

KX түзу және BC қырдың қиылысу нүктесі N де α жазықтықта жатыр.

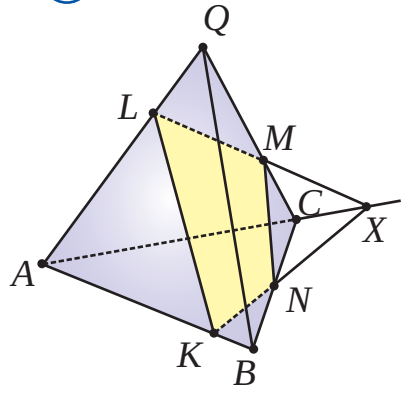
Демек, α жазықтық ABC жақты KN кесіндінің бойымен, ал BQC жақты MN кесіндінің бойымен қиып өтеді.

$KLMN$ төртбұрыш α жазықтықтың пирамидамен қимасынан құралған. KL және KN кесінділер α жазықтықтың ABQ және ABC жақтардағы *іздер* деп аталады.

Сондықтан қима жасаудың мұндай тәсілі *іздер тәсілі* деп аталады.

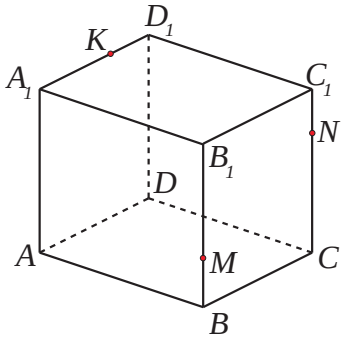
- Бұл тәсілдің маңызы мынадай:
- Қиюшы жазықтық пен көпжақ қандай да бір жақтың қиылысу түзуінен құралған жәрдемші түзуді құру.
- Әдетте қиюшы жазықтық пен көпжақтың төменгі табаны жатқан жазықтықпен қиылысу түзуін салу қолайлы саналады. Бұл түзу *қиюшы жазықтықтың ізі* деп аталады.
- Ізді пайдаланып қиюшы жазықтықтың көпжақтың бүйір қырлары және жақтарында жатқан нүктелер саны оңай анықталады.

5

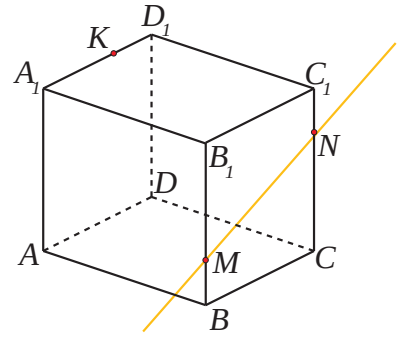


6

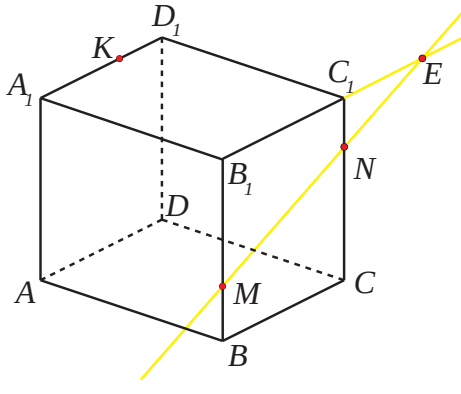
1-қадам



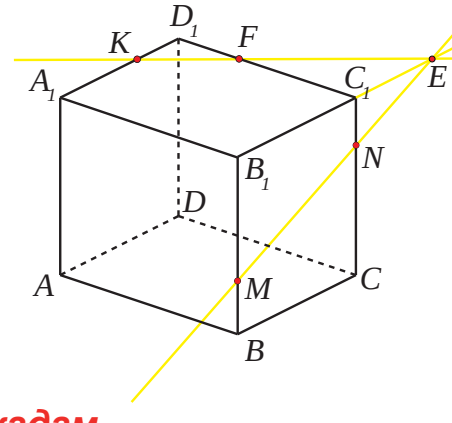
2-қадам



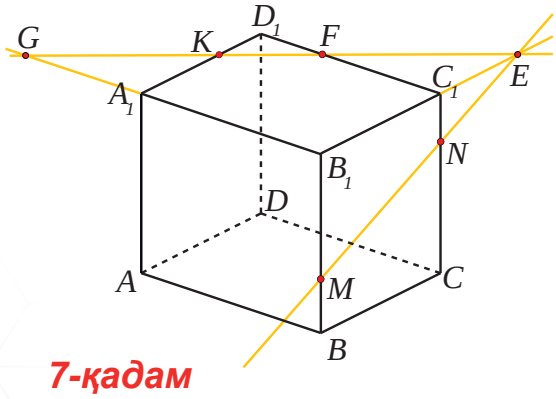
3-қадам



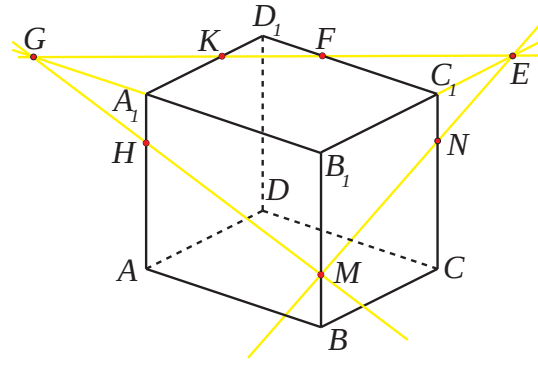
4-қадам



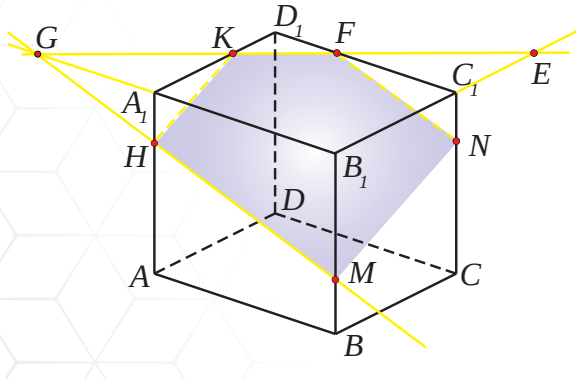
5-қадам



6-қадам



7-қадам



2-есеп. Кубтың M, P және K нүктелерінен өтетін жазықтық пен қиманы саламыз.

Салу. Қиманы салу іздер тәсілімен орындалған. Салу барысы 6-суретте рет-ретімен келтірілген. Оны үйреніп шығып, салу үдерісін түсіндіріп бер.

$MNFKH$ – ізделініп жатқан қима.

3-есеп. $OKLMN$ пирамиданың OL қырының A нүктесі және пирамиданың $KLMN$ табаны жазықтығында жататын k түзуімен өтетін b жазықтықпен қиылысқанда пайда болатын қиманы саламыз *(7-сурет)*.

Салу. LM және k түзулер қиылысатын нүктені табамыз, Осы нүкте k түзуінде жатқаны үшін b жазықтыққа тиісті. Сондай-ақ осы нүкте LM түзуінде жатқаны үшін LOM жаққа да тиісті. A нүкте осы екі жазықтықтың әр екеуіне де тиісті. Сондықтан, β жазықтық LOM жазықтықты AX түзуінің бойымен, ал LOM жақты AB кесіндісінің бойымен қиып өтеді. Мұнда B нүкте AX және OM түзулерінің қиылысу нүктесі.

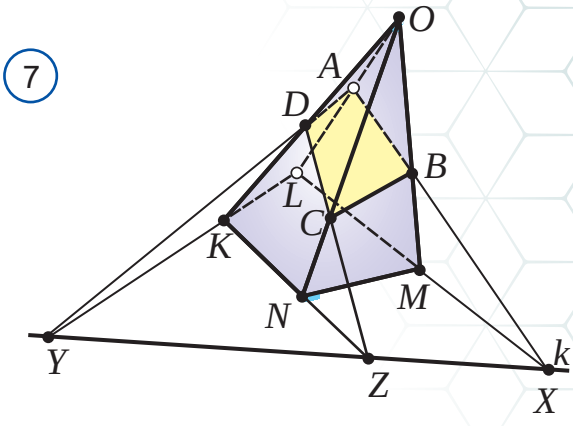
Дәл осылай, β жазықтықтың OLK жақты қиып өтетін Y және D нүктелерін және AD кесіндіні анықтаймыз. Сосын Z және C нүктелер мен DC және BC кесінділерді анықтаймыз. Нәтижеде, пайда болған $ABCD$ төртбұрыш ізделінген қимадан құралған болады

4-есеп. A, B және C төртбұрышты призманың түрлі жақтарындағы нүктелері. Призманың ABC жазықтықпен қимасын табымыз *(8-сурет)*.

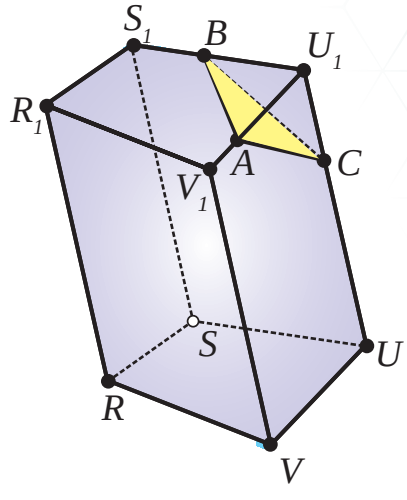
Ізделініп жатқан қима A, B және C нүктелердің төрбұрышты призманың қайсы жақтарында және қалай жатқанына байланысты болады. 8-суретте A, B және C нүктелердің бір төбеден шығатын жақтарда жатқан, ең қарапайым жағдайы кескінделген.

9-суретте бейнеленген жағдайда қимасын салу күрделірек жұмыс болып табылады. Қалған жағдайлардағы қималар төмендегі – 10- және 11-суреттерде көрсетілген. Көріп тұрғанымыздай, қима үшбұрыш, төртбұрыш, бесбұрыш жыне алтыбұрыштан құралған. Бұл қималарды салуды өз бетіңше талда.

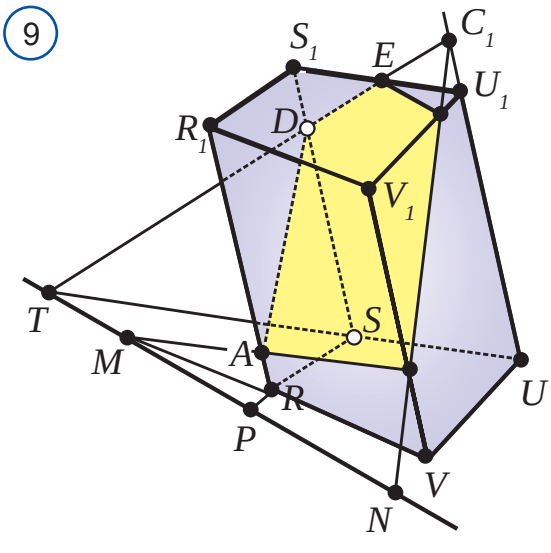
7



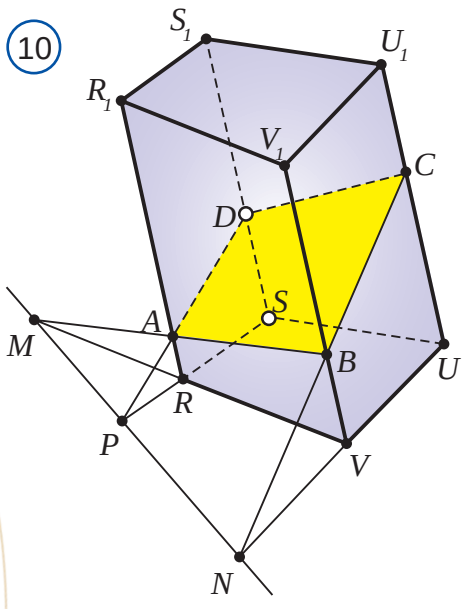
8



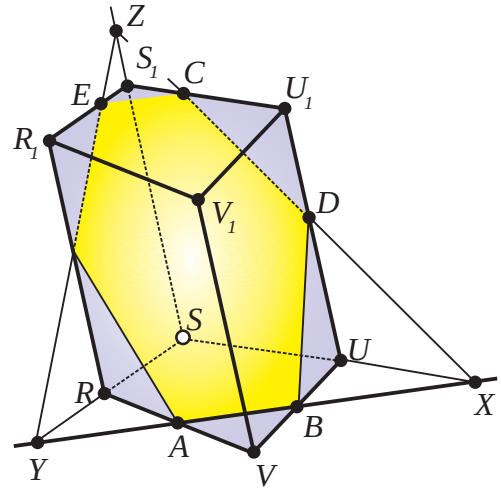
9



10



11



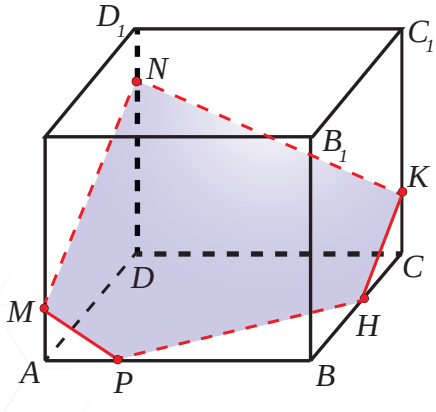
Іздер тәсілін қолдану ережелері

• қиманың төбелері көпжақтың тек қырларында жатады;
• қиманың қабырғалары көпжақтың тек жақтарында жатады;
• қиюшы жазықтық және көпжақтың жағы қиылысса, олардың қиылысу сызығы бір түзуден құралған болады.

Параллель көшіру тәсілі

5-есеп. Кубтың M, N және K нүктелерден өтетін жазықтық пен қиманы сал.

12



Салу.

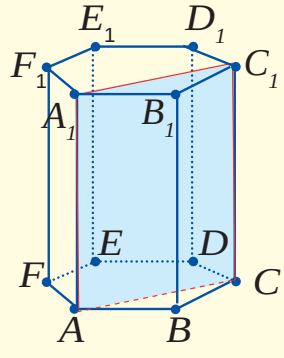
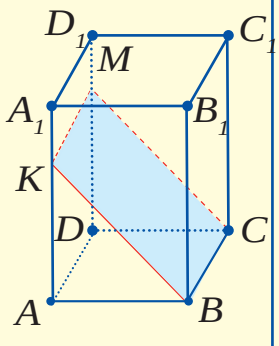
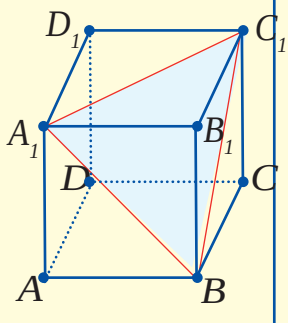
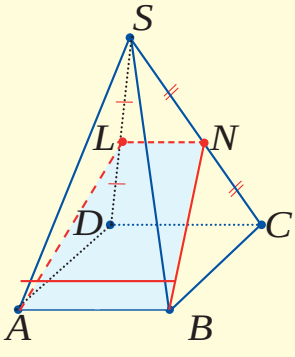
1. M және N нүктелерді қимамен жалғаймыз.
2. N және K нүктелерді қимамен жалғаймыз.
3. M нүктеден NK-ге параллель түзуді өткіземіз. Оның AB қырымен қиылысу нүктесін P-мен белгілейміз.
4. K нүктеден MN-ге параллель түзу өткіземіз. Оның BC қырымен қиылысу нүктесін H-пен белгілейміз.
5. P және H нүктелерді қимамен жалғаймыз.
6. $MNKHP$ ізделініп жатқан қима болады.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар

1. Көпжақтың қимасы деп неге айтылады?
2. Көпжақтың қимасы қандай пішінде болуы мүмкін?
3. Бір жазықтықтың екінші жазықтықтағы ізі деп неге айтылады?
4. Төртбұрышты көпжақтың қимасы қайсылар болуы мүмкін?
5. Қима салудың іздер тәсілін түсіндіріп бер.
6. Қима салудың параллель көшіру тәсілін түсіндіріп бер.

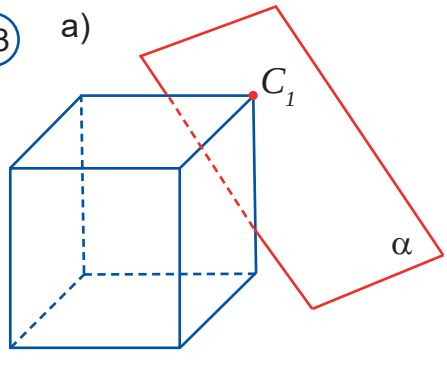
Практикалық жаттығулар мен қолданулар

8.1. Кестеде 8-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

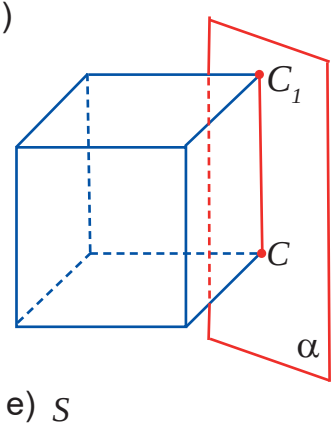
Көпжақтардың қарапайым қималары			
Көпбұрышты призма	**Тікбұрышты параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
ACC_1 – A, C, C_1 нүктелерден өтетін, қиылысатын жазықтық. ACC_1CA_1 – қима.	CBK – K нүкте және CB түзуден өтетін, қиылысатын жазықтық. $CBKM$ – қима.	A_1BC_1 – BC_1 және BA_1 түзулерден өтетін, қиылысатын жазықтық. ACC_1CA_1 – қима.	ABN – AB және LN параллель түзулерден өтетін, қиылысатын жазықтық. $ABNL$ – қима.

13

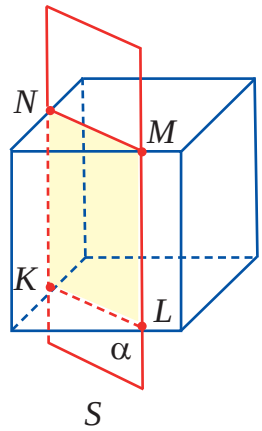
a)



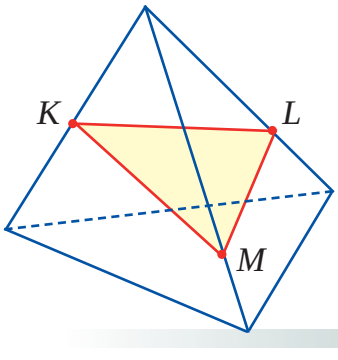
b)



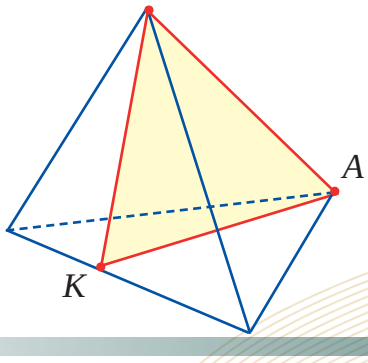
c)



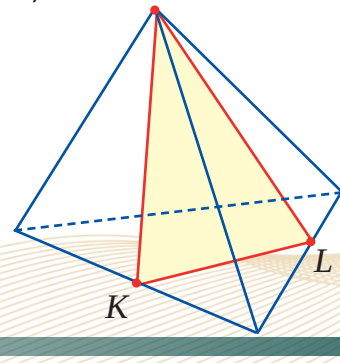
d)



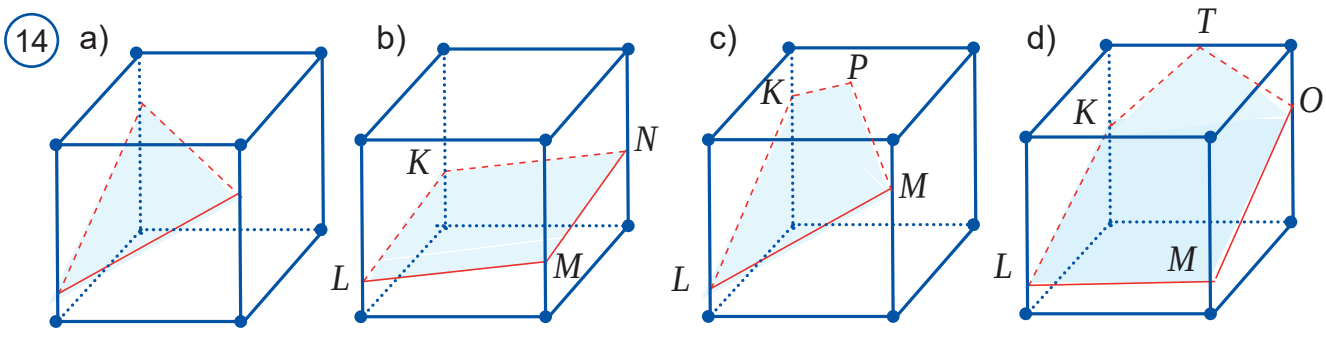
e)



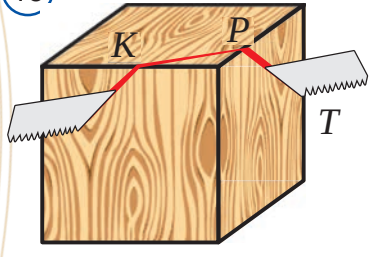
f)



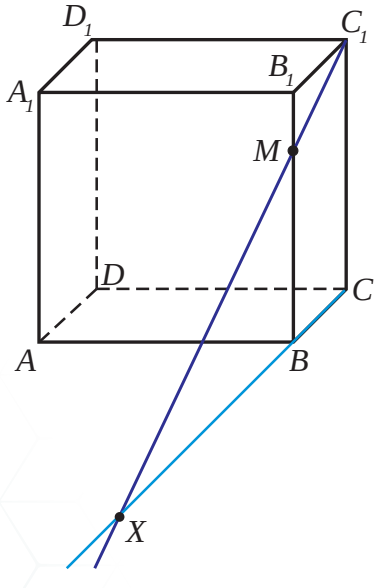
14



15



16



8.2. 13-суретте келтірілген жағдайларда кеңістіктегі фигуралардың қандай қимасы суреттелгенін түсіндір.

8.3. Кубты жазықтықпен қиғанда қимада 14-суретте бейнеленген қайсы жағдайлар болуы мүмкін? Қайсысы болуы мүмкін емес?

8.4. 15-суретте бейнеленген ағаш куб араланғанда K, P және T нүктелерден өтетін қима жасалады. Толық қима қандай фигуралардан құралған болады?

8.5. Куб сыз. Оның қырларында сондай үш нүктені белгіле, бұл нүктелерден өтетін жазықтық қимада: a) үшбұрыш; b) төртбұрыш; c) бесбұрыш жаса.

8.6. Төмендегі алгоритм негізінде салуды орында және салу процесін түсіндір.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб және $M \in BB_1$ нүкте берілген. C_1M түзу мен кубтың $ABCD$ жақтарының қиылысу нүктесін табу алгоритмі *(16-сурет)*:

C_1M және BC қималарды жалғастырып, олардың қиылысу нүктесін X-пен белгілейміз.

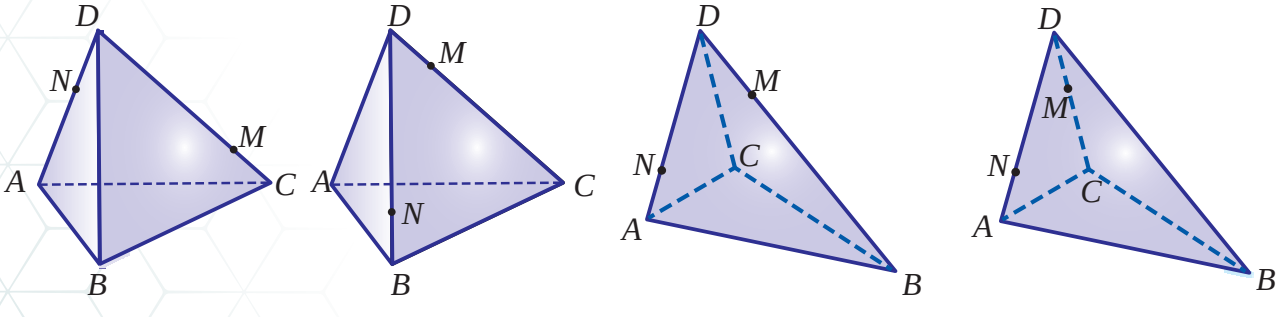
X – ізделінген нүкте болады.

8.7. 17-суретте өрнектелген $ABCD$ тетраедрдің қырларында M және N нүктелер белгіленген. MN түзудің ABC жазықтықпен қиылысу нүктесі қайсы түзуде жататынын анықта.

8.8. Төмендегі алгоритм негізінде кубтың берілген нүктелерден өтетін қимасын салып, түсіндір.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың A_1, $M \in D_1C_1$ және $N \in DD_1$ нүктелерінен өтетін қимасын салу алгоритмі *(18-сурет)*:

17



1. A_1 нүктені M нүктемен жалғаймыз.
2. A_1 нүктені N нүктемен жалғаймыз.
3. M нүктені N нүктемен жалғаймыз.
4. A_1MN үшбұрыш ізделінген қима болады.

8.9. Төмендегі алгоритм негізінде кубтың берілген нүктелерінен өтетін қимасын жаса және салу процесін түсіндір.

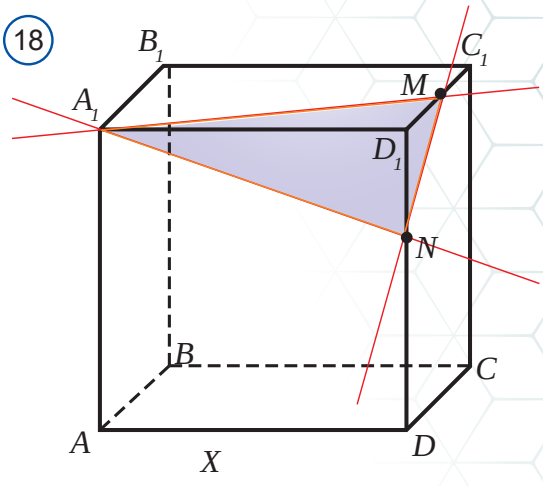
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың M, Q және P нүктелерінен өтетін қимасын жасау алгоритмі *(19-сурет)*:

1. A_1 және M нүктелерден өтетін түзу өткіземіз. A_1M және D_1C_1 түзулердің қиылысу нүктесін X-пен белгілейміз.
2. A_1 және N нүктелерден түзу өткіземіз. A_1N және DD_1 түзулердің қиылысу нүктесін Y-пен белгілейміз.
3. X нүктені Y нүктемен жалғаймыз. XY және CC_1 түзулердің қиылысу нүктесін Q-мен белгілейміз.
4. XY және DC түзулердің қиылысу нүктесін P-мен белгілейміз.
5. M және Q нүктелерден өтетін түзу өткіземіз. N және P нүктелерден өтетін түзу өткіземіз.
6. A_1MQPN бесбұрыш ізделінген қима болады.

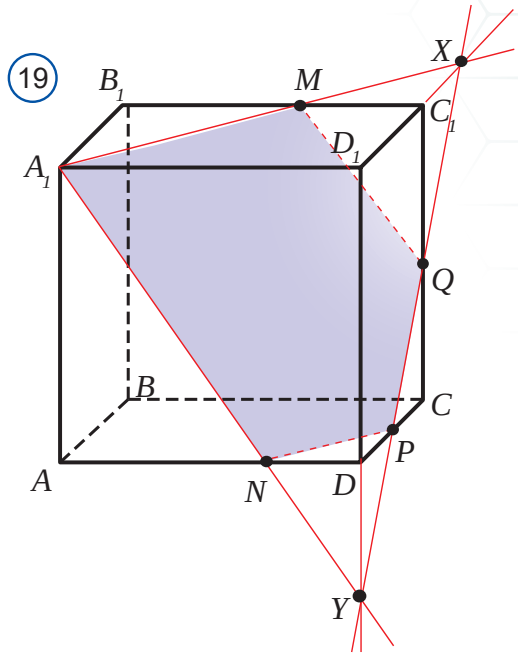
8.10. 20-суретте бейнеленген тікбұрышты параллелепипедтің берілген үш нүктесінен өтетін қиманы сал.

8.11. 21-суретте өрнектелген пирамиданың берілген үш нүктесінен өтетін қиманы сал.

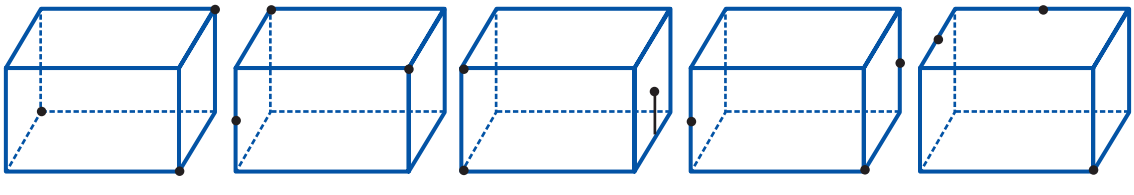
18



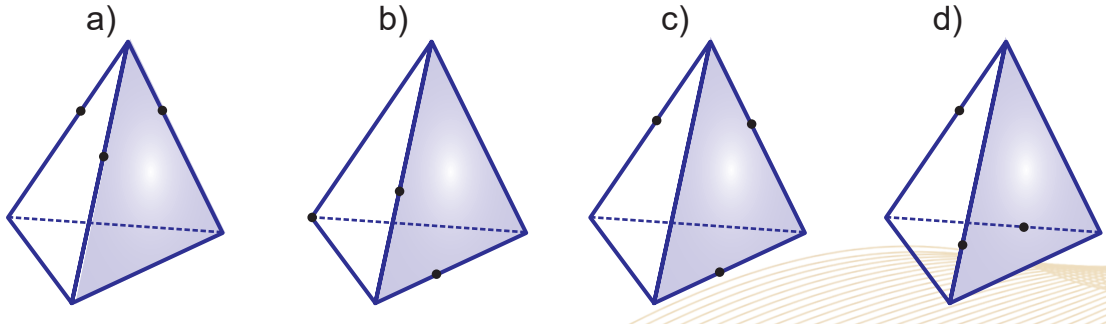
19



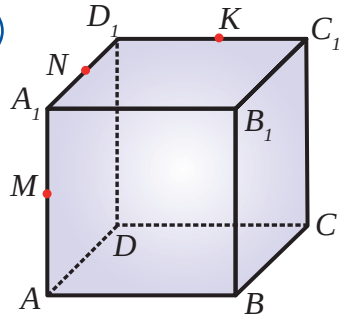
20



21

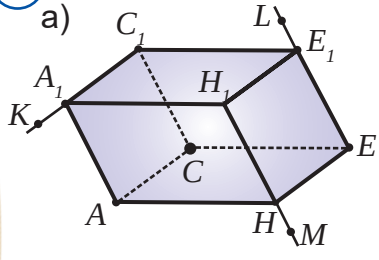


22

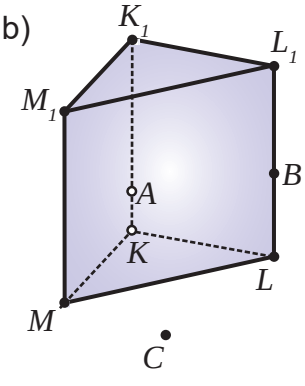


23

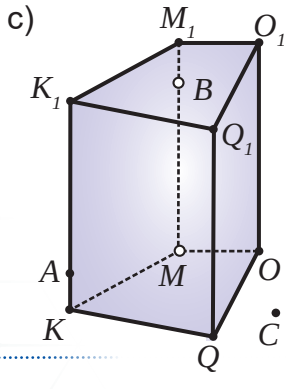
a)



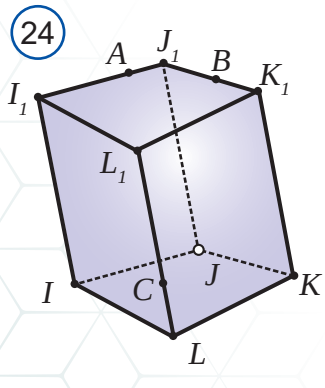
b)



c)



24



8.12. Кубтың M, N және K нүктелерінен өтетін жазықтықпен қимасын параллель көшіру тәсілімен сал (22-сурет).

8.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың AD және CD қырларында M және N нүктелер берілген. Кубтың MNB_1 жазықтықпен қиғанда пайда болатын қимасын сал.

8.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубты сызып, AB, BC және BB_1 қырлардың центрлері болған M, N және L нүктелерді белгіле. Кейін: a) кубты MNL жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы сал; b) MNL үшбұрыштың дұрыс екенін дәлелде; c) кубтың қыры 1 cm болса, MNL үшбұрыштың ауданын тап.

8.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің қырлары $AB = 6\ cm$, $AD = 6\ cm$ және $AA_1 = 8\ cm$. Параллелепипедтің BC_1D жазықтықпен қимасы теңбүйірлі үшбұрыш екенін дәлелде және осы үшбұрыштың биіктігін тап.

8.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ призманы сыз. Призманың AD, AA_1 және DD_1 қырларының центрлері болған M, N және L нүктелері арқылы өтетін жазықтық пен қимасын сал.

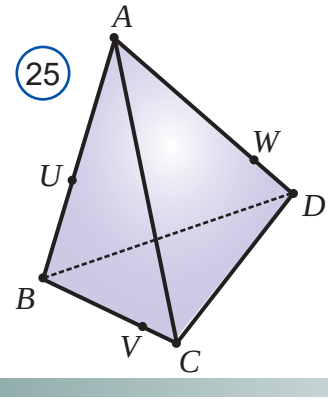
8.17. 23-суретте бейнеленген деректер негізінде: a) M, N және L; b) A, B және C; c) A, B және C нүктелерден өтетін кеңістіктегі фигуралардың тиісті қималарын сал.

8.18. $IJKLI_1J_1K_1L_1$ призманың JI_1, J_1K_1 және LL_1 қырларында жатқан A, B және C нүктелер алынған *(24-сурет)*. Призманың ABC жазықтықпен қимасын сал.

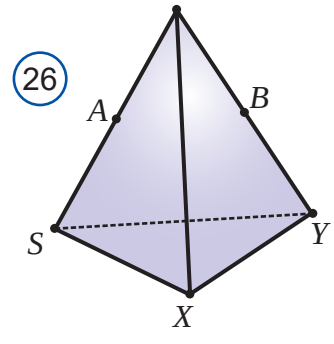
8.19. Берілген деректердің негізінде 25-суреттегі кеңістіктегі фигураның U, V және W нүктелер арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болған қимасын сал.

8.20. Берілген деректердің негізінде 26-суреттегі кеңістіктегі фигураның A, B және X нүктелер арқылы өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болған қимасын сал.

25



26



“GeoGebra”ны қолдану

Көпжақтардың қимасын салу

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың AB, CC_1 және A_1D_1 қырларына сәйкес түрде E, F және G нүктелер берілген. Кубты EFG жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы сал.

Салу:

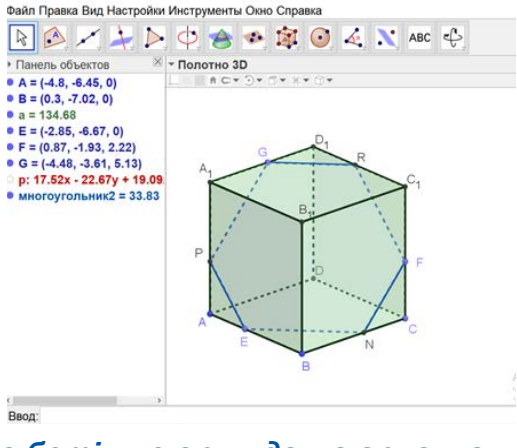
• “GeoGebra”да жаңа терезені аш.

• “GeoGebra” интерфейсін **“Настройки” – “3D Графика”** көрінісіне өткіз.

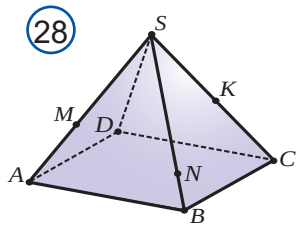
Қиманы салу басқыштары

1		**Куб**	Кез келген куб жасалады.
2		**Точка в объекте**	$ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб және оның AB, CC_1 және A_1D_1 қырларына сәйкес түрде E, F және G нүктелер белгіленеді.
3		**Плоскость через 3 точки**	EFG нүктелерден өтетін жазықтық жасалады
4		**Крывая пересечения**	Куб және EFG нүктелерден өтетін жазықтық қимасы жасалады.
5		**Показывать объект**	Жазықтықтың қажетсіз бөлігі жасырын жағдайға келтіріледі.
6		**Перемещение**	E, F және G нүктелерді жылжыту арқылы куб қимасының дұрыс орындалғаны тексеріледі *(27-сурет).*

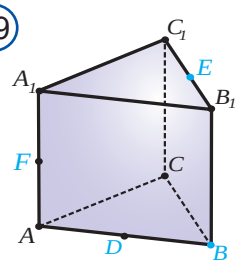
27



28



29



Өз бетіңше орындауға арналған тапсырмалар

1. Пирамиданың M, N және K нүктелерінен өтетін жазықтықпен қиятын қиманы жаса *(28-сурет).*

2. Үшбұрышты дұрыс призманың берілген нүктелерінен өтетін қиманы тап *(29-сурет).*

9 ЖОБА ЖҰМЫСЫ БОЙЫНША ЖАТТЫҒУ

Алғашқы геометриялық білімдер ежелге Мысырда да 5 мың жылдан астам уақыт бұрын пайда болған. Мысырлықтар оларды тек пирамидаларды құруда ғана емес, тіпті Ніл жағалауындағы егістік алаңдарын белгілеуде де пайдаланған. Біздің заманымыздан бұрынғы 2 мыңыншы жылдары ежелгі Мысырда геометрияның қалыптасуы туралы ежелгі грек ғаламы Геродот (біздің заманымыздан бұрынғы V ғасыр) былай жазған еді: “Мысыр перғауыны Цеозоострис жерді бөліп, әрбір мысырлыққа егістік бөліп, әрбір егістіктен тиісті ереже бойынша салық жинаған. Ніл өзені тасып егістіктерді су басқан. Жер иелері егістіктерінің шекараларын тіктеп беру немесе салықты азайту үшін перғауынға өтініш жасаған. Әмірші егістік жер қаншаға азайғанын анықтау және соған қарап салықты азайту үшін өз өкілдері – жер өлшегіштерді жіберген. Осылайша Мысырда жер өлшеу туралы ғылым – геометрия пайда болған және ол жерден Грецияға көшіп өткен”.

Оқу жобасы – ғылымдарды одан да тереңірек, үйлестіріп үйренуге бағытталған, білім беру үдерісіне тәжірибе, практикалық қызмет негізінде жанасуға мүмкіндік беретін, зерттеу мен іздену жүргізуді талап ететін білім беру үдерісін ұйымдастырудың бір түрі болып саналады. Сонымен қатар жоба жұмысы бір пән аясында да орындалуы мүмкін.

Оқушылар жоба жұмысы бойынша зерттеулерді жыл барысында әдетте сабақтан тыс, өз бетінше жүргізеді.

Жоба жұмысының тақырыптары *практикалық, теориялық* және *зерттеу* сипаттарында болуы мүмкін.

Практикалық жоба жұмысында пәндерде меңгерілген білім мен дағдылар өмірлік жағдайлардағы проблемаларды (кейстерді) шешуде қолданылады. Белгілі бір ғылымға немесе ғылымдарға қатысты іс жүзіндік дағды мен біліктілікті дамыту қажеттілігі пайда болғанда практикалық бағытталған жобаларды пайдалану нәтиже береді. Ең қарапайым жағдайда оқытушы оқушыларға пәнге байланысты қосымша оқу материалы, тест жинақтары, слайдтар, таратпа материалдарды немесе глоссарий (терминдер сөздігін) түзу, көрнекілік оқу құралының моделін жасау және салу сияқты тапсырмаларды беруі мүмкін. Практикалық бағытталған жобалармен істеу үдерісінде оқушыларда пәнге байланысты білім, дағды және біліктіліктер дамиды, қызметке қатысты құзіреттілік қалыптасады.

Теориялық жоба жұмысында пәндердің кез келген тақырыбы тереңірек үйреніледі. Мұндай жоба жұмысында берілген тақырып бойынша мәліметтер жиналады, қайта өңделеді, талданады, жіктеледі, топтастырылады, сондай-ақ пайдалы және қосымша жазбаша оқу ресурсы ретінде ұсынылады.

Зерттеу жоба жұмысында бірер стандартты емес мәселе немесе өмірлік проблемаларды шешу үстінде шағын ғылыми зерттеу жүргізіледі. Оқушылардың талдау, сыни пікірлеу қабілетін дамыту, қабылдаудың қисынды тәсілдерін меңгеру және үлкен көлемдегі ақпараттарды қайта өңдеу мақсат етіп қойылса, зерттеушілікке байланысты оқу жобасын пайдалану мақсатқа сай. Аталған оқу жобасының мақсаты – жоба болжамын негіздеу. Бұл мақсатқа қол жеткізу үшін тәжірибе-сынақ жұмыстарын өткізу, алынған нәтижелерді талдау, топтау, салыстыру, даму заңдылықтарын анықтау, бұдан тыс, қорытындылар шығару, өз көзқарасы тұрғысынан негіздеу қажет. Міне осылай зерттеуге байланысты оқу жобасында басты назар пікірлеу құзіреттілігін дамытуға бағытталады.

Оқу жобасында ең басты назарды оқушыларда

шығармашылық қабілеттерді дамытуға қарату тиіс. Дәл осы шығармашылық жоба оқушыларға өзін көрсете білу, кез келген жанрдағы шығармаларды жарату мүмкіндігін береді. Сонымен қатар, шығармашылық жобалар оқушылардың топтағы беделін арттыруға, өзін-өзі бағалауға мүмкіндік беру арқылы олардың шығармашылық қабілеттерін дамытады. Кез келген шығармашылық жұмыс оны ұсыну және сыныптағы топпен байланысты талап етеді. Міне сондықтан шығармашылық жобалар оқушыларда коммуникативтік құзіреттілікті дамытуға үлкен әсер етеді.

Жоба жұмысының тақырыбы бойынша оқушылар жеке-жеке немесе 3-4 адамдық топ болып істеуі мүмкін. Жоба жұмысы оқу жылының соңында өткізілетін қорғаумен (шағын конференция) аяқталады. Жоба жұмысы үстіндегі жұмыс үдерісі төмендегі оқу қызметтерін өз ішіне қамтуы мүмкін:

- жоба жұмысы бойынша қызметті жоспарлау;
- міндеттерді өзара бөліп алу;
- оқу мақсаттарын қою;
- керекті мәліметтерді іздеп табу;
- тақырыпқа байланысты проблемалы жағдайдың шешімдерін іздеу;
- шешімдердің ең тиімдісін таңдау және оны негіздеу;
- қажет жағдайларда сауалнамалар және тәжірибелер өткізу;
- жоба жұмысының нәтижелері бойынша есеп дайындау;
- өз қызметін талдау және бағалау;
- жоба жұмысын қорғау үшін слайд дайындау;
- жоба жұмысын қорғау.

Бұл жаттығу барысында оқушыларға жоба жұмысы туралы мәлімет беріледі. Жоба жұмысының тақырыптары оқушылар арасында бөлінеді. Қандай да бір жоба жұмысы үлгі ретінде көрсетіледі.

Жоба жұмысының үлгі тақырыптары

(бұл тақырыптардан тыс басқа тақырыптар да ұсынылуы мүмкін)

1. Эвклид геометриясы.
2. Лобачевский геометриясы.
3. Көпжақтар геометриясы.
4. Мысыр пирамидаларының жұмбақтары.
5. Көпжақтың беті.
6. Менің қаламның географиясы мен геометриясы.
7. Геометриялық мозаика.
8. Геометриялық парадоксстар.
9. Мұнаралар сәулеткерлігіндегі геометриялық фигуралар.
10. Бағандарды жобалау мен өрнектеуде геометриялық фигуралар.
11. Ежелгі қолөнердегі геометрия.
12. Сурет, ескеркіш және сәулеткерлік геометриясы.
13. Мұражайдағы суреттердегі геометрия.

Стереометрия немесе кеңістіктегі геометрия – геометрияның түрлі кеңістіктегі денелерінің фигурасын, өлшемдері мен қасиеттерін зерттеутін бөлімі. Ол грекше *stereo* – "дене" және *metrio* – "өлшеу" сөздерінен келіп шыққан, шын мәнінде "денелерді өлшеу" деген мағынаны білдіреді. Стереометрия да планиметрия сияқты адамның іс жүзіндік қызметін қажеттіліктерімен байланысты жағдайда пайда болған және дамыған.



Ең ежелгі және ең әйгілі мектептердің бірі – Пифагор мектебі (біздің заманымыздан бұрынғы VI-V ғасырлар), оның негізін салушы Пифагор атымен аталған. Пифагоршылар өздерінің философиялық теорияларында дұрыс көпбұрыштардан пайдаланған. Олардың пішіндері болмыс негіздеріне берілген. Ежелгі зерттеушілер: алау – тетраедр, жер (топырақ) – куб, ауа – октаедр, су – икоедр, бүкіл ғарыш – додекаедр фигурасына ие деп білген.

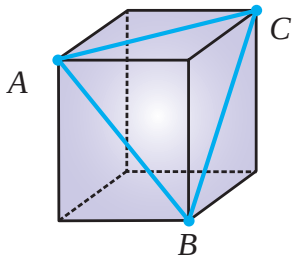
14. Нақышты геометрия.
15. Ғимарат пен нысандардың геометриясы және сәулеткерлік көріністері.
16. Торкөздердегі геометрия.
17. Орталық Азия сәулеткерлігіндегі геометрия.
18.Мысыр пирамидасының математикалық ерекшеліктері.
19. Стереометриялық денелер.
20. Табиғаттағы симметрия.
21. Геометрия терминдерінің сөздігі.
22. “Симметрия деген не?” оқу фильмі.
23.“Көпжақтардың қимасы” тақырыбындағы дидактикалық материал.
24. Геометриядан тест жинағы.
25.“Геометриялық тартыс” ойынының сценариін түзу.
26. Өлшем бірліктері туралы хикая – анимация.
27.“Геометриялық саяхаттар” сахналық қойылымының сценариін жасау.
28. Геометриялық мәселелерді шешу тренажері.
29. Геометриялық калькулятор.
30. “Геометриялық фигуралар” үйрететін мультимедиялық қосымша.
31. Симмертиялық электронды көрнекі құрал.
32. “Геометрия” оқу-тест бағдарламасы.
33. Стереометрия бойынша электронды қолданба.
34. Геометрияның пайда болуы, дамуы мен адамдардың қолдануы.
35. Физикада математика
36. Химияда математика
37. Биология және медицинада математика
38. Экологияда математика
39. Географияда математика
40. Экономикада математика
41. Өнерде математика
42. "GeoGebra" бағдарламасын стереометрия сабақтарында пайдалану.
43. Стереометрияны үйрену үшін пайдалы электронды ресурстар тізімі.
44. Бағалау бойынша халықаралық зерттеулерде стереометриялық мәселелер.

10 ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА ҚАТЫСТЫ ПРАКТИКАЛЫҚ ТАПСЫРМАЛАР

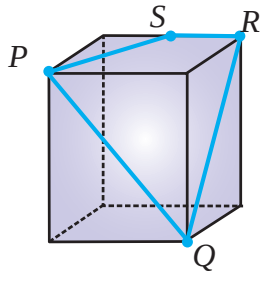
10.1. 1-суретте бейнеленген сынық түзу жазық па немесе кеңістіктік пе?

1

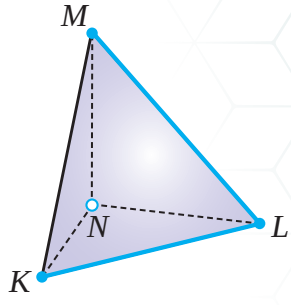
a)



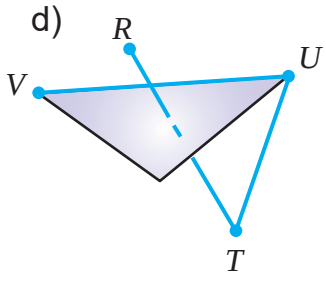
b)



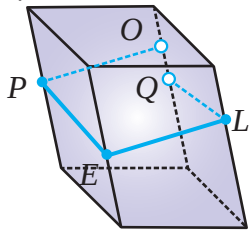
c)



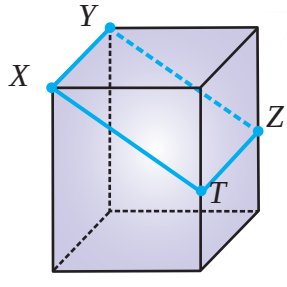
d)



e)



f)



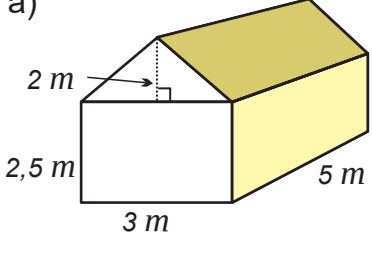
10.2. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың табаны 12 cm -ге, пирамида төбесін центрімен жалғайтын кесіндінің ұзындығы 16 cm-ге тең. Пирамида: a) бүйір қыры және апофемасын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

10.3*. $REFGH$ пирамида табанының қабырғалары 10 cm және 18 cm болған және ауданы 90 cm^2 -ге тең болған $EFGH$ параллелограммнан құралған. Пирамида төбесі – R-ді табан диагоналдарының қиылысу нүктесі – O-мен қиылыстыратын кесіндінің ұзындығы 6 cm -ге тең және бұл диагоналдарға перпендикуляр. Пирамида: a) бүйір қырларын; b) бүйір бетін; c) толық бетін тап.

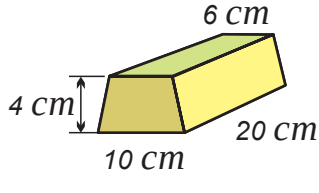
10.4. 2-суретте өрнектелген денелердің толық бетін тап.

2

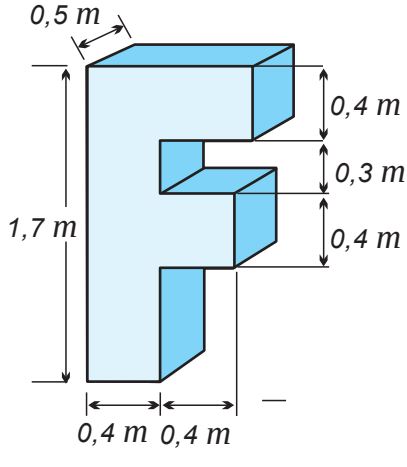
a)



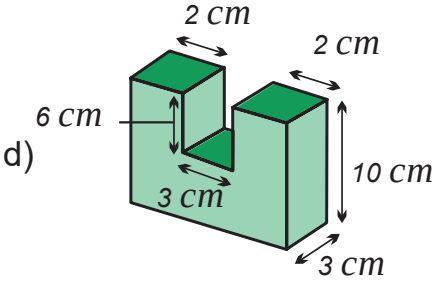
b)



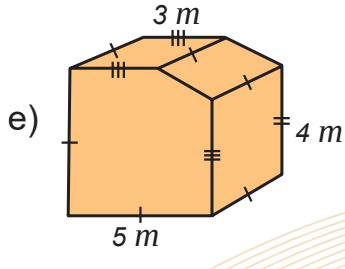
c)



d)

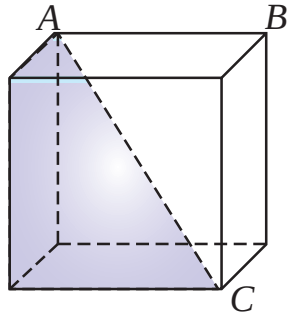


e)

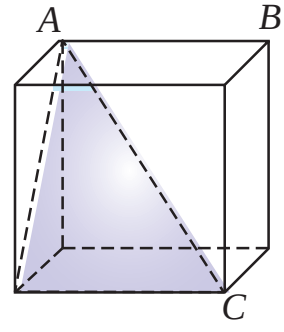


10.5. Кубты жазықтықпен қиған кез қимада 3-суретте бейнеленген қайсы жағдайлар болуы мүмкін? Қайсысы болуы мүмкін емес?

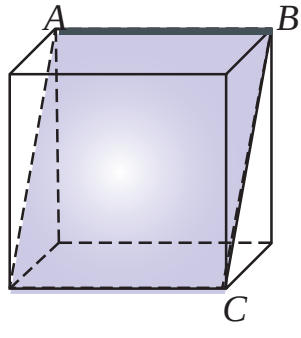
3 *a*)



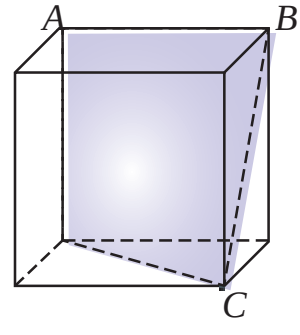
b)



c)

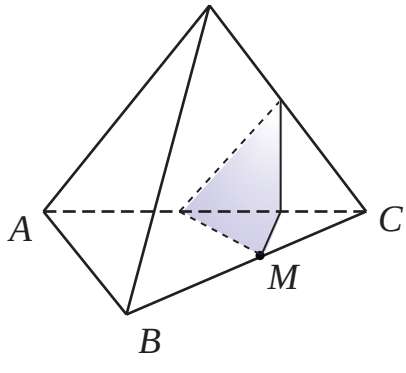


d)

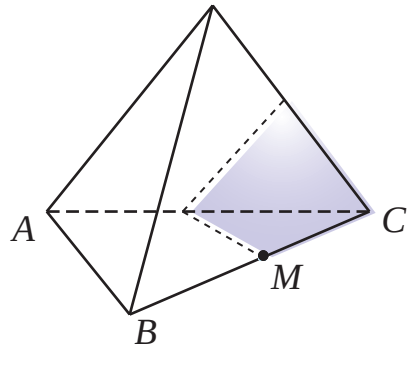


10.6. Қайсы суретте M нүктеден өтетін және тетраедрдің SAB жағында параллель болған қима суреттелген?

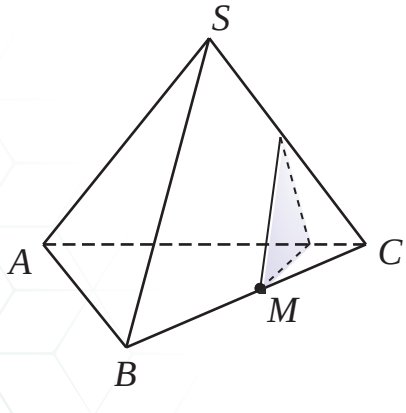
4 *a*)



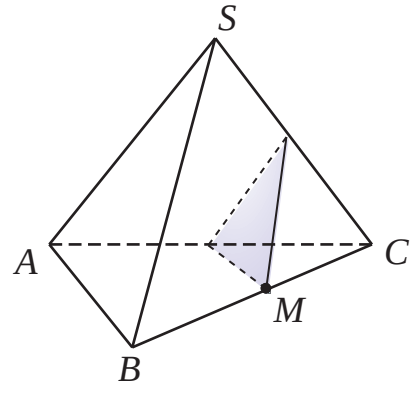
b)



c)



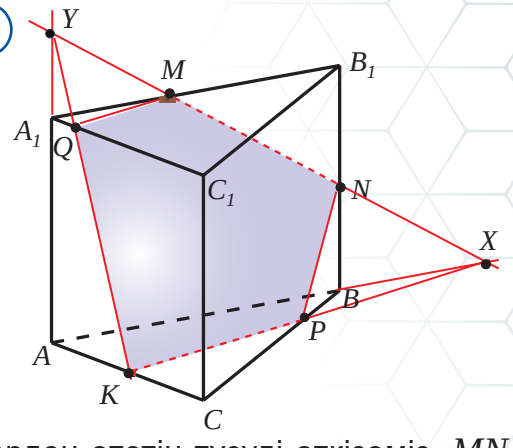
d)



10.7. Төмендегі алгоритм негізінде призманың берілген нүктелерден өтетін қимасын сал және салу үдерісін түсіндір. $ABCA_1B_1C_1$ призманың M, N, P және Q нүктелерінен өтетін қиманы салу алгоритмі:

1. $M \leftrightarrow N, \quad MN \cap AB = X$
2. $X \leftrightarrow K, \quad XK \cap BC = P$
3. $MN \cap AA_1 = Y$
4. $Y \leftrightarrow K, \quad YK \cap A_1C_1 = Q$
5. $P \leftrightarrow N, \quad Q \leftrightarrow M$
6. $MNKPQ$ ізделініп жатқан қима болады.

5

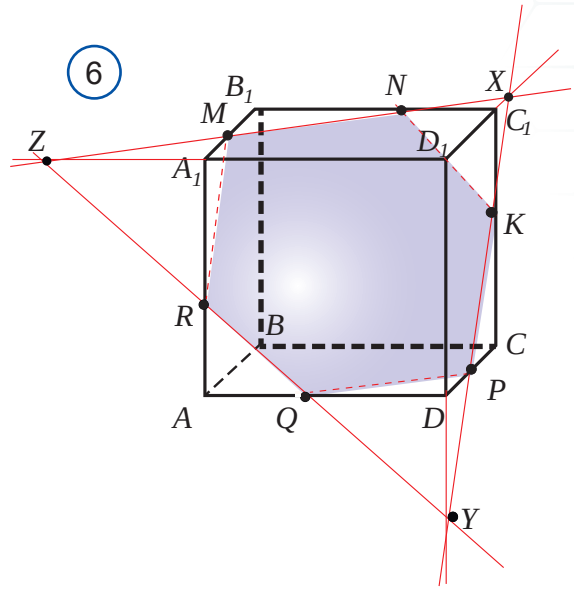


Мұнда $M \leftrightarrow N$ белгілеу – M және N нүктелерден өтетін түзуді өткіземіз, $MN \cap AB = X$ белгілеу MN және AB түзулер қиылысу нүктесін X-пен белгілейміз деген мағынаны білдіреді.

10.8. Төмендегі алгоритм негізінде кубтың берілген нүктелерінен өтетін қиманы сал және салу үдерісін түсіндір.
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың $M \in A_1B_1$, $N \in B_1C_1$ және $K \in CC_1$ нүктелерінен өтетін қиманы салу алгоритмі:

1. $M \leftrightarrow N$;
2. $MN \cap D_1C_1 = X$;
3. $N \leftrightarrow K, \quad X \leftrightarrow K$;
4. $XK \cap DC = P$;
5. $KP \cap DD_1 = Y$;
6. $MN \cap A_1D_1 = Z$;
7. $Y \leftrightarrow Z$
8. $YZ \cap AD = Q$;
9. $YZ \cap AA_1 = R$;
10. $Q \leftrightarrow P, \quad R \leftrightarrow M$;
11. $MNKPQR$ ізделініп жатқан қима болады.

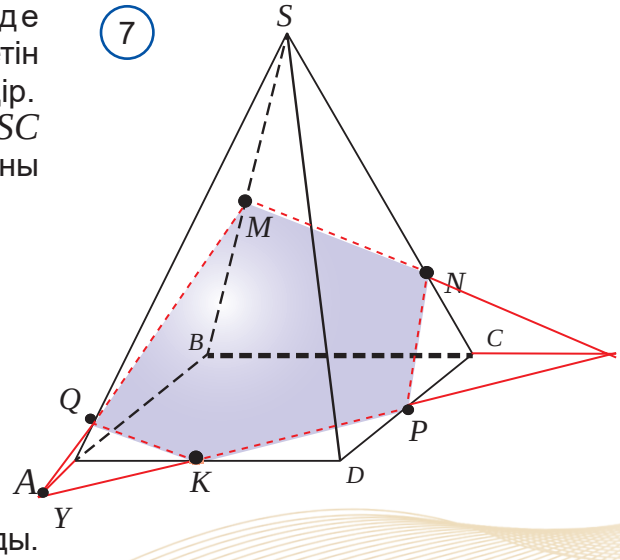
6



10.9. Төмендегі алгоритм негізінде пирамиданың берілген нүктелерден өтетін қимасын сал және салу үдерісін түсіндір.
$SABCD$ пирамиданың $M \in SB$, $N \in SC$ және $K \in AD$ нүктелерінен өтетін қиманы салу алгоритмі:

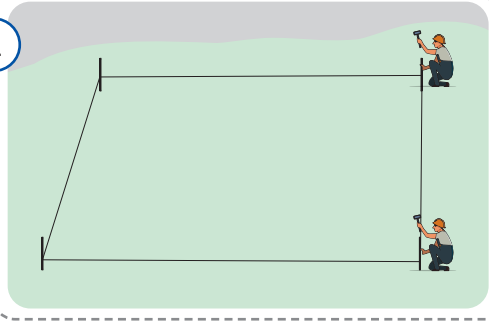
1. $M \leftrightarrow N$
2. $MN \cap BC = X$
3. $X \leftrightarrow K$
4. $XK \cap DC = P$
5. $XK \cap AB = Y$
6. $Y \leftrightarrow M$
8. $YM \cap SA = Q$
9. $P \leftrightarrow N, \quad K \leftrightarrow Q$
10. $MNPKQ$ ізделініп жатқан қима болады.

7



Қолданулар мен практикалық құзіреттіліктерді қалыптастыру

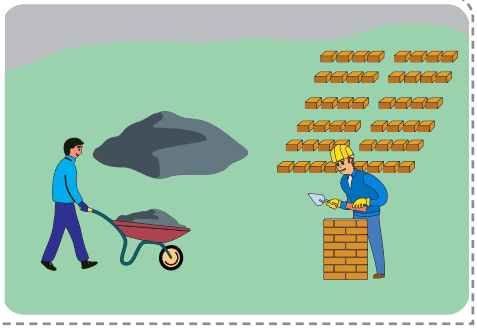
1



1. Неліктен қандай да бір ғимарат үшін ұра (шұңқыр) қазудан бұрын белгілеу жұмыстары тегіс тартылған жіп жәрдемінде орындалады? *(1-сурет)*

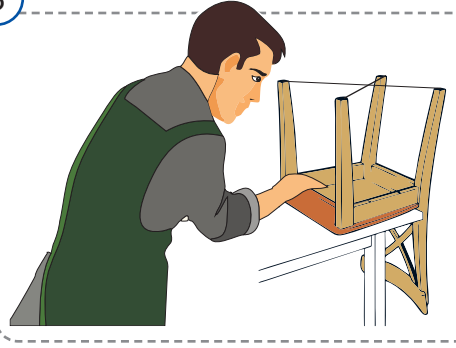
Жауабы: екі жазықтық қиылысы түзуден құралған болады.

2



2. Кірпіш құю үдерісінде қалыпқа лай салынып, тегіс ағаш бөлігі қалыптың үстінде жүргізіліп, лайдың артық бөлігі сыпырылып алып тасталады. Мұнда неліктен кірпіштің беті тегіс шығады? *(2-сурет)*

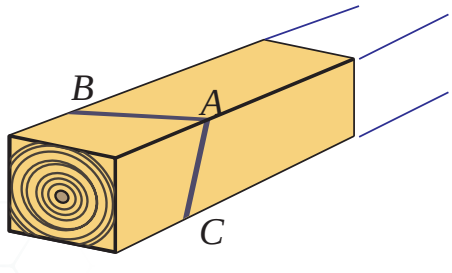
3



3. Жасалған орындықтың аяқтары бір жазықтықта жатқанын тексеру үшін шеберлер орындықтың қарама-қарсы аяқтарына жіп тартып тексереді. Бұл тәсілді қолданып көр және ол неге негізделгенін айт. *(3-сурет)*

Жауабы: екі қиылысушы сызық бір ғана жазықтықты анықтайды.

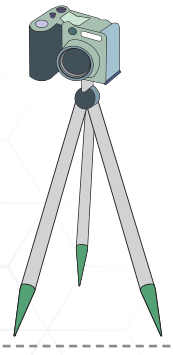
4



4. Бір бөлік ағаш тақтаны аралаған шебер аралау бетінің тегіс болуына қалай қол жеткізеді? *(4-сурет)*

Жауабы: ағаш тақтаның екі сыбайлас жақтарына AB және AC қималарын салады және араны мүмкіндігі барынша осы қималардан өтетіндей етіп қойып, аралайды. Нәтижеде екі қиылысушы түзуден өтетін бір ғана жазықтық болғандықтан аралау беті тегіс шығады.

5



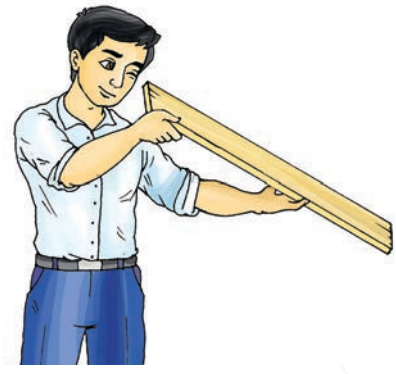
5. Фотоаппаратты орнатуға арналған қондырғы не үшін үш аяқты етіп жасалады? *(5-сурет)*

Жауабы: бір түзуде жатпаған үш нүктеден тек бір жазықтық өтеді.

6. Шебер өңдеген тақта бетінің тегістігін қалай тексереді? Бұл тәсіл неге негізделген? *(6-сурет)*

Жауабы: егер түзудің екі нүктесі жазықтықта жатса, оның өзі де толығымен осы жазықтықта жатады.

6



7. Неліктен үш аяқты мотоцикл екі аяқты түрімен салыстырғанда қалыпты болады? *(7-сурет)*

Жауабы: бір түзуде жатпайтын үш нүктеден тек бір ғана жазықтық өтеді.

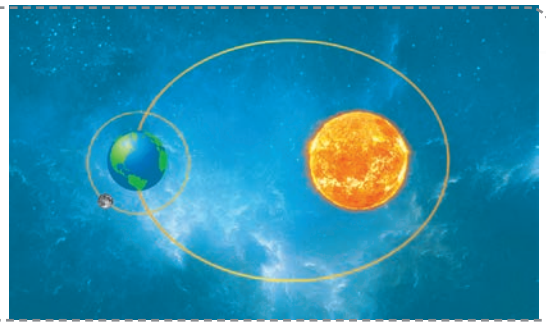
7





8. Күн, Жер және Ай центрлері бір жазықтықта жата ма? Бір түзуде ше? Қашан? *(8-сурет)*

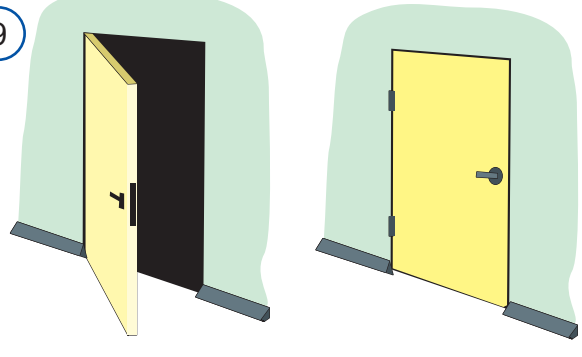
8



9. Не үшін ашық есіктер жел ескенде өздігінше қозғалады? Неліктен бұл жағдай жабық есіктермен туындамайды? *(9-сурет)*

Жауабы: түзу және онда жатпайтын нүктеден тек бір жазықтық өткізуге болады.

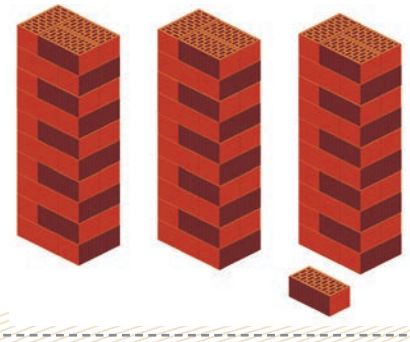
9



10. Қима қабырғасы 7 dm болған квадраттан құралған, биіктігі 4 m болған 18 бағанды құру үшін қанша кірпіш керек? (Кірпіштің өлшемдері: 1 : 1,5 : 3 dm. Құру процесінде 5% кірпіш қалдыққа кетеді). *(10-сурет)*

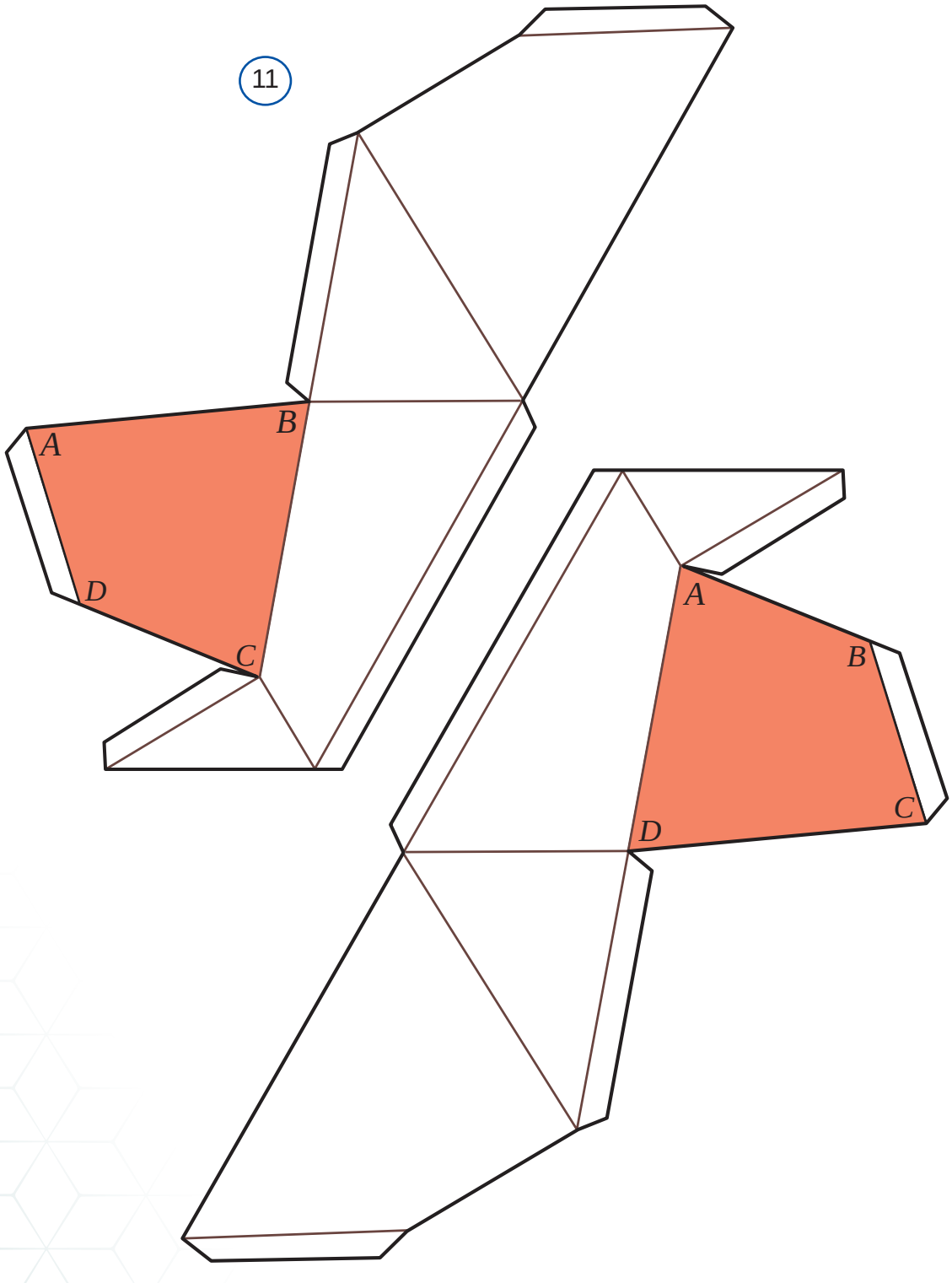
Жауабы: 5760.

10



Практикалық жұмыс

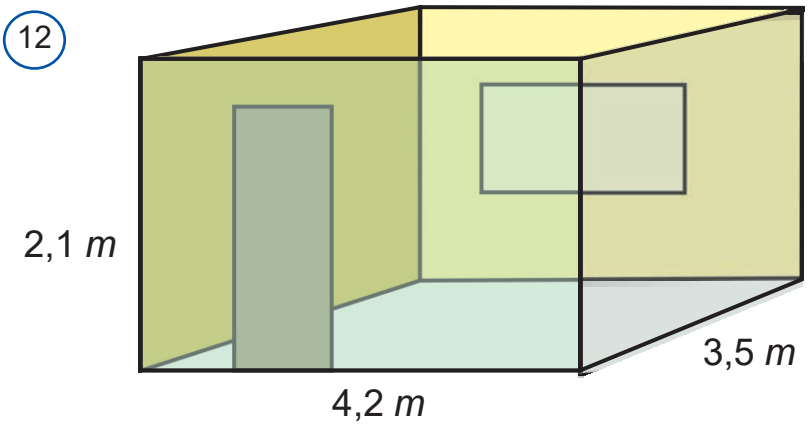
1. 11-суретте берілген көлбеулерді қалың қағазға сызып ал. Оларды қайшымен қиып алып, тиісті сызықтардың бойымен бүктеп, соң желімде. Нәтижеде тетраедрдің қандай да бір жазықтықпен қиылысқандағы екі бөлігінің моделі жасалады. Оларды біріктіріп, $ABCD$ қималы тұтас тетраедрді жаса.



2. 12-суретте бейнеленген бөлмені жөндеу керек. Бөлмеде өлшемдері 0,8 m және 2,2 m болған есік және өлшемдері 183 cm және 91 cm болған терезе бар. Есіктің екі қабырғасы да боялуы тиіс. Кестеде екі түрлі бояудың бағалары берілген. Бұл мәліметтерді пайдаланып үнемді жөндеу үшін қанша қаржы керек екенін есепте.

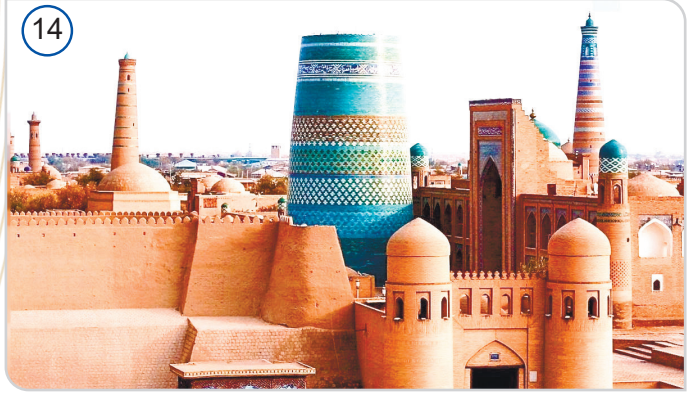
Бояу түрі	**Көлемі**	**Бояу ауданы**	**Бағасы** *(сумда)*
Қабырға үшін	*4 l*	*16 m²*	*32450*
	2 l	*8 m²*	*20800*
Есік үшін	*2 l*	*10 m²*	*23600*
	1 l	*5 m²*	*15400*

12





Ірі нысандар мен ғимараттарды құрған ата-бабаларымыз үлкен геометриялық білім мен әлеуетке ие болған. Мұны бір ғана Самарқант қаласындағы Регистан алаңындағы тарихи жәдігерліктерден де білуге болады (13-сурет).



Хиуа қаласындағы Ичан-қаланың суретінде (14-сурет) қандай геометриялық фигураларды көріп тұрсың?



“Тәжмахал” – (15-сурет), Үндістанның Агра қаласында Бабырдың ұрпағы Шах-Джахан құрдырған ежелгі жәдігерлік. Оны құрған шеберлердің геометриядан жетік білімге ие болғаны айқын көрініп тұр.



Сидней қаласының опера театры (16-сурет) – Австралиядағы заманалық сәулеткерліктің үлгісі. Өзінің ғажап геометриялық көрінісімен баршаның назарын өзіне тартады.

17



18



Сұлу геометриялық талғам иесі, ірактық танымал архитектор әйел Заха Хадидтің жобасы негізінде Қытайдың астанасы Пекин қаласында құрылған “Galaxy Soho” демалыс кешенінің ерекше көрінісінен эстетикалық ләззат алмаудың лажы жоқ (17-сурет).

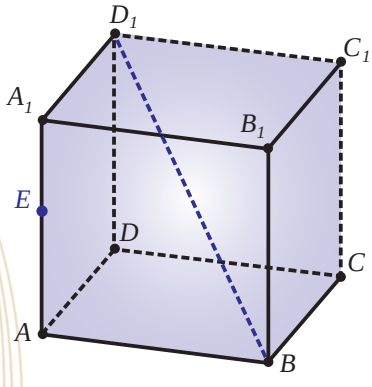
Еліміздің астанасында бой көтеріп жатқан “Ташкент сити” кешенінің жобасы да адамды таңғалдырады. Мұндай ғажап ғимараттарды жарату үшін инженер-құрылысшыларға қаншалықты геометриялық білім қажет болғанын көз алдымызға келтіруге болады (18–19-суреттер).

19



“GeoGebra”ны қолдану

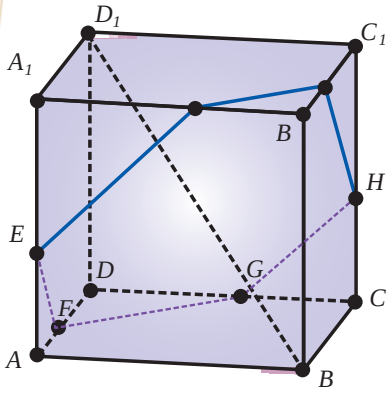
Көпжақтардың қималарын салу



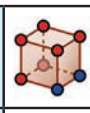
Кубтың берілген E нүктесінен өтетін және BD_1 түзуіне перпендикуляр қимасын жаса.

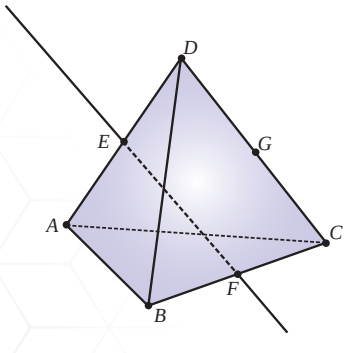
Салу:

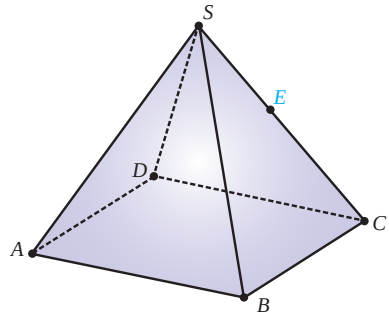
- “GeoGebra”да жаңа терезе аш.
- “GeoGebra” интерфейсін **“Настройки”– “3D Графика”** көрінісіне өткіз.

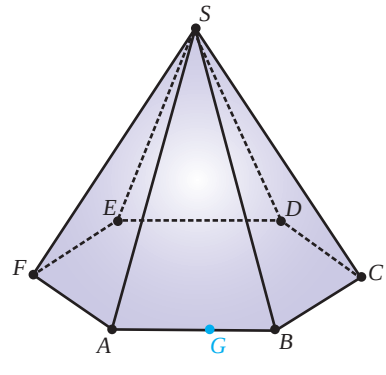


Қиманы салу басқыштары

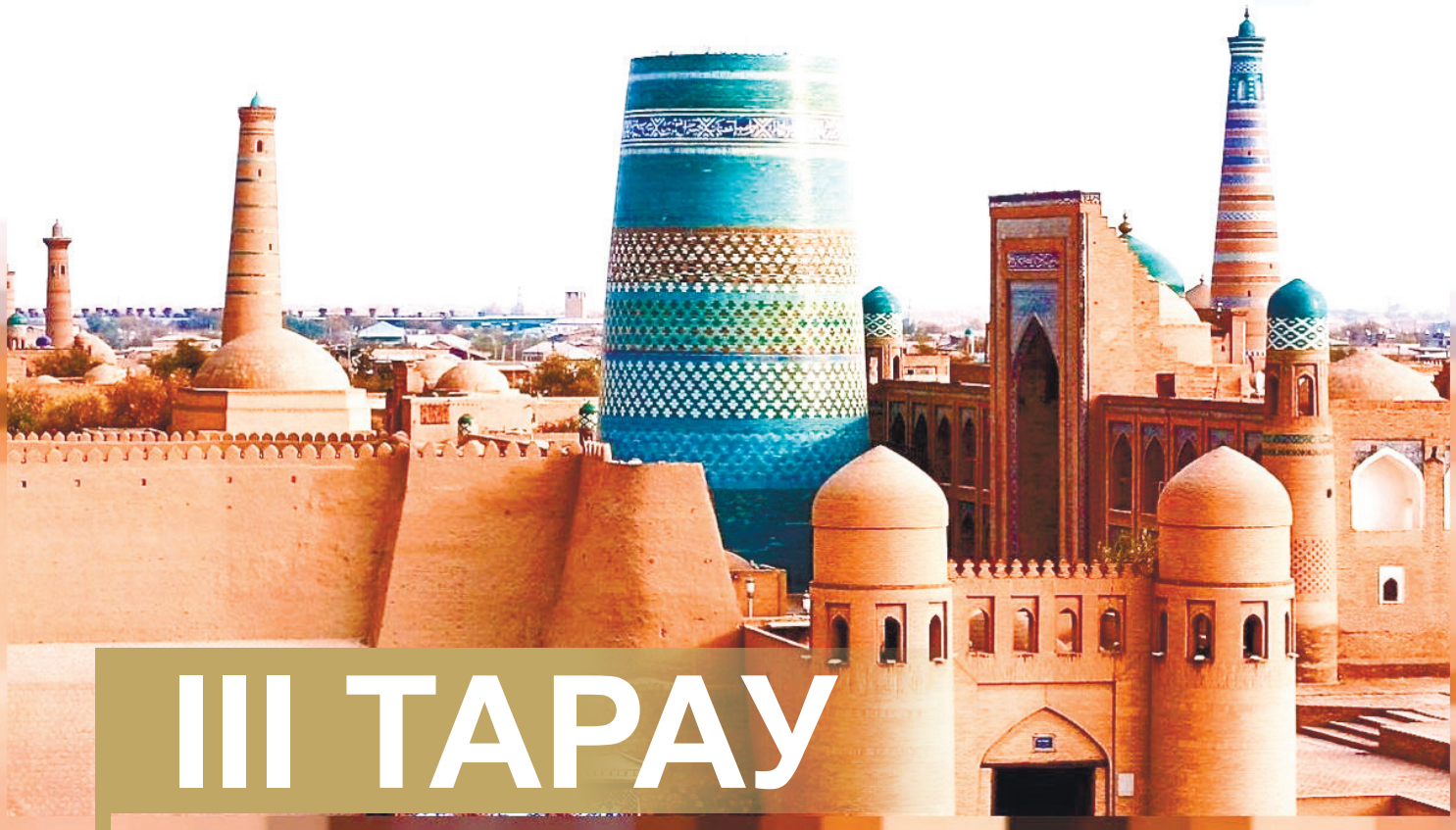
1		Кез келген куб жасалады.
2		Куб AA_1 қырында E нүкте белгіленеді.
3		BD_1 түзу өткізіледі.
4		E нүкте және BD_1 түзуден перпендикуляр жазықтық өткізіледі.
5		Кубтың E нүктесінен өтетін қима жасалады.
6		Жазықтықтың қажетсіз бөлігі жасырын жағдайға өткізіледі.
7		E нүктені жылжыту арқылы қима дұрыс орындалғаны тексеріледі.







1. $ABCD$ дұрыс тетраедр CD қырының G центрі және EF перпендикуляр түзуден өтетін жазықтық қимасы қандай фигура болатынын анықта. Мұнда E, F нүктелер – AD және BC қырларының центрі.
2. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың SC қырындағы E нүктеден өтетін және сол қырына перпендикуляр жазықтық қимасын сыз.
3. Алтыбұрышты дұрыс пирамиданың берілген G нүктесінен өтетін және SAF жазықтығына параллель жазықтық қимасын сыз.



III ТАРАУ

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПАРАЛЛЕЛЬДІГІ

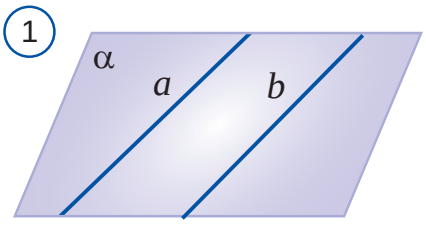
Бұл тарауды үйрену нәтижесінде төмендегідей білім мен дағдыларға ие боласың:

- кеңістіктегі параллель түзулерды елестету;
- параллель түзулердің қасиеттерін білу, сондай-ақ оларды дәлелдеуге қатысты және практикалық есептер шешуде қолдану;
- параллелепипедтің қасиеттерін білу және оларды есептерді шешуде пайдалану;
- айқас түзулерді елестету;
- түзулердің айқастық белгілерін білу және оны есептерді шешуде қолдану;
- кеңістіктегі түзулер арасындағы бұрышты анықтау;
- айқас түзулер арасындағы бұрышты анықтау;
- перпендикуляр түзулерді елестету;
- жазықтыққа параллель түзудің анықтамасын білу;
- жазықтыққа параллель түзулердің қасиеттерін білу және оларды қолдана алу;
- параллель және қиылысатын жазықтықтардың анықтамасын білу;
- екі жазықтықтың параллельдік белгілерін білу және оны пайдалану;
- параллель жазықтықтардың қасиеттерін білу және оларды қолдана алу;
- параллель проекцияның қасиеттерін білу және оларды қолдану;
- үйренілен ұғымдар, фактілер мен әдістерді бейтаныс немесе өмірлік жағдайда қолдану.

11 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕРДІҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Кеңістіктегі параллель түзулер

1



Кеңістіктегі бір жазықтықта жататын, өзара қиылыспайтын түзулер *параллель түзулер* делінеді *(1-сурет)*.

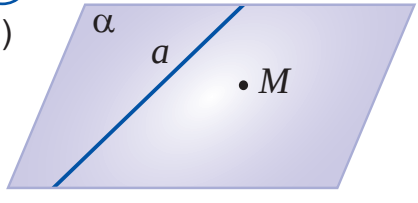
a және b түзулердің параллельдігі $a||b$ түрінде жазылады.

Жазықтықта берілген нүкте арқылы берілген түзуге тек бір ғана параллель түзу жүргізуге болады. Мұндай қасиет – кеңістікте де орынды болады:

3.1-теорема. *Кеңістікте берілген түзуден тыс жатқан нүкте арқылы сол түзуге параллель тек бір ғана түзу жүргізуге болады.*

2

а)



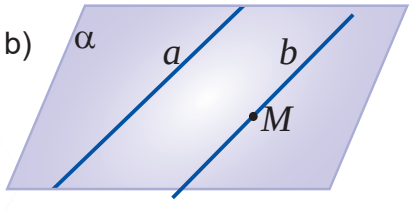
Дәлелдеу. a – берілген түзу және M – осы түзуден тыс жатқан нүкте болсын *(2.а-сурет)*. 34-беттегі 1-нәтижеге орай, берілген a түзу және одан тыс жатқан М нүкте арқылы тек бір ғана α жазықтықты өткізуге болады.

α жазықтықта M нүкте арқылы берілген a түзуге параллель тек бір ғана b түзуді жүргізуге болады *(2b-сурет)*.

Дәл осы b түзу ізделінген бір ғана түзу болады.

Жазықтықта жатқан екі параллель түзудің бірі үшінші түзуді қиып өтсе, олардың екіншісі де осы түзуді қиып өтеді. Осыған ұқсайтын қасиет – кеңістікте де орынды болады.

b)



3.2.-теорема. *Кеңістікте берілген екі параллель түзудің бірі жазықтықты қиып өтсе, олардың екіншісі де осы жазықтықты қиып өтеді.*

Дәлелдеу. b және с параллель түзулер берілген болып, олардың бірі – b түзу берілген β жазықтықты M нүктеде қиып өтсін *(3-сурет)*.

b және с түзулер параллель болғандықтан олар бір жазықтықта жатады. Бұл – γ жазықтық болсын.

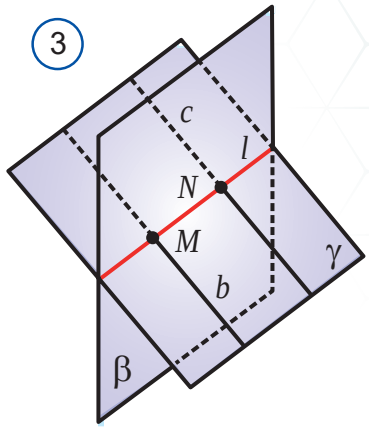
β және γ жазықтықтар үшін M ортақ нүкте. Онда S_3 аксиомаға орай, бұл жазықтықтар бір l түзудің бойымен қиылысады. Осы түзу γ жазықтықта жатады және b түзуді M нүктеде қиып өтеді. Сондықтан, бұл түзу b түзуге параллель c түзуін де N нүктеде қиып өтеді.

l түзу b жазықтықта да жатқандықтан N нүкте осы b жазықтыққа да тиісті. Демек, N нүкте – b және γ жазықтықтар үшін ортақ нүкте.

Енді c түзудің β жазықтықпен басқа ортақ нүктесінің жоқ екенін көрсетеміз.

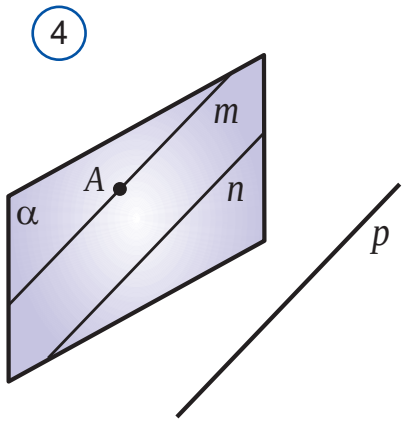
Кері жорамал жасайық. Айталық, c түзудің β жазықтықпен тағы басқа да K ортақ нүктесі бар болсын. Онда S_2 аксиомаға орай, c түзу β жазықтықта жатады. Онда c түзу β және γ жазықтықтар үшін ортақ болады. Бірақ l – осындай түзу еді. Бұдан c түзудің l түзумен дәлме-дәл түсуі келіп шығады. Ал мұның болуы мүмкін емес. Өйткені b түзу c түзуге параллель және l түзуді қиып өтеді. Қайшылық жорамалдың қате екенін көрсетті.

Планиметриядан екі түзудің әрбірі үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель болатыны сендерге белгілі. Осы қасиет кеңістікте де орынды болып, ол түзулердің ***параллельдік белгісі*** деп айтылады.



3.3-теорема. Үшінші түзуге параллель болатын екі түзу өзара параллель болады

Дәлелдеу. Айталық, m және n түзулер p түзуге параллель болсын *(4-сурет)*. m және n түзулердің бір жазықтықта жататынын және өзара қиылыспайтынын, яғни параллель екенін көрсетеміз.



m түзудегі A нүктені аламыз және осы нүкте мен n түзу арқылы α жазықтық жүргіземіз. m түзудің a жазықтықта жататынын дәлелдейміз.

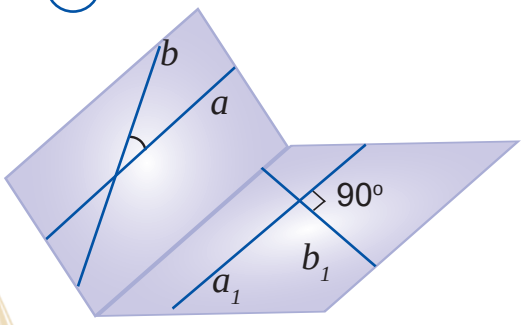
Айталық, мұндай болмасын. m түзу a жазықтықпен ортақ нүктеге ие болғандықтан, ол жазықтықты қиып өтеді. Онда 3.2-теоремаға орай, бұл жазықтықты m түзуге параллель болған p түзу де, p түзуге параллель болған n түзу де қиып өтеді. Бірақ мұндай болуы мүмкін емес, өйткені n түзу a жазықтықта жатады.

Демек, m және n түзулер a жазықтықта жатады.

Енді осы түзулердің қиылыспайтынын дәлелдейміз.

Тағы да кері жорамал жасаймыз. m және n түзулер қандай да бір B нүктеде қиылысатын болсын. Онда B нүкте арқылы p түзуге параллель екі m және n түзулер өтеді. Ал 3.1-теоремаға орай мұндай болуы мүмкін емес.

5



Бір түзуде немесе параллель түзулерде жататын кесінділер (сәулелер) өзара *параллель кесінділер (сәулелер)* деп аталады.

Екі түзудің қиылысуынан пайда болған сыбайлас бұрыштардың кішісі екі түзудің арасындағы *бұрыш* делінеді *(5-сурет)*.

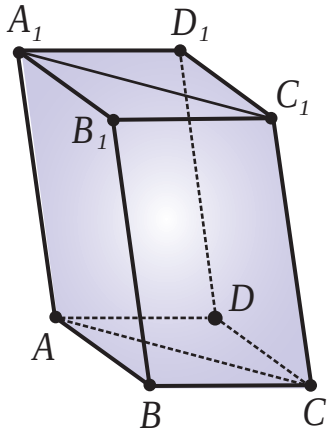
Арасындағы бұрыш 90°-қа тең түзулер *перпендикуляр түзулер* деп аталады.

Параллель түзулердің арасындағы бұрыш 0-ге тең деп саналады.

Енді параллелепипедтің төмендегі қасиеттерін дәлелдейміз. Бұл үшін II бөлімде берілген параллелепипед және оның элементтерінің анықтамасын еске түсіруге тура келеді.

Параллелепипедтің қасиеттері

6



Қасиет 1. *$ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедте табан диагональдары мен бүйір қырларынан түзілген ACC_1A_1 төртбұрыш параллелограмнан құралған болады (6-сурет).*

Дәлелдеу. Шынында да, параллелепипедтің ABB_1A_1 және BCC_1B_1 жақтары анықтамасына орай, параллелограмнан құралған.

Осы параллелограмдардың қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болады.

Атап айтсақ, $AB = A_1B_1$ және $BC = B_1C_1$.

Параллелепипедтің анықтамасына орай, $AA_1 \parallel BB_1$ және $BB_1 \parallel CC_1$. Онда 3.3-теоремаға орай, $AA_1 \parallel CC_1$ және $AA_1 = CC_1$ болады.

Демек, AC_1CA_1 төртбұрыш – параллелограмм.

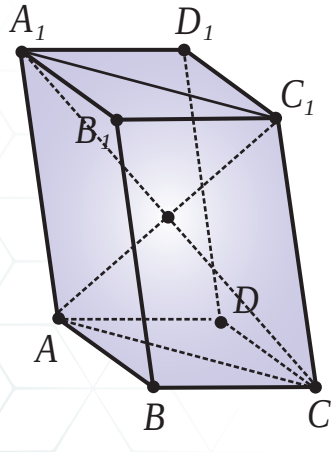
Қасиет 2. *$ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедтің қарама-қарсы жақтары өзара тең (6-сурет).*

Дәлелдеу. Жоғарыдағы қасиетке орай, AC_1CA_1 – параллелограмм және $AC = A_1C_1$.

Онда ABC және $A_1B_1C_1$ үшбұрыштар үш қабырға бойынша тең болып, ABC және $A_1B_1C_1$ бұрыштар да өзара тең болады. Нәтижеде, $ABCD$ және $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмдар да өзара тең болады.

Басқа қарама-қарсы жақтардың теңдігі де осылайша дәлелденеді.

7



Қасиет 3. *Параллелепипедтің барлық диагональдары бір нүктеде қиылысады және осы нүктеде тең екіге бөлінеді (7-сурет).*

Дәлелдеу. *1-қасиетке орай, AC_1CA_1 – параллелограмм. Онда осы параллелограмдардың диагональдары A_1C және AC_1 бір нүктеде қиылысады және осы қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді.*

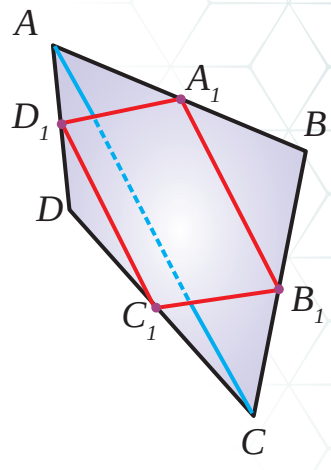
Қалған диагональдардың қиылысуы және осы нүктеде тең екіге бөлінуі де осыған ұқсас түрде

дәлелденеді.

Есеп. Төбелері бір жазықтықта жатпайтын кеңістіктегі төртбұрыш қабырғаларының центрлері параллелограмның төбелері болатынын дәлелде.

Дәлелдеу. $ABCD$ – кеңістіктегі төртбұрыш және A_1, B_1, C_1 және D_1 – төртбұрыш қабырғаларының центрлері болсын *(8-сурет)*. Онда, A_1B_1 кесінді – ABC үшбұрыштың AC қабырғасына параллель центрлік түзуі, C_1D_1 кесінді ACD үшбұрыштың AC қабырғасына параллель центрлік түзуі болады.

8



3.3-теоремаға орай, A_1B_1 және C_1D_1 түзулер параллель болады. Демек, олар бір жазықтықта жатады.

A_1D_1 және B_1C_1 түзулердің параллельділігі де дәл осылай дәлелденеді.

Осылайша, $A_1B_1C_1D_1$ төртбұрыш бір жазықтықта жатады және оның қарама-қарсы қабырғалары параллель.

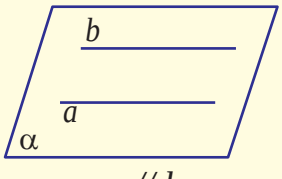
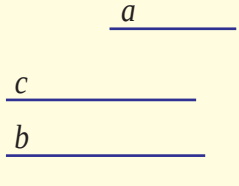
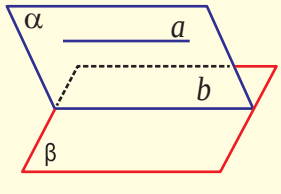
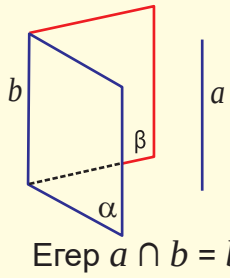
Демек, ол параллелограмм болады.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

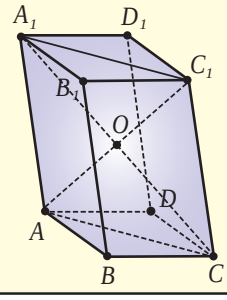
1. *Параллель түзулердің қандай қасиеттерін білесің?*
2. *Түзулердің параллельділік белгісін айт.*
3. *Параллелепипедтің қандай қасиеттерін білесің?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

11.1. Кестеде 11-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Параллель түзулер			
Анықтамасы	**Белгілері**		
 $a \parallel b$, a және b түзулер бір жазықтықта жатып, өзара қиылыспайтын болса, параллель түзулер деп аталады.	 Егер $a \parallel b$, $a \parallel c$ болса, $b \parallel c$ болады.	 Егер $a \cap b = b$, $a \subset a$ және $a \parallel b$ болса, $b \parallel a$ болады.	 Егер $a \cap b = b$, $a \parallel a$ және $a \parallel b$ болса, $a \parallel b$ болады.

2. Параллелепипедтің қасиеттері



1-қасиет. Табан диагональдары мен бүйір қырларынан түзілген төртбұрыш (AA_1C_1C) параллелограм болады.

2-қасиет. Қарама-қарсы жақтары өзара тең ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$).

3-қасиет. Барлық диагональдары бір нүктеде қиылысады және осы нүктеде тең екіге бөлінеді ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

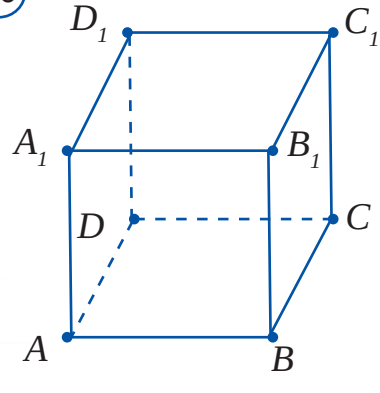
9 a) b) c)







10



11.2. 9-суреттегі кеңістіктегі параллель түзулердің рәміздерін анықта.

11.3. 10-суретте бейнеленген а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралеллепипедтегі; b) $ABCA_1B_1C_1$ призмадағы параллель қырлардың жұптарын анықта.

11.4. Қандай пирамидаларда параллель қырлары болады?

11.5. Жазықтықта түзу параллель түзулердің бірін қиып өтсе, екіншісін де қиып өтетіні белгілі. Осы қасиет кеңістікте де орынды бола ма?

11.6. a және b түзулер с түзуге параллель. a және b түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

11.7. 10-суретте бейнеленген $ABCDA_1B_1C_1D_1$ паралеллепипедтегі BC_1 және AD_1 диагональдар өзара тең және параллель екенін дәлелде.

11.8. A төбесі a жазықтықта жатқан AB кесіндіде C нүкте таңдалған. B және C нүктелер арқылы өткізілген параллель түзулер a жазықтықты сәйкесінше, B_1 және C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді. Егер: а) C нүкте B кесіндінің центрі және BB_1 = 14 cm; b) $AC : CB$ = 3 : 2 және BB_1 = 50 cm болса, CC_1 кесіндінің ұзындығын тап.

11.9. Бір жазықтықта жатпайтын $MNOP$ параллелограмм және EK табанды $MNEK$ трапеция берілген.

1) PO және EK түзулердің өзара орналасуын анықта; 2) трапецияның табандары MN = 45 cm, EK = 55 cm -ге тең болып, оған іштей шеңбер сызуға болады. Трапецияның периметрін тап.

11.10. Төмендегі қасиеттердің қайсылары параллелепипедке тиісті? Дұрыс жауаптарды белгіле.

A) Табан диагональдарынан және бүйір қырларынан түзілген тұртбұрыш параллелограмнан құралған.

B) Бүйір қырлары табанына перпендикуляр.

C) Табан диагональдарынан және бүйір қырларынан түзілген төртбұрыш параллелограмнан құралған болады.

D) Барлық диагоналы бір нүктеде қиылысады және бұл нүктеде тең екіге бөлінеді.

E) Қарама-қарсы қырлары өзара параллель.

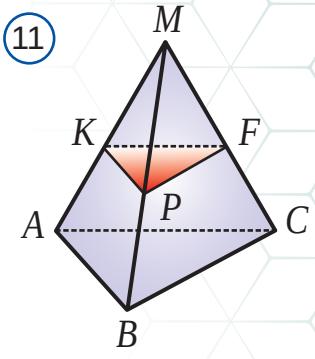
F) Барлық жақтары тік төртбұрыштан құралған.

G) Қарама-қарсы жақтары өзара тең.

H) Қырлары өзара айқас.

J) Қырлары арасында өзара айқастары да бар.

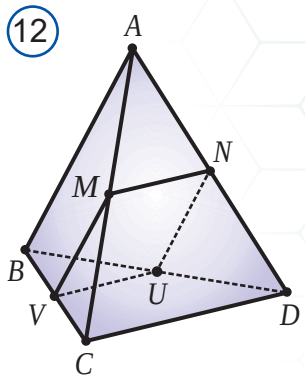
11



11.11. Кеңістікте бір түзуге перпендикуляр болған түзулер өзара параллель бола ма?

11.12. 11-суретте M нүкте ABC үшбұрыштың сыртында жатыр. MA, MB, MC кесінділердің центрлері, сәйкесінше K, F, P нүктелермен белгіленген. 1) KP; 2) PF; 3) KF; 4) KM; 5) PM; 6) FM; 7) AB; 8) BC; 9) AC түзулердің қайсылары өзара параллель?

12



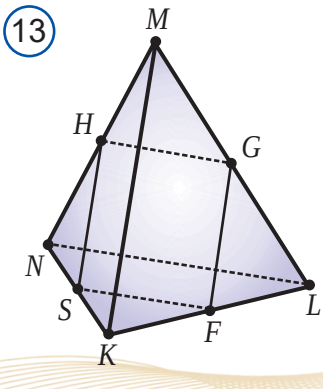
11.13. Төмендегі сөйлемдерді оқы. Сөйлем дұрыс болса “+”, қате болса “–” таңбасын жанындағы торкөзге қоюың керек.

1	Кеңістіктегі түзуде жатпайтын нүкте арқылы оған параллель көп түзулерді өткізуге болады.	
2	Үшінші түзуге параллель екі түзу өзара қиылысады.	
3	Егер екі түзу жазықтықта жатса, олар қиылысады.	
4	Түзу және онда жатпаған нүкте арқылы екі жазықтық өткізуге болады.	
5	Кеңістіктің жазықтықта жатпаған нүктесі арқылы осы жазықтықты қиятын көптеген түзулерді өткізуге болады.	

11.14. M, N, U, V нүктелер – $ABCD$ пирамиданың, сәйкесінше AC, AD, BD және BC қырларының центрлері *(12-сурет)*. Егер AB = 20 cm, CD = 30 cm болса, $MNUV$ төртбұрыштың периметрін тап.

11.15. H, G, F, S нүктелер – $KLMN$ үшбұрышты пирамиданың, сәйкесінше MN, ML, LK және KN қырларының центрлері *(13-сурет)*. Егер LK = 18 mm, MN = 22 mm болса, $HGFS$ төртбұрыштың периметрін тап.

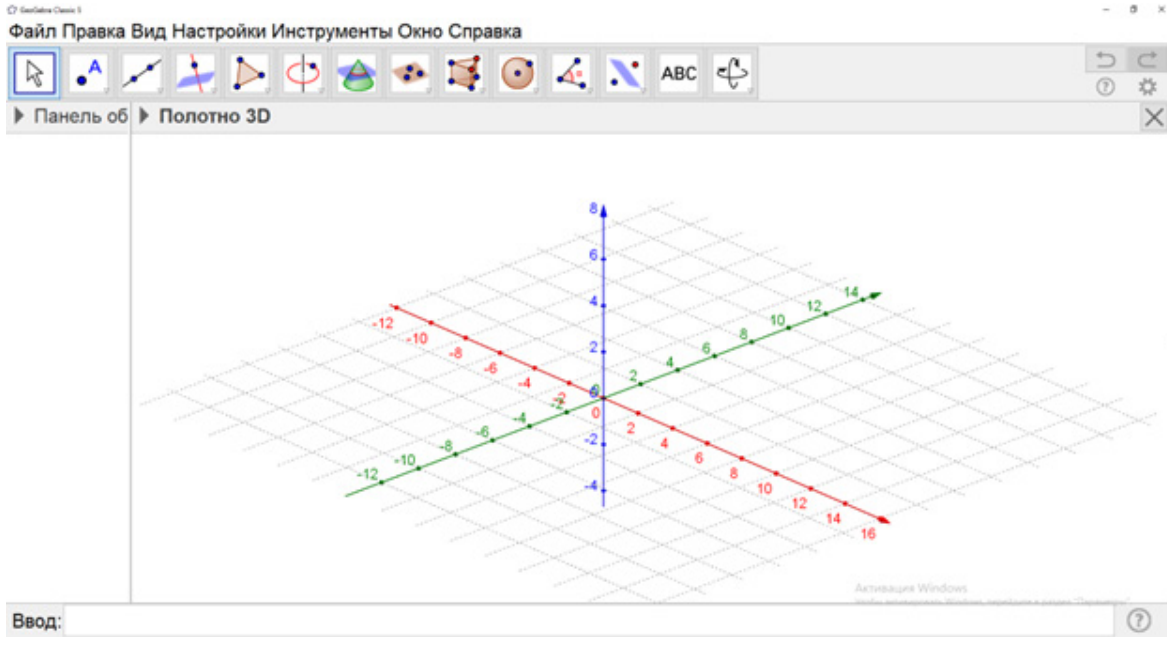
13



“GeoGebra”ны қолдану

3D калькулятормен түрлі жазықтықтарды салу

	• 3D калькуляторының қондырғылар панеліндегі **“Плоскость через три точки”** (“Үш нүкте арқылы жазықтық”) құралы үстіне тышқанның сол түймешігі басылса, жаңа терезеде оның басқа да 3 мүмкіндігі: • **“Плоскость”** (“Жазықтық”), • **“Перпендикулярная плоскость”** (“Перпендикуляр жазықтық”); • **“Параллельная плоскость”** (“Параллель жазықтық”) ашылады.



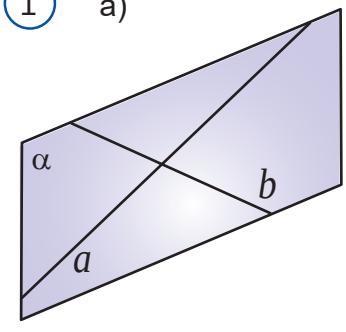
Бұл қондырғылар мынадай міндеттерді атқарады:	
	**“Плоскость”** (Жазықтық) жәрдемінде жазықтық салынады.
	**“Перпендикулярная плоскость”** (Перпендикуляр жазықтық) жәрдемінде перпендикуляр жазықтық салынады.
	**“Параллельная плоскость”** (Параллель жазықтық) жәрдемінде параллель жазықтық салынады.

Өз бетінше орындауға арналған тапсырмалар

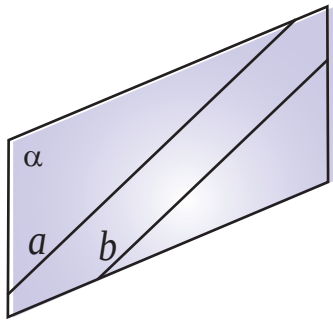
1. Кез келген үш нүкте белгіле. Олар арқылы өтетін жазықтық сал.
2. Қандай да бір жазықтық сал, содан соң оған перпендикуляр жазықтық сал.
3. Қандай да бір жазықтық сал, содан соң оған параллель жазықтық сал.

12 АЙҚАС ТҮЗУЛЕР

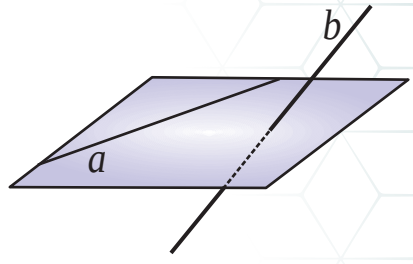
1 a)



b)



c)



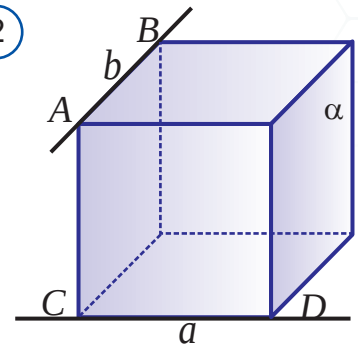
Егер кеңістікте екі түзу өзара қиылысса немесе өзара параллель болса, олар бір жазықтықта жатады *(1a- және 1b-сурет)*.

Кеңістікте бір жазықтықта жатпайтын түзулер *айқас түзулер* деп аталады *(1c-сурет)*. a және b түзулердің айқастығы $a \div b$ түрінде өрнектеледі.

Айқас түзулерде жатқан кесінділерді *айқас кесінділер* деп атаймыз. 2-суретте кубтың AB және CD айқас қырлары көрсетілген.

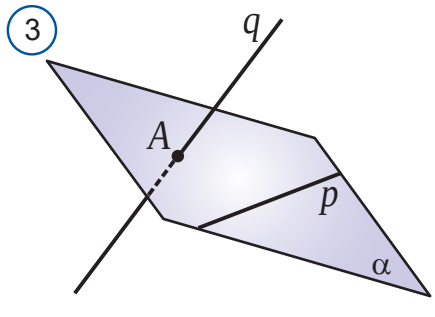
Айқас түзулерді мынадай белгілеріне сәйкес танып алу мүмкін:

2



3.4-теорема. *Егер екі түзудің бірі қандай да бір жазықтықта жатса, ал екіншісі осы жазықтықты бірінші түзуде жатпаған нүкте арқылы қиып өтсе, онда бұл түзулер айқас түзулер болады.*

3



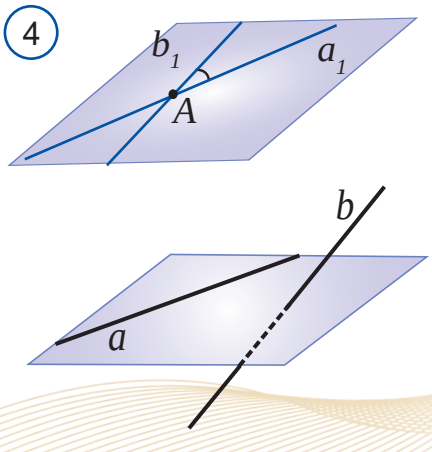
Дәлелдеу. Айталық, p түзу a жазықтықта жататын болсын. Ал q түзу бұл жазықтықты p түзуге тиісті болмаған A нүктеде қиып өтсін *(3-сурет)*. p және q түзулердің айқас екенін дәлелдейміз.

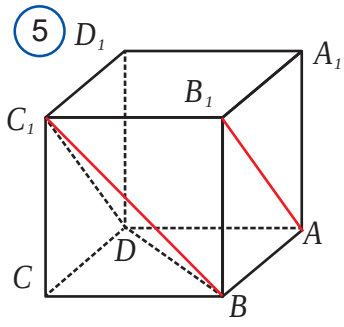
Кері жорамалдаймыз: p және q түзулер қандай да бір b жазықтықта жататын болсын. Онда β жазықтыққа p түзу мен A нүкте тиісті болады. Өз кезегінде A нүкте q жазықтыққа да тиісті. Демек, α және β жазықтықтар дәлме-дәл түседі. Нәтижеде, шартқа орай α жазықтыққа тиісті болмаған q түзу осы жазықтыққа тиісті болып қалды. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

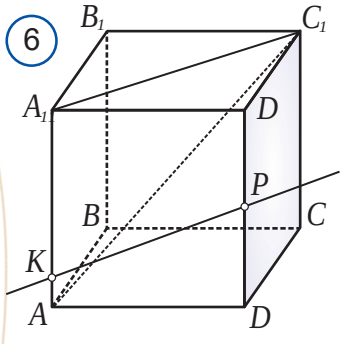
Айқас түзудің арасындағы бұрыш деп осы түзулерге параллель болған қиюшы түзулер арасындағы бұрышқа айтылады.

Іс жүзінде a және b айқас түзулердің арасындағы бұрышты табу үшін *(4-сурет)*:

4







1) қандай да бір A нүкте таңдалады;

2) A нүкте арқылы айқас түзулерге параллель a_1 және b_1 түзулер өткізіледі;

3) осы түзулердің арасындағы бұрыш өлшенеді.

Бұл алгоритмнің нәтижесі – A нүктеге байланысты емес екені туралы ойланып көр.

Есеп. Кубтың сыбайлас жақтарының айқас диагональдары арасындағы бұрышты тап.

Шешуі. Шартқа сәйкес, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб сыбайлас ABA_1B_1 және CBC_1B_1 жақтардың AB_1 және C_1B диагональдары арасындағы бұрышты табу керек *(5-сурет)*.

AB_1-ге параллель болған DC_1 диагональды өткіземіз. Ол жағдайда анықтамаға сәйкес, AB_1 және BC_1 диагональдары арасындағы бұрыш – DC_1 және C_1B диагоналдар арасындағы DC_1B бұрышқа тең болады.

DC_1B – теңқабырғалы үшбұрыш.

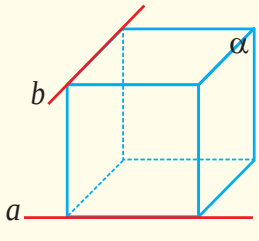
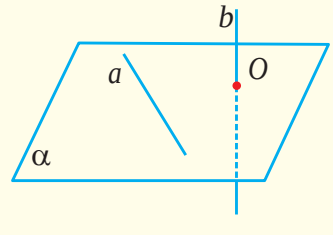
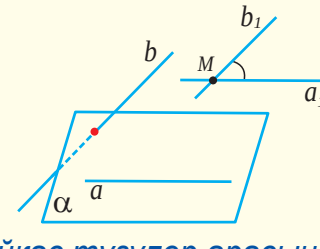
Сонымен, $DC_1B = 60^\circ$.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Түзулердің айқастық белгісін айт.*
2. *Түзулердің арасындағы бұрыш қалай анықталады?*
3. *Айқас түзулер параллель болуы мүмкін бе?*
4. *Айқас түзулер арасындағы бұрыш қалай анықталады?*
5. *Кеңістіктегі түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?*
6. *Кеңістіктегі өзара қиылыспайтын түзулер әрқашан да параллель бола ма?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

12.1. Кестеде 12-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

1. Айқас түзулер		
Анықтамасы	**Белгілері**	**Арасындағы бұрыш**
 Бір жазықтықта жатпайтын түзулер *айқас түзу сызықтар* деп аталады және $a \div b$ түрінде өрнектеледі.	 Егер $a \subset \alpha$, $a \cap b = O$, $O \notin a$ болса, $a \div b$ болады.	 *Айқас түзулер арасындағы бұрыш* деп оларға параллель болған, қиылысатын түзулер арасындағы бұрышқа айтамыз.

12.2. 6-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед және оның AA_1 және DD_1 қырларындағы сәйкес түрде K және P нүктелер өрнектелген. Кестеде келтірілген түзулердің өзара орналасуынан келіп шығып, кестенің сәйкес торкөздеріне тиісті белгі (⊗– қиылысушы және ⫠ – айқастық) қойылған. Кестедегі қателікті тап.

	AB	BB_1	A_1D_1
KP	⊗	⫠	⊗
C_1A_1	⫠	⫠	⊗
C_1B	⊗	⊗	⫠

12.3. a және b түзулер бір жазықтықта жатады. Бұл түзулердің мүмкін болған өзара орналасуын көрсет.

A) параллель B) қиылысады C) қиылыспайды
D) айқас E) перпендикуляр

12.4. a) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипед; b) $ABCA_1B_1C_1$ призма; d) $ABCD$ тетраедр; e) $SABCD$ пирамиданы сал және ондағы айқас бүйірлердің жұптарын анықта.

12.5. a түзу b түзуге, b түзу c түзуге айқас болса, a түзу c түзуге айқас бола ма?

12.6. 7-суреттегі айқас түзулердің рәміздерін тап.

12.7. 8-суретте берілген EF және GH қималардың өзара орналасуы қандай?

12.8. 9-суретте берілген EH және FG қималар өзара қиылыса ма?

12.9. K, Z, M, N нүктелер – сәйкес түрде $SABC$ үшбұрышты дұрыс пирамиданың SA, AC, BC, SB қырларының центрлері. Егер пирамиданың бүйір қырлары b, табанының қабырғасы a-ға тең болса, $KZMN$ төртбұрыштың периметрін тап.

12.10. 10-суреттегі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубта төмендегі түзулер арасындағы бұрышты тап: a) DC және BC; b) AB және BB_1; c) AA_1 және D_1C; d) AA_1 және D_1C_1; e) A_1C_1 және AC; f) AB және B_1D_1.

12.11. XU және VT түзулер параллель, XY және VT түзулер айқас. Егер: a) $\angle YXU = 40^o$; b) $\angle YXU = 135^o$; c) $\angle YXU = 90^o$ болса, XY және VT түзулер арасындағы бұрышты тап.

12.12. l түзу $ABCD$ параллелограмның BC қабырғасына параллель және оның жазықтығында жатпайды. l және CD түзулер айқас екенін дәлелде. Егер параллелограмның бұрыштарының бірі: a) 58°; b) 133° болса, l және CD түзулер арасындағы бұрышты тап.

7

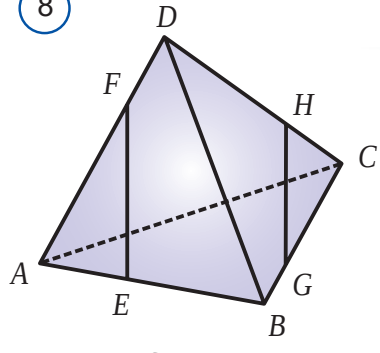
a)



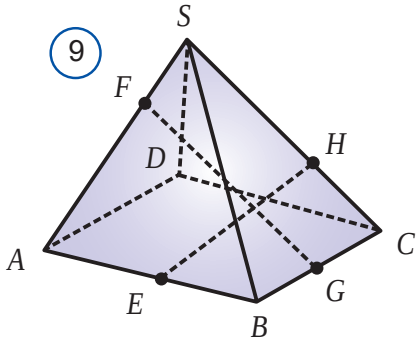
b)



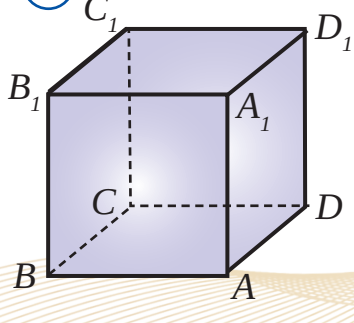
8



9



10

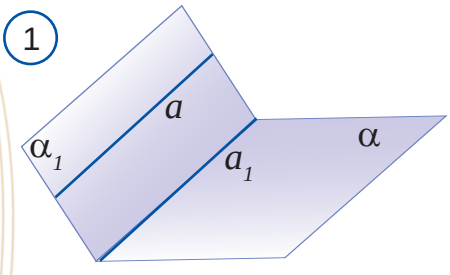


13 КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Егер түзу мен жазықтық қиылыспайтын болса, *түзу мен жазықтық параллель* делінеді. Түзу мен жазықтықтың параллельдігі төмендегі белгі арқылы анықталады.

3.5-теорема. *Егер жазықтықта жатпайтын түзу осы жазықтықтағы қандай да бір түзуге параллель болса, бұл түзу жазықтықтың өзіне де параллель болады.*

1



Дәлелдеу. Айталық, α – жазықтық, a – онда жатпайтын түзу, a_1 түзуі α жазықтықта жататын және a-ға параллель түзу болсын.

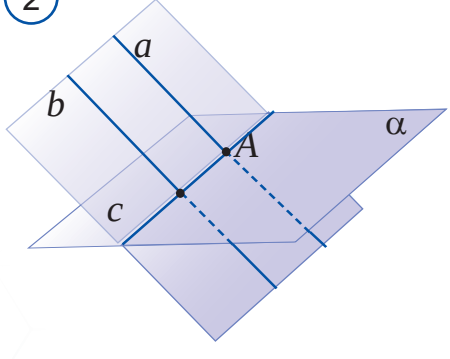
a және A_1 түзулер арқылы a_1 жазықтықты жүргіземіз *(1-сурет)*. α және α_1 жазықтықтар a_1 түзу бойынша қиылысатыны белгілі.

Егер a түзу α жазықтықты қиып өтсе, онда қиылысу нүктесі a_1 түзуге тиісті болатын еді. Бірақ бұл мүмкін емес, өйткені a және a_1 түзулер параллель. Сондықтан, a түзу α жазықтықты қиып өте алмайды.

Демек, a түзу α жазықтыққа параллель.

Есеп. Егер жазықтық екі параллель түзудің бірін қиып өтсе, екіншісі де қиып өтетінін дәлелде.

2



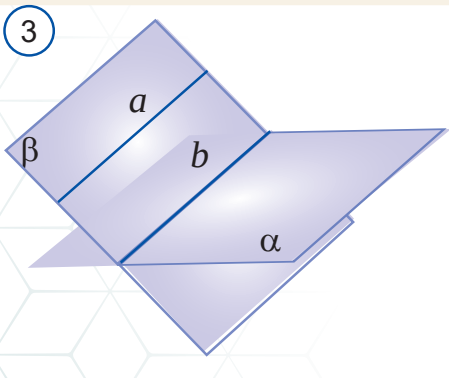
Дәлелдеу. a және b – екі параллель түзу, ал α жазықтық a түзуді A нүкте арқылы қиып өтетін болсын *(2-сурет)*.

a және b түзулер арқылы жазықтық жүргіземіз. Ол α жазықтықты қандай да бір c түзудің бойымен қиып өтеді. c түзу a түзуді A нүкте арқылы қиып өтеді.

Демек, оған параллель болған b түзуді де қиып өтеді. c түзу α жазықтықта жатқандықтиан α жазықтық b түзуді де қиып өтеді.

3.6-теорема. *Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель болған түзу арқылы өтсе, бұл жазықтықтардың қиылысуының түзуі де берілген түзуге параллель болады.*

3



Дәлелдеу. Айталық, a түзу α жазықтыққа параллель және b жазықтықта жатсын. Ал b түзу α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі болсын *(3-сурет)*. Онда, a және b түзулер β жазықтықта жатады және өзара қиылыспайды. Кері жағдайда, a түзу β жазықтықты қиып өтетін еді.

Демек, a және b түзулер өзара параллель.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

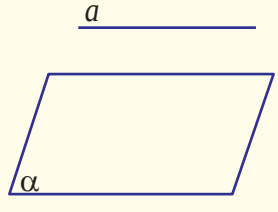
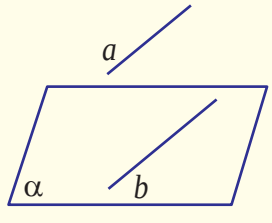
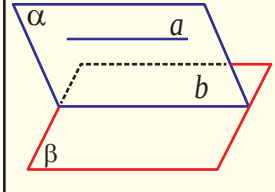
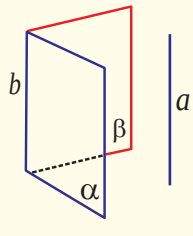
1. *Түзу мен жазықтық кеңістікте өзара қалай орналасуы мүмкін?*
2. *Түзу мен жазықтық қашан параллель болады?*
3. *Түзудің жазықтыққа параллельдік белгісін айт.*
4. *Кеңістіктегі түзу мен жазықтықтардың орналасуына байланысты қандай қасиеттерді білесің?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

13.1. Кестеде 13-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

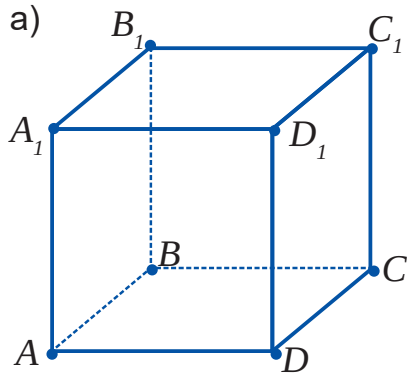
a түзу және α жазықтық	көп ортақ нүктелерге ие.	түзу жазықтықта жатады: $a \subset \alpha$.
	бір ортақ нүктеге ие.	түзу жазықтықты қияды: $a \otimes \alpha$.
	ортақ нүктеге ие емес.	түзу жазықтыққа параллель: $a \parallel \alpha$.

Түзу және жазықтықтардың параллельдігі

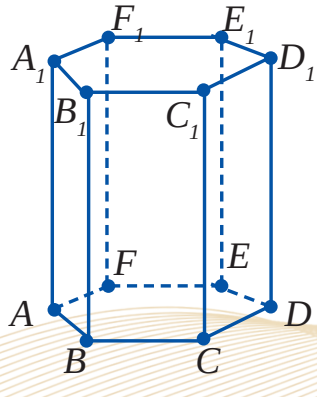
Анықтамасы	Белгілері	Қасиеттері	
			
Егер a түзу α жазықтықпен ортақ нүктеге ие болмаса, түзу және жазықтық параллель делінеді және $a \parallel \alpha$ түрінде өрнектеледі.	Егер a түзу α жазықтықта жатпаса және $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ болса, ол жағдайда $a \parallel \alpha$ болады.	Егер b түзу α және β жазықтықтар қиылысу түзуі, $a \subset \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, ол жағдайда $b \parallel a$ болады.	Егер b түзу α және b жазықтықтардың қиылысу түзуі, $a \subset \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, $a \parallel b$ болады.

13.2. Суретке қарап а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың; b) $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ алтыбұрышты дұрыс призманың бір-біріне параллель қырлары мен жақтарын анықта *(4-сурет)*.

4 a)



b)



5



13.3. 5-суретте комбайн суреттелген. Оның егістік алаңына (жазықтығына) қатысты қайсы бөліктері параллель екенін анықта.

13.4. 6-суретте бейнеленген шеберлер құралы – рейсмус жәрдемінде ағаш тақтаның қайсы жағына қатысты параллель түзу сызылатынын анықта.

13.5. Төмендегі сөйлемдерлі оқы. Сөйлем дұрыс болса “+”, қате болса, “–” белгісін жанындағы торкөзге қой.

1	Егер жазықтықта жатпаған түзу сол жазықтықтағы бірер түзуге параллель болса, бұл түзу жазықтықтың өзіне де параллель болады.	
2	Бір жазықтыққа параллель түзулер өзара параллель болады.	
3	Жазықтыққа параллель түзу бұл жазықтықта жатқан кез келген түзуге да параллель болады.	
4	Егер бір жазықтық екінші жазықтыққа параллель болған түзуден өтсе, бұл жазықтықтардың қиылысу түзуі де берілген түзуге параллель болады.	
5	Егер түзумен жазықтық қиылыспаса, түзу және жазықтық параллель дейміз.	
6	Арасындағы бұрыш 90°-қа тең түзулер перпендикуляр түзулер деп аталады.	
7	Айқас түзулер арасындағы бұрыш деп түзулерге параллель болған қиылысушы түзулер арасындағы бұрышқа айтылады.	

6



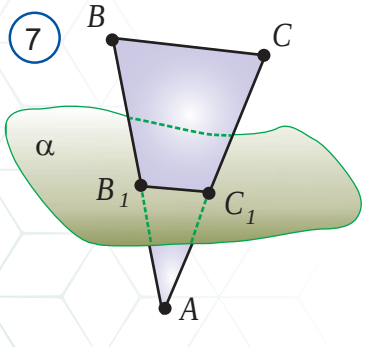
13.6. A және C нүктелер α жазықтықта жатыр. B және D нүктелер β жазықтықта жатыр. AC, CD, BD, AB, BC және AD түзулердің қайсылары β жазықтықты қиып өтеді?

13.7. ABC үшбұрыш α жазықтықты B_1 және C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді *(7-сурет)*. $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15\ cm$, $BC \parallel B_1C_1$ болса, B_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап.

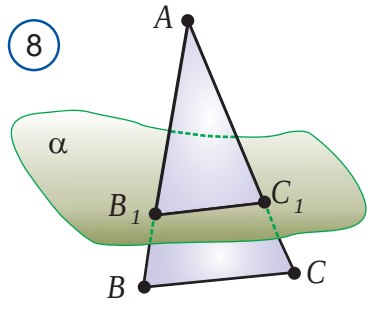
13.8. α жазықтық ABC үшбұрыштың AB және AC қабырғаларын B_1 және C_1 нүктелер арқылы қиып өтеді *(8-сурет)*. Егер $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1C_1 = 12\ cm$, $BC \parallel \alpha$ болса, BC кесіндінің ұзындығын тап.

13.9. α жазықтық $ABCD$ трапецияны оның AD

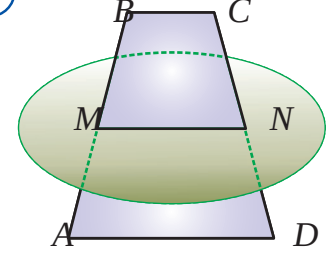
7



8



9



табанына параллель және бүйір қырлары M және N нүктелер арқылы қиып өтеді *(9-сурет)*. Егер $AD = 17\ cm$, $BC = 9\ cm$ болса, MN кесіндінің ұзындығын тап.

13.10. Жазықтыққа онда жатпайтын нүкте арқылы неше параллель түзу өткізуге болады?

13.11. a түзу α жазықтыққа параллель. Дұрыс растауларды тап.

A) a түзу α жазықтықтың тек бір ғана түзуіне параллель болады;

B) a түзу α жазықтықтың тек бір ғана түзуінен басқа барлық түзулеріне айқас болады;

C) α жазықтықта a түзуге параллель және айқас көп түзулер табылады;

D) α жазықтықта тек бір ғана a түзуге параллель және осы жазықтықтың кез келген нүктесі арқылы өтетін түзу бар.

13.12. A, B, C, D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. M, N, K, Z нүктелер, сәйкесінше AD, BD, BC, AC кесінділердің центрлері. Егер $CD=AB$ болса, MK және NZ түзулердің перпендикулярлығын дәлелде.

13.13. $ABCD$ параллелограмның AB және BC қабырғалары α жазықтықты қиып өтеді. AD және DC түзулер де α жазықтықты қиып өтетінін дәлелде.

13.14. ABC және ABD үшбұрыштар бір жазықтықта жатпайды. CD түзуге параллель болған кез келген түзудің осы үшбұрыштар жазықтығын қиып өтетінін дәлелде.

13.15. Берілген екі түзуді қиып өтетін түзулердің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

13.16. $ABCD$ квадраттың C төбесі арқылы квадрат жазықтығында жатпаған CK түзу өтеді:

a) CK және AD айқас екенін дәлелде;

b) CK және AD арасындағы бұрышты тап.

13.17. Кәсіпкер алюминийден 10-суреттегі баспалдақты жасау ниетінде. Баспалдақтың әр бірінде 7 саты болған, бір-біріне нығыздалған екі бөліктен құралған.

1) Баспалдақтың қай бөліктері өзара параллель және қайсысы өзара айқас екенін анықта.

2) Егер баспалдақтың кеңдігі 0,5 m, биіктігі енінен 3,5 есе ұзын екені белгілі болса, бір баспалдақты дайындау үшін неше m құбыр керек болады?

3) 1 m алюминий құбырдың бағасы 20 000 сум болса, бір баспалдақты жасауға неше сум алюминий құбыр керек болады?

Ең соңғы философиялық мектеп – Александрия мектебі әлемге біздің заманымыздан бұрынғы 300-жылдары жасаған әйгілі ғалым Эвклидті берген. Геометрияның аксиоматикалық құрылымы бірінші рет Эвклидтің “Бастамалар” еңбегінің он үшінші кітабында көрсетілген. Шамамен екі мың жыл барысында бұл жұмыс геометрияның жүйелі курсын үйрену үшін негіз болып қалуда. Аңыздарға қарағанда, патша Птоломей Эвклидтен "Геометрияны үйренудің “Бастамаларға” қарағанда қысқа және оңай тәсілін табу мүмкін бе?", деп сұраған. Эвклид оған: “Геометрияда патшалық жолы жоқ”, деп жауап берген

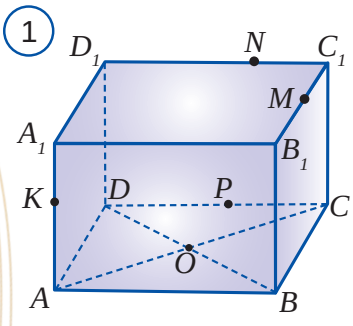
10



ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР

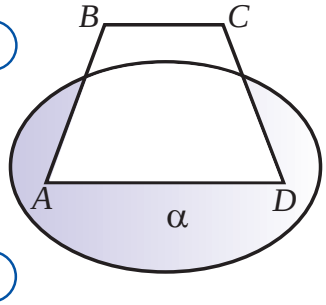
1. 1-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тік бұрышты параллелепипед және оның B_1C_1, C_1D_1, CD және AA_1 қырларының центрлері – сәйкес түрде M, N, P, K нүктелер берілген. O нүкте – $ABCD$ табан центрі. Кестеде келтірілген түзулердің өзара орналасуын суреттен анықтап, кестенің сәйкес көзіне тиісті белгіні ($\otimes$ – қиылысуы, // – параллельдік және $\div$ – айқастық) жаз.

1

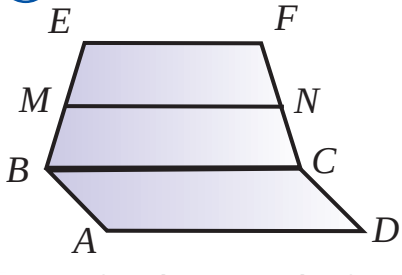


Түзулер	MN	NP	C_1O	NO
AA_1				
BC_1				
BD				
AC				

2



3



2. A, B, C, D нүктелер бір жазықтықта жатыр. AB және CD түзулер туралы не деуге болады?

A) параллель болады B) қиылысады C) айқас болады

3. $ABCD$ төртбұрышын AD қабырғасы арқылы жазықтық өткізілген *(2-сурет)*. Егер $\angle BCA = \angle CAD$ болса, BC қабырға α жазықтыққа параллель екенін дәлелде.

4. $ABCD$ квадрат және $BEFC$ трапеция *(3-сурет)* бір жазықтықта жатпайды. M және N нүктелер – сәйкес түрде BE және FC қималардың центрі.

1) MN-нің AD-ға параллель екенін дәлелде.

2) Егер $AD = 10\ cm$, $EF = 6\ cm$ болса, MN -ны тап.

5. $ABCD$ параллелограмның AD қабырғасында A_1 нүкте сондай таңдалған, $DA_1 = 4\ cm$. AC диагональға параллель жазықтық A_1 нүктеден өтеді және CD қабырғасын C_1 нүктеде қиып өтеді.

1) C_1DA_1 және ABC үшбұрыштардың ұқсастықтарын дәлелде.

2) Егер $BC = 10\ cm$, $A_1C_1 = 6\ cm$ болса, AC-ны тап.

6. α жазықтық BAC бұрыш қабырғаларын A_1 және B_1 нүктелерде, оған параллель β жазықтық A_2 және B_2 нүктелерде қияды. $A_1B_1 = 18$, $AA_1 = 24$, $AA_2 = 2_1 A_1A_2$ болса, A_2B_2 және AA_2-ні тап.

7. FA түзу $ABCD$ параллелограмның төбесінен өтеді және параллелограмм жазықтығында жатпайды.

1) FA және CD айқас екенін дәлелде.

2) FAB бұрышы 30° болса, FA және CD түзулер арасындағы бұрышты тап.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың қыры a-ға тең. AD_1 түзуден және BC кесіндінің центрінен өтетін жазықтықпен кубты қиғанда пайда болатын қиманы сал. Қиманың ауданын тап.

9. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың бүйір қыры 8 cm болып, табан жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасайды. Пирамиданың биіктігін және бүйір бетінің ауданын тап.

10. A, B, C және D нүктелер бір жазықтықта жатпайды. Егер AB және BC кесінділер центрлері арасындағы қашықтық 6-ға тең және $AC = 16$, $BD = 20$ болса, AC және BD түзулер арасындағы бұрышты тап.

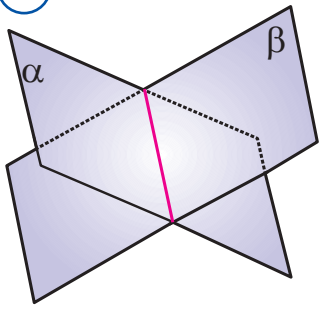
14 КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ӨЗАРА ОРНАЛАСУЫ

Екі жазықтық ортақ нүктеге ие болуы немесе ортақ нүктеге ие болмауы мүмкін. Бірінші жағдайда S_3 акисомасына орай бұл жазықтықтар ортақ түзуге де ие болады, яғни түзудің бойымен қиылысады *(1-сурет)*. Екінші жағдайда жазықтықтар қиылыспайды *(2-сурет)*.

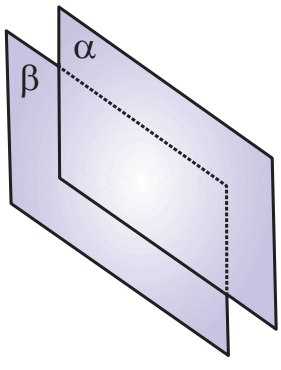
Қиылыспайтын жазықтықтар *параллель жазықтықтар* деп аталады. Параллель жазықтықтарды бөлменің едені мен төбесіне, қарама-қарсы қабырғаларына қарап көз алдымызға келтіруімізге болады *(3-сурет)*.

Екі жазықтықтың параллельдігі төмендегі белгі арқылы анықталады.

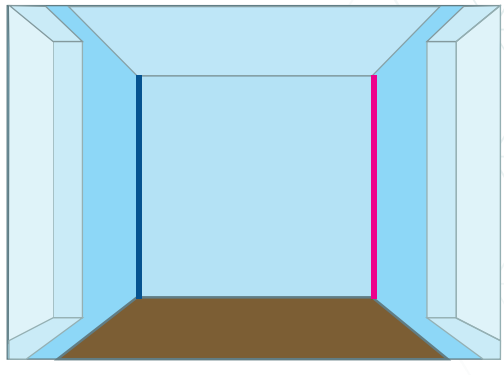
1



2



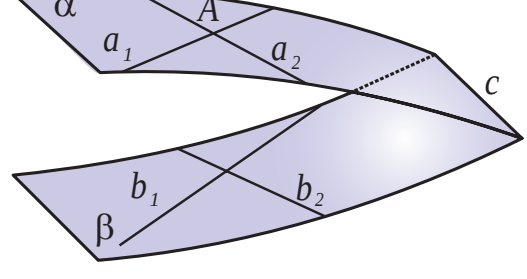
3



3.7-теорема. *Егер бір жазықтықтағы қиылысатын екі түзу екінші жазықтықтағы екі түзуге сәйкесінше параллель болса, бұл жазықтықтар параллель болады.*

Дәлелдеу. Айталық, α және β – жазықтықтар берілген, a және b – α жазықтықта жатқан және A нүктеде қиылысатын түзулер, ал a_1 және b_1 – β жазықтықта жатқан және сәйкесінше a және b түзулерге параллель түзулер болсын *(4-сурет)*.

4

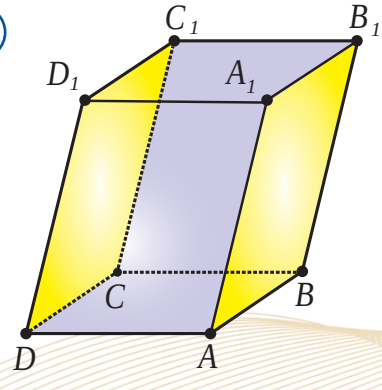


Жорамал жасаймыз, α және β – жазықтықтар өзара параллель болмасын, яғни қандай да бір c түзудің бойымен қиылысатын болсын. Онда 3.6-теоремаға орай, a_1 және a_2 түзулер сәйкесінше b_1 және b_2 түзулерге параллель болып, β жазықтыққа да параллель болады. Сондықтан олар осы жазықтықта жатқан c түзуді де қиып өтпейді.

Сөйтіп, α жазықтықта жатқан A нүкте арқылы c түзуге параллель екі a_1 және a_2 түзу өтуде. Параллельдік аксиомасына орай, мұндай болуы мүмкін емес, қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

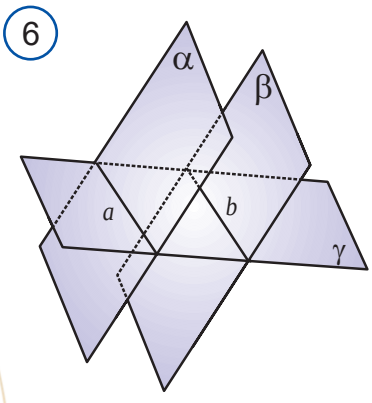
Параллелепипедтің бүйір қырлары *(5-сурет)* параллель болатынын өз бетіңше дәлелде.

5



3.8-теорема. *Екі параллель жазықтықтың үшінші жазықтықпен қиылысу түзулері өзара параллель болады.*

6

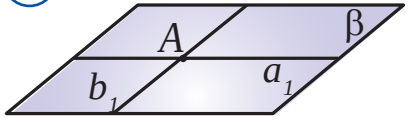


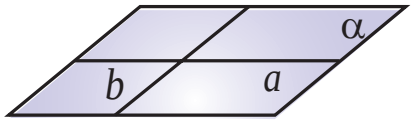
Дәлелдеу. Айталық, α және β параллель жазықтықтар γ жазықтықты сәйкесінше a және b түзулердің бойымен қиып өтсін *(6-сурет)*. a және b түзулердің параллель екенін дәлелдейміз.

Жорамал жасаймыз, a және b түзулер қандай да бір Q нүктеде қиылыссын. Онда Q нүкте α жазықтықта жатады, өйткені a түзу α жазықтықта жатады. Сондай-ақ, Q нүкте β жазықтықта жатады, өйткені b түзу β жазықтықта жатады. Нәтижеде, α және β жазықтықтар ортақ Q нүктеге ие болуда. Ал бұл шартқа орай мүмкін емес. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

3.9-теорема. *Берілген жазықтыққа оған тиісті болмаған нүкте арқылы бір ғана параллель жазықтық өткізуге болады*

7



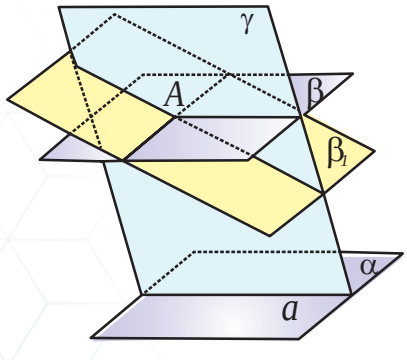


Дәлелдеу. Берілген α жазықтық арқылы қиылысатын екі a, b түзу жүргіземіз. Берілген A нүкте арқылы оларға параллель a_1, b_1 түзулерді жүргіземіз *(7-сурет)*.

a_1, b_1 түзулер арқылы β жазықтық жүргіземіз. Бұл жазықтық 3.7-теоремаға орай, α жазықтыққа параллель болып, ізделеніп жатқан параллель болады.

Енді осы жазықтықтың жалғыздығын көрсетеміз. Жорамал жасаймыз, α жазықтыққа параллель тағы бір β_1 жазықтық бар болсын *(8-сурет)*. A нүкте және a түзу арқылы өтетін γ жазықтықты жүргіземіз. Бұл жазықтық β жазықтықты a_1 түзудің бойымен, b_1 жазықтықты a_2 түзудің бойымен қиып өтеді. a_1, a_2 түзулер 3.6-теоремаға орай a түзуге параллель болады. Бірақ бұл мүмкін емес, өйткені жазықтыққа онда жатпайтын нүкте арқылы тек бір ғана түзу өткізуге болады. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

8



3.10-теорема. *Үшінші жазықтыққа параллель екі жазықтық өзара параллель болады*

Бұл теореманы өз бетіңше дәлелде.

3.11-теорема. *Параллель жазықтықтар арасындағы параллель түзулердің кесінділері параллель болады.*

Дәлелдеу. Айталық, α және β жазықтықтар k және l түзулерден AC және BD кесінділерді ажыратып алсын *(9-сурет)*. Осы кесінділердің теңдігін көрсетеміз.

k және l түзулер арқылы өтетін γ жазықтық параллель жазықтықтарды AC және BD түзулердің бойымен қиып өтеді. Нәтижеде, қарама-қарсы қабырғалары параллель болған $ABCD$ төртбұрышқа, яғни параллелограмға ие боламыз. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары өзара тең болады Атап айтқанда, $AB = CD$.

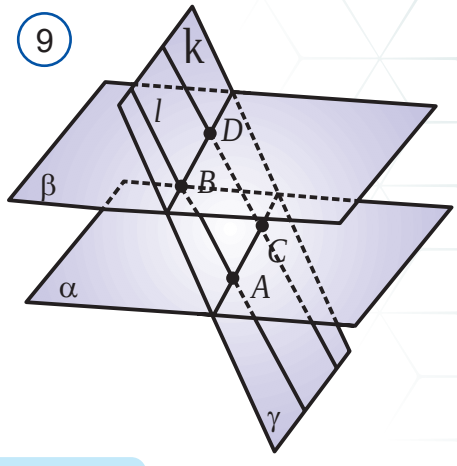
3.12-теорема. *Үш параллель жазықтықтардың арасындағы кез келген түзулердің кесінділері өзара пропорциональ болады.*

Бұл теореманы да өз бетіңше дәлелде.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Жазықтықтар кеңістікте қалай орналасуы мүмкін?*
2. *Параллель жазықтықтар деп қандай жазықтықтарға айтылады?*
3. *Жазықтықтардың параллельдік белгісін айт.*
4. *Кеңістікте жазықтықтардың орналасуымен байланысты қандай қасиеттерді білесің?*
5. *Параллелепипедтің бүйір қырлары параллель болуын негіздеп бер.*

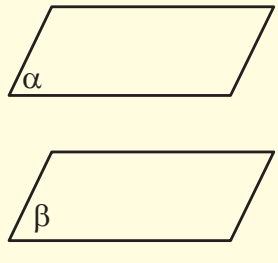
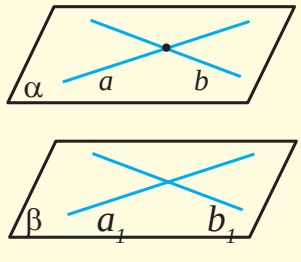
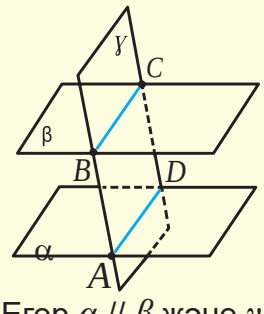
9



Практикалық жаттығулар мен қолданулар

14.1. Кестеде 14-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

α және β жазықтықтар	Ортақ нүктеге ие.	Қиылысады	$a \otimes \beta$
	Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель	$a \parallel \beta$

Жазықтықтардың параллельдігі		
Анықтамасы	**Белгісі**	**Қасиеті**
 Қиылыспайтын α және β жазықтықтар *параллель жазықтықтар* деп аталады және $a \parallel b$ түрінде өрнектеледі.	 Егер a $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ болса, $\alpha \parallel \beta$ болады.	 Егер $\alpha \parallel \beta$ және γ қиылыстатын жазықтық, $\alpha \cap \gamma = AD$ және $\beta \cap \gamma = BC$ болса, $AD \parallel BC$ болады.

14.2. 10-суреттен параллель жазықтықтардың рәмізі нелер арқылы берілгенін анықта.

14.3. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедтің; 2) $ABCA_1B_1C_1$ призманың параллель жақтарын анықта.

14.4. Бірде-бір ортақ нүктесі болмаған α және β жазықтықтар кеңістікте қалай орналасады?

10 a)



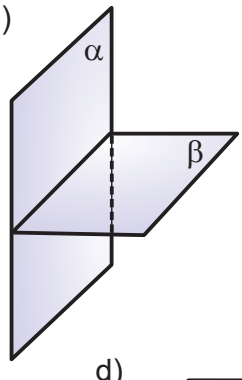
b)



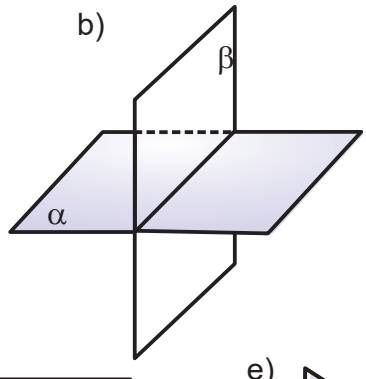
c)



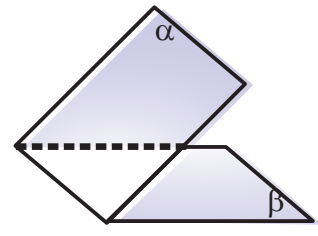
11 a)



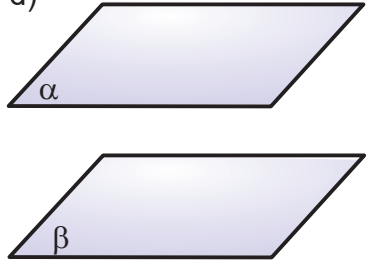
b)



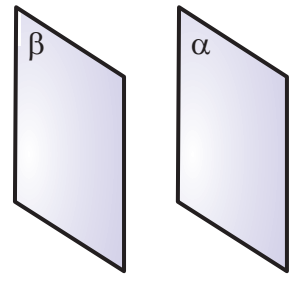
c)



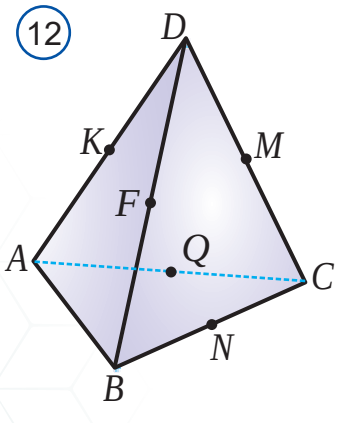
d)



e)



12



14.5. α және β жазықтықтар параллель. a және b түзулер α жазықтықта жатыр, ал c және d түзулер β жазықтықта жатыр. Төмендегі растаулардың қайсылары дұрыс:

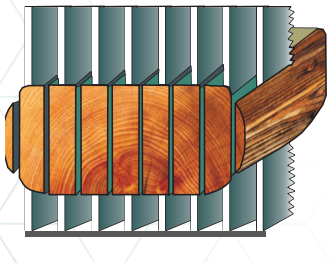
A) $\alpha \parallel b$ B) $c \parallel b$ C) $b \parallel \beta$ D) $\beta \parallel a$

E) $c \parallel a$ F) $d \parallel b$ G) $a \parallel \alpha$ H) $d \parallel \alpha$

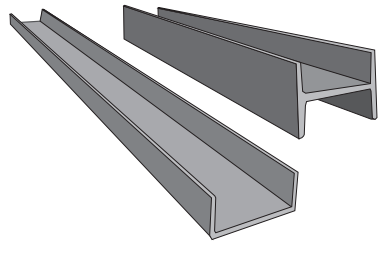
14.6. Қиылысатын екі жазықтық бейнеленген үш суретті көрсет *(11-сурет)*.

14.7. K, F, M, N, Q нүктелер 12-суретте бейнеленген $ABCD$ тетраедрдің сәйкес қырларының центрлері болса, a) K нүктеден өтетін және ABC жазықтыққа параллель; b) BD түзуден өтетін және MNQ жазықтыққа параллель болған жазықтықты анықта.

13



14

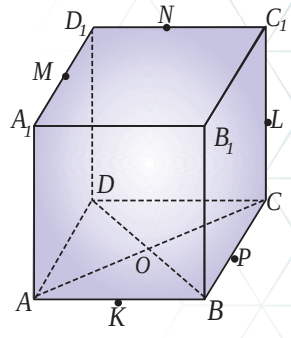


14.8. 13- және 14-суреттерден параллель жазықтықтарды анықта.

14.9. . 15- суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб пен оның кейбір қырларының центрлері – M, N, P, K және L нүктелер бейнеленген. O нүкте – $ABCD$ табанның центрі. Кестеде келтірілген жазықтықтардың өзара орналасуын суреттен анықтап, кестенің сәйкес торкөзіне тиісті белгіні (⊗– қиылысу, // – параллельдік) жаз.

Жазықтықтар	ADC	PLN	MNP	A_1C_1C
$A_1B_1C_1$				
MNK				
MKP				
A_1DC_1				

15



14.10. α және β жазықтықтар параллель, олардың ешбіріне тиісті болмаған нүкте арқылы γ жазықтық өткізілген. Дұрыс растауларды көрсет.

a) γ жазықтық – α жазықтыққа параллель болған бір ғана жазықтық;

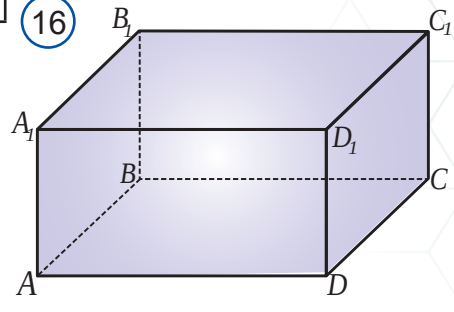
b) γ жазықтық – β жазықтықты қиып өтетін бір ғана жазықтық;

c) γ жазықтық – β жазықтыққа параллель болған бір ғана жазықтық;

d) γ жазықтық – α жазықтықты қиып өтетін бір ғана жазықтық;

e) γ жазықтық – α жазықтыққа да, β жазықтыққа да параллель болған бір ғана жазықтық.

16



14.11. 16-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед бейнеленген.

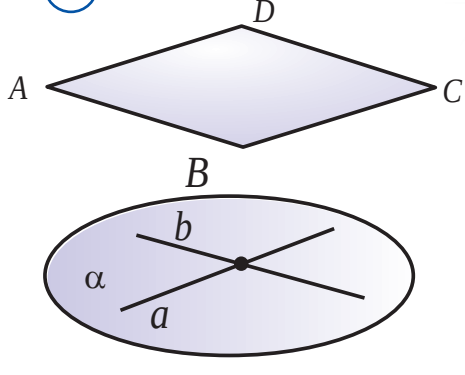
a) $A_1B_1C_1D_1$ және B_1A_1AB; b) ADD_1A_1 және $ABCD$;

c) ABB_1A_1 және C_1D_1DC; d) $BADC$ және ABB_1A_1;

e) CC_1B_1B және ADD_1A_1 жазықтықтардың өзара орналасуын анықта.

14.12. AB, BC кесінділер $ABCD$ параллелограмның қабырғалары болып, олар сәйкесінше a және b түзулерге параллель *(17-сурет)*. a және b түзулер өзара қиылысады және α жазықтыққа тиісті. $ABCD$ және α жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

17

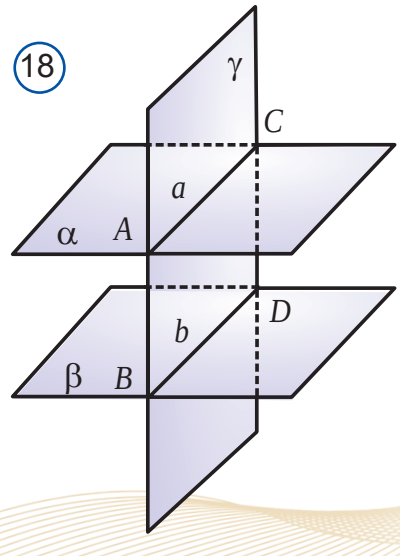


14.13. a және b айқас түзулер берілген. a түзу арқылы өтетін және β жазықтыққа параллель болған неше жазықтық өткізуге болады?

14.14. Екі α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі үшінші γ жазықтыққа параллель. α және β жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

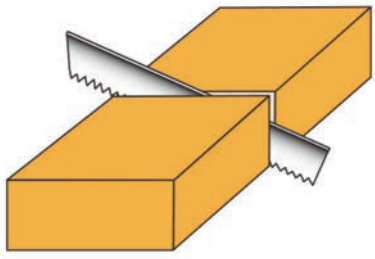
14.15. AB және CD параллель түзулер арқылы өткізілген γ жазықтық α және β параллель жазықтықтарды сәйкесінше AC және BD түзулердің бойымен қиып өтеді *(18-сурет)*. Егер $BD = 15$ *см* болса, AC кесіндінің ұзындығын тап.

18



14.16. Ағаш тақта бөлігінің барлық жақтары тік төртбұрыштан құралған *(19-сурет)*. Тақтаны

19



қандай бағытта араласақ та, әрдайым қима параллелограмм болатынын дәлелде.

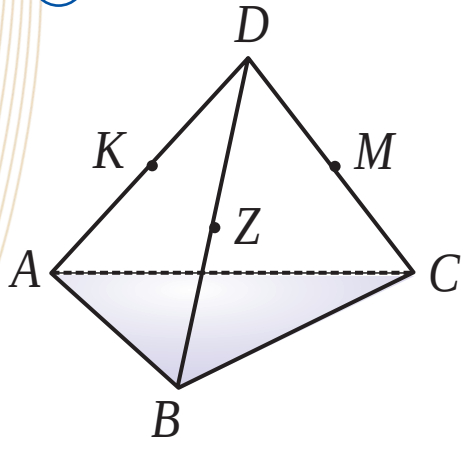
14.17. Кез келген екі айқас түзу арқылы бір ғана параллель жазықтықтардың жұбын өткізудің мүмкін екенін дәлелде.

14.18. α және β жазықтықтар параллель. α жазықтықта жататын кез келген түзу β жазықтыққа параллель болатынын дәлелде.

14.19. O нүкте – бір жазықтықта жатпайтын AA_1, BB_1, CC_1 кесінділердің ортақ центрі. ABC және $A_1B_1C_1$ жазықтықтар параллель екенін дәлелде.

14.20. $ABCD$ параллелограмм және оны қиып өтпейтін жазықтық берілген. Параллелограмның A, B, C, D төбелерінен жазықтықты сәйкесінше A_1, B_1, C_1, D_1 нүктелер арқылы қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. Егер $AA_1 = 4$ m, $BB_1 = 3$ m және $CC_1 = 1$ m болса, DD_1 кесіндінің ұзындығын тап.

20

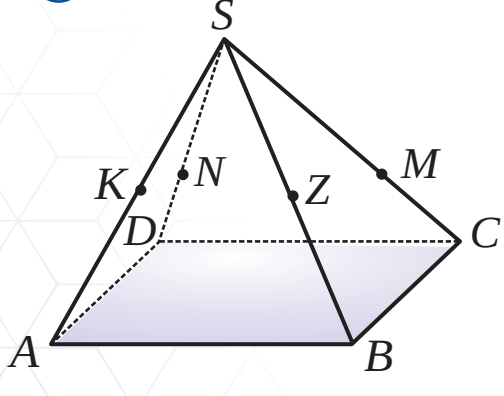


14.21. Екі параллель жазықтық берілген. Бір жазықтықтың A және B нүктелері арқылы екінші жазықтықты A_1 және B_1 нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. Егер $AB = a$ болса, A_1B_1 кесіндінің ұзындығын тап.

14.22. α және β жазықтықтар параллель. α жазықтықтың M және N нүктелері арқылы β жазықтықты K және L нүктелерінде қиып өтетін параллель түзулер өткізілген. $MNLK$ параллелограмм екенін дәлелде. Егер $ML = 14$ cm, $NK = 8$ cm және $MK : MN = 9 : 7$ болса, $MNLK$ төртбұрыштың периметрін тап.

14.23. OF және OP сәулелер α және β параллель жазықтықтарды сәйкесінше F_1, P_1, F_2, P_2 нүктелерде қиып өтеді. Егер $F_1P_1 = 3$ cm, $F_2P_2 = 5$ cm және $P_1P_2 = 4$ cm болса, OP_1 кесіндінің ұзындығын тап.

21



14.24. OA және OB сәулелер α және β параллель жазықтықтарды сәйкесінше A_1, B_1, A_2, B_2 нүктелерде қиып өтеді. Егер $OA_1 = 16$ cm, $A_1A_2 = 24$ cm және $A_2B_2 = 50$ cm болса, A_1B_1 кесіндінің ұзындығын тап.

14.25. D нүкте ABC үшбұрыш жазықтыққа тиісті емес *(20-сурет)*. K, M, Z нүктелер – сәйкесінше DA, DB және DC кесінділердің центрі. ABC және KZM жазықтықтардың өзара орналасуын анықта.

14.26. S нүкте $ABCD$ параллелограмм жазықтығына тиісті емес *(21-сурет)*. K, Z, M, N нүктелер сәйкесінше SA, SB, SC және SD кесінділерге тиісті. Егер $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ болса, $ABCD$ және $KZMN$ жазықтықтардың өзара орналасуын анықта.

15 КЕҢІСТІКТЕГІ ПАРАЛЛЕЛЬ ПРОЕКЦИЯЛАУ

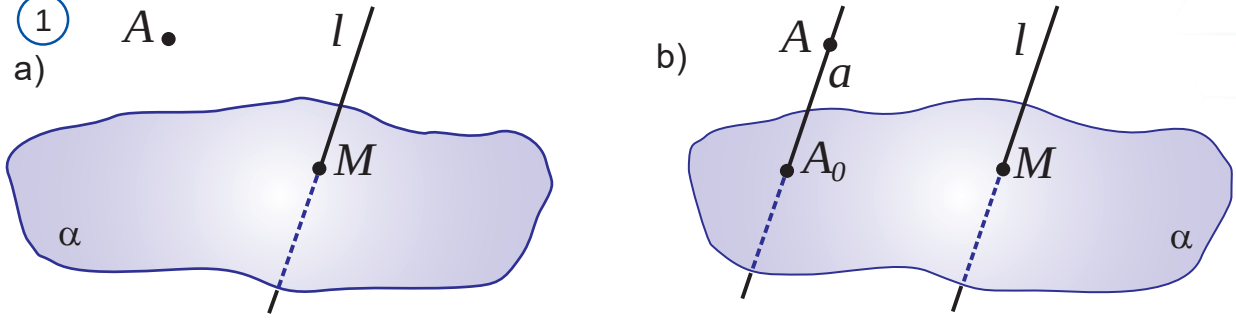
Кеңістіктегі фигуралар түрлі тәсілдермен жазықтықта кескінделеді. Төменде солармен танысамыз.

Кеңістіктегі фигураны жазықтықта параллель проекциялау деп мынадай кескіндеуге айтылады, онда фигураның әрбір нүктесі берілген проекциялау бағытына параллель болған түзулердің бойымен жазықтыққа көшіріледі.

Параллель проекциялауды жарықтың сәулелерінің көмегімен қандай да бір заттың қабырғаға немесе еденге түсірілген көлеңкесіне теңеуге болады.

Осылайша, параллель проекциялауда қандай да бір фигура және *проекциялау жазықтығы* деп аталатын жазықтық алынады, сондай-ақ *проекциялау бағыты*, яғни қандай да бір түзу таңдалады. Әрине, бұл түзу проекция жазықтығымен қиылысуы қажет.

1



Айталық, кез келген α жазықтық пен проекциялау түзуі – l және жазықтықта да, түзуде де жатпайтын A нүкте берілген болсын *(1а-сурет)*.

A нүкте арқылы α жазықтыққа l түзуге параллель болған түзу жүргіземіз. Осы түзу α жазықтықты A_0 нүкте арқылы қиып өтсін *(1b-сурет)*.

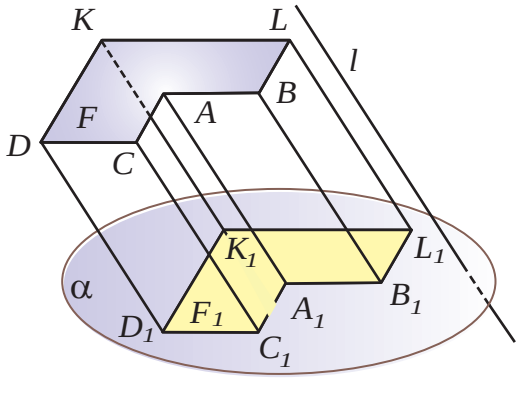
Табылған A_0 нүкте A нүктенің α жазықтыққа *параллель проекциясы* делінеді.

Сөйтіп, параллель проекциялауда нүкте нүктеге өтеді екен.

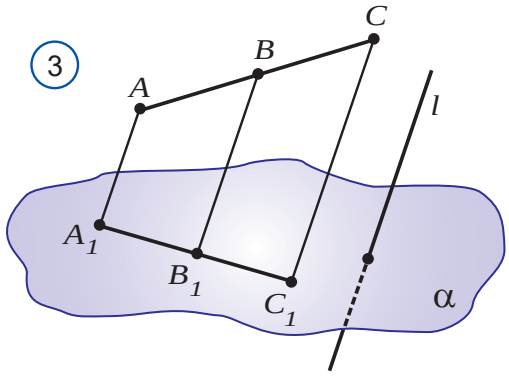
Айталық, қандай да бір F фигураны α жазықтыққа l бағыт бойынша параллель проекциялау қажет болсын. Ол үшін F фигураның кез келген нүктесін аламыз, одан l-ге параллель түзу жүргіземіз және оның α жазықтықпен қиылысу нүктесін белгілейміз. Мұндай нүктелер α жазықтықта қандай да бір F_1 фигураны пайда етеді. Дәл осы F_1 фигура F фигураның α жазықтықтағы параллель проекциясы болады. 2-суретте F фигураның α жазықтыққа проекциясы – F_1 фигура кескінделген.

Параллель проекциялаудың төмендегі қасиеттерін келтіреміз. Оларды өз бетіңше дәлелдеуге әрекет жаса.

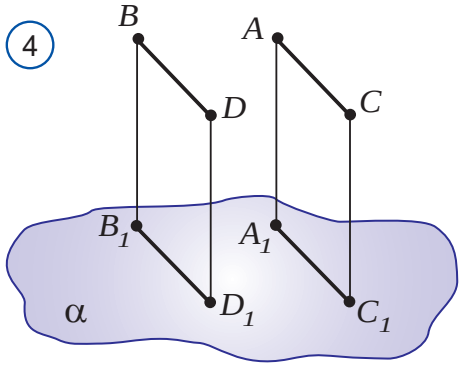
2



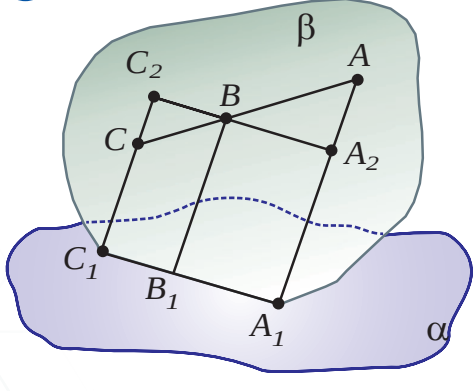
3



4



5



6



Параллель проекциялауда кесінді – кесіндіге, түзу – түзуге өтеді.

Параллель түзулер проекциялары параллель болады немесе дәлме-дәл түседі.

Әрине, бұл қасиеттер проекциялау бағытына параллель болмаған кесінді және түзулер үшін орынды болады. Енді төмендегі қасиеттерді дәлелдейік.

1-қасиет. *Параллель проекциялауда фигуралардың түзу кесінділері де кесінділерге өтеді.*

Шынында да, AC кесіндінің нүктелерін проекциялайтын барлық түзулер α жазықтықты A_1C_1 түзудің бойымен қиып өтетін жазықтықта жатады *(3-сурет)*. AC кесіндінің кез келген B нүктесі A_1C_1 кесіндінің B_1 нүктесіне өтеді.

2-қасиет. *Параллель проекциялауда фигуралардың параллель кесінділері де параллель кесінділерге өтеді*

Шынында да, AC және BD қандай да бір фигураның параллель кесінділері болсын *(4-сурет)*. Олардың проекциялары – A_1C_1 және B_1D_1 кесінділер де параллель болады, өйткені оларды екі параллель жазықтықты α жазықтықпен қиғанда пайда болады.

3-қасиет. *Бір түзуде немесе параллель түзулерде жатқан кесінділер ұзындықтары қатынасы олардың параллель проекциялары ұзындықтары қатынасына тең.*

Шынында да, 5-суретте AC және A_1C_1 түзулер β жазықтықта жатады. AC кесіндінің B нүктесінен A_1C_1-ға параллель болған A_2C_2 түзуді жүргіземіз. Пайда болған BAA_2 және BCC_2 үшбұрыштар ұқсас болады. Үшбұрыштардың ұқсастығы мен $A_1B_1=A_2B$ және $B_1C_1=BC_2$ теңдіктердің ізделенген қатынасқа ие боламыз: $AB:BC=A_1B_1:B_1C_1$.

Осылайша, параллель проекциялауда түзуде немесе параллель түзулерде жатқан кесінділер ұзындықтарының қатынасы сақталады екен.

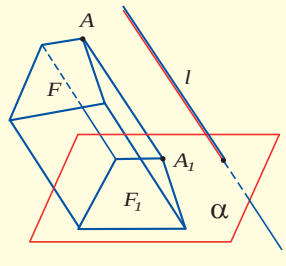
Атап айтсақ, кесіндінің центрі проекцияның центріне өтеді.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Кеңістіктегі фигураны жазықтыққа параллель проекциялау деп қандай кескіндеуге айтылады?*
2. *Нүктенің жазықтыққа параллель проекциясы қалай табылады?*
3. *6-суреттегі "көлеңкелер театры" жануарлары қалай жасалуда?*
4. *Параллель проекциялау жазықтығы және проекциялау бағыты деп нені айтамыз?*
5. *Параллель проекциялаудың қандай қасиеттерін білесің?*
6. *Параллель проекциялауды қай жерде пайдалануға болады?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

15.1. Кестеде 15-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

<table>
<tr><th colspan="3">Параллель проекциялау</th></tr>
<tr><th>Анықтамасы</th><th colspan="2">Параллель проекциялауда фигуралардың қасиеттері</th></tr>
<tr><td rowspan="2"> 

F – фигура,
α – проекциялау жазықтығы,
l – проекциялау бағыты,
F_1 – F фигура проекциясы.</td><th>Сақталады</th><th>Сақталмайды</th></tr>
<tr><td>1) фигуралардың сыныптарға тиістілігі (нүкте нүктеге, түзу түзуге, кесінді кесіндіге, үшбұрыш үшбұрышқа өтеді);
2) нүктелердің түзуге тиістілігі;
3) нүктелердің түзуде орналасуы;
4) түзулердің параллельдігі;
5) бір немесе параллель түзулерде жатқан кесінділердің теңдігі (немесе пропорционалдығы).</td><td>1) кесіндінің ұзындығы;
2) бұрыштың шамасы;
3) түзулердің перпендикулярлығы;
4) бұрыштардың теңдігі (пропорционалдығы);
5) қиылысатын түзулерде жатқан кесінділердің теңдігі (пропорционалдығы).</td></tr>
</table>

15.2. Параллель проекциялауда кесіндінің проекциясы: a) кесінді; b) нүкте; c) екі нүкте; d) сәуле; e) түзу болуы мүмкін бе?

15.3. Параллель проекциялауда квадраттың проекциясы: a) квадрат; b) параллелограмм; c) ромб; d) тік төртбұрыш; e) трапеция; f) кесінді болуы мүмкін бе?

15.4. Параллель жазықтықтардың бірінде жатқан үшбұрыш екінші жазықтыққа параллель проекцияланса, оның ауданы өзгермейтінін дәлелде.

15.5. Параллелограмның параллель проекциясы трапеция болуы мүмкін бе? Жауабыңды негіздеп бер.

15.6. Дұрыс үшбұрыштың параллель проекциясы дұрыс үшбұрыш бола ма?

15.7. Тікбұрышты үшбұрыштың параллель проекциясы тікбұрышты үшбұрыш бола ма?

15.8. ABC үшбұрыштың параллель проекциясы $A_1B_1C_1$ үшбұрыштан құралған. Осы проекциялауда ABC үшбұрыштың: a) медианасы; b) биіктігі; c) биссектрисасы. $A_1B_1C_1$ үшбұрыштың сәйкес: a) медианасы; b) биіктігі; c) биссектрисасына өте ме?

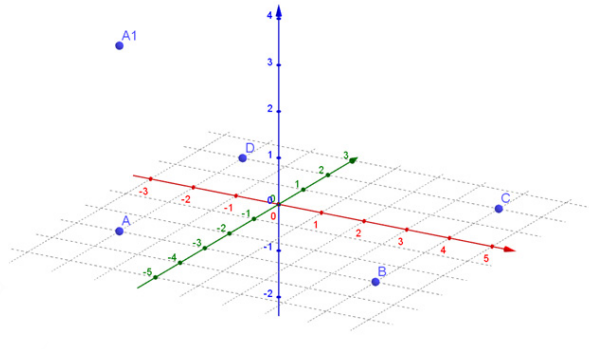
15.9. ABC үшбұрыштың параллель проекциясы $A_1B_1C_1$ үшбұрыштан құралған. Егер A = 30°, BC = 20 cm болса, A_1 = 30°, B_1C_1 = 20 cm бола ма?

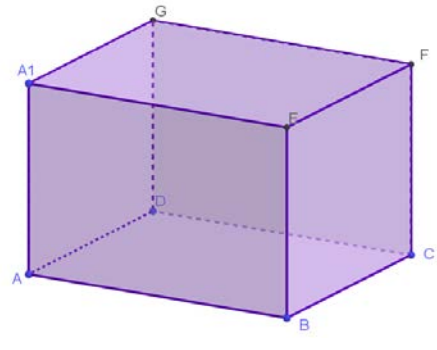
15.10. AB кесіндінің параллель проекциясы A_1B_1 кесіндіден құралған. *AB* кесіндіден алынған *C* нүктенің проекциясы C_1 нүкте. *AB* = 48 cm, A1B1 = 36 cm. Егер AC кесіндінің ұзындығы: a) 24 *cm*; b) 12 *cm*; c) 8 *cm*; d) 32 *cm*; e) 36 *cm* болса, A_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап.

“GeoGebra”ны қолдану

3D калькулятормен тікбұрышты параллелепипедті салу

“Ввод” (Кіргізу) қатары арқылы xOy жазықтығында 4 – A, B, C, D нүктелерді және xOz жазықтығында бір A_1 нүктені сол жақтағы суретте көрсетілгеніндей саламыз.





“Призма” (Призма) құрылғысын таңдаймыз және бірізділікпен A, B, C, D нүктелердің үстіне басып шығамыз, содан соң A_1 нүктені басамыз және нәтижеде оң жақтағы суреттегі тікбұрышты параллелепипедті саламыз.

Өз бетіңше орындауға арналған тапсырмалар

1. Жоғарыда жасалған тікбұрышты параллелепипедтің параллель жақтарын анықта және “GeoGebra” 3D калькуляторымен олардың параллельдігін тексер.

2. Кез келген кубты сал. Оның параллель жақтарын “GeoGebra” 3D калькуляторымен анықта.

3. Кез келген кубты сал. Оның сыбайлас жақтарының айқас диагональдары арасындағы бұрышты “GeoGebra” 3D калькуляторымен анықта.

16 ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА ҚАТЫСТЫ ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР

16.1. a) Екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық неше ортақ нүктеге ие болады?

16.2. a) Екі түзу; b) түзу мен жазықтық; c) екі жазықтық; d) үш жазықтық бір ғана ортақ нүктеге ие болуы мүмкін бе?

16.3. Төрт нүкте бір жазықтықта жатпайды. a) олардың үшеуі бір түзуде жатуы мүмкін бе? b) олар арқылы неше жазықтық өткізуге болады?

16.4. m және n түзулер қиылысады, ал d түзу n түзуге параллель. m және d түзулер өзара қалай орналасуы мүмкін?

16.5. ABC үшбұрыштың C төбесінен өтетін және AB қабырғаға параллель болған неше жазықтық өткізуге болады?

16.6. $ABCD$ және $ABKZ$ параллелограмдар түрлі жазықтықтарда жатыр. Параллель түзулерді көрсет:
A) DA және KB; B) CD және KZ; C) BC және AZ;
D) DA және ZA; E) CB және KB.

16.7. A және C нүктелер α жазықтыққа, B және D нүктелер β жазықтыққа тиісті. AC, CD, BD, AB, BC, AD түзулердің қайсылары β жазықтықты қияды?

16.8. AB, AC, KB, KD кесінділер α жазықтықты қиып өтеді. AK, AD, BD, KC, CD түзулердің қайсылары α жазықтықты қияды?

16.9. Бір жазықтықта жатпайтын AB, AC және AD түзулер α жазықтықты B_1, C_1 және D_1 нүктелерде қиып өтеді. B_1, C_1 және D_1 нүктелер тізбектеле қосылса, қандай фигура пайда болады?

16.10. α жазықтықты қимайтын MN кесіндінің ұштарынан және центрінен параллель түзулер өткізілген. Егер осы түзулер α жазықтықты сәйкесінше M_1, N_1, және K_1 нүктелерде қиып өтсе және $KK_1 = 9\ cm$, $NN_1 = 15\ cm$ болса, MM_1 кесіндінің ұзындығын тап.

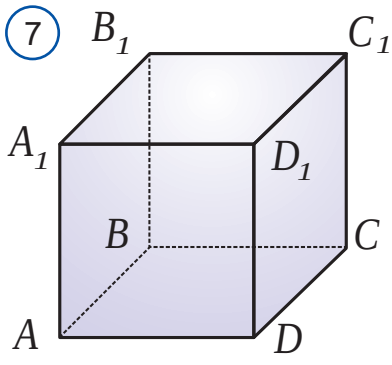
16.11. α жазықтықтың P және Z нүктелері арқылы одан тиісті болмаған ұзындықтары $PK = 6\ cm$ және $ZM = 9\ cm$ болған параллель кесінділер түсірілген. MK түзу α жазықтықты O нүкте арқылы қиып өтеді. Егер $MK = 6\ cm$ болса, MO кесіндінің ұзындығын тап.

16.12. Параллелограмды параллель поекциялауда квадрат пайда болуы мүмкін бе?

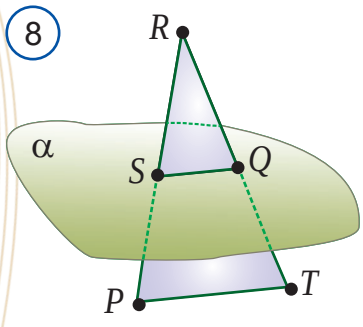
16.13. Үшбұрыштың параллель проекциясы берілген. Осы үшбұрыш медианаларының проекциялары қалай салынады?

16.14. MNZ үшбұрыш және $MNPS$ (BC – табан) параллелограм бір жазықтықтта жатпайды. Q және R нүктелер CB және DA кесінділердің центрі, ал M және N нүктелер DP және CZ кесінділердің центрі. MN және QR түзулердің параллель екенін дәлелде.

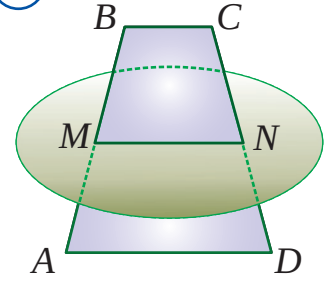
7



8



9



16.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың *(7-сурет)* a) AA_1D_1D; b) BB_1C_1C; c) $ABCD$; d) DD_1C_1C; e) $B_1C_1D_1A_1$; f) ADD_1A_1 жақтарының қайсылары A_1B_1 түзуге параллель болады?

16.16. PRT үшбұрыш берілген. PT түзуге параллель a жазықтық PR қабырғаны S нүктеде, RT қабырғаны Q нүктеде қиып өтеді *(8-сурет)*. Егер $SR = 7\ cm$, $SQ = 3\ cm$ және $SP = 35\ cm$ болса, PT қабырғаны тап.

16.17. α жазықтық $ABCD$ теңбүйірлі трапецияның табаны AD-ға параллель және AB және CD қабырғаларды M және N нүктелерде қиып өтеді *(9-сурет)*. $AD = 20\ cm$, $MN = 16\ cm$. Егер M нүкте AB кесіндінің центрі және $AB = 8\ cm$ болса, трапецияның периметрін тап.

16.18. α жазықтықтың P және Z нүктелеріне оған тиісті емес $PK = 6\ cm$ және $ZM = 9\ cm$ кесінділер өткізілген. MK түзу жазықтықты O нүктеде қиып өтеді. Егер $MK = 6\ cm$ болса, MO қашықтықты тап.

16.19. $ABCD$ тік төртбұрыштың AB қабырғасы α жазықтыққа параллель, ал AD қабырғасы бұл жазықтыққа параллель емес. $ABCD$ және α жазықтықтардың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

16.20. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің төменде берілген жақтарының қайсылары $ABCD$ жағына параллель болады:
A) D_1A_1AD; B) $D_1A_1B_1C_1$; C) ABB_1A_1;
D) D_1C_1CD; E) D_1A_1BD?

16.21. Ромбтың екі диагоналы α жазықтыққа параллель. Ромб жазықтығы мен α жазықтықтың кеңістіктегі өзара орналасуын анықта.

16.22. Кестенің сол бағанында жазықтықтағы, оң бағанында кеңістіктегі геометриялық фигуралардың өзара ұқсас кейбір қасиеттері келтірілген. Оларды көз алдыңа елестетіп, олардың қандай ұқсас екенін анықта, содан кейін бос торкөздерді толтыр. Жазықтық пен кеңістіктегі тағы қандай ұқсас қасиеттерді келтіруге болады?

Жазықтықта	Кеңістікте
Егер түзулердің ортақ нүктесі болса, олар сол нүктеде қиылысады.	Егер жазықтықтар ортақ түзуге ие болса, олар осы түзудің бойымен қиылысады.
Жазықтықтағы қандай да бір нүкте арқылы шексіз көп түзулер жүргізуге болады.	
	Жазықтықта жатпайтын түзу арқылы берілген жазықтыққа параллель тек бір ғана жазықтық жүргізуге болады.
Бір түзуге параллель түзулер өзара параллель болады.	

Іс жүзіндік компетенцияларды қалыптастыруға қатысты тапсырмалар

1. Теміржол вагондары дөңгелектерінің осьтері бір-бірімен салыстырғанда қалай орналасқан *(1-сурет)*?

1



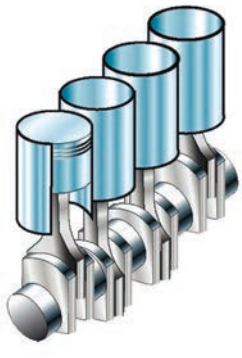
2. Теміржол вагондары дөңгелегінің осьтері рельске қатысты қалай орналасқан *(1-сурет)*?

2



3. Қоршаған ортадан параллель және айқас түзулерге мысалдар келтір.

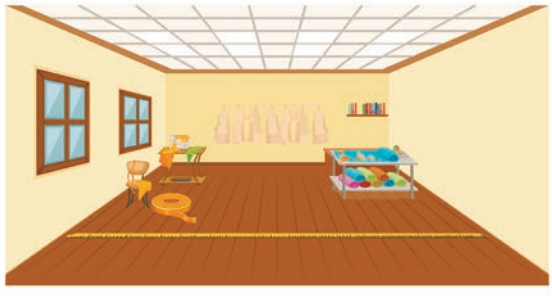
3



4. Не үшін жазу үстелінің суырмалары кейде тегіс ашылмайды *(2-сурет)*?

5. Не үшін сорғының поршені оның ішінде бір тегіс қозғалмайды *(3-сурет)*?

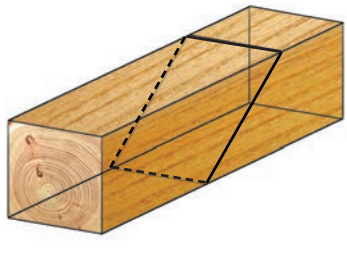
4



6. Тігіншінің таспасымен немесе кез келген ұзындықтағы таяқпен дәліз еденінің шетіне қағылған тақтайлардың параллельдігін қалай тексеруге болады *(4-сурет)*?

7. Ағаштан жасалған брустың (тақта) барлық жақтары тік төртбұрыш пішінде. Оны көлденең қырларының бойымен қалай араласаң да, пайда болған барлық қималар параллелограмм болатынын дәлелде *(5-сурет)*.

5

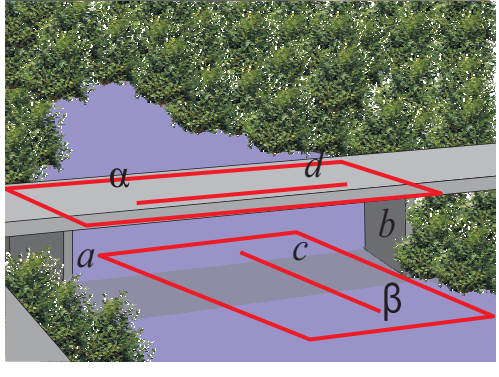


ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР

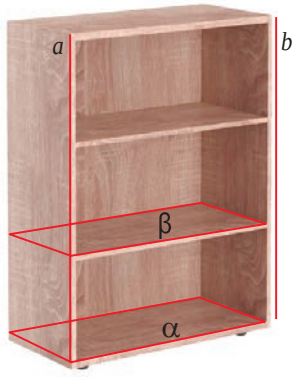
1. Төмендегі сөйлемдерді оқы. Сөйлемдердің мағынасынан келіп шығып, олардың әрқашан, кейде дұрыс болатынын немесе ешқашан дұрыс болмайтынын анықта және “+” белгісін тиісті бағанға қой. Жауабыңды түсіндір.

	Сөйлем	Әрқашан	Кейде	Ешқашан
a	Кеңістіктегі екі түзу қиылыспайды.			
b	Кеңістіктегі екі жазықтық қиылыспайды.			
c	Кеңістіктегі түзу мен жазықтық қиылысады.			
d	Кеңістіктегі түзулер айқас болады.			
e	Жазықтықта түзулер айқас болады.			
f	Жазықтықты қиюшы түзулер қиылысады.			
g	Жазықтыққа параллель түзулер қиылысады.			

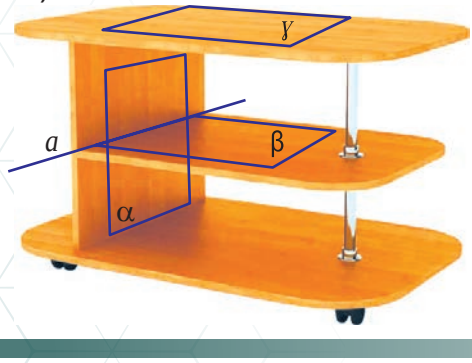
1 a)



b)



c)



2. 1-суретте кейбір нысандар кеңістіктегі геометриялық фигуралар рәмізі ретінде сызып көрсетілген. Қандай кеңістіктегі геометриялық фигуларды көрдің? Олар өзара қалай орналасқанын анықтап, жаз.

3. Бір жазықтықта жатып, бір ортақ нүктеге ие болған түзулер қалай аталады?
A) айқас B) қиылысушы C) параллель

4. Айқас түзулер неше ортақ нүктеге ие болуы мүмкін?
A) 1 B) ие емес C) 2

5. Бір жазықтықта жатып, ортақ нүктеге ие болмаған түзулер қалай аталады?
A) айқас B) қиылысушы C) параллель

6. Түзуден түрлі екі жазықтық өткізу мүмкіндігін дәлелде.

7. Бір жазықтықта жатпаған төрт нүкте берілген. Олардың үшеуінен өтетін неше жазықтық өткізуге болады?

8. A, B, C нүктелер берілген екі жазықтықтардың әр біреуінде жатыр. Бұл нүктелердің бір жазықтықта жататынын дәлелде.

9. a түзу бойымен қиылысатын екі жазықтық берілген. b түзу олардың бірінде жатады және екіншісін қиып өтеді. a және b түзулердің қиылысуын дәлелде.

10. Үш жазықтықтың әр екеуі өзара қиылысады. Жазықтықтардың қиылысу түзулерінен екеуі қандай да бір нүктеде қиылысса, үшінші қиылысу түзуі да бұл нүктеден өтетінін дәлелде.

11. Егер кеңістіктегі төртбұрыштың диагональдары қиылысса, онда оның төбелері бір жазықтықта жататынын дәлелде. Суретте бейнеленген түзулер қалай аталады?
А) айқас В) қиылысушы С) параллель

12. $ABCD$ параллелограмның A және C ұштары арқылы параллелограмның жазықтығында жатпайтын A_1C және C_1C параллель түзулер өткізіледі. A_1AB және C_1CD жазықтықтардың параллельдігін дәлелде.

13. Трапецияның табандары қандай да бір жазықтыққа параллель. Трапецияның қабырғалары да сол жазықтыққа параллель болуы мүмкін бе? Жауабыңды негізде.

14. Квадраттың A және B төбелері мен диагональдарының қиылысу нүктесі – O-ның проекциялары A_1, B_1 және O_1 нүктелерден құралғаны белгілі. $ABCD$ квадраттың проекциясын жаса.

15. 2-суретке сәйкес берілген түзу мен жазықтықтың өзара қалай орналасқанын анықта және олардың арасындағы сәйкес ($\otimes$ – қиылысатын, // – параллельдік, $\div$ – айқастық және $\subset$ – тиістілік) белгілерін қой.

Түзулер / жазықтықтар	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					
ABD					
AA_1D					
BCD					

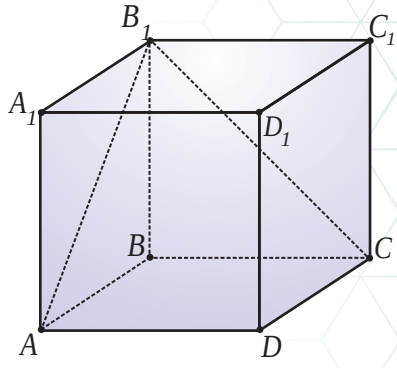
16. 3-суреттегі $ABCD$ трапецияның AB табаны α жазықтықта жатыр, CD табаны α жазықтықта жатпайды. Берілген түзулер және α жазықтықтың өзара орналасуын білдіретін сөйлемдерді толтыр:

а) DB түзу берілген жазықтықпен ортақ нүктеге ие болғандықтан ол α жазықтықпен_____;

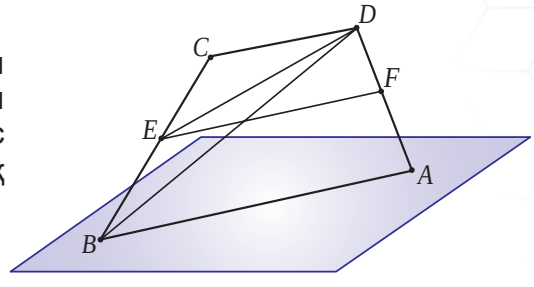
b) трапецияның EF центрлік түзуі оның табандарына параллель болғандықтан α жазықтыққа _____болады.

17. 4-суреттегі ABC үшбұрыштың AB және AC қабырғаларында D және E нүктелер сондай белгіленсін, $DE = 5\ cm$ және $AD : BD = 3 : 4$. B және C нүктелерден DE кесіндіге параллель α жазықтық өткізілген. BC қабырғаның ұзындығын тап.

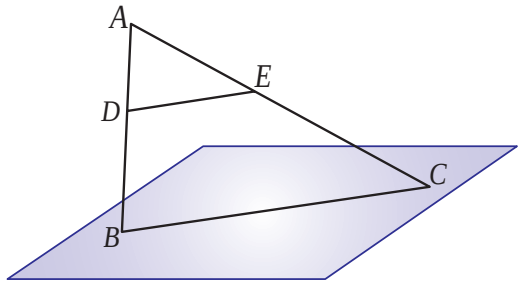
2



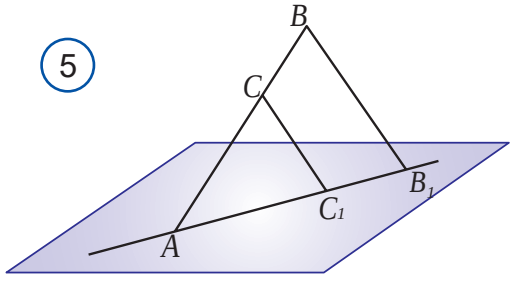
3



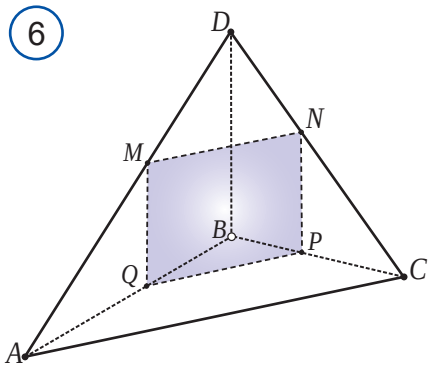
4



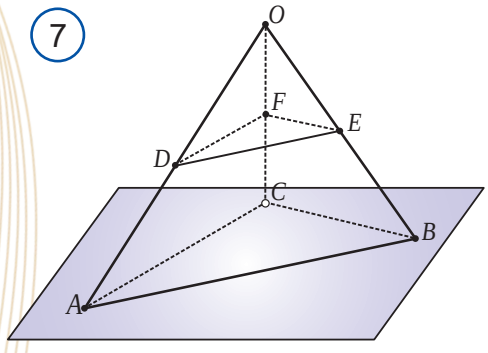
5



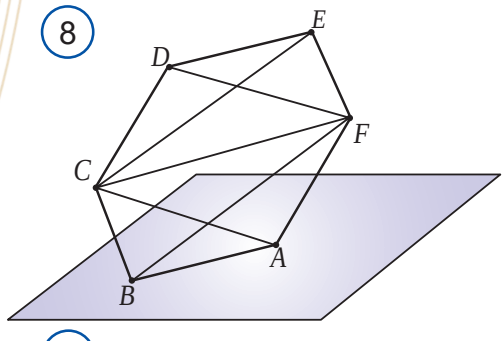
6



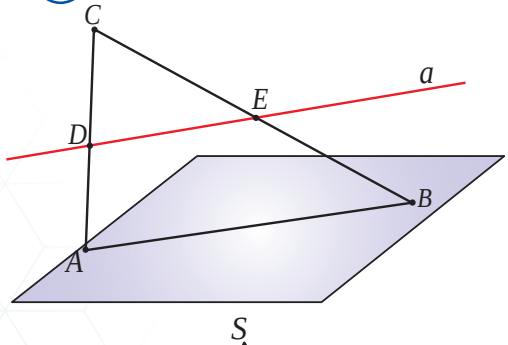
7



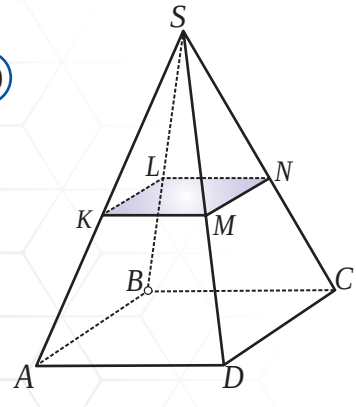
8



9



10



18. 5-суреттегі C нүкте AB кесіндіге тиісті. A нүктеден жазықтық, B және C нүктелерден параллель түзулер өткізілген. Бұл түзулер жазықтықты сәйкес түрде: B_1 және C_1 нүктелерде қиып өтеді. Егер $AC : BC = 3 : 2$ және $BB_1 = 9$ болса, CC_1 кесіндінің ұзындығын тап.

19. a және b параллель түзулер екі параллель жазықтықтың бірін сәйкес түрде A_1 және B_1 нүктелерде, екіншісін A_2 және B_2 нүктелерде қиып өтеді:

a) A_1B_1-ның A_2B_2-ге параллель екенін дәлелде;

b) $\angle A_1A_2B_2 = 140°$ болса, $\angle A_2A_1B_1$ ді тап.

20. α жазықтық BAC бұрыш қабырғаларын A_1 және B_1 нүктелерде, оған параллель β жазықтық A_2 және B_2 нүктелерде қияды. $A_1B_1 = 8$, $AA_1 = 12$, $AA_2 = 0{,}5\ A_1A_2$ болса, A_2B_2 және AA_2-ні тап.

21. D нүкте ABC үшбұрыш жазықтығында жатпайды. K, Z және M нүктелер – сәйкес түрде DA, DB, және DC кесінділердің центрлері. ABC және KZM жазықтықтардың кеңістікте өзара орналасуын анықта.

22. 6-суреттегі M, N, P, Q нүктелер – сәйкес түрде AB, CD, BC, AB кесінділердің центрі. Егер, $AC = 10\ cm$, $BD = 18\ cm$ болса, $MNPQ$ төртбұрыштың периметрін тап.

23. 7-суреттегі O нүкте ABC үшбұрыштың жазықтығында жатпайды. D, E, F нүктелер – сәйкес түрде AO, BO, CO кесінділердің центрі. Егер ABC үшбұрыштың ауданы 380 cm^2 болса, DEF үшбұрыштың ауданын тап.

24. 8-суреттегі $ABCDEF$ дұрыс алтыбұрыштың AB қабырғасы α жазықтықта жатады. Берілген α жазықтықпен DE, CD және EC түзулердің өзара орналасуын анықта.

25. 9-суреттегі A және B нүктелер α жазықтықта жатыр. C нүкте α жазықтықта жатпайды. AC және BC кесінділер центрінен a түзу өткізілген. Бұл түзу α жазықтыққа параллель екенін дәлелде.

26. 10-суреттегі $SABCD$ дұрыс пирамиданың табанына параллель $KLNM$ жазықтықпен қиылған.

1) BS және CS; AB және KL; CS және KL түзулер;

2) ASD және DSC; ABD және ASC жазықтықтардың өзара орналасуын анықта.



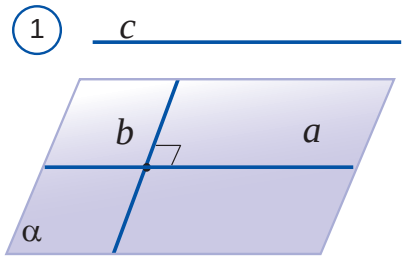
IV ТАРАУ

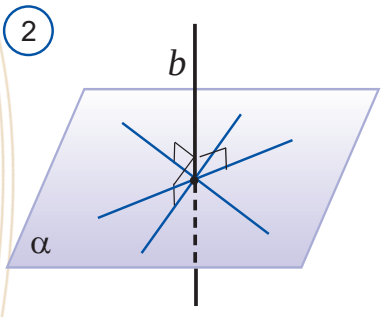
КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

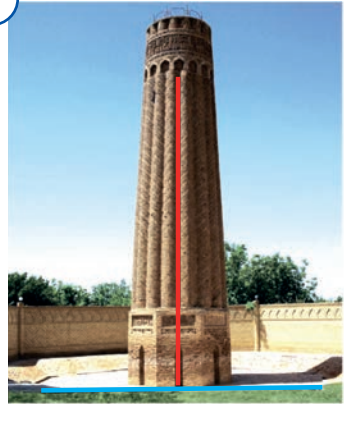
Бұл тарауды үйрену нәтижесінде төмендегі білім мен дағдыларға ие боласың:

- жазықтыққа перпендикуляр түзулерді елестету, олардың қасиеттерін, түзудің жазықтыққа перпендикулярлық белгісін білу және оларды есептерді шешуде қолдану;
- жалпыланған Пифагор теоремасын білу және оны есептерді шешуде қолдану;
- кеңістіктегі жазықтыққа түсірілген перпендикуляр және көлбеу туралы түсінікке ие болу және оларды практикалық есептерді шешуде қолдану;
- нүктеден түзуге дейінгі және жазықтыққа дейінгі, түзуден оған параллель жазықтыққа дейінгі қашықтықтарды анықтап табу;
- параллель жазықтықтар арасындағы, айқас түзулер арасындағы қашықтықтарды анықтап табу;
- үш перпендикуляр туралы теореманы білу және оны есептерді шешуде қолдану;
- жазықтықтар арасындағы бұрышты сызбада кескіндеу және есептей алу;
- кеңістіктегі перпендикуляр жазықтықтар туралы теоремаларды және жазықтықтардың перпендикулярлық белгілерін есептерді шешуде қолдану;
- ортогональ проекция және оларды техникада пайдалану туралы мәліметке ие болу;
- көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданын табу.

17 КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТҮЗУЛЕР МЕН ЖАЗЫҚТЫҚТАР

1


2


3


Есімізге түсіреміз, кеңістікте берілген екі түзудің арасындағы бұрыш 90°-қа тең болса, олар өзара *перпендикуляр түзулер* делінеді.

Перпендикуляр түзулер қиылысатын және айқас болуы мүмкін. 1-суретте a және b перпендикуляр түзулер қиылысатын, ал b және c перпендикуляр түзулер айқас. a және b түзулердің перпендикулярлығы $a \perp b$ түрінде жазылады.

Жазықтықтағы кез келген түзуге перпендикуляр түзу *жазықтыққа перпендикуляр түзулер* делінеді *(2-сурет)*.

α жазықтық және b түзулердің перпендикулярлығы $b \perp a$ түрінде жазылады.

Қоршаған ортадан өзара перпендикуляр пішіндерге көптеген мысалдарды келтіруге болады. Әдетте, үйдің қабырғалары мен бағандары, мұнаралар, шам бағандары мен электр желісінің бағандары жермен салыстырғанда тік, яғни перпендикуляр етіп құрылады *(3-сурет)*.

Бөлмедегі шкаф, стол, тоңазытқыш та еденмен салыстырғанда тік орнатылады.









Енді кеңістіктегі перпендикуляр түзулердің кейбір қасиеттеріне тоқталамыз.

Егер a түзу α жазықтықта жатса немесе оған параллель болса, онда α жазықтықта жатқан, a түзуге параллель басқа b түзу де табылады.

Жазықтыққа перпендикуляр түзу әрине осы жазықтықты қиып өтеді.

4.1-теорема. *Егер екі түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, олар өзара параллель болады.*

Дәлелдеу. a және b түзулер α жазықтыққа перпендикуляр болсын *(4-сурет)*. Осы түзулердің өзара параллель екенін дәлелдейміз.

a түзудің қандай да бір M нүктесі арқылы b түзуге параллель a_1 түзу жүргіземіз.

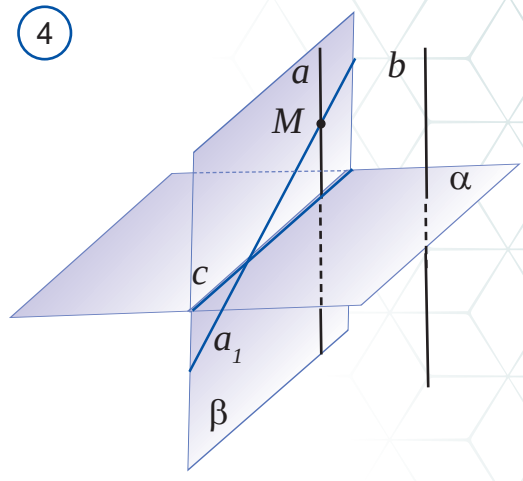
Онда, $a_1 \perp a$ болады.

a және a_1 түзулердің беттесе түсуін көрсетеміз. Айталық, ондай болмасын, a және a_1 түзулер беттесе түспесін. Онда a және a_1 түзулер жатқан β жазықтықтағы M нүкте арқылы α және β жазықтықтардың қиылысу сызығы – c түзуге екі – a және a_1 перпендикуляр түзу өтеді. Ал мұндай болуы мүмкін емес. Қайшылық жорамалымыздың қате екенін көрсетті.

Демек, a және b түзулер өзара параллель.

Енді түзудің жазықтыққа перпендикулярлық белгісін келтіреміз.

4



4.2-теорема. ***Егер түзу жазықтықта жатқан екі қиылысатын түзуге перпендикуляр болса, ол жазықтыққа да перпендикуляр болады.***

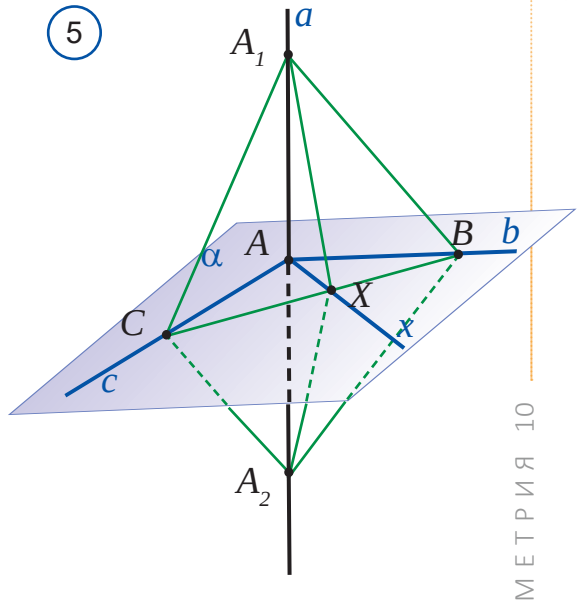
Дәлелдеу. a түзу α жазықтықта жатқан b және c түзуге перпендикуляр болсын. Онда a түзу b және c түзулердің қиылысу нүктесі A арқылы өтеді *(5-сурет)*. a түзудің α жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелдейміз.

α жазықтықтың A нүктесі арқылы кез келген x түзу жүргіземіз және оның a түзуге перпендикуляр болатынын көрсетеміз. α жазықтықта A нүкте арқылы өтпейтін b, c және x түзулерді қиып өтетін x түзуді жүргіземіз. Бұл қиылысу сәйкесінше B, C және X нүктелер болсын.

a түзуде A нүктенің түрлі қабырғаларына AA_1 және AA_1 кесінділерді қоямыз. Пайда болған A_1BA_1 және A_1CA_1 үшбұрыштар теңбүйірлі болады (мұны өз бетіңше негізде). Бұдан A_1BC және A_1BC үшбұрыштардың теңдігі келіп шығады (мұны да өз бетіңше негізде). Өз кезегінде, бұдан A_1BX және A_1BX бұрыштардың теңдігі мен A_1BX және A_1BX үшбұрыштардың теңдігі де келіп шығады (мұны да өз бетіңше негізде).

Атап айтсақ, $A_1X = A_1X$ болады. Онда A_1XA_1 үшбұрыш теңбүйірлі болады. Сондықтан оның XA медианасы оның биіктігі де болады. Ал бұл, x түзудің a түзуге перпендикуляр болатынын көрсетеді.

5



Демек, a түзу α жазықтыққа перпендикуляр.

Бұл теоремадан нәтиже ретінде төмендегі қасиеттер келіп шығады. Оларды өз бетіңше негізде.

4.3-теорема. *Егер түзу екі параллель жазықтықтың біріне перпендикуляр болса, екіншісіне де перпендикуляр болады.*

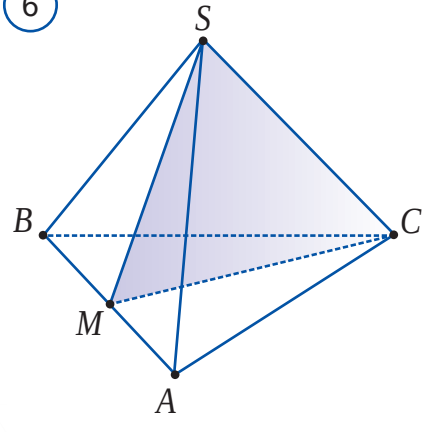
4.4-теорема. *Егер екі жазықтық бір түзуге перпендикуляр болса, олар параллель болады.*

Төменде “бар болу және жалғыздық теоремалары” деп аталатын қасиеттерді де өз бетіңше дәлелдеу үшін келтіреміз.

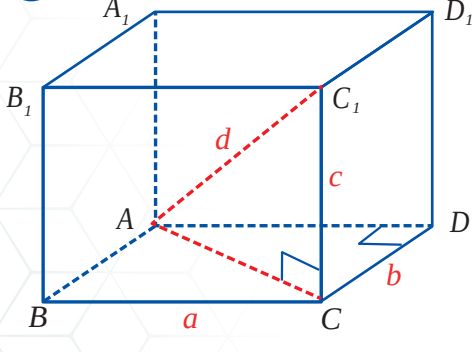
4.5-теорема. *Кеңістіктің кез келген нүктесінен берілген түзуге перпендикуляр бір ғана жазықтық өткізуге болады.*

4.6-теорема. *Кеңістіктің кез келген нүктесінен берілген жазықтыққа перпендикуляр бір ғана түзу өткізуге болады.*

6



7



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

1-есеп. $SABC$ үшбұрышты дұрыс пирамидада M нүкте – AB қырының центрі *(6-сурет)*. AB түзудің SMC жазықтыққа перпендикуляр екенін дәлелде.

Дәлел. Шартқа сәйкес, $SABC$ пирамида дұрыс болғандықтан оның табаны теңқабырғалы, бүйір жақтары теңбүйірлі үшбұрыштардан құралған болады.

Ол жағдайда ABC және ABS үшбұрыштарының CM және SM медианалары олардың биіктіктері де болады.

Онда AB түзу әрі CM, әрі SM түзулерге перпендикуляр болады.

Нәтижеде AB түзу SMC жазықтықта жататын екі SM және CM түзулерге перпендикуляр екенін анықтадық.

Ал бұл, 4.2-теоремаға сәйкес AB түзудің SMC жазықтыққа перпендикуляр екенін білдіреді.

Енді тікбұрышты параллелепипед үшін жалпыланған Пифагор теоремасын дәлелдейміз. Ол үшін III бөлімде берілген параллелепипедтің қасиеттерін еске түсіру керек.

4.7-теорема. *(жалпыланған Пифагор теоремасы). Тікбұрышты параллелепипед диагональының квадраты оның үш өлшемдері квадраттарының қосындысына тең.*

Дәлелдеу. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед болсын *(7-сурет)*.

CC_1 қыр $ABCD$ жаққа перпендикуляр болғандықтан ACC_1 тікбұрышты үшбұрыш болады.

Онда Пифагор теоремасына орай,
$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2$. (1).
ADC да тікбұрышты үшбұрыш. (Неге?)
Тағы Пифагор теоремасын қолдансақ:
$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (2).
Онда, (1) және (2)-ге орай:
$A_1C^2 = CC_1^2 + AC^2 = CC_1^2 + AD^2 + DC^2$.
$AD = BC$ болғандықтан
$A_1C^2 = CC_1^2 + BC^2 + DC^2$.

Егер тік бұрышты параллелепипедтің диагоналын d, оның үш өлшемін a, b және c әріптерімен белгілесек, жалпыланған Пифагор теоремасын былай жазуға болады:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

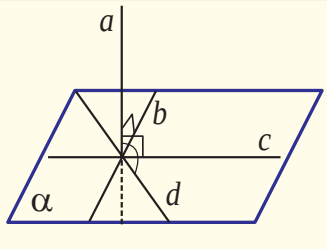
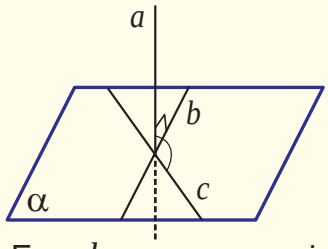


Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

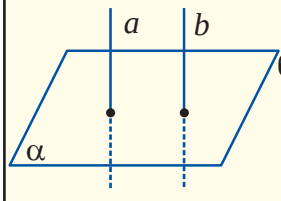
1. *Кеңістіктегі қандай түзулер өзара перпендикуляр болады?*
2. *Айқас түзулер перпендикуляр болуы мүмкін бе?*
3. *Жоғарыдағы суретте қайсы қала көрініп тұр? Суретте қандай түзулер мен жазықтықтар көрінеді? Суреттен параллель, перпендикуляр және айқас түзулерге мысалдар келтір.*
4. *Қандай түзу жазықтыққа перпендикуляр болады?*
5. *Бір жазықтыққа перпендикуляр түзулердің қасиеттерін айт.*
6. *Түзу және жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін айт.*
7. *Параллель жазықтықтардың біріне перпендикуляр болған түзудің қасиетін айт.*
8. *Бір түзуге перпендикуляр болған жазықтықтардың қасиетін айт.*
9. *Жалпыланған Пифагор теоремасы не туралы?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

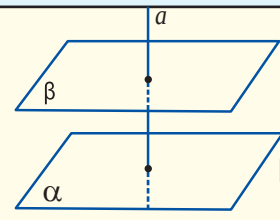
17.1. Кестеде 17-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығы	
Анықтамасы	**Белгілері**
 Егер кез келген $b \in \alpha$ үшін $a \perp b$ болса, $a \perp \alpha$ деп аталады.	 Егер $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ үшін $a \perp b$, $a \perp c$ болса, $a \perp \alpha$ болады.

Жазықтықтардың параллельдігі мен перпендикулярлығы арасындағы байланыстар

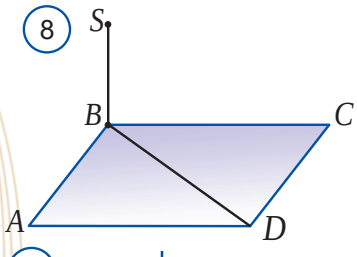


Егер $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ болса, $\alpha \perp b$ болады. Егер $a \perp a$, $b \perp \alpha$ болса, $a \parallel b$ болады.



Егер $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ болса, $a \perp \alpha$ болады. Егер $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ болса, $\alpha \parallel \beta$ болады.

8



17.2. SB кесінді $ABCD$ параллеограмның жазықтығына перпендикуляр *(8-сурет)*. SB перпендикуляр болған түзулерді айт.

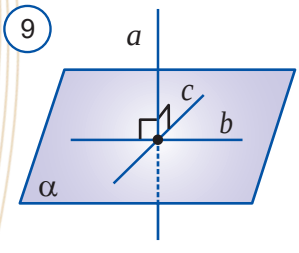
17.3. 9-суретте α жазықтықта жатқан b және c түзулерге перпендикуляр болған a түзу берілген. $a \perp \alpha$ екенін негізде.

17.4. 10-суреттегі түзу үшбұрыштың екі қабырғасына перпендикуляр. Оның үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр екенін негізде.

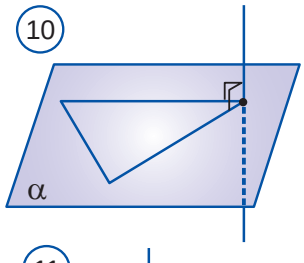
17.5. 11-суретте $a \perp \alpha$. a түзудің α жазықтықта жатқан b түзуге де перпендикуляр болатынын негізде.

17.6. 12-суретте $ABCD$ тік төртбұрыштың A төбесіне MA перпендикуляр түсірілген. Егер $MA \perp AB$ және $MA \perp AC$ болса, $MA \perp AD$ болатынын негізде.

9



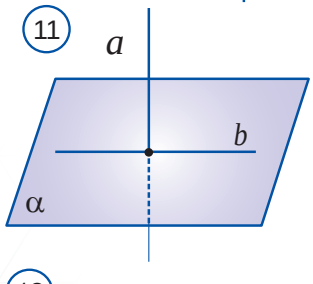
10



17.7. 13-суретте $ABCDEF$ алтыбұрыштың A төбесіне NA перпендикуляр түсірілген. Егер $NA \perp AB$ және $NA \perp AF$ болса, а) $NA \perp AC$; b) $NA \perp AD$; c) $NA \perp AE$ болатынын негізде.

17.8. ABC үшбұрыштың A төбесінен оның AB және AC қабырғаларына перпендикуляр болған AK түзу өткізілген. Бұл түзу үшбұрыштың A нүктесінен түсірілген биіктігіне, медианасына және биссектрисасына перпендикуляр болатынын негізде.

11



17.9. l түзу ABC үшбұрыштың AB және AC қабырғаларына перпендикуляр. l түзу және ABC үшбұрыш жазықтығының өзара орналасуын анықта:

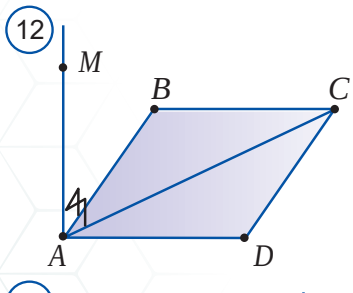
A) l түзу ABC жазықтықты қиып өтеді, бірақ оған перпендикуляр емес;

B) l түзу ABC жазықтыққа тиісті;

C) l түзу ABC жазықтыққа перпендикуляр;

D) l түзу ABC жазықтыққа параллель.

12

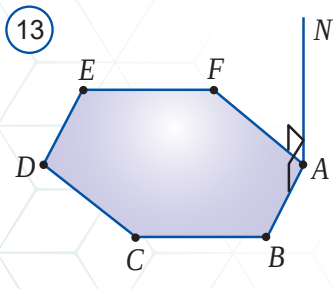


17.10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипед берілген.

a) DD_1 түзу $ABCD$ жаққа; b) AD түзу DD_1CC_1 жаққа перпендикуляр екенін дәлелде.

17.11. 14-суретте $ABCDA_1B_1D_1C_1$ куб берілген. а) AB_1D – тік бұрышты үшбұрыш; b) AB_1C_1D – тік төртбұрыш екенін негізде.

13



17.12. cm түзу ABC үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр ($\angle C = 90°$). а) BC түзу AC және CM түзулер жатқан жазықтыққа перпендикуляр; b) AC түзу BC және CM түзулер жатқан жазықтыққа перпендикуляр екенін дәлелде.

17.13. CD түзу ABC үшбұрыштың BC қабырғасына перпендикуляр ($\angle C = 90°$). Өзара перпендикуляр түзу мен жазықтықтарды анықтап, түсіндір.

17.14. 15-суреттегі ABC және DBC тікбұрышты үшбұрыштар түрлі жазықтықтарда және BC қабырға бойынша қиылысады. Қайсы түзу мен жазықтықтар өзара перпендикуляр болады? Жауабыңды негізде.

17.15. KO түзу $ABCD$ параллелограмм жазықтығына перпендикуляр *(16-сурет)*. KO түзуге перпендикуляр түзуді анықта.

17.16. MB түзу ABC үшбұрыштың AB және BC қабырғаларына перпендикуляр *(17-сурет)*. X нүкте AC қабырғаның кез келген нүктесі болса, MBX үшбұрыштың түрін анықта.

17.17. $ABCD$ төртбұрыштың қабырғалары $A_1B_1C_1D_1$ тік төртбұрыштың қабырғаларына сәйкесінше параллель. $ABCD$ тік төртбұрыш екенін дәлелде.

17.18. α жазықтық m түзуге, m түзу n түзуге параллель. Жазықтықтың n түзуге перпендикуляр болатынын дәлелде.

17.19. $ABCD$ трапецияның AB табаны жатқан түзу α жазықтыққа перпендикуляр. Осы трапецияның CD табаны жатқан түзу де α жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелде.

17.20. Кеңістіктегі түзудің кез келген нүктесі арқылы перпендикуляр түзу өткізуге болатынын дәлелде.

17.21. Кеңістіктегі түзудің кез келген нүктесі арқылы оған перпендикуляр екі түрлі түзу өткізуге болатынын дәлелде.

17.22. AB, AC, AD түзулер жұп-жұбымен өзара перпендикуляр *(18-сурет)*. Егер

1) $AB = 3$ *cm*, $BC = 7$ *cm*, $AD = 1{,}5$ *cm*;

2) $BD = 9$ *cm*, $BC = 16$ *cm*, $AD = 5$ *cm;*

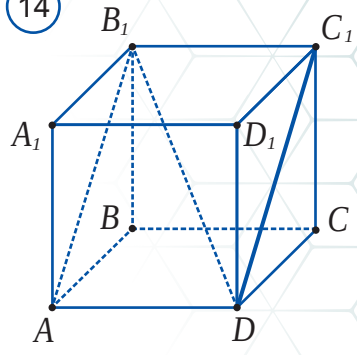
3) $AB = b$ *cm*, $BC = a$ *cm*, $AD = d$ *cm;*

4) $BD = c$ *cm*, $BC = a$ *cm*, $AD = d$ *cm* болса, CD кесіндінің ұзындығын тап.

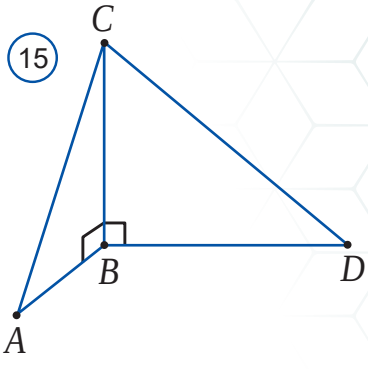
17.23. $ABCD$ тік төртбұрыштың A төбесінде оның жазықтығына перпендикуляр AK түзу өткізілген. K нүктеден тік төртбұрыштың басқа төбелеріне қашықтық 6 m, 7 m, 9 m. AK қашықтықта тап.

17.24. A және B нүктелер арқылы α жазықтыққа перпендикуляр және оны сәйкесінше C және D нүктелерде қиып өтетін түзу өткізілген. Егер $AC = 3$ m, $BD = 2$ m және $CD = 2{,}4$ m болса және AB кесінді α жазықтықты қиып өтпесе, A және B нүктелердің арасындағы қашықтықты тап.

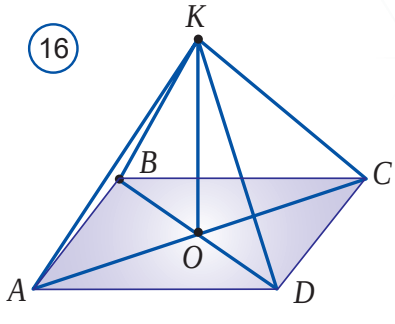
14



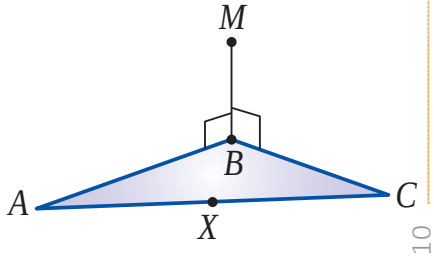
15



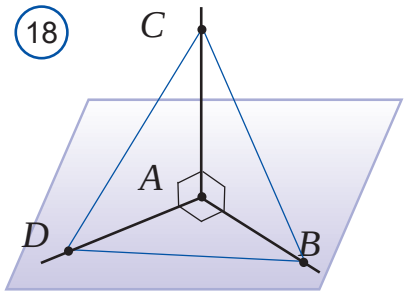
16



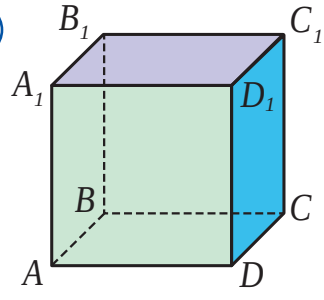
17



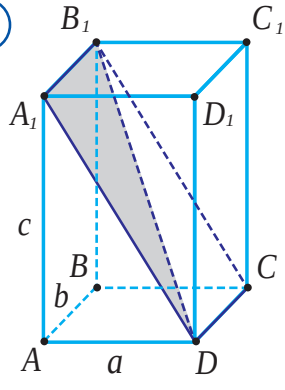
18



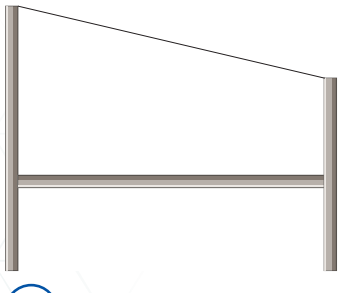
19



20



21



22



17.25. 19-суретте бейнеленген кубтың қыры: a) 4 cm; b) 8 см болса, AB_1C үшбұрыштың периметрін және DAC_1 үшбұрыштың ауданын тап.

17.26. CM түзу қабырғасы a-ға тең болған $ABCD$ квадрат жазықтығына перпендикуляр және $cm = b$. Егер a) $a = 2$ cm, $b = 1$ cm; b) $a = 3$ cm, $b = 4$ cm болса, M нүктеден квадрат төбелеріне дейінгі қашықтықтарды тап.

17.27. ABC тікбұрышты үшбұрыштың C төбесі арқылы оның жазықтығына CD перпендикуляр түсірілген. Егер a) $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CD = 12$ cm; b) $AC = 12$ cm, $BC = 16$ cm, CD = 24 cm болса, D нүктеден үшбұрыштың гипотенузасының центріне дейінгі қашықтықты тап.

17.28. 20-суреттегі $ABCDA_1B_1D_1C_1$ тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері a) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 16$ cm; b) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm болса, A_1B_1D үшбұрыш пен A_1B_1CD төртбұрыштың ауданын тап.

17.29. $ABCDA_1B_1D_1C_1$ тік бұрышты параллелепипедтің өлшемдері a) $a = 12$ cm, $b = 8$ cm, $c = 16$ cm; b) $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $c = 12$ cm; d) $a = 2$ m, $b = 12$ m, $c = 6$ m болса, оның диагоналын тап.

17.30. Тікбұрышты дұрыс параллелепипед табанының қабырғасы 4 cm және биіктігі 5 cm болса, оның диагоналын тап.

17.31. Тікбұрышты параллелепипед табанының қабырғалары 12 cm және 8 cm, диагоналы 6 cm болса, оның биіктігін тап.

17.32. ABC түзу бұрышты үшбұрыш жазықтығына оның C тік бұрышының төбесі арқылы перпендикуляр түсірілген. $AD=a$, $BD=b$, $CD=c$ болса, ABC үшбұрыштың CM медианасын тап.

17.33. $ABCD$ тік төртбұрыш жазықтығына оның A төбесі арқылы AE перпендикуляр түсірілген. E нүктеден тік төртбұрыштың қалған төбелеріне дейінгі қашықтықтар a, b және c ($a< c$, $b < c$) болса, AE кесіндінің және тік төртбұрыш қабырғаларының ұзындықтарын тап.

17.34. ABC үшбұрышта $\angle C = 90°$ және $\angle A = 30°$. Үшбұрыш жазықтығына оның C төбесі арқылы cm перпендикуляр түсірілген. $AC = 18$ cm, $CM = 12$ cm болса, M нүктеден AB түзуге дейінгі қашықтықты тап.

17.35. Бір-біріне параллель бағандардың жоғарғы төбелері арасындағы қашықтық 3,4 m *(21-сурет)*. Бағандар бір-бірімен горизонталь тосынмен байланысқан. Бірінші бағанның биіктігі 5,6 m, екінші бағанның биіктігі 3,9 m болса, тосынның ұзындығын тап.

17.36. Ұзындығы 15 m болған телефон сымының биіктігі 6 m болған сымбағаннан биіктігі 20 m болған үйге тегіс тартылған *(22-сурет)*. Баған мен үй арасындағы қашықтықты тап.

18 КЕҢІСТІКТЕГІ ПЕРПЕНДИКУЛЯР, КӨЛБЕУ ЖӘНЕ ҚАШЫҚТЫҚ

α жазықтыққа онда жатпайтын A нүкте арқылы перпендикуляр a түзу жүргіземіз *(1-сурет)*. Бұл түзу жазықтықты B нүкте арқылы қиып өтсін. Сондай-ақ, жазықтықтың қандай да бір C нүктесін A нүктемен қосамыз. Нәтижеде пайда болған

AB кесінді – *жазықтыққа түсірілген перпендикуляр*;

AC кесінді – *жазықтыққа түсірілген көлбеу*;

BC кесінді – *көлбеудің жазықтықтағы проекциясы;*

B нүкте – *перпендикулярдың табаны;*

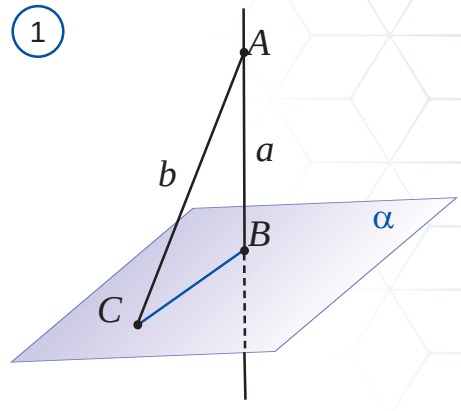
C нүкте – *көлбеудің табаны* деп аталды.

ABC үшбұрыш тікбұрышты және онда AB катет, ал AC гипотенуза болғандықтан әрдайым $AB < AC$ болады.

Демек, қандай да бір жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығы осы нүкте арқылы өткізілген кез келген көлбеудің ұзындығынан кіші болады.

Қандай да бір жазықтыққа түсірілген перпендикулярлар, көлбеулер және олардың проекциялары туралы төмендегі теорема орынды болады:

1



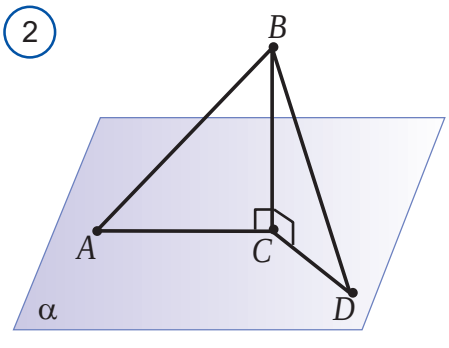
4.8-теорема. *Егер қандай да бір нүктеден жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеулер түсірілген болса, онда: (2-сурет)*

a) перпендикулярдың ұзындығы кез келген көлбеудің ұзындығынан кіші болады;

b) қайсы көлбеудің проекциясы ұзын болса, сол көлбеу ұзын болады;

c) қай көлбеу ұзын болса, сол көлбеудің проекциясы ұзын болады.

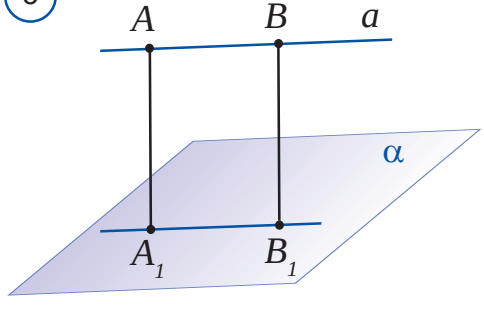
2



Енді параллель түзулердің төмендегі қасиетін дәлелдейік.

4.9-теорема. *Егер түзу жазықтыққа параллель болса, онда оның барлық нүктелері жазықтықтан бірдей қашықтықта болады.*

3

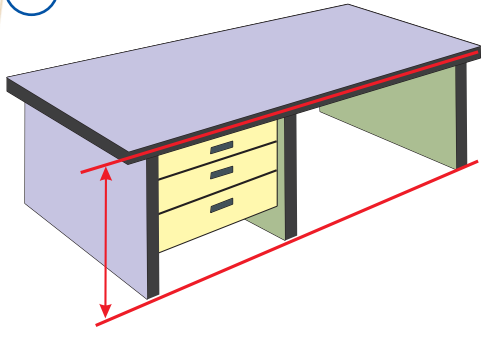


Дәлелдеу. a – берілген түзу және α – берілген жазықтық болсын *(3-сурет)*. a түзуде екі A және B нүктені аламыз. Олардан α – жазықтыққа перпендикулярлар түсіреміз. Осы перпендикулярлардың табаны сәйкесінше A және B нүктелер болсын. Онда A және B нүктелерден α жазықтыққа дейінгі болған

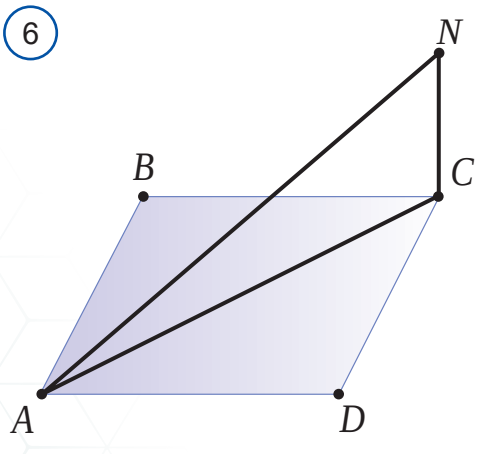
4



5



6



қашықтықтар, сәйкесінше, AA_1 және BB_1 кесінділер болады. 3.6-теоремаға орай, AA_1 және BB_1 кесінділер параллель болады.

Демек, олар бір жазықтықта жатады. Бұл жазықтық α жазықтықты A_1B_1 түзудің бойымен қиып өтеді. a түзу A_1B_1 түзуге параллель болады, өйткені ол α жазықтықты қиып өтпейді.

Сөйтіп, ABA_1B_1 төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары параллель.

Демек, ол параллелограмм. Бұл параллелограммда $AA_1 = BB_1$.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі болған қашықтық деп нүктеден жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың ұзындығына айтылады.

Ташкенттегі сағат мұнарасының биіктігі 30 m дейілгенде, мұнараның төбесінен оның табан жазықтығына түсірілген перпендикуляр ұзындығы түсініледі *(4-сурет)*.

Түзуден оған параллель болған жазықтыққа дейінгі қашықтық деп түзудің кез келген жазықтыққа дейінгі қашықтық айтылады.

Жазықтықтың кез келген екі нүктесінен оған параллель болған жазықтыққа дейінгі қашықтық бірдей болады.

Екі параллель жазықтықтар арасындағы қашықтық деп бір жазықтықтың кез келген нүктесінен екінші жазықтыққа дейінгі қашықтық айтылады.

5-суретте көрсетілген үстелдің биіктігі еден мен үстел жазықтықтары арасындағы қашықтыққа тең болады.

1-есеп. $ABCD$ квадраттың C төбесінен ол жатқан жазықтыққа перпендикуляр CN шығарылған (6-сурет). Егер CN = 6 cm, квадрат қабырғасы $4\sqrt{2}$ -ге тең болса, N нүктеден квадраттың A төбесіне дейінгі қашықтықты тап.

Шешуі. Шартқа сәйкес, берілген квадраттың қабырғасы $AD = 4\sqrt{2}$.

$ABCD$ квадраттың AC диагоналын өткіземіз және оның ұзындығын есептейміз:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{16 \cdot 2 + 16 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8 \ cm;$$

CN жазықтыққа перпендикуляр болғандықтан $CN \perp AC$.

Демек, ACN тікбұрышты үшбұрыш. Онда Пифагор теоремасына сәйкес:

$$AC = \sqrt{AC^2 + CN^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Жауабы: 10 $см$.

Теорема 4.14. *Екі айқас түзу бір ғана ортақ перпендикулярға ие болады.*

Дәлелдеу. a және b айқас түзулер болсын *(7-сурет)*. Алдымен ортақ перпендикулярдың бар екенін көрсетеміз. Бұл үшін берілген айқас түзулерде сондай A және B нүктелерді таңдау мүмкіндігін көрсететін боламыз, AB түзу a-ға да, b-ға перпендикуляр болады.

α жазықтық b түзу арқылы өтетін және a түзуге параллель болсын. a түзу арқылы C нүктені аламыз және одан α жазықтыққа CD перпендикуляр түсіреміз. Қиылысатын a және CD түзулер арқылы β жазықтықты өткіземіз. a_1 түзу – α және β жазықтықтардың қиылысу түзуі болсын *(7b-сурет)*.

$a_1 \parallel a$ болғандықтан a_1 және b түзулер қандай да бір B нүктеде қиылысады. B нүкте арқылы β жазықтықта жататын және a түзуге перпендикуляр BA түзуін түсіреміз.

Нәтижеде, AB және CD түзулердің әр екеуі де β жазықтықта жатады және a түзуге перпендикуляр болады. Сондықтан, $AB \parallel CD$ және $AB \perp a$ болады.

Демек, $AB \perp a$ және $AB \perp b$, яғни AB ізделінген түзу болып, ол a және b айқас түзулердің әр екеуіне де перпендикуляр болады.

Ортақ перпендикулярдың жалғыздығын өз бетіңше дәлелде.

Екі айқас түзудің арасындағы қашықтық деп олардың ортақ перпендикулярының ұзындығына айтылады.

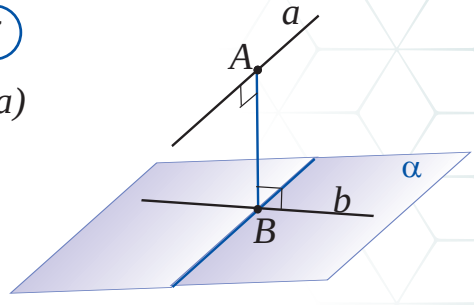
Жоғарыдағы теоремадан төмендегідей қорытынды келіп шығады:

Қасиет. Екі айқас a және b түзудің арасындағы қашықтық *(8-сурет)* – a түзудің кез келген нүктесінен b түзу жатқан және a түзуге параллель болған α жазықтыққа дейінгі қашықтыққа тең болады.

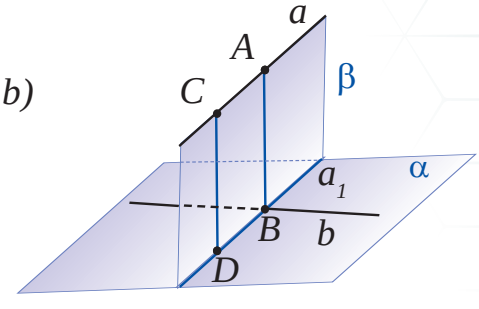
Жоғарыдағыларға негізделіп, кеңістіктегі

7

a)

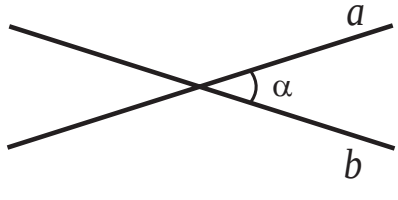


b)

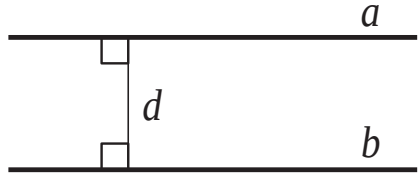


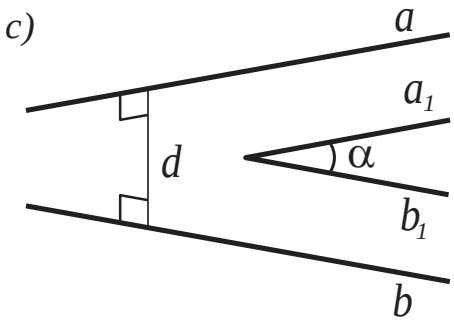
8

a)



b)





екі түзудің өзара орналасуын сандардың көмегімен сипаттауға болады.

Егер кеңістіктегі екі түзу:

• өзара қиылысатын болса, олардың арасындағы a бұрыш *(8a-сурет)*,

• өзара параллель болса, олардың арасындағы d қашықтық *(8b-сурет)*,

• өзара айқас болса, олардың арасындағы α бұрыш және арасындағы d қашықтық *(8c-сурет)* осы түзулердің өзара орналасуын санмен сипаттайды.

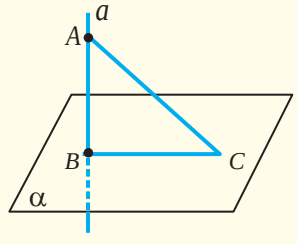
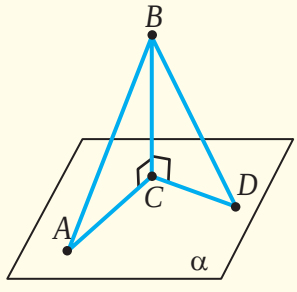


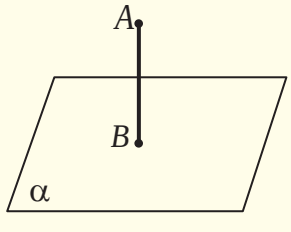
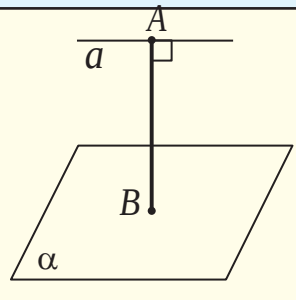
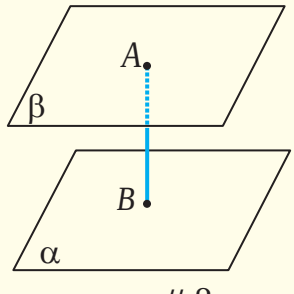
Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Жазықтыққа түсірілген перпендикуляр және көлбеуге анықтама бер.*
2. *9-суреттерде не: a) перпендикуляр; b) көлбеу рәмізі ретінде бейнеленген?*
3. *Көлбеудің жазықтықтағы проекциясы деп неге айтылады?*
4. *Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық қалай анықталады?*
5. *Жазықтыққа параллель болған түзу және жазықтықтың арақашықтығы қалай табылады?*
6. *Екі параллель жазықтықтардың арақашықтығы қалай табылады?*
7. *Екі айқас түзулердің арақашықтығы қалай табылады?*
8. *Кеңістіктегі екі түзудің өзара орналасуын қандай санды шамалар анықтайды?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

18.1. Кестеде 18-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Перпендикуляр және көлбеу	
Анықтамасы	**Қасиеттері**
 Егер $a \perp \alpha$, $AB \notin a$ болса: AB – a жазықтыққа A нүктеден түсірілген перпендикуляр; AC – көлбеу, BC – көлбеудің α жазықтыққа проекциясы.	 $BC < AB$, $BC < BD$; егер $AB = BD$ болса, $AC = CD$ болады; егер $AC = CD$ болса, $AB = BD$ болады; егер $AC > CD$ болса, $AB > BD$ болады.

Қашықтықтар		
Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық	**Түзуден жазықтыққа дейінгі қашықтық**	**Жазықтықтар арасындағы қашықтық**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$	 $\alpha \parallel \beta$, $A \in \beta$, $AB \perp \alpha$

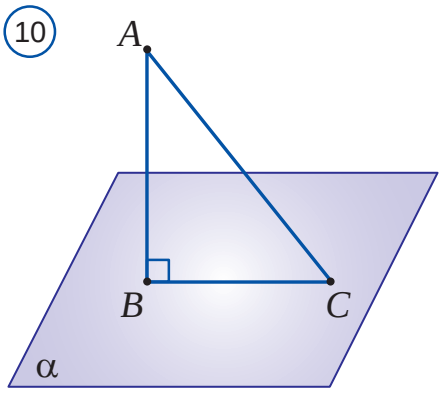
18.2. 10-суреттен a) перпендикуляр; b) көлбеу: c) перпендикуляр табаны; d) көлбеу проекциясын анықтап, жаз.

18.3. 11-суреттен AD және DC қималар AB және BC көлбеулердің проекциясы:

a) Егер $AD > DC$ болса, көлбеулер туралы не айтуға болады?

b) Егер $AB = BC$ болса, проекциялар туралы не айтуға

10



болады?

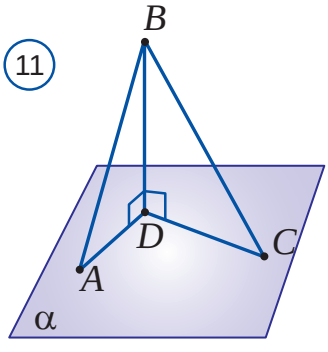
18.4. 12-суреттегі белгісіз қималардың ұзындығын тап.

18.5. 13-суретте берілгендерді пайдаланып MA және MC көлбеулердің ұзындықтарын өзара салыстыр.

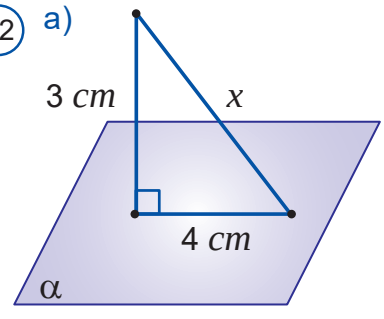
18.6. AB – перпендикуляр, AC – көлбеу және BC– көлбеу проекциясы болса, кестені берілгендерді пайдаланып толтыр.

AB	24	15			12
BC	7		24	$4a$	

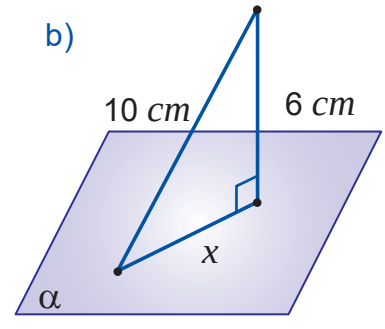
11



12 a)



b)

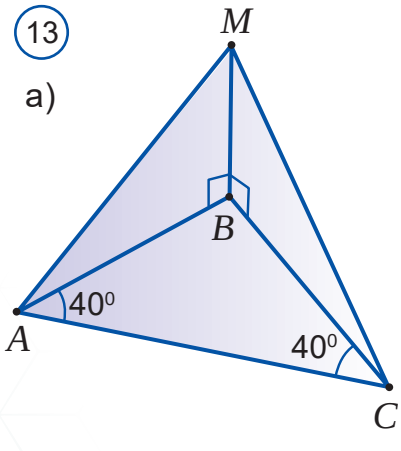


AC		25	26	$5a$	13

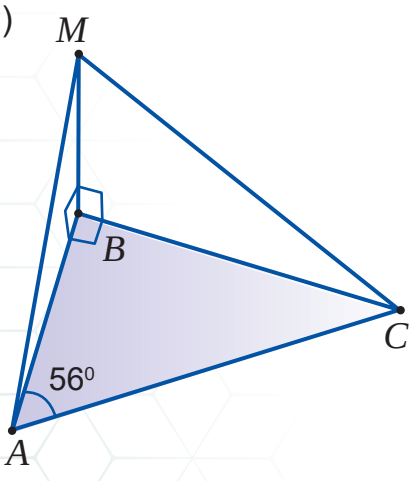
18.7. AB – перпендикуляр, AC – көлбеу, BC – көлбеу проекциясы, α – перпендикуляр мен көлбеу арасындағы бұрыш болса, кестені берілгендерді пайдаланып толтыр.

AB			5	6	14
BC		4			14
AC	6	8		12	
α	30°		45°		

13 a)



b)



18.8. M нүктеден жазықтыққа өзара тең MA, MB, MC, MD көлбеулер өткізілген. $ABCD$ төртбұрыш төмендегілердің қай бірі болады: a) квадрат; b) параллелограмм; c) тік төртбұрыш. Жауабыңды негізде.

18.9. Егер параллелограмның төбелерінен бірдей ұзақтықта жатқан нүкте бар болса, бұл параллелограмм тік төртбұрыш екенін дәлелде.

18.10. Егер ромбтың төбелерінен бірдей ұзақтықта жатқан нүкте бар болса, бұл ромбтың квадрат екенін дәлелде.

18.11. A, B, Q нүктелер α жазықтыққа тиісті, ал M нүкте оған тиісті емес және $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB кесінділердің қай бірі: a) перпендикуляр; b) көлбеу; c) көлбеу проекциясы екенін анықта.

18.12. A нүктеден α жазықтыққа AB және AC көлбеулер мен AO перпендикуляр өткізілген *(14-сурет)*. Егер AB = 2,5 $см$, AC = 3 $см$ болса, көлбеулердің проекцияларын өзара салыстыр.

18.13. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу түсірілген *(14-сурет)*. Егер көлбеулердің бірі екіншісінен 26 $см$ ұзын, ал проекциялары 12 $см$ және 40 $см$ болса, осы көлбеулердің ұзындықтарын тап.

18.14. Үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрінен үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түзу өткізілген. Осы түзудің әрбір нүктесі үшбұрыштың төбелерінен бірдей ұзындықта жататынын дәлелде.

18.15. Ауданы a) 21 $см^2$; b) 96 $см^2$; c) 44 $см^2$; d) 69 $см^2$; e) 156 $см^2$ болған $ABCD$ квадраттың жазықтығына ұзындығы 10 $см$ болған DM перпендикуляр түсірілген. MA көлбеудің ұзындығын тап.

18.16. Тікбұрышы C болған ABC үшбұрыштардың сүйір бұрышының төбесінен үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр AD түзу өткізілген. егер $AC = c$, $BC = b$ және $AD = c$ болса, D нүктеден B және C төбелеріне дейінгі қашықтықты тап.

18.17. Бір-бірінен 4,2 м қашықтықта болған вертикаль бағандардың жоғарғы төбесі тосынмен қосылған. Бағандардың биіктігі 5,8 $м$ және 4,1 $м$ болса, тосынның ұзындығын тап.

18.18. 20 $м$ ұзындықтағы телефон желісі бағанға жердің бетінен 8 $м$ биіктікте ілінген және одан биіктігі 18 $м$ болған көпқабатты үйдің төбесіне тартылған. Үй мен бағанның арақашықтығын тап.

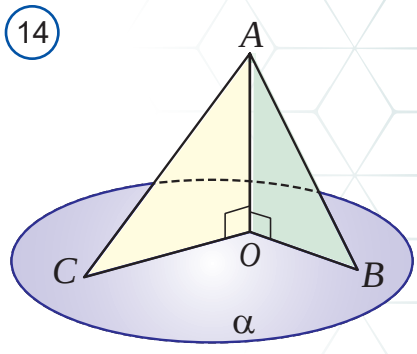
18.19. Жазықтыққа P нүктеден түсірілген PQ перпендикулярдың ұзындығы 1-ге, ал PA және PB көлбеулердің ұзындықтары 2-ге тең. C нүкте AB кесіндінің центрі. Егер a) APB = 90°; b) APB = β болса, QC кесіндінің ұзындығын тап.

18.20. $ABCD$ параллелограмның доғал B бұрышының төбесінен оның жазықтығына перпендикуляр болған BH кесінді түсірілген. Егер $AH = 5\ см$, $HD = HC = 8{,}5\ см$, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ болса, параллелограмның қабырғаларын тап.

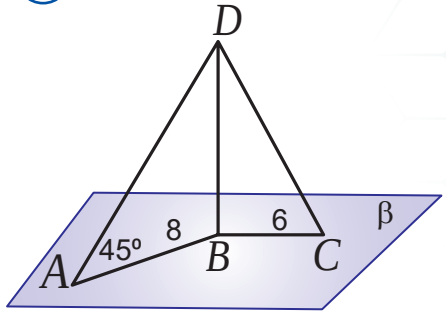
18.21. M нүкте қабырғасы 60 $см$ болған дұрыс ABC үшбұрыштың әрбір төбесінен 40 $см$ қашықтықта орналасқан. ABC үшбұрыштың жазықтығынан M нүктеге дейін болған қашықтығын тап.

18.22. β жазықтыққа BD перпендикуляр *(15-сурет)*, AD және DC көлбеулер түсірілген. DCB = 45º, AB = 8, BC = 6. CD-ны тап.

14



15



“GeoGebra”ны қолдану

3D калькулятормен нүктеден түзуге дейінгі қашықтықты анықтау

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік куб берілген. Кубтың A ұшынан B_1D_1 түзуге перпендикуляр түсірілген. A төбесінен B_1D_1 түзуге дейінгі қашықтықты тап.

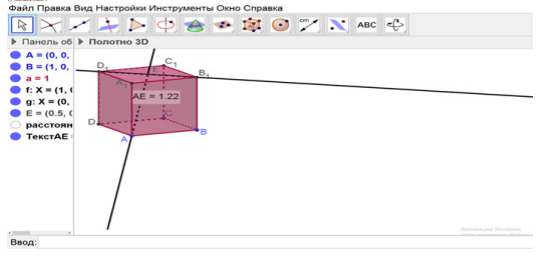
Салу:

• “GeoGebra”да жаңа терезе аш.

• “GeoGebra”ның интерфейсін **“Настройки”** – **“3D Графика”** көрінісіне өткіз.

Қашықтықты анықтау кезеңдері

1.		**Ввод** (Кіргізу) қатары арқылы	A=(0,0,0) нүкте салынады.
2.		**Ввод** (Кіргізу) қатары арқылы	B=(1,0,0) нүкте салынады.
3.		**Куб** (Куб)	Бірлік куб салынады.
4.		**“Переименовать”** (Қайта атау)	E,F,G,H нүктелер сәйкес түрде A_1,B_1,C_1,D_1 ге өзгертіледі. Ол үшін нүктенің үстіне басылып, жаңа белгі енгізіледі.
5.		**“Прямая”** (Түзу)	B_1D_1 түзуге өткізіледі.
6.		**“Перпендикулярная прямая“** (Перпендикуляр түзу)	Кубтың A төбесінен B_1D_1 түзуге перпендикуляр түсіріледі.
7.		**“Пересечение”** (Қиылысу)	B_1D_1 түзу мен өткізілген перпендикуляр түзулердің қиылысу нүктесі – E белгіленеді.
8.		**“Расстояние или длина”** (Қашықтық немесе ұзындық)	Кубтың A төбесі мен E нүктесі арасындағы қашықтық анықталады: AE = 1.22.



Өз бетіңше орындауға арналған тапсырма

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік куб берілген. Кубтың A төбесінен BD_1 түзуге перпендикуляр түсірілген. A төбесінен BD_1 түзуге дейінгі қашықтықты тап.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бірлік кубтың AA_1 жағының центрі – E-ден BD_1 түзуіне перпендикуляр түсірілген. 1 нүктеден BD_1 түзуге дейінгі қашықтықты тап.

19 ҮШ ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТУРАЛЫ ТЕОРЕМА

4.11-теорема. *Егер жазықтыққа түсірілген көлбеудің табанынан өтетін түзу көлбеудің проекциясына перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.*

Дәлелдеу. Айталық, AB кесінді α жазықтыққа түсірілген перпендикуляр, ал AC кесінді көлбеу болсын.

c түзу α жазықтықта жататын, C нүктеден өтетін және көлбеу проекциясына перпендикуляр болған түзу болсын *(1-сурет)*.

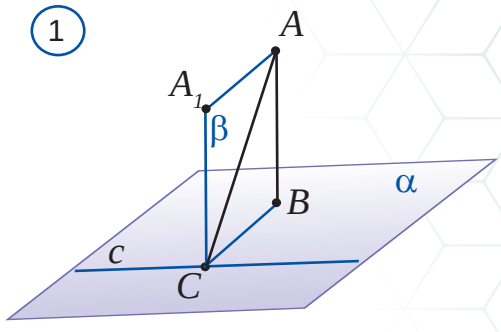
AB-ға параллель A_1C түзуді жүргіземіз. Осы түзу α жазықтыққа перпендикуляр болады.

AB және A_1C түзулер арқылы β жазықтықты жүргіземіз. c түзу CA_1 түзуге перпендикуляр болады. Осы шартқа орай, ол CB түзуге де перпендикуляр еді. Онда c түзу β жазықтыққа да перпендикуляр болады.

Демек, c түзу β жазықтықта жатқан AC көлбеуге де перпендикуляр болады.

Бұл теоремада үш перпендикуляр туралы айтылып жатқандықтан “Үш перпендикуляр туралы теорема” атауын алған. Осы теоремаға кері болған теорема да орынды болады. Оны өз бетіңше дәлелде.

1



4.12-теорема. *Егер жазықтыққа түсірілген көлбеудің табанынан өтетін түзу көлбеуге перпендикуляр болса, онда ол көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады.*

1-есеп. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрі арқылы үшбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түзу өткізілген *(2-сурет)*. Осы түзудің кез келген нүктесі үшбұрыштың қабырғаларынан бірдей ұзындықта жататынын дәлелде.

Дәлелдеу. Айталық, A,B,C – үшбұрыш қабырғаларының шеңбермен қиылысу нүктелері, O – шеңбердің центрі, ал S перпендикулярдағы кез келген нүкте болсын.

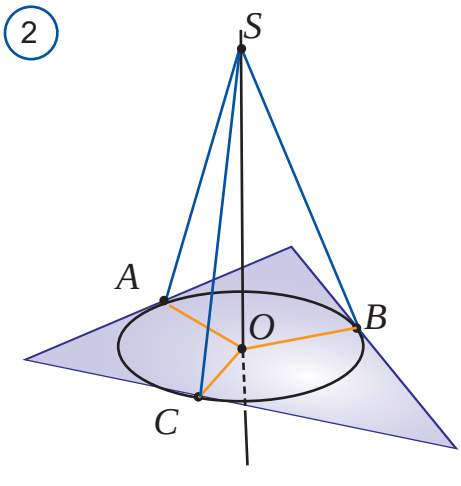
OA үшбұрыштың қабырғасына перпендикуляр болғандықтан үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, OA да осы қабырғаға перпендикуляр болады. Онда SAO тікбұрышты үшбұрыш болады. Осы үшбұрышта Пифагор теоремасына орай,

$$SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$$

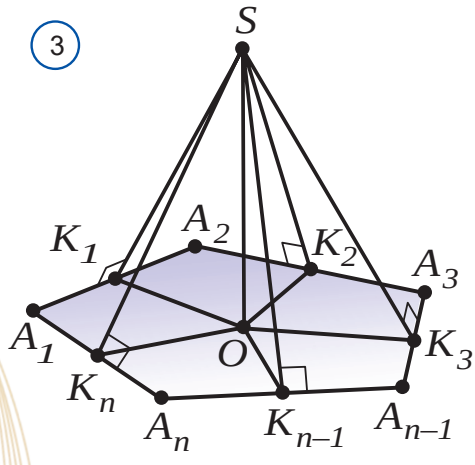
мұнда r – шеңбердің радиусы.

Дәл осыған ұқсас, SBO тікбұрышты үшбұрыштан $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$ және SCO тікбұрышты үшбұрыштан $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$ екенін табамыз.

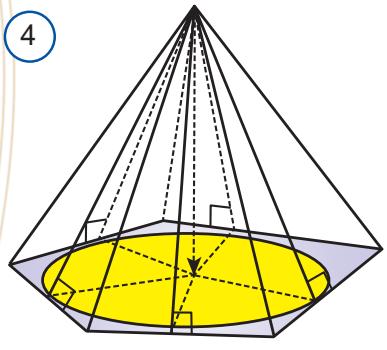
2



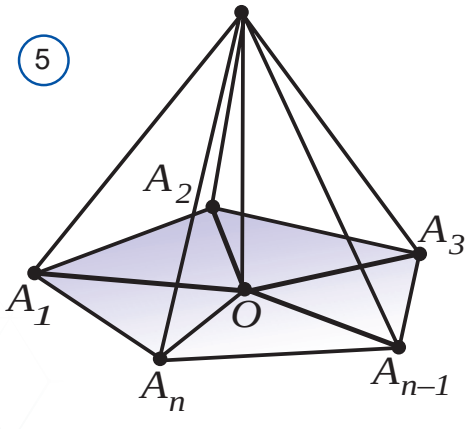
3



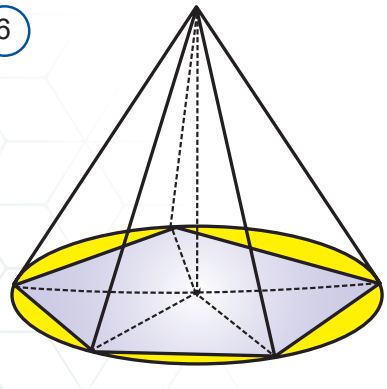
4



5



6



Демек, $SA = SB = SC$.

Бұл қасиеттің кез келген көпбұрышқа ортақ жағдайларын да қарастырамыз.

2-есеп. Кеңістіктегі нүкте көпбұрыштың қабырғаларынан бірдей ұзындықта орналасқан болып, одан көпбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны нүкте көпбұрышқа іштей сызылған шеңбердің центрімен беттесе түсетінін дәлелде *(3-сурет)*.

Дәлел. Айталық, S – берілген нүкте, A_1A_2 ... A_n - $_1A_n$ – берілген көпбұрыш және O – S нүктеден көпбұрыш жазықтығына түсірілген перпендикуляр табаны болсын.

Ол жағдайда, шартқа сәйкес, $SK_1, SK_2, ... SK_n$ – S нүктеден көпбұрыштың қабырғаларына дейінгі қашықтықтар (яғни бұл қабырғаға түсірілген перпендикулярлар) өзара тең болады:

$SK_1 = SK_2 = ... = SK_n$.

О нүктені $K_1, K_2, ... K_n$ нүктелермен жалғаймыз. Нәтижеде, $SOK_1, SOK_2, ..., SOKn$ – бір SO ортақ катетке және тең гипотенузаларға ие тікбұрышты үшбұрыштарды жасаймыз.

Бір катеті мен гипотенузаларының тең болуы, сондай-ақ үшбұрыштардың теңдік белгісіне сәйкес бұл тікбұрышты үшбұрыштар тең болады.

Онда олардың екінші катеттері – $OK_1, OK_2, ... OK_n$ де өзара тең болады: $OK_1 = OK_2 = ... = OK_n$.

Бұл теңдіктер перпендикуляр табаны – O нүкте көпбұрышқа іштей сызылған шеңбер центрімен бетпе-бет түсетінін көрсетеді.

Бұл қасиеттен мынадай маңызды қорытынды шығады.

Қорытынды. Егер пирамиданың барлық бүйір жақтарының биіктіктері өзара тең болса (немесе бүйір жақтары табан жазықтығымен бірдей бұрыш құраса), онда бұл пирамиданың биіктігі табанына іштей сызылған шеңбер центріне түседі *(4-сурет)*.

3-есеп. Кеңістіктегі нүкте көпбұрыштың қабырғаларынан бірдей ұзындықта орналасқан болып, одан көпбұрыштың жазықтығына перпендикуляр түсірілген. Осы перпендикулярдың табаны көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрімен беттесе түсетінін дәлелде *(5-сурет)*.

Қорытынды. Егер пирамиданың барлық бүйір қырлары өзара тең болса (немесе бүйір қырлары табан жазықтығымен бірдей бұрыш пайда етсе), онда бұл пирамиданың биіктігі табанға сырттай сызылған шеңбер центріне түседі *(6-сурет)*.

4-есеп. Кеңістікте берілген нүктеден жазықтыққа екі көлбеу түсірілген. Бұл көлбеулердің бірі екіншісінен 26 $см$ ұзын болып, олардың проекцияларының ұзындығы сәйкес түрде 12 $см$ және 40 $см$. Көлбеулердің ұзындығын тап.

Шешуі. Айталық, AB – перпендикуляр, AC және AD сәйкес көлбеулер болсын *(7-сурет)*.

$AC = x\ см$ деп аламыз. Онда шартқа сәйкес: $AD = x + 26\ см$ болады.

1) ABC – тікбұрышты үшбұрыш. Пифагор теоремасына сәйкес:

$AC^2 = AC^2 + AB^2$ немесе $AB^2 = x^2 + 144$.

2) ABD да тік бұрышты үшбұрыш. Пифагор теоремасына сәйкес:

$AD^2 = BD^2 + AB^2$ немесе $AB2 = (x + 26)^2 –$ 1600.

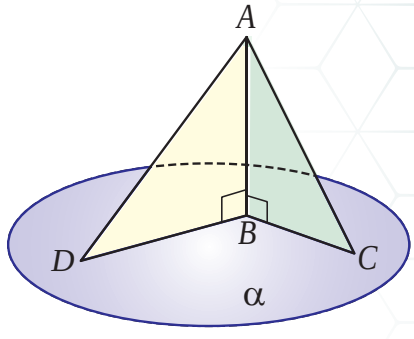
1 және 2-ден x2 + 144 = (x + 26)2 – 1600-ді шығарамыз.

Одан x = 16 $см$ екенін анықтаймыз.

Демек, $AC = 15\ см$, $AD = x + 26 = 41\ (см)$ болады.

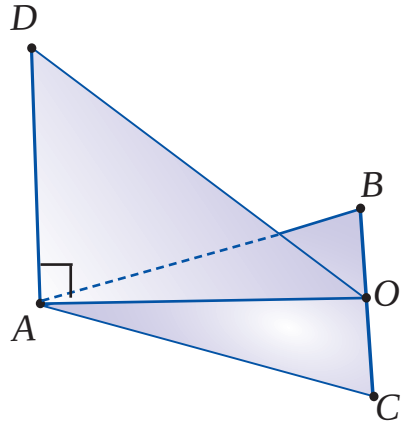
Жауабы: $AC = 15\ см$, $AD = 41\ см$.

7



5-есеп. ABC үшбұрыштың жазықтығына оның A нүктесінен перпендикуляр түсірілген *(8-сурет)*. Егер $AB = 13$, $BC = 20$, $AC = 11$ және $AD =$ 36-ға тең болса, D нүктеден BC түзуге дейінгі қашықтықты тап.

8



Шешуі. Ізделінген қашықтық D нүктеден BC қабырғаға түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең болады. Осы кесіндіні түсіру үшін оның BC қабырғадағы табанын табу қажет болады. Ол үшін ABC үшбұрыштың A төбесінен BC қабырғасына AO биіктікті түсіреміз: $AO \perp BC$.

Онда үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, $BC \perp DO$ болады. Демек, DO ізделінген кесінді екен.

Енді DO кесіндінің ұзындығын табамыз. Ол үшін, алдымен ABC үшбұрыштың ауданын Герон формуласын пайдаланып табамыз:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+11+13}{2} = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

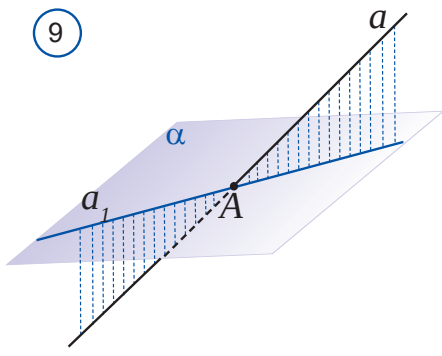
$$= \sqrt{22\cdot(22-20)\cdot(22-11)\cdot(22-13)} = 66$$

$$AO = \frac{2S}{a} = \frac{2\cdot 66}{20} = 6,6$$

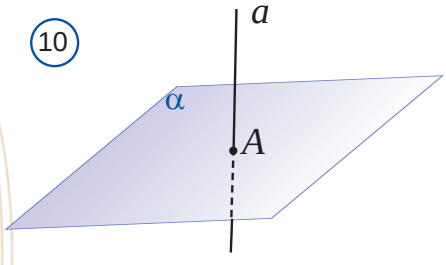
ADO тікбұрышты үшбұрышта, Пифагор теоремасына орай

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6$$

9



10



Айталық, α жазықтық пен оны қиып өтетін және осы жазықтыққа перпендикуляр болмаған a түзу берілген болсын *(9-сурет)*. a түзудің әрбір нүктесінен перпендикулярлар түсіреміз. Бұл перпендикулярлардың табандары a_1 түзуді құрайды.

a_1 түзу a түзудің α жазықтықтағы *проекциясы* деп аталады.

a түзу мен α жазықтықтың арасындағы бұрыш деп, түзу мен оның осы жазықтықтағы проекциясының арасындағы бұрышқа айтылады.

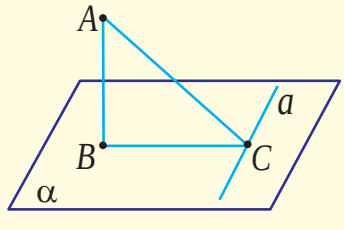
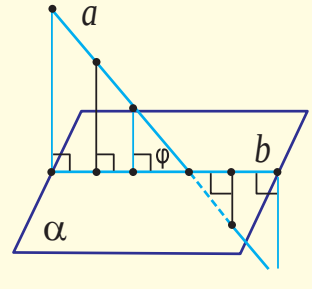
Егер түзу жазықтыққа перпендикуляр болса *(10-сурет)*, онымен жазықтықтың арасындағы бұрыш 90°-қа, егер параллель болса, осы түзумен жазықтықтың арасындағы бұрыш 0°-қа тең деп алынады.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Үш перпендикуляр туралы теореманы түсіндір. Неге ол осылай аталды?*
2. *Үш перпендикуляр туралы теоремаға кері теореманы айт және түсіндір.*
3. *Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш қалай анықталады?*
4. *Жазықтық пен оған перпендикуляр түзудің арасындағы бұрыш неше?*

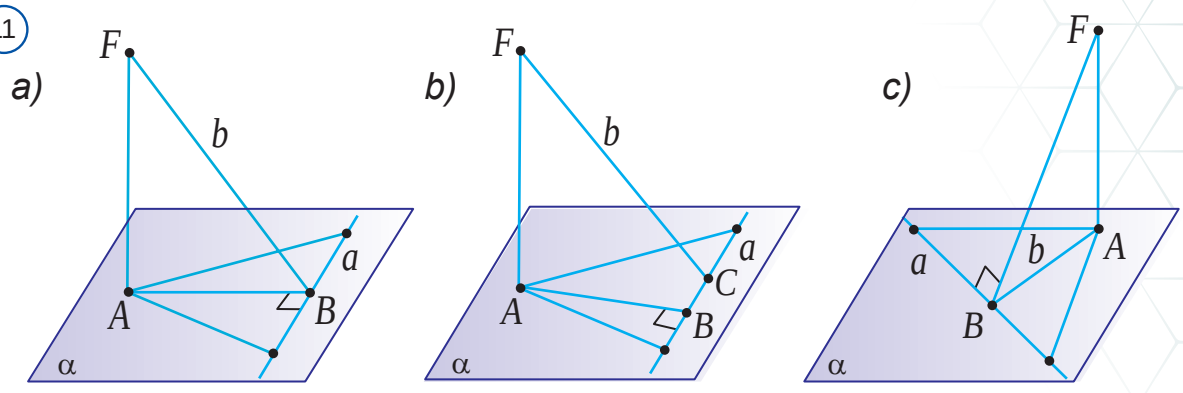
Практикалық жаттығулар мен қолданулар

19.1. Кестеде 19-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Үш перпендикуляр туралы теорема	Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш
 $AB \perp a$ Егер $a \perp BC$ болса, $a \perp AC$ болады. Егер $a \perp AC$ болса, $a \perp BC$ болады.	 b – a ның α жазықтықтағы проекциясы. φ – a және α жазықтық арасындағы бұрыш.

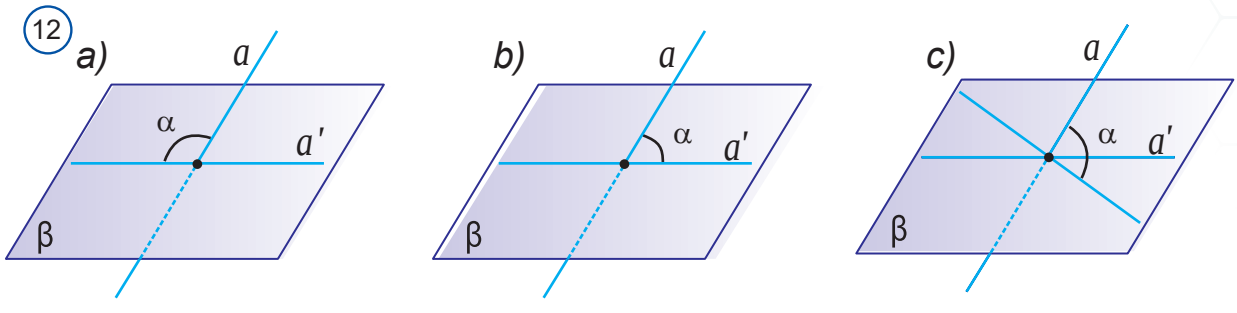
19.2. 11-суретте $AF \perp \alpha$. a және b түзулердің өзара орналасуын анықта.

11



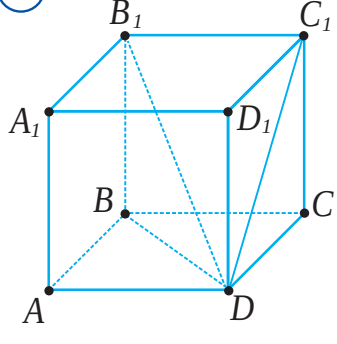
19.3. 12-суретте a' түзу – a түзудің β жазықтықтағы проекциясы. Суреттердің қайсысында a түзу мен β жазықтық арасындағы α бұрыш дұрыс көрсетілген?

12

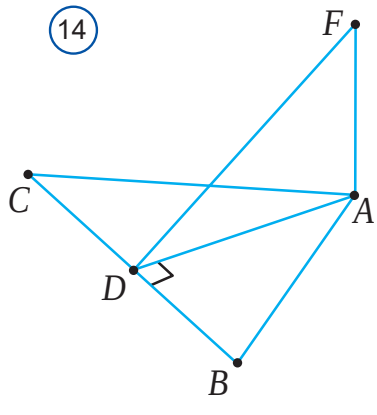


19.4. 13-суретте $ABCDA_1B_1D_1C_1$ куб берілген. a) DD_1C_1C жақтың DC_1 диагоналы мен $ABCD$ табан жазықтығы арасындағы; b) кубтың B_1D диагоналы мен $ABCD$ табан жазықтығы арасындағы; c) кубтың B_1D диагоналы мен DD_1C_1C жақ жазықтығы арасындағы бұрышты анықта.

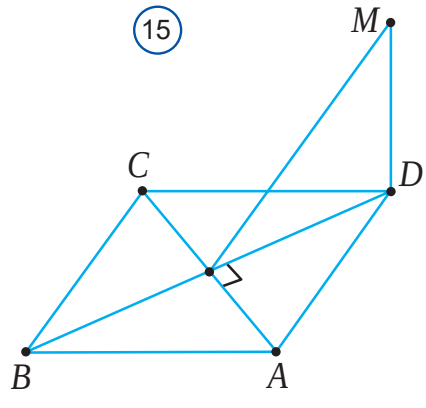
13



14



15



19.5. 14-,15-суреттерге байланысты есептер құрастыр және оларды шығар.

19.6. Төмендегі тұжырымдардың қайсы бірі дұрыс емес?

A) Егер екі түзу бір жазықтыққа перпендикуляр болса, бұл түзулер параллель.

B) Егер жазықтықта жатпайтын түзу жазықтықтағы бір түзуге параллель болса, жазықтық пен түзу өзара параллель.

C) Егер жазықтыққа түсірілген көлбеу жазықтықта жататын түзуге перпендикуляр болса, оның проекциясы да түзуге перпендикуляр болады.

D) Жазықтықта жататын екі түзуге перпендикуляр болған түзу жазықтыққа да перпендикуляр болады.
E) Екі түзудің әр біреуі үшінші түзуге параллель болса, бұл түзулер параллель.

19.7. Төмендегі тұжырымдардың қай бірі қате?
A) Егер жазықтық екі параллель жазықтықтардың біріне перпендикуляр болса, онда бұл жазықтық екінші жазықтыққа да перпендикуляр болады.
B) Жазықтықта жататын қиылысушы екі түзуге перпендикуляр болған түзу жазықтыққа да перпендикуляр болады.
C) Кеңістіктегі екі түзу үшінші түзуге перпендикуляр болса, олар өзара параллель.
D) Егер жазықтықтағы түзу жазықтыққа түсірілген көлбеуге перпендикуляр болса, бұл түзу көлбеудің проекциясына да перпендикуляр болады.
E) Екі параллель жазықтықты үшінші жазықтықпен қиғанда түзілген түзулер өзара параллель болады.

19.8. A нүкте қабырғасы a-ға тең болған теңқабырғалы үшбұрыштардың төбелерінен a қашықтықта жатады. A нүктеден үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

19.9. α жазықтықта жатпайтын S нүкте арқылы оған тең үш SA, SB, SC көлбеу мен SO перпендикуляр өткізілген. Перпендикулярдың O табаны ABC үшбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің центрі болатынын дәлелде.

19.10. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғалары 3 m-ге тең. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 2 m қашықтыққа дейінгі нүктеден үшбұрыштың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

19.11. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны мен биіктігі 4 m-ге тең. Берілген нүкте үшбұрыштың жазықтығынан 6 m қашықтықта және оның төбелерінен бірдей қашықтықта жатады. Осы қашықтықты тап.

19.12. A нүктеден квадраттың төбелеріне дейінгі қашықтық a-ға тең. Квадраттың қабырғасы b-ға тең болса, A нүктеден квадраттың жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.

19.13. Берілген нүктеден жазықтыққа жүргізілген берілген ұзындықтағы көлбеулердің табандарының геометриялық орнын тап.

19.14. Берілген нүктеден жазықтыққа ұзындықтары 10 cm және 17 cm болған екі көлбеу жүргізілген. Осы көлбеулер проекциясының айырмасы 9 cm-ге тең. Көлбеулердің проекцияларын тап.

19.15. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу жүргізілген. Егер: a) олардың бірі екіншісінен 26 cm ұзын, көлбеулердің проекциялары 12 cm және 40 cm болса; b) көлбеулердің ұзындықтары 1 : 2 қатынаста болып, олардың проекциялары 1 cm және 7 cm-ге тең болса, көлбеулердің ұзындықтарын тап.

19.16. α жазықтықтан d қашықтықта жатқан A нүктеден жазықтықпен 30° бұрышты құрайтын AB және AC көлбеулер жүргізілген. Олардың α жазықтыққа проекциялары өзара 120°-тық бұрышты құрайды. BC кесіндінің ұзындығын тап.

19.17. Егер тікбұрышты және теңбүйірлі үшбұрыштың катеттерінің бірі жазықтыққа тиісті, ал екіншісі онымен 45°-тық бұрышты құрайтын болса, гипотенуза бұл жазықтықпен 30°-тық бұрышты құрайтынын дәлелде.

19.18. ABC үшбұрыштың жазықтығына MA перпендикуляр түсірілген. $\angle MBC = 45°$. $\angle ACB = 90°$. $MA = MC$. $\angle AMB$-ны тап *(16-сурет)*.

19.19. a көлбеу α жазықтықпен 45°-тық бұрышты құрайды, жазықтықтың b түзуі көлбеу проекциясымен 45°-тық бұрышты құрайды. a және b түзулердің арасындағы бұрыштың 30°-қа тең екенін дәлелде.

19.20. P нүкте қабырғасы a-ға тең $ABCD$ квадраттың әрбір төбесінен a қашықтықта

жатады. Квадраттың жазықтығы мен AP түзудің арасындағы бұрышты тап.

19.21. Үшбұрышты пирамиданың барлық қырлары өзара тең. Пирамиданың қыры мен осы қырына тиісті болмаған жағының арасындағы бұрышты тап.

19.22. Тікбұрышты параллелепипедтің өлшемдері a, b және c-ға тең. Параллелепипед диагональдары мен оның жақтарының арасындағы қашықтықты тап.

19.23. $AB \perp \alpha$, $CD \perp \alpha$, $AB = CD$ екені берілген *(17-сурет)*. $ABCD$ төртбұрыштың түрін анықта.

19.24. $ABCDA_1B_1D_1C_1$ куб берілген. $AD \perp DCC_1$ екенін дәлелде.

19.25. S нүктеден α жазықтыққа перпендикуляр SO, SA және SB көлбеулер өткізілген. SA = 20 cm, AO = 16 cm, OB = 5 cm болса, SB-ны тап.

19.26. S нүкте $ABCD$ төртбұрыш жазықтығында жатпайды және оның төбелерінен тең қашықтықта орналасқан. S нүктеден ABC жазықтыққа дейінгі қашықтық 24 cm, AB = 12 cm, BC = 16 cm болса, S нүктеден төртбұрыштың төбелеріне дейінгі қашықтықтарды тап.

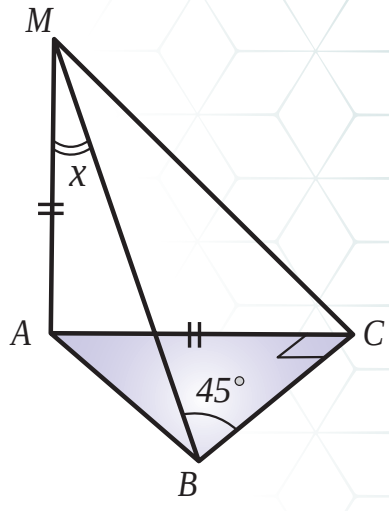
19.27. Нүктеден катеттері 15 cm және 20 cm болған тікбұрышты үшбұрыш жазықтығына, ұзындығы 16 cm болған перпендикуляр өткізілген. Перпендикулярдың табаны үшбұрыштың тікбұрышты төбесінде. Бұл нүктеден гипотенузаға дейінгі қашықтықты тап.

19.28. A нүктеден α жазықтыққа жазықтықпен 60° бұрыш жасайтын AB және AC көлбеулер өткізілген. Егер $BC = AC$ = 6 болса, AB-ны тап.

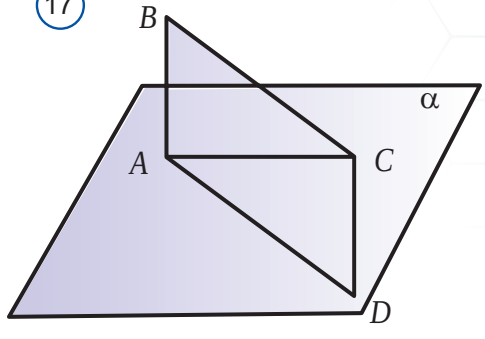
19.29. β жазықтыққа CD перпендикуляр *(18-сурет)*, AD және BD көлбеулер түсірілген. BC = 6, AD = 10, AC = 8. DBC-ны тап.

19.30. 19-суретте $ABCD$ тік төртбұрыш. MC – тік төртбұрыш жазықтығына перпендикуляр. $\angle BAM = 64^\circ$. $\angle BMA$-ны тап.

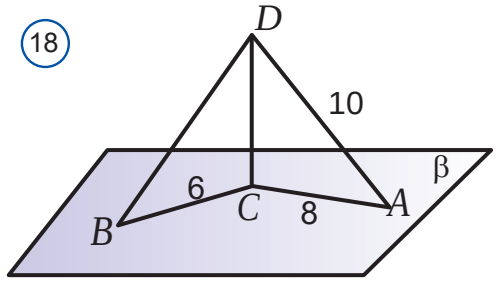
16



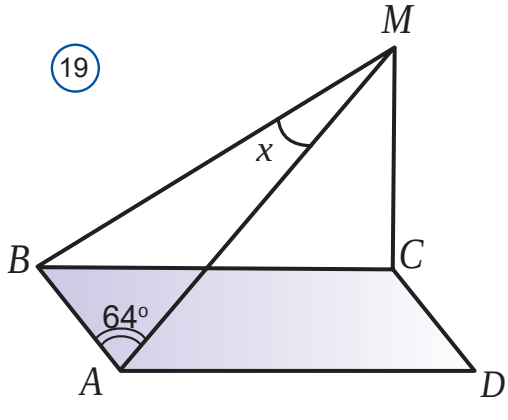
17



18

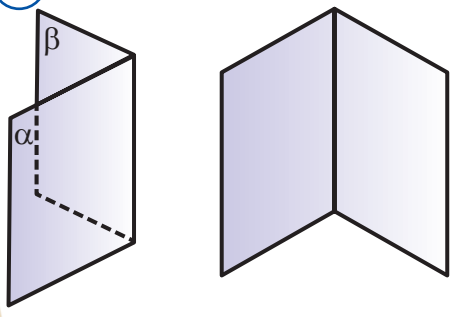


19



20 КЕҢІСТІКТЕГІ ЖАЗЫҚТЫҚТАРДЫҢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛЫҒЫ

1



Екі жартыжазықтық пен оларды шектеп тұратын ортақ түзуден құрылған геометриялық фигура *екіжақты бұрыш* деп аталады *(1-сурет)*. Жартыжазықтықтар екіжақты бұрыштың *жақтары*, ал оларды шектейтін түзу *қыры* деп аталды.

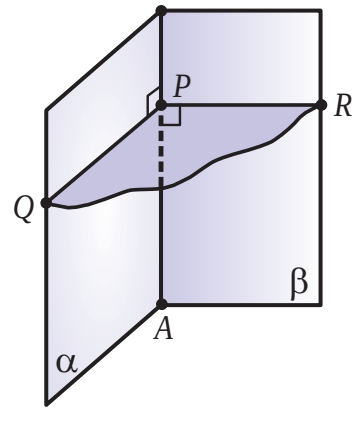
Екі жақты бұрыштарды қоршаған ортадағы төмендегі заттарға қарап, көз алдымызға келтіруімізге болады *(2-сурет)*: кітап, ноутбук, ашық есік, ғимараттың төбесі.

Екі жақты бұрыш қырының кез келген нүктесінен оның жақтарында жататын және осы қырына перпендикуляр болған сәулелерді шығарамыз. Осы сәулелер пайда еткен бұрыш екіжақты бұрыштың *сызықты бұрышы* деп аталады *(3-сурет)*.

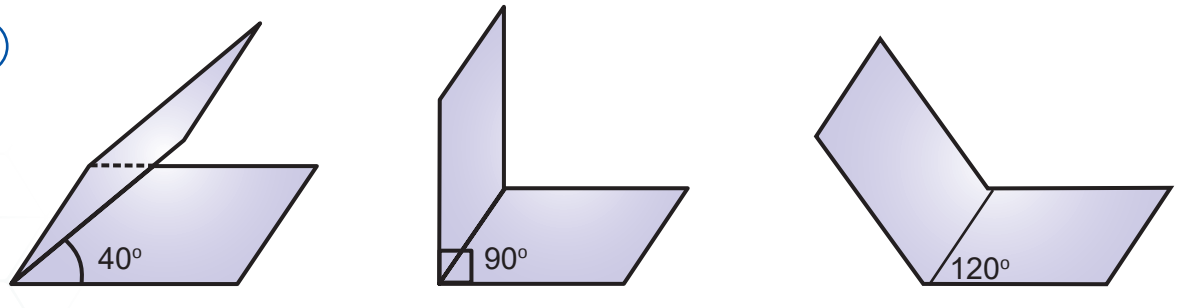
2



3



4



Анықтамадан көрініп тұрғанындай, екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы қырында таңдалған нүктемен анықталады және шексіз көп болады. Солай болса да, екіжақты бұрыштың сызықты бұрышының үлкендігі қырында таңдалған нүктеге байланысты емес, яғни олардың барлығы өзара тең болады.

Екіжақты бұрыштың үлкендігі оның сызықты бұрышының үлкендігімен анықталады. Сызықты бұрыштың сүйір, тік, доғал және жазық болуына қарап, екіжақты бұрыштар да, сәйкесінше, сүйір, тік, доғал және жазық екіжақты бұрышқа бөлінеді. 4-суретте түрлі екіжақты бұрыштар көрсетілген.

Екі қиылысатын жазықтық бүкіл кеңістікті ортақ қырға ие болған төрт екіжақты бұрышқа ажыратады *(5-сурет)*. Осы екіжақты бұрыштардың бірі α-ға тең болса, олардың тағы бірінің де мәні α-ға тең болады. Ал қалған екеуінің мәні 180° – α-ға болады

Осы екіжақты бұрыштардың ішінде 90°-тан кішісі де болады. Осы бұрыштың мәні қиылысатын *жазықтықтар арасындағы бұрыш* деп алынады.

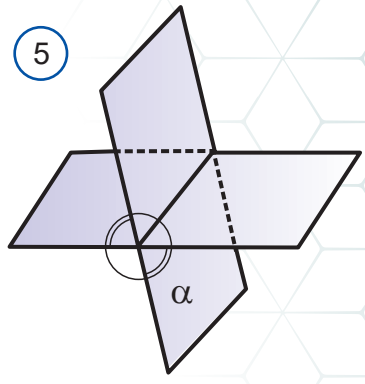
Егер екіжақты бұрыштардың бірі тік, яғни 90°-қа тең болса, қалған үшеуі де тік болады *(6-сурет)*.

Тікбұрыштың астында қиылыстатын жазықтықтар – *перпендикуляр жазықтықтар* деп аталады.

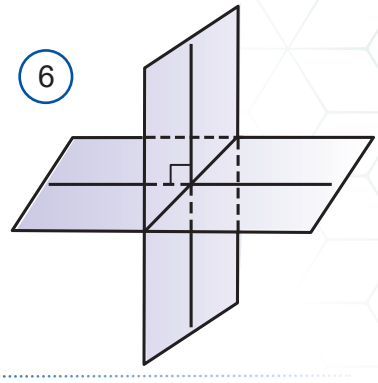
Перпендикуляр жазықтықтарға қоршаған ортадан мысал ретінде бөлменің едені мен қабырғаларын, ортақ қырға ие рубик кубының жақтары мен жердің беті және үй қабырғалары, сондай-ақ үйдің бір-біріне тұтасқан қабырғаларын келтіруге болады *(7-сурет)*.

α және β жазықтықтардың перпендикулярлығы түзулердегі сияқты "$\perp$" таңбасының көмегімен, $\alpha \perp \beta$ түрінде жазылады.

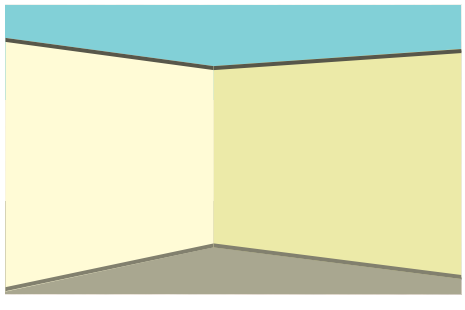
5

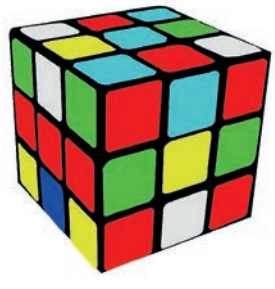


6



7



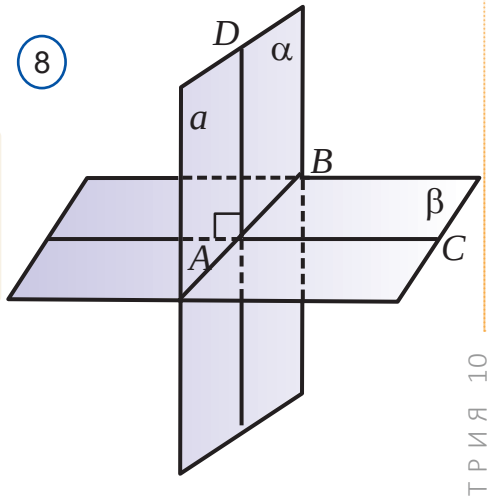




Енді перпендикуляр жазықтықтардың қасиеттеріне тоқталамыз. Төмендегі теорема жазықтықтардың *перпендикулярлық белгісі* деп аталады.

4.13-теорема. *Егер жазықтықтардың бірі екіншісіне перпендикуляр болған түзумен жүргізілсе, мұндай жазықтықтар өзара перпендикуляр болады.*

8

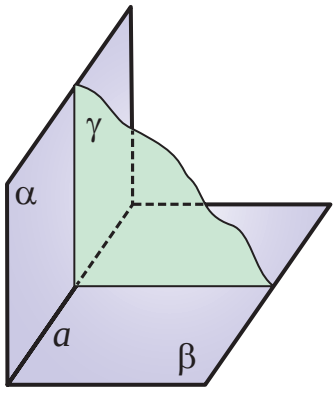


Дәлелдеу. Айталық, α және β жазықтықтар берілген болып, α жазықтық β жазықтыққа перпендикуляр болған a түзумен жүргізілсін (8-сурет). β жазықтық пен a түзудің қиылысу нүктесі A болсын. $a \perp \beta$ екенін дәлелдейміз.

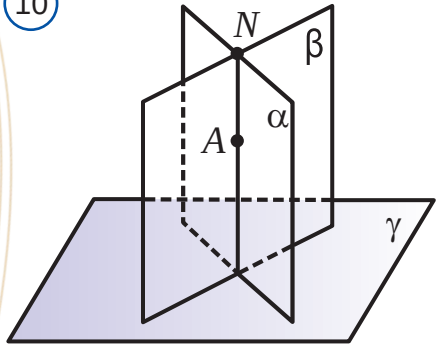
α және β жазықтықтар AB түзудің бойымен қиылысуда. Онда, $AB \perp a$ болады, өйткені шартқа орай $\beta \perp a$. β жазықтықта жатқан және AB түзуге перпендикуляр болған AC түзуді жүргіземіз. Нәтижеде, пайда болған $\angle DAC$ α, β екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы болады. Шартқа орай, $a \perp \beta$. Онда, $\angle DAC$ тікбұрыш. Демек, α⊥β.

Бұл теоремадан төмендегі нәтиже туындайды.

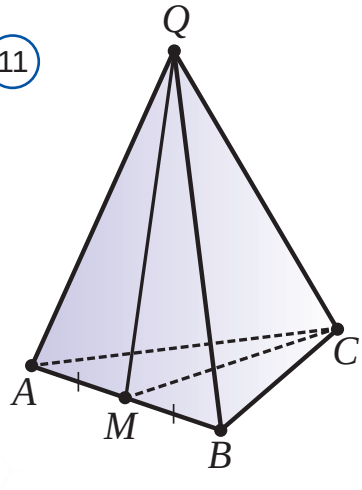
9



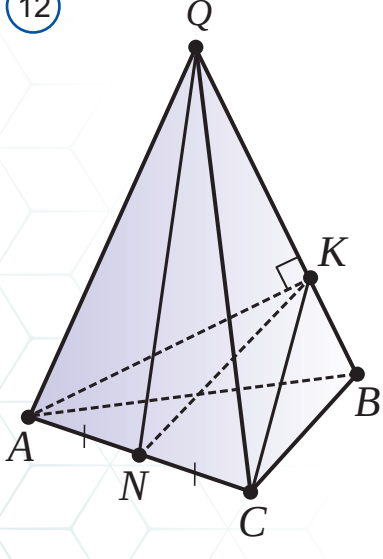
10



11



12



Нәтиже. *Егер жазықтық екі жазықтықтың қиылысу сызығына перпендикуляр болса, осы жазықтықтардың әрбіріне де перпендикуляр болады (9-сурет).*

4.11-теоремаға кері теорема да орынды болады. Оны дәлелсіз келтіреміз.

4.14-теорема. *Егер екі перпендикуляр жазықтықтардың бірінің қандай да бір нүктесі арқылы екіншісіне перпендикуляр түзу жүргізілсе, осы түзу бірінші жазықтықта жатады.*

Нәтиже. *Егер екі перпендикуляр жазықтық үшінші жазықтыққа перпендикуляр болса, олардың қиылысу сызығы да осы жазықтыққа перпендикуляр болады (10-сурет)*

1-есеп. M нүкте $QABC$ дұрыс пирамиданың табанындағы қырының центрі болса *(11-сурет)*, QCM жазықтық пирамида табанының жазықтығы ABC-ға перпендикуляр екенін дәлелде.

Дәлелдеу. AB кесінді теңбүйірлі AQB және ACB үшбұрыштардың табаны болғандықтан осы үшбұрыштар медианалары QM және CM-ға да перпендикуляр болады. Сонымен бірге, AB кесінді QCM жазықтыққа да перпендикуляр болады. Онда 4.12-теоремаға орай, ABC жазықтық QCM жазықтыққа перпендикуляр болады.

2-есеп. $QABC$ дұрыс пирамиданың төбесіндегі доғал AQB бұрышы α-ға тең. Оның бүйір қырындағы екіжақты бұрышын тап *(12-сурет)*.

Шешуі. Айталық, N нүкте AC қырдың центрі, ал AK болса, A нүктеден BQ қырға түсірілген перпендикуляр болсын. ABQ және CBQ үшбұрыштардың теңдігінен $CK \perp BQ$ болады. Сондықтан AKC бұрыш BQ екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы болады.

AKQ және ANQ тікбұрышты үшбұрыштардан $AK = sin\ \alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$ екенін табамыз.

Ал AKN тікбұрышты үшбұрыштардан:

$$sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2 \cdot cos(\frac{\alpha}{2})}$$ -ға иеміз.

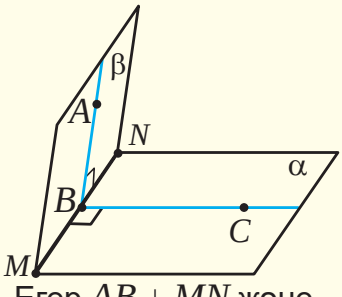
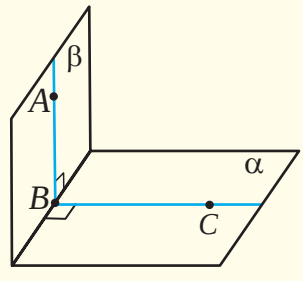
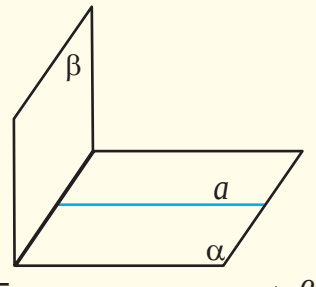
Бұдан, $\angle AKC = 2\ arcsin \frac{1}{2cos(\frac{\alpha}{2})}$.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Екі жақты бұрыш дегеніміз не?*
2. *Қандай бұрыш «жазықтықтардың арасындағы бұрыш» деп аталады?*
3. *Тікбұрыштың астында қиылысатын жазықтықтар қалай аталады?*
4. *Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісін айт.*
5. *Перпендикуляр жазықтықтардың қасиеттерін айт және түсіндір.*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

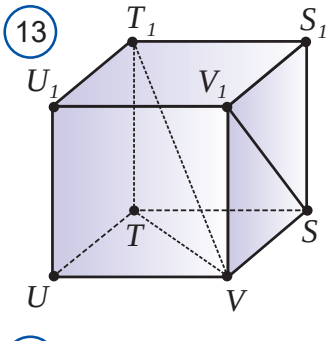
20.1. Кестеде 20-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Жазықтықтардың перпендикулярлығы		
Жазықтықтардың арасындағы бұрыш	**Жазықтықтардың перпендикулярлығы**	**Жазықтықтардың перпендикулярлық белгісі**
 Егер $AB \perp MN$ және $CB \perp MN$ болса, $\angle ABC$ – α және β жазықтықтар арасындағы бұрыш.	 Егер $\angle ABC = 90^\circ$ болса, α және β жазықтықтар *перпендикуляр* болады.	 Егер $a \subset \alpha$ және $a \perp \beta$ болса, $\alpha \perp \beta$ болады.

20.2. а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің; b) $ABCA_1B_1C_1$ тік призманың перпендикуляр жақтарын анықта және екі жақты тікбұрыштарды айт.

20.3. $STUVS_1T_1U_1V_1$ кубта *(13-сурет)*: а) TVT_1 бұрыш; b) T_1ST бұрыш T_1SVT екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы бола ма? V_1UTS екіжақты бұрыштың мәндерін тап.

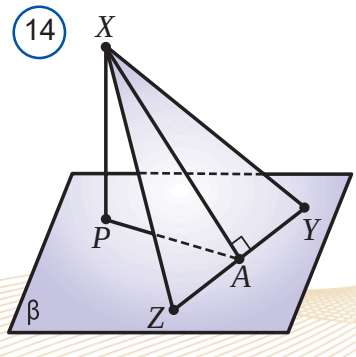
13



20.4. Екі екіжақты бұрыштың біреуден жағы ортақ, қалған жақтары біргелікте жазықтықты құрайды. Осы екіжақты бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең екенін дәлелде.

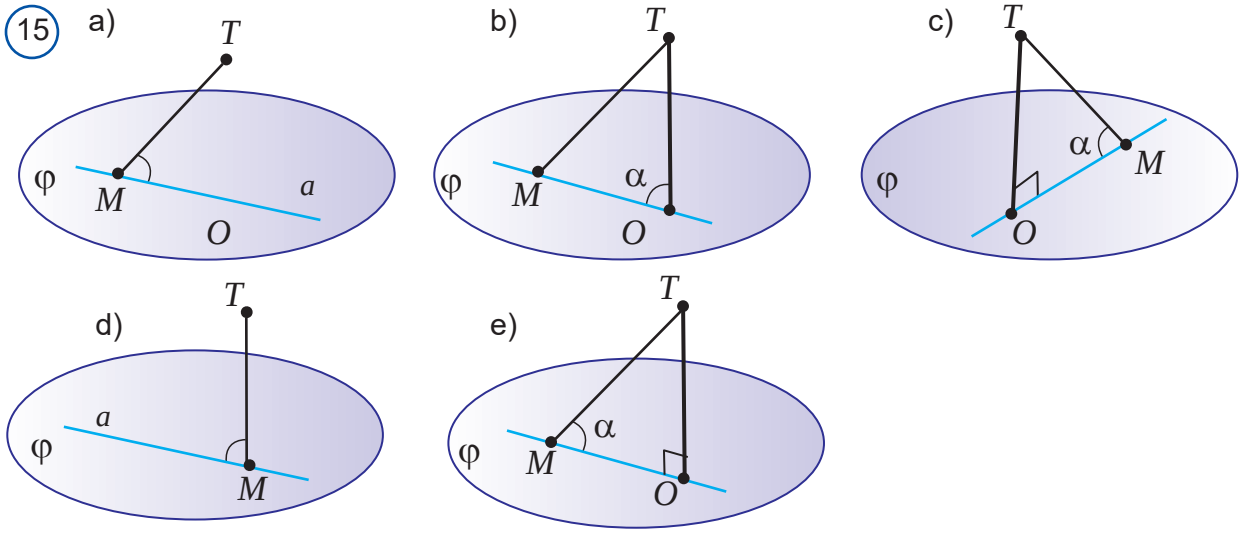
20.5. XYZ үшбұрыштың YZ қабырғасы β жазықтықта жатады. Оның X төбесінен XA биіктік және β жазықтыққа XP перпендикуляр жүргізілген *(14-сурет)*. XAP бұрыш $XYZP$ екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы екенін дәлелде.

14

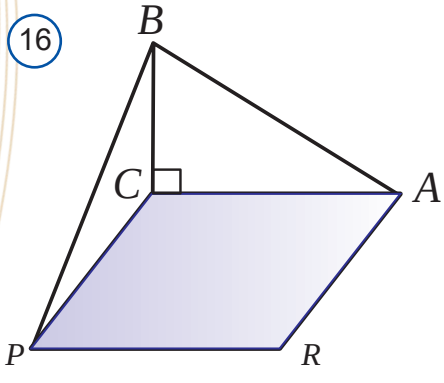


20.6. Үшбұрышты $ABCD$ пирамиданың CD қыры ABC жазықтыққа перпендикуляр. $AB = BC = AC = 6$ және $BD = 3\sqrt{7}$ болса, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ екіжақты бұрыштарды тап.

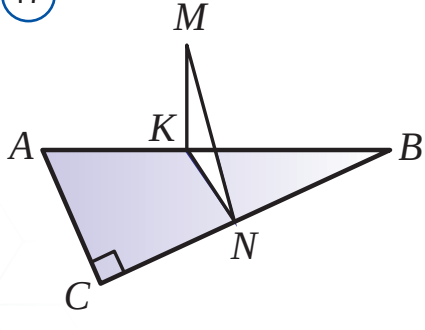
15



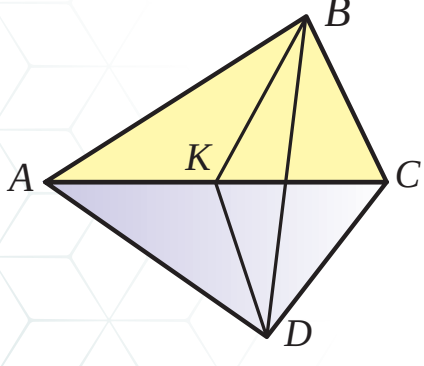
16



17



18



20.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дұрыс параллелепипедтің AA_1C_1C және BB_1D_1D диагональ қималары өзара перпендикуляр екенін дәлелде.

20.8. T нүктеден φ жазықтыққа көлбеу жүргізілген *(15-сурет).* Суреттердің қайсыларында жазықтық пен көлбеудің арасындағы α бұрыш дұрыс берілген?

20.9. Үшбұрышты $ABCD$ пирамидада DAB, DAC, ACB бұрыштар тік, $AC = CB = 5$ және $DB = 5\sqrt{5}$ болса, $ABCD$ екіжақты бұрышты тап.

20.10. Екі жақты бұрыштың сызықты бұрышының жазықтығы оның әрбір жағына перпендикуляр екенін дәлеледе.

20.11. Екі жақты бұрыштың бір жағында жатқан екі нүкте оның қырынан, сәйкесінше, 51 cm және 34 cm ұзақтықта жатыр. Осы нүктелердің біріншісі басқа жағынан 15 cm ұзақтықта жатқандығы белгілі болса, осы жатқан екінші нүктесіне дейінгі болған қашықтықты тап.

20.12. ABC тікбұрышты үшбұрыш ($\angle C$=90°) және $ACPR$ квадрат жазықтықтар өзара перпендикуляр *(16-сурет)*. Квадраттың қабырғасы 6 cm, үшбұрыштың гипотенузасы 10 cm. BP кесіндінің ұзындығын тап.

20.13. MK кесінді тікбұрышты ABC үшбұрыш ($\angle C = 90°$) жазықтығына перпендикуляр *(17-сурет)*. $KN||AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ cm, $MK = 8$ cm болса, MN кесіндінің ұзындығын тап.

20.14. ABC және ADC теңбүйірлі үшбұрыштар жазықтықтағы перпендикуляр *(18-сурет)*. AC – олардың ортақ табаны. BK кесінді ABC үшбұрыштың медианасы. $BK = 8$ cm, $DK = 15$ cm болса, BD кесіндінің ұзындығын тап.

20.15. Дұрыс төртбұрышты пирамида табанының қабырғасы арқылы оған қарама-қарсы болған бүйір жаққа перпендикуляр жазықтық өткізілген. Табанының қабырғасы $a = 30$ cm, пирамиданың биіктігі 1 = 20 cm. Пайда болған қиманың ауданын анықта.

“GeoGebra”ны қолдану

3D калькулятормен нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтықты анықтау

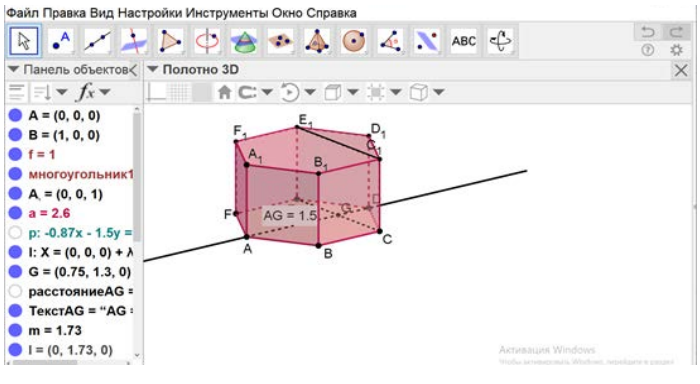
Барлық қырлары 1-ге тең болған алтыбұрышты дұрыс призманың A төбесінен CC_1E_1 жазықтыққа перпендикуляр түсірілген. Призманың A төбесінен сол жазықтыққа дейінгі қашықтықты тап

Салу:

- “GeoGebra”да жаңа терезе аш.
- “GeoGebra” интерфейсін “**Настройки**” – “**3D Графика**” көрінісіне өткіз.

Қашықтықты анықтау басқыштары

1		**Ввод** (Кіргізу)	$A=(0,0,0)$ нүкте салынады..
2		**Ввод** (Кіргізу)	B=(1,0,0) нүкте салынады.
3		**Правильный многоугольник** (Дұрыс көпбұрыш)	Қабырғасы 1-ге тең дұрыс алтыбұрыш салынады.
4		**Призма** (Призма)	Қыры 1-ге тең алтыбұрышты дұрыс тік призма жасалады.
5		**Переименовать** (Қайта атау)	Тиісті нүктелер сәйкес түрде A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 деп қайта аталады.
6		**Плоскость через 3 точки** (3 нүкте арқылы жазықтық)	CC_1E_1 жазықтық салынады
7		**Перпендикулярная прямая** (Перпендикуляр түзу)	Призманың A төбесінен CC_1E_1 жазықтығына перпендикуляр түсіріледі.
8		**Пересечение** (Қиылысу)	A нүкте мен CC_1E_1 жазықтықтың қиылысу нүктесі – G нүктемен белгіленеді.
9		**Расстояние или длина** (Қашықтық немесе ұзындық)	Призманың A төбесі мен G нүктесі арасындағы қашықтық анықталады: AG = 1,5.



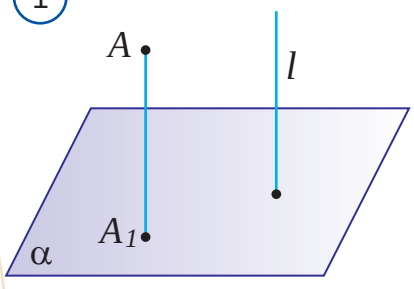
Өз бетіңше орындауға арналған тапсырмалар

1. Барлық қырлары 1-ге те болған алтыбұрышты дұрыс призманың A төбесінен CC_1D_1 жазықтыққа перпендикуляр ұзындықты тап.

2. Барлық қырлары 1-ге те болған үшбұрышты дұрыс призманың A_1 төбесінен AB_1C_1 жазықтыққа перпендикуляр ұзындықты тап.

21 КЕҢІСТІКТЕГІ ОРТОГОНАЛЬ ПРОЕКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫ ТЕХНИКАДА ПАЙДАЛАНУ

1



Ежелгі итальян ғалымы Галелео Галилей сөзімен айтқанда, “геометрия интеллектуалдық қабілетімізді шыңдаудың ең мықты қаруы болып, дұрыс пікір жүргізу және пайымдау мүмкіндігін береді”.

Егер проекция бағыты l проекциялау жазықтығы α-ға перпендикуляр болса, мұндай параллель проекциялау *ортогональ проекциялау* деп аталды.

1-суретте $l \perp \alpha$ болып, A нүктенің a жазықтыққа ортогональ проекциясы – A_1 нүкте бейнеленген.

Ортогональ проекциялауда пайда болған фигура берілген фигураның *ортогональ проекциясы* немесе қысқаша *проекциясы* деп айтылады.

2-суретте түрлі кеңістіктегі фигуралардың α жазықтыққа ортогональ проекциялары көрсетілген.

Ортогональ проекциялау параллель проекциялаудың жеке жағдайы болғандықтан параллель проекциялаудың барлық қасиеттері ортогональ проекциялауда да орынды болады. Ортогональ проекциялауда:

a) нүкте нүктеге, қима қимаға, түзу түзуге өтеді;

b) параллель түзулердің проекциялар параллель болады немесе бетпе-бет түседі;

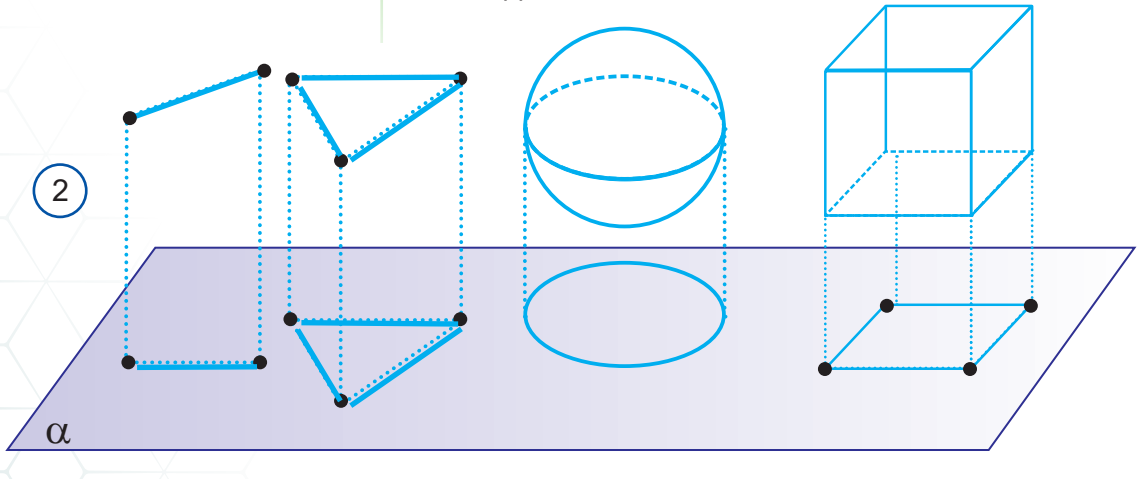
c) фигуралардың түзу кесінділерінің проекциясы да қималардан құралады;

d) фигураның параллель қималарының проекциясы да параллель қималардан құралған болады;

e) бір түзуде немесе параллель түзулерде жатқан қималардың ұзындықтарының қатынасы олардың проекцияларының ұзындықтарының қатынасына тең болады, қималардың ұзындықтарының қатынасы сақталады.

Әрине бұл қасиеттер проекциялау бағытына параллель емес қима мен түзулер үшін орынды болады.

2



Төменде тек ортогональ проекцияға тиісті болған маңызды қасиетті дәлелдейміз.

4.15-теорема. *Көпбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы көпбұрыш ауданы және оның жазықтығы мен проекция жазықтығының арасындағы бұрыш косинусының көбейтіндісіне тең.*

Дәлелдеу. 1. Алдымен қасиетті үшбұрыш пен оның қандай да бір қабырғасынан өтетін жазықтықтағы проекциясы үшін қарастырамыз. Айталық, ABC үшбұрыштың α жазықтықтағы проекциясы AB_1C үшбұрыш болсын *(3-сурет)*.

ABC үшбұрыштың BK биіктігін түсіреміз. Үш перпендикуляр туралы теоремаға орай, B_1K кесінді KBB_1 үшбұрыштың биіктігі болады.

BKB_1 бұрыш – үшбұрыштың жазықтығы мен проекция жазықтығының арасындағы φ бұрыштан құралады. BKB_1 үшбұрышта: $KB_1 = KB \cdot cos\varphi$.

Онда, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$, $S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2}$

$AC \cdot KB_1 = \frac{1}{2} AC \cdot KB \cdot cos\varphi = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$.

Нәтижеде, $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ -ті пайда етеміз.

2. α жазықтықтың орнына оған параллель болған β жазықтық алынғанда да теорема орынды болады *(4-сурет)*. Бұл параллель проекциялау қасиетін пайдаланып дәлелденеді.

3. Енді ортақ көпбұрыш жағдайына келетін болса *(5-сурет)*. Онда теорема, көпбұрышты диагональдарының көмегімен үшбұрыштарға бөлу арқылы жоғарыда келтірілген жеке жағдайға келтіріліп дәлелденеді.

Бұл проекциялар қайсы бағытта проекцияланғанына қарап, *вертикаль (тік), горизонталь* және *фронталь проекциялар* деп те аталады.

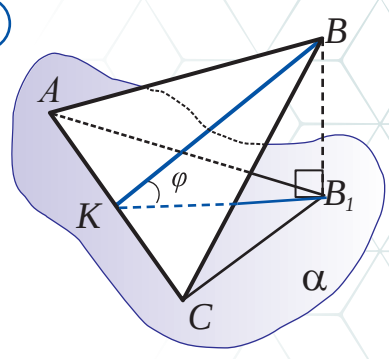
Ортолгональ проекцияны техникалық сызба сызуда түрлі детальдарды жобалауда пайдаланады. Түрлі машина детальдарының сызбалары бір, екі немесе үш өзара перпендикуляр проекциялар жазықтықтарына ортогональ проекциялау жолымен пайда етіледі *(6-сурет)*.

Есеп. ABC үшбұрыштың ортогональ проекциясының қабырғалары 13 cm, 14 cm және 15 cm болған ACB_1 үшбұрыштан құралған *(3-сурет)*. Үшбұрыш жазықтығы проекция жазықтығымен 60°-тық бұрыш жасайды. ABC үшбұрыштың ауданын тап.

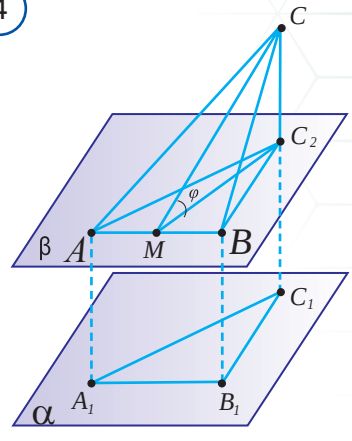
Шешуі. 4.15-теоремаға сәйкес, үшбұрыш проекциясының ауданы $S_{\triangle AB_1C} = S_{\triangle ABC} \cdot cos\varphi$ формуласымен табылатыны белгілі.

Мұнда φ – үшбұрыш жазықтығы мен проекция жазықтығы арасындағы бұрыш.

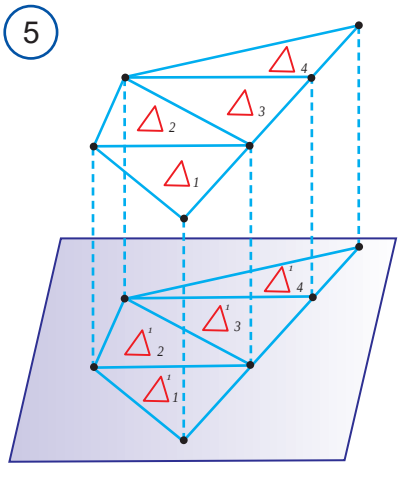
3



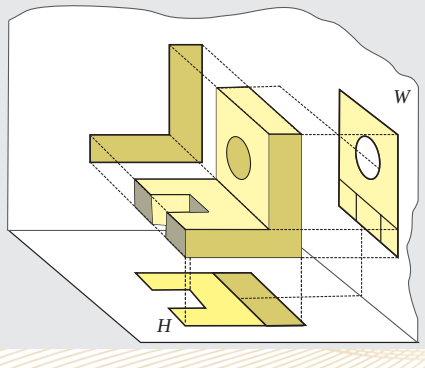
4



5



6



ACB_1 үшбұрыш ауданын Герон формуласын пайдаланып есептейміз:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$$

$$S_{\triangle AB_1C} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)} = 84$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{\triangle AB_1C}}{\cos\varphi} = \frac{54}{\cos 60^\circ} = 84 : \frac{1}{2} = 168$$

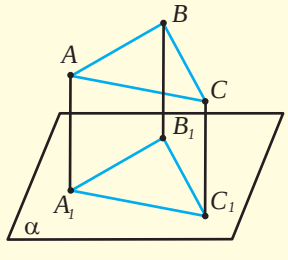
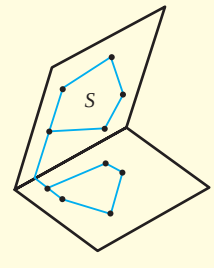
Жауабы: 168 $см^2$.

Тақырыпқа қатысты сұрақтар мен жаттығулар

1. *Ортогональ проекциялау деп нені айтады?*
2. *Ортогональ проекциялаудың қасиеттерін айт.*
3. *Көпбұрыштың жазықтықтағы ортогональ проекциясының ауданы қалай табылады?*
4. *Ортогональ проекциялауды техникада қалай пайдалануға болады?*

Практикалық жаттығулар мен қолданулар

21.1. Кестеде 21-тақырыптың негізгі тірек мәліметтері келтірілген. Оларды тыңғылықты үйреніп шық және түсіндіріп бер.

Кеңістіктегі ортогональ проекция	Көпбұрыш проекциясының ауданы
 Ортогональ проекцияда: $l \perp \alpha$. l – проекциялау бағыты; α – проекциялау жазықтығы.	 $S_1 = S \cdot \cos\varphi$ S – көпбұрыштың ауданы; S_1 – көпбұрыштың ортогональ проекциясының ауданы; φ – көпбұрыш және проекциялау жазықтықтары арасындағы бұрыш.

21.2. Трапецияның ортогональ проекциясы: a) квадрат; b) кесінді; c) тік төртбұрыш; d) параллелограмм; e) трапеция болуы мүмкін бе?

21.3. 7-суретке қарап ортогональ проекциясы тік төртбұрыш болған геометриялық фигураны айт.

21.4. A_1B_1 кесінді AB кесіндінің α жазықтыққа ортогональ проекциясы *(8-сурет)*. Егер AB = 20 $см$, AC = 10 $см$, A_1B_1 = 12 $см$ болса, B_1C_1 кесіндінің ұзындығын тап.

21.5. Ұзындығы 5 $см$ болған AB кесіндінің ω жазықтыққа ортогональ проекциясының ұзындығы 3 $см$ болған AC кесіндіден құралған *(9-сурет)*. AB кесіндінің ω жазықтыққа көлбеу бұрышының косинусын тап.

21.6. Қабырғасы a-ға тең дұрыс үшбұрыш берілген. Үшбұрыш жазықтығымен: a) 30°; b) 45°; c) 60°-тық бұрыш жасайтын жазықтыққа оның ортогональ проекциясының ауданын тап.

21.7. Ортақ AB қабырғаға ие ABC және ABD теңбүйірлі үшбұрыштар түрлі жазықтықтарда жатады.Егер a) AB = 24 $см$, AC = 13 $см$, AD = 27 $см$, CD = 35 $см$; b) AB = 32 $см$, AC = 65 $см$, AD = 20 $см$, CD = 63 $см$ болса, ABC үшбұрыштың ABD үшбұрышқа ортогональ проекциясының ауданын тап. Сонымен қатар, ABD үшбұрыштың ABC үшбұрышқа ортогональ проекциясының ауданын да тап.

21.8. Егер AB түзуден C нүктеге дейінгі қашықтық *(10-сурет)* C нүктеден ABD жазықтыққа дейінгі қашықтықтан екі есе үлкен болса, ABC және ABD жазықтықтардың арасындағы бұрышты тап.

21.9. ABC үшбұрыштың ауданы 18 $см^2$-ге тең *(11-сурет)*. $KC \perp (ABC)$. Егер ABK және ABC үшбұрыштар жазықтықтарының арасындағы бұрыш: a) α = 30°; b) α = 45°; c) α = 60° болса, ABK үшбұрыштың ауданын тап.

21.10. ABC және ABD үшбұрыштардың жазықтықтарының арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Егер AB= $4\sqrt{3}$ болса, CD қашықтықты тап.

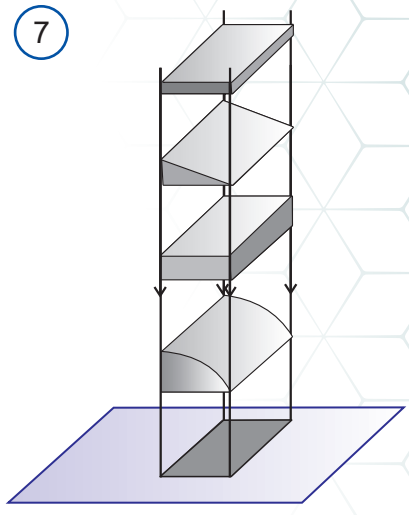
21.11. Тік төртбұрыштың ауданы 72-ге тең. Оның жазықтықтағы ортогональ проекциясы квадраттан құралған. Жазықтық пен тік төртбұрыш жатқан жазықтық арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Квадраттың периметрін тап.

21.12. Ауданы 48 $см^2$-ге тең болған үшбұрыштардың ортогональ проекциясының қабырғалары 14 $см$, 16 $см$ және 6 $см$ үшбұрыштардан құралған. Осы үшбұрыштың жазықтығы мен оның проекциясының арасындағы бұрышты есепте.

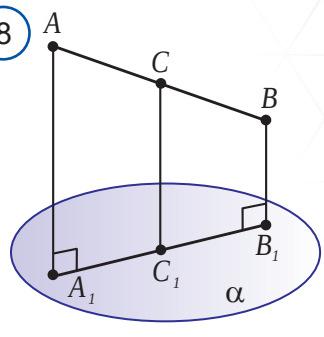
21.13. Ауданы 12 $см^2$-ге тең болған үшбұрыштардың ортогональ проекциясының қабырғалары 13 $см$, 14 $см$ және 15 $см$ болған үшбұрыштардан құралған. Осы үшбұрыштың жазықтығы мен оның проекциясының арасындағы бұрышты есепте.

21.14. Табаны 8 $см$ және бүйір қабырғасы 12 $см$ теңбүйірлі үшбұрыштың ортогональ проекциясының қабырғалары 8 $см$, 6 $см$ және 6 $см$ болған үшбұрыштан құралған. Бұл үшбұрыш жазықтығы және оның проекциясы арасындағы бұрышты тап.

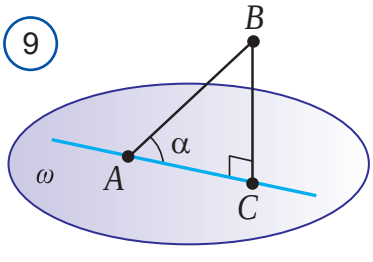
7



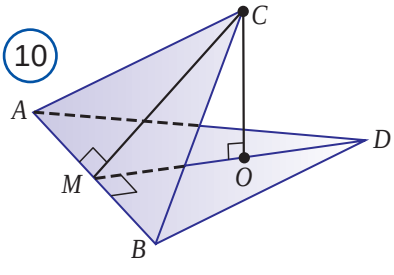
8



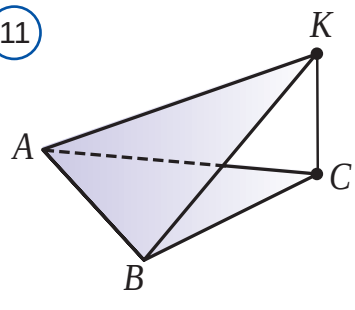
9



10



11



22 ТАРАУДЫ ҚАЙТАЛАУҒА АРНАЛҒАН ПРАКТИКАЛЫҚ ЖАТТЫҒУЛАР

22.1. Төмендегі тұжырымдардың қай бірі қате?

A) Егер бір жазықтықта жатқан екі түзу екінші жазықтықта жатқан екі түзуге сәйкес түрде параллель болса, бұл жазықтықтар параллель.

B) Егер екі түзу үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель.

C) Жазықтықта жатқан түзу көлбеудің проекциясына перпендикуляр болса, көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

D) Түзу жазықтықта жатқан екі қиылысушы түзуге перпендикуляр болса, бұл түзу жазықтыққа да перпендикуляр болады.

E) Көлбеу және оның жазықтықтағы проекциясы арасындағы бұрыштардың ең кішісі көлбеу және жазықтықтар арасындағы бұрыш деп аталады.

22.2. Төмендегі тұжырымдардың қай бірі қате?

A) Егер кеңістікте екі түзу үшінші түзуге параллель болса, олар өзара параллель.

B) Жазықтықта көлбеудің табанынан оның проекциясына перпендикуляр етіп өткізілген түзу көлбеудің өзіне де перпендикуляр болады.

C) Кеңістіктегі үш нүкте арқылы тек бір жазықтық өткізуге болады.

D) Түзу немесе параллель түзулер қималарының қатынасы параллель проекциялауда өзгермейді (проекцияланатын қималар проекциялау бағытына параллель емес).

E) Жазықтықтан сырттай жатқан түзу осы жазықтықтағы бір түзуге параллель болса, бұл түзу мен жазықтық өзара параллель.

22.3. $ABCD$ тік төртбұрыш жазықтығына оның B төбесі арқылы BM перпендикуляр түсірілген. a) AD түзу AB және BM түзулер жатқан жазықтыққа; b) CD түзу BC және BM түзулер жатқан жазықтыққа перпендикуляр болатынын дәлелде.

22.4. A және B нүктелерден α жазықтыққа перпендикуляр және оны сәйкес түрде C және D нүктелерде қиып өтетін түзу өткізілген. Егер AC = 3 m, BD = 2 m және CD = 2,4 m болса, сондай-ақ AB түзу α жазықтықпен қиылыспаса, A және B нүктелер арасындағы қашықтықты тап.

22.5. Тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшеміне сәйкес оның диагоналының ұзындығын тап: a) 1, 2, 2; b) 2, 3, 6; c) 6, 6, 7.

22.6. Кубтың қыры a-ға тең. Кубтың төбесінен оның басқа екі төбесін тұтастыратын диагоналы арасындағы қашықтықты тап.

22.7. Тікбұрышты параллелепипед табанының қабырғалары 7 cm және 24 cm, биіктігі 8 cm. Параллелепипедтің диагональ кесіндісінің ауданын тап.

22.8. Тікбұрышты параллелепипедтің үш өлшеміне сәйкес оның толық бетінің ауданын тап: 10 cm, 22 cm, 16 cm.

22.9. Тікбұрышты параллелепипедтің биіктігі h, табанының ауданы Q, диагональ кесіндісінің ауданы M болса, оның бүйір бетінің ауданын тап.

22.10. Тікбұрышты параллелепипедтің бір төбесінде кездесетін жақтардың диагональдары: a, b, c-ға тең *(1-сурет)*. Параллелепипедтің үш өлшемінің ұзындықтарын тап.

22.11. Перпендикуляр мен көлбеу арасындағы бұрыш 60°-қа тең. Перпендикулярдың ұзындығы 20-ға тең. Көлбеудің ұзындығын тап.

22.12. Жазықтыққа түсірілген көлбеу мен перпендикуляр арасындағы бұрыш 60°, көлбеудің ұзындығы $20\sqrt{3}$. Перпендикулярдың ұзындығын тап.

22.13. Жазықтыққа өткізілген перпендикуляр мен көлбеу арасындағы бұрыш 30°, перпендикулярдың ұзындығы 10-ға тең. Көлбеудің ұзындығын тап.

22.14. Нүктеден жазықтыққа екі көлбеу өткізілген. Егер көлбеулер 1 : 2-ге тең қатынаста болып, олардың проекциялары 1 мен 7-ге тең болса, көлбеулердің ұзындығын тап.

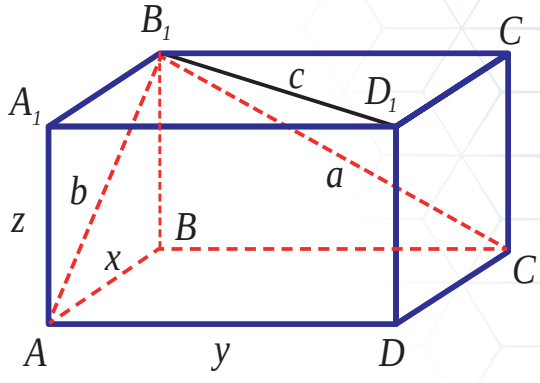
22.15. ABC үшбұрыштың тікбұрышты B төбесінен үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр түзу b өткізілген. $AB = 3$, $BC = 4$. b және AC түзулер арасындағы қашықтықты тап.

22.16. Ұзындықтары 10 cm және 15 cm болған екі қиманың төбелері өзара параллель жазықтықтарда жатады. Бірінші қиманың жазықтықтағы проекциясы $\sqrt{19}\,cm$ болса, екінші қиманың проекциясы неше cm болады?

22.17. Өлшемдері 12,5 m және 7,2 m болған үйдің төбесі төрт қиялай түскен жақтармен 2-суретте көрсетілгеніндей етіп жабылған. Әр бір жақ төбе жазықтығымен 40°-тық бұрыш жасайды. a) Әрбір қия жақтың ауданын тап; b) Төбенің жалпы қия жақтарының ауданын тап. c) Төбені қаңылтырмен жапқанда оның 6 пайызы ысырап болатыны белгілі болса, төбені жабуға қанша қаңылтыр керек болады?

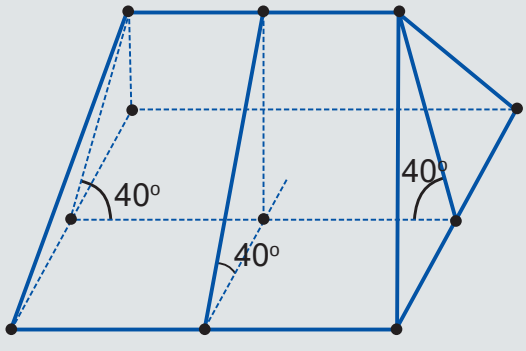
22.18. AB және CD – өзара 60°-тық бұрыш шығарып қиылысатын екі жазықтықта жатқан параллель түзулер. A және D нүктелер жазықтықтардың қиылысу сызығынан 8 cm және 6,3 cm алыста. AB және CD арасындағы қашықтықты тап.

1



2

a)



b)



Іс жүзіндік компетенцияларды қалыптастыруға қатысты есептер

1. Екі көрші бөлменің қабырғалары тұтасқан сызықтың еденге перпендикулярлығын қандай өлшеулердің көмегімен тексеруге болады?

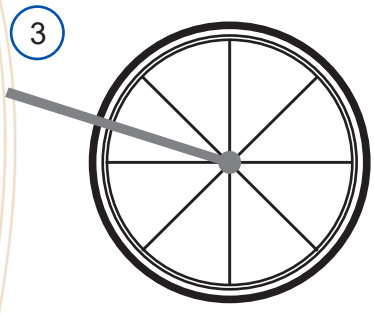
2. Ұзындық өлшейтін құрылғы – рулетканың көмегімен бағанның тік екенін қалай тесеруге болады?

3. Дөңгелек осі жазықтықтың ол дөңгеленетін жазықтыққа перпендикулярлығын қалай тексеруге болады?

4. Неліктен қыста үйдің төбесінен төменге қарай өсіп тұрған мұздарды, олардың қалыңдығын ескермей, өзара параллель деуге болады?

5. Оқушы практикалық жұмыс орындауда. Орнатылған бірнеше бағандардың жермен салыстырғанда тік екенін тексеру үшін олардың тек біреуін ғана тексерді. Қалған бағандардың тік екенін төмендегідей тексерді: барлық бағандардың биіктігін, олардың төменгі табандары мен жоғарғы төбелерінің арасындағы қашықтықты өлшеп шешім қабылдады. Ол осы жұмысты дұрыс орындады ма?

3

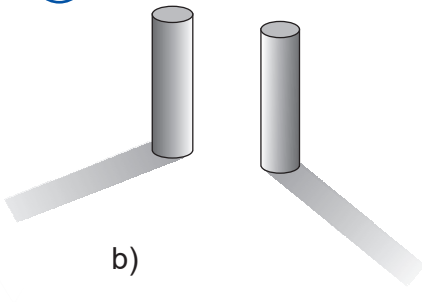


6. Не үшін есік ол ашық па немесе жабық болуынан тыс, әрдайым еденмен салыстырмалы перпендикуляр болады?

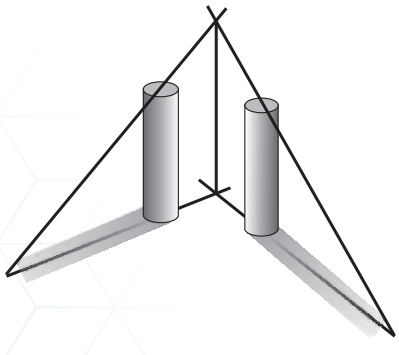
7. Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығына айқын мысал ретінде дөңгелектің сымы жатқан жазықтықтың дөңгелек осімен салыстырғандағы орналасуын келтіруге болады *(3-сурет)*. Ось дөңгелектің әрбір сымына перпендикуляр. Қозғалыс барысында дөңгелектің сымдары әрқайсысы бір нүктеге қиылысатын кесінділерден құралған шеңбердің жазықтығын пайда етеді. Егер ось горизонталь орналасқан болса, дөңгелек қандай жазықтықта айналады? Неге?

4

a)



b)



Нұсқау: дөңгелек осіне перпендикуляр жазықтыққа перпендикуляр болады.

8. Биіктікке секіру жаттығуы орындалуда. Тосын ағашты белгілі бір биіктікке орнату үшін қыры 25 $см$ болған куб және өлшемдері 25 $см$ х 25 $см$ х 50 $см$ болған тікбұрышты параллелепипед пайдаланылуда. 1) 125 $см$; 2) 150 $см$; 3) 175 $см$ биіктікке секіру жаттығуларын қалай ұйымдастыруға болады?

9. 4-суретте екі вертикаль баған мен олардың көлеңкесі бейнеленген. Осы деректерді пайдаланып, жарықтық көзі (шам) орналасқан нүктені және оның горизонталь жазықтыққа проекциясын тап және төмендегі сұрақтарға жауап бер. 1) Бағандардың вертикальдығы маңызды ма? 2) Көлеңке түсірген жазықтықтың горизонтальдығы маңызды ма? 3) Суретте берілген деректердің барлығы да маңызды ма?

Шешуі. 4-суретте тиісті салулар келтірілген. Жарықтық көзінің орнын табуға бағандардың бағыты маңызға ие емес, бірақ олардың вертикаль екені маңызды. Егер бағандар вертикаль және көлеңке горизонталь

жазықтыққа түсетін болса, есепті шешу үшін суреттегі бір бағанның көлеңкесін және екінші бағаннан түсетін көлеңкенің бағытын білу жеткілікті *(4b-сурет)*.

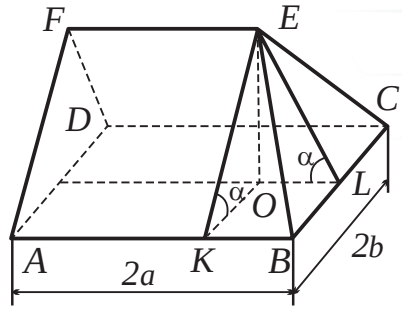
10. Қалыңдығы 5 m, ауданы 4 m^2 болған, квадрат пішіндегі болат платформа төрт төбесінен шынжыр сыммен горизонталь ілінген. Әрбір шынжыр сымның ұзындығы 2 m. Шынжыр сымның платформамен салыстырғандағы көлбеу бұрышын тап. Биіктігі 0,9 m, табанының диаметрі 0,6 m болған цилиндр пішіндегі бакты осы платформаға орналастыруға бола ма?

Жауабы: 45°, бакты орналастыруға болады.

11. Су төрт жағынан көлбей түскен үй шатыры табанына ортогональ проекцияланған. Үйдің шатыры қырларының проекциясы тік төртбұрыш пішіндегі үй шатыры табаны бұрышының биссектрисасы болатынын дәлелде.

12. Табаны $ABCD$ тік төртбұрыштан құралған үйге жаңбыр суы төрт қабырғасынан көлбей түскен шатыр орнатылуы керек *(5-сурет)*. $AB = 2a$ m, $BC = 2b$ m. Шатырдың барлық жақтары табан жазықтығымен α бұрышты құрайды. Осы шатырды жабу үшін қанша қаңылтыр қажет болады? Мұнда шатыр беті ауданының k пайызы мөлшеріндегі қаңылтыр шығынға кететінін есепке алу қажет.

5



Жауабы: $4ab\ (1 + 0{,}01k\ ) / \cos\alpha$.

13. Желсіз ауада жаңбыр қиялап жауып жатыр. Тік төртбұрыш пішіндегі фанера бөлігінің көмегімен жаңбырдың горизонталь жазықтыққа қатысты қиялығын қалай анықтауға болады? Тиісті сызбаны сыз.

Нұсқау: Фанера бөлігін солай орналастыру қажет, оның жазықтығы жаңбыр тамшыларының қозғалыс траекториясы және олардың горизонталь жазықтыққа проекциясы анықталған жазықтыққа шамамен перпендикуляр болсын. Сонда горизонталь жазықтыққа жаңбыр түспейтін тік төртбұрыш пайда болады. Сосын тиісті кесінділердің ұзындықтары өлшенеді және олардың арасындағы бұрыштың тангенсі есептелінеді.

14. Ауданы S_1-ге, ұзындығы n-ға тең болған балалар кереуетінің бағанын екі бірдей тік төртбұрыш пішіндегі перделермен жабу қажет. Әрбір перденің ауданы S_2-ге, ал ұзындығы кереуеттің ұзындығына тең. Әр екі перденің жоғарғы шеті кереуеттің үстіне параллель орнатылған және кереуеттің ұзындығына тең сымтемірге бекітілген. Сымтемірдің кереуеттен қандай биіктікте орнатылғанын тап. Есепті төмендегі санды шарттармен шеш: n = 1 m 20 cm, S_1-= 6000 cm^2, S_2=7800 cm^2. Тиісті сызбаны сыз.

Нұсқау: $\frac{\sqrt{4S_2^2 - S_1^2}}{2n}$. ***Жауабы***: 0,5 m.

ӨЗІҢДІ ТЕКСЕР

Тест

1. Қайсы тұжырым дұрыс?
A) Егер екі түзудің бірі үшінші түзуге перпендикуляр болса, екінші түзу де сол түзуге перпендикуляр болады.
B) Егер екі түзу үшінші түзуге перпендикуляр болса, олар параллель.
C) Егер екі түзу жазықтыққа перпендикуляр болса, олар параллель.

2. m түзу α жазықтықта жатқан a және b түзулерге перпендикуляр, бірақ m түзу α жазықтыққа перпендикуляр емес. a және b түзулер туралы не айтуға болады?
A) параллель
B) қиылысады
C) айқас

3. α жазықтық $ABCD$ ромбтың A төбесінен өтеді және AC диагоналына перпендикуляр. Ол жағдайда BD диагональ ...
A) α жазықтыққа перпендикуляр
B) α жазықтыққа параллель
C) α жазықтықта жатады

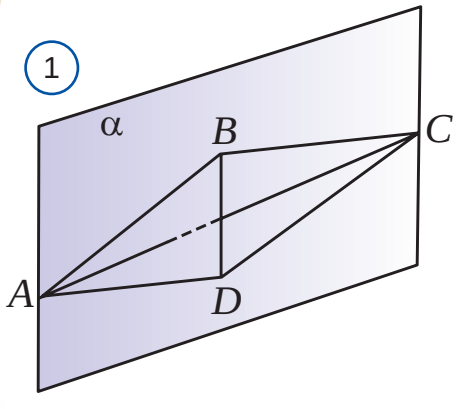
4. a // α, $b \perp$ α. Бұл жағдайда a және b түзулер қандай болуы мүмкін емес?
A) қиылысушы
B) перпендикуляр
C) параллель

5. $ABCD$ параллелограмм, $BD \perp \alpha$, $AC \perp \alpha$ *(1-сурет)*. Бұл жағдайда $ABCD$ не бола алмайды?
A) тік төртбұрыш
B) квадрат
C) ромб

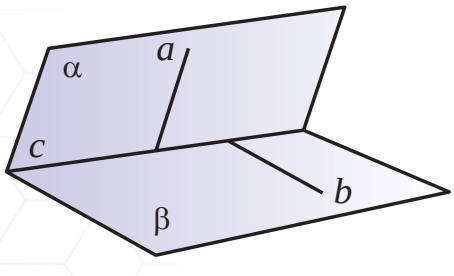
6. Түзу дөңгелек жазықтығына перпендикуляр болады, егер ол ...
A) екі радиусқа перпендикуляр болса
B) екі диаметрге перпендикуляр болса
C) екі ватарға перпендикуляр болса.

7. $\alpha \cap b = c$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$ *(2-сурет)*. Қайсы шарт орындалғанда, (ab) – α және β жазықтықтар арасындағы екіжақты бұрыштың сызықты бұрышы болады?
A) $b \perp \alpha$ болса

1



2



B) $a \perp c$ болса
C) $a \perp c$, $b \perp c$ болса

8. Қайсы тұжырым дұрыс?
A) Екі жақты бұрыштың қыры оның сызықты бұрышының жазықтығына перпендикуляр болуы мүмкін емес.
B) Бір жазықтыққа перпендикуляр болған екі жазықтықтың параллель болуы мүмкін емес.
C) Бір түзуге перпендикуляр болған екі жазықтық параллель бола алмайды.

9. $ABC \perp ABD$ *(3-сурет)*. D нүктеден ABC жазықтыққа түсірілген перпендикулярдың табаны ...
A) ABC үшбұрышан сыртта жатады
B) AB қабырғасында жатады
C) ABC үшбұрыш ішінде жатады

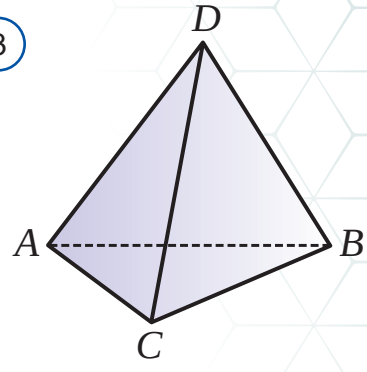
10. Қайсы тұжырым дұрыс?
1) Егер екі жазықтықтың бірі екінші жазықтыққа перпендикуляр болған түзуден өтсе, мұндай жазықтықтар перпендикуляр болады.
2) Егер жазықтықтар перпендикуляр болса, онда олардың қиылысу сызығы сол жазықтықтардың бірінде жатқан кез келген түзуге перпендикуляр болады.
3) Берілген екі жазықтықтың қиылысу сызығына перпендикуляр болған жазықтық сол жазықтықтардың әрбіріне перпендикуляр.

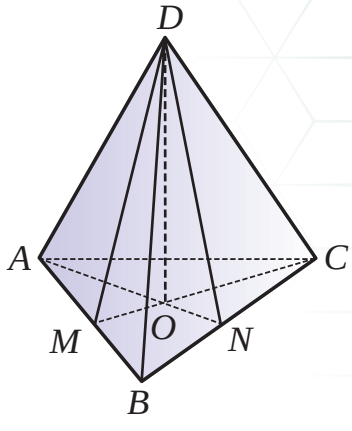
11. Параллелепипедтің екіжақты бұрыштарының саны нешеу?
A) 18
B) 12
C) 24

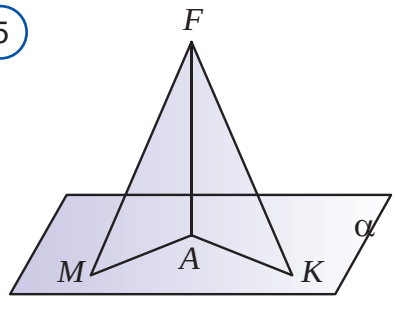
12. ABC үшбұрышта AN және cm – биіктіктер *(4-сурет)*. $DO \perp ABC$. $ABCD$ екіжақты бұрыштың градустық өлшемі қайсы градус өлшеміне тең?
A) ABD
B) AND
C) ACD

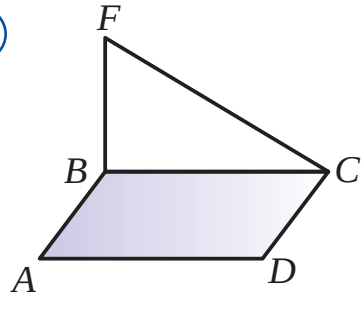
13. $AF \perp \alpha$ (5-*сурет*). Қайсысы теңсіздік орынды емес?
A) $FM > AF$
B) $FA > FK$
C) $AK < FK$

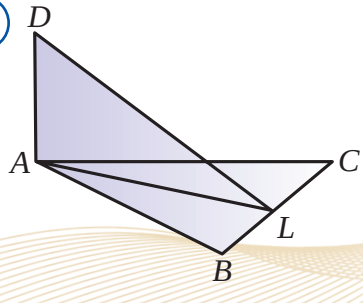
14. $BF \perp ABC$ *(6-сурет)*. $ABCD$ қандай болса, CD және CF түзулер перпендикуляр болады?

3


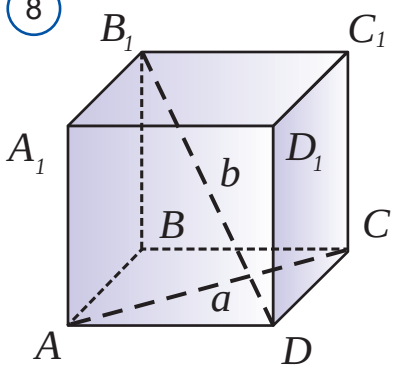
4


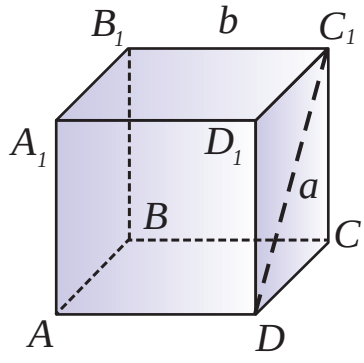
5


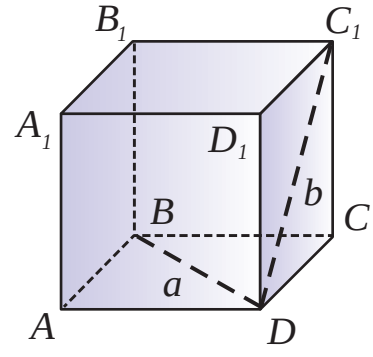
6


7


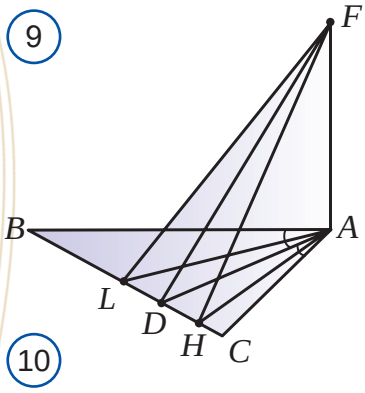
8



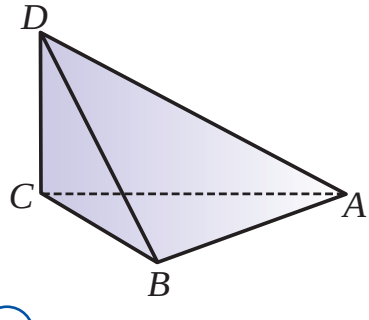




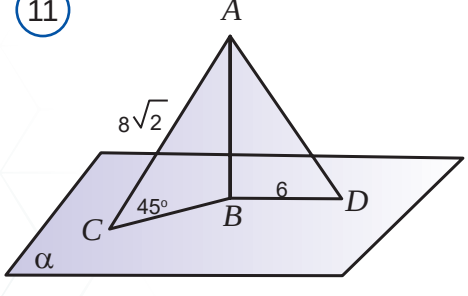
9



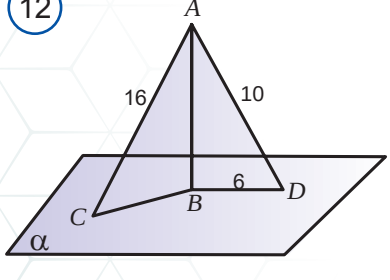
10



11



12



A) төртбұрыш
B) ромб
C) квадрат

15. $AD \perp ABC$ *(7-сурет)*. LA не болса, DL және BC түзулер перпендикуляр болады?
A) биссектриса
B) медиана
C) биіктік

16. M нүкте ABC үшбұрыштың төбелерінен теңдей қашықтықта орналасқан. M нүктенің ABC жазықтықтағы проекциясы қайсы қималардың қиылысу нүктесінен құралған болады?
A) үшбұрыш биіктіктерінің
B) үшбұрыш биссектрисаларының
C) үшбұрыш қабырғаларына түсірілген центр перпендикулярлардың

17. ABC үшбұрышта AL – медиана, AD – биссектриса, AH – биіктік *(8-сурет)*. $AF \perp ABC$. F нүктеден BC түзуге дейінгі қашықтық қайсы қиманың ұзындығына тең болады?
A) FM
B) FD
C) FH

18. 9-суретте $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб берілген. a және b түзулер қай суретте перпендикуляр емес?

19. $ABCD$ тетраедрде *(10-сурет)* $\angle BCD = \angle ACD = 90^o$. CD-ға перпендикуляр болған барлық қырларын көрсет.
A) AB, CB, CA B) AB, BD, AD
C) CB, CA D) AB

20. α жазықтыққа A нүктеден AB перпендикуляр, AC және AD көлбеулер түсірілген *(11-сурет)*

$\angle ACB = 45^o$, $AC = 8\sqrt{2}$, $BD = 6$. AD-ны тап.

A) 2 13;
B) 10;
C) 14
D) 4

21. α жазықтыққа AB перпендикуляр *(12-сурет)*, AD және AC көлбеулер түсірілген. $BD = 6$, $AD = 10$, $AC = 16$. $\angle ACB$-ны тап.

A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 90°

Есептер

1. KS кесінді ABC үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр, KB кесінді AB-ға перпендикуляр.

1) ABC тікбұрышты үшбұрыш екенін дәлелде.

2) KAC және ABC жазықтықтардың перпендикуляр екенін дәлелде.

3) Егер $AC = 14$, $BC = 6$ және $\angle KBC = 45^o$ болса, KB кесіндінің ұзындығын тап.

2. A нүктеден α жазықтыққа жазықтықпен 60° бұрыш жасайтын AB және AC көлбеулер өткізілген. Егер $BC = AC = 6$ болса, AB-ны тап.

3. KA кесінді ABC жазықтығына перпендикуляр. M нүкте – BC кесіндінің центрі. KM түзу BC түзуге перпендикуляр және $AB = BC$.

1) ABC теңбүйірлі үшбұрыш екенін дәлелде.

2) KBC және KAM жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелде.

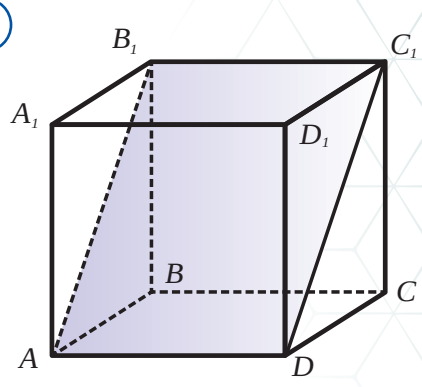
4. Егер $BK = 8$, $KA = 39$, $BC = 6$ болса, ABC үшбұрыштың ауданын тап.

5. S нүкте тікбұрышты үшбұрыш төбелерінен 3 cm алыста орналасқан. $AB = 9$ болса, $SABC$ екіжақты бұрышты тап.

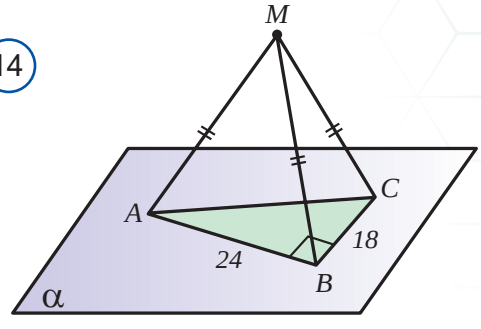
6. O нүкте 60°-қа тең ABC бұрыш биссектрисасында жатыр. DO кесінді ABC жазықтығына перпендикуляр және $AB = AC$.

1) D нүкте A және C нүктелерден тең қашықтықта жататынын дәлелде.

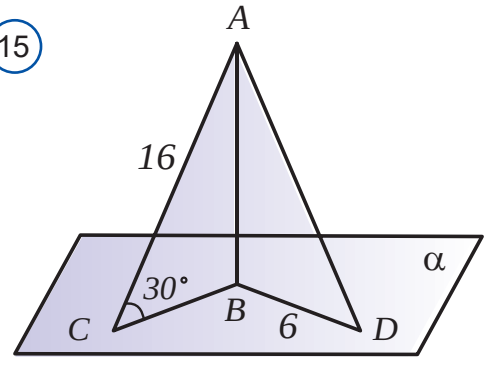
13



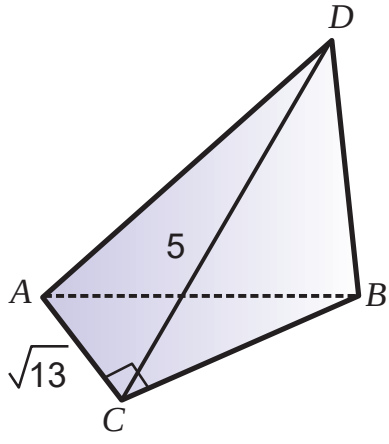
14



15



16



Геометрия ежелгі замандардан бері адамдарға дүниені тануға көмектеседі. Мысалы, Жердің шеңберін ежелгі грек ғалымы Эратосфен адамдар Жердің шартәрізді пішінге ие екенін мойындауынан бірнеше ғасыр бұрын анық есептеп шыққан. Ол үшін Эратосфен геометриялық қағидаларды пайдаланған. Заманалық өлшемдер көрсетуіне қарағанда, ол дерлік қателеспеген – ескі және жаңа өлшемдер арасындағы айырмашылық маңызсыз болып шыққан. Ол Күн Сиене (Африкадағы қала) төбесінде тұрғанында, 800 km ұзақтықта орналасқан Александриядағыға қарағанда көлденеңнен 70°-қа көлбеу болатынын анықтады. Эратосфен Күн Жердің центрінен 7° бұрыш астында көрінеді және сондықтан Жер шарының шеңбері
360 : 7 x 800 = 41140 km,
деген қорытындыға келген.

2) DAC және DOB жазықтықтарының перпендикуляр екенін дәлелде.

3) AC = 12 және DO = 8 болса, DB-ны тап.

7. 13-суретте куб берілген. AD = 42. AB_1C_1D жазықтық және A_1D_1 түзу арасындағы қашықтықты тап.

8. ABC және ADC теңбүйірлі үшбұрыштар ортақ AC табанға ие. $BASD$ екіжақты бұрыш тік. Егер $\angle ACD = 45°$ және $\angle CAB = 60°$ болса, $DCBA$ екіжақты бұрышты тап.

9. 14-суретте $\angle ABC = 90°$, $MA = MB = MC$. ABC үшбұрыштың жазықтығы және M нүкте арасындағы қашықтық 8-ге тең. MA кесіндінің ұзындығын тап.

10. SA түзу $ABCD$ төртбұрыштың төбесінен өтеді және оның AB және AD қабырғаларына перпендикуляр. SAD және ABC жазықтықтардың перпендикуляр екенін дәлелде.

11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры 4-ке тең. AB және CC_1 түзулер арасындағы қашықтықты тап.

12. Ортақ табанды ABD және ABC теңбүйірлі үшбұрыштардың жазықтықтары өзара перпендикуляр. Егер $AD = \sqrt{31}$ cm, AB = 6 cm, $\angle ACB = 60°$ болса, CD-ны тап.

13. Перпендикуляр α және β жазықтықтар l түзу бойымен қиылысады. α және β жазықтықтарда жататын OA және OB кесінділер сәйкес түрде l түзуге перпендикуляр және олардың ортақ төбесі O нүкте l түзуде жатады. Егер OA = 20 cm, $OB : AB$ = 12 : 13 болса, AB-ны тап.

14. ABC теңбүйірлі үшбұрыштың B төбесі арқылы AC табанға параллель жазықтық өткізілді. Үшбұрыштың ауданы 48 cm^2-ге тең. Егер табан AC = 12 cm және ол жазықтықтан 5 cm алыста орналасқан болса, үшбұрыштың бүйір қабырғаларының осы жазықтыққа қия түскен бұрыштарын тап.

15. $AB \perp a$, $\angle ACB = 30°$, AC = 16 cm, BD = 6 cm *(15-сурет)*. AD-ны тап.

16. ABC үшбұрышта $\angle ACB = 90°$, AB = 5 cm, $AC = \sqrt{13}$ cm *(16-сурет)*. $BD \perp ABC$, $\angle(CD, ABC) = 30°$. BD перпендикулярдың ұзындықтарын тап.



V ТАРАУ

ҚАЙТАЛАУ

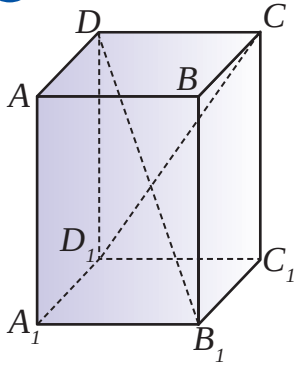
Осы тарауды үйрену нәтижесінде сен 10-сыныпта қалыптастырылған білім мен дағдыларыңды пысықтап аласың.

- жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеулер;
- түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш;
- параллель түзулер мен жазықтықтар;
- жазықтыққа параллель түзу;
- параллель жазықтықтар;
- перпендикуляр жазықтықтар.

23 ҚАЙТАЛАУҒА ҚАТЫСТЫ ЕСЕПТЕР

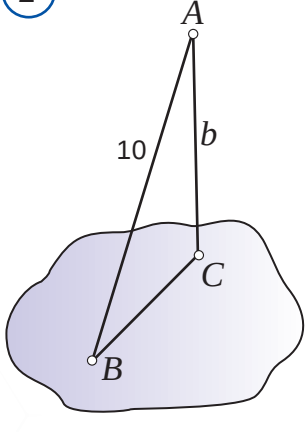
1. Жазықтыққа перпендикуляр мен көлбеулер

1



1. 1-суретте тікбұрышты параллелепипед бейнеленген. 1) DB_1 және D_1C түзулер қиылысады ма? BB_1 және D_1C түзулер ше? 2) AO және B_1C_1 түзулер арқылы жазықтық өткізуге бола ма? DC және DB_1 арқылы ше? BC және AA_1 арқылы ше?
2. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары 3 cm, 4 cm және 7 cm. Бір төбесінен шыққан үш қырдың төбелері арқылы өткізілген қиманың ауданын тап.
3. Дұрыс призманың табанының қабырғасы a-ға тең болған үшбұрыштан құралған. Призманың биіктігі b-ға тең. Төменгі табаны қабырғаларының бірі және жоғарғы табанының осы қабырғаға қарама-қарсы жатқан төбесі арқылы жазықтық өткіз. Пайда болған қиманың ауданын есепте.
4. Түзуде алынған нүктеден осы түзуге перпендикуляр жазықтық өткіз.
5. Түзу жатпайтын алынған нүктеден осы түзуге перпендикуляр жазықтық өткіз.

2

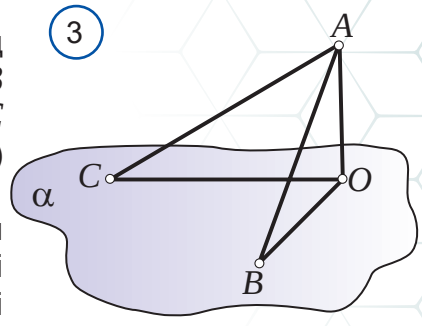


6. Жазықтықтан b cm қашықтықта тұрған A нүктеден, осы жазықтыққа ұзындығы 10 cm болған AB көлбеу өткізілген. Оның осы жазықтыққа түсірілген BC проекциясын тап *(2-сурет)*.
7. Жазықтықтан тыс жатқан нүктеден берілген қашықтықта тұрған нүктелердің берілген жазықтықтағы геометриялық орнын тап.
8. Дөңгелек центрінен оның жазықтығына перпендикуляр өткізілген. Егер перпендикулярдың ұзындығы a-ға, дөңгелектің ауданы Q-ға тең болса, перпендикулярдың жоғарғы төбесінен шеңбердегі нүктеге дейінгі қашықтықты анықта.
9. Берілген екі нүктеден теңдей қашықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын тап.
10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тікбұрышты параллелепипедтің бүйір қыры $AA_1 = 56$ cm, табанының қабырғалары: $AB = 33$ cm және $AO = 40$ cm. AD және B_1C_1 қырларынан өткізілген қиманың ауданын анықта.
11. O нүкте – қабырғасы a болған квадраттың центрі, OA – квадрат жазықтығына перпендикуляр түзу болып, ұзындығы b-ға тең. A нүктеден квадраттың төбелеріне дейінгі қашықтықты тап.
12. α жазықтықтан $d = 4$ қашықтықта тұрған M нүктеден осы жазықтыққа MA, MB және MC көлбеулер өткізілген. Бұл көлбеулер мен a жазықтыққа перпендикуляр болған MO түзу арасындағы бұрыштар: 30°, 45°, 60°. MA, MB және

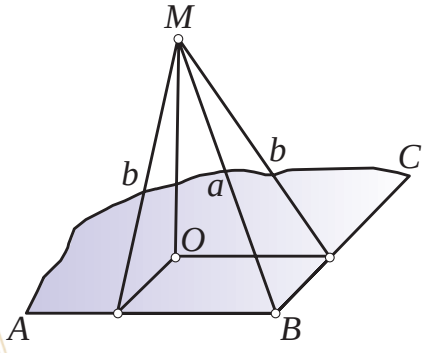
MC көлбеулердің ұзындықтарын анықта.

13. α жазықтыққа қандай да бір M нүктеден өзара тең үш көлбеу MA, MB және MC өткізілген. $MA = MB$ және O нүкте – M нүктенің проекциясы. A, B және C нүктелердің (көлбеулердің α жазықтықтағы табандары) центрі O нүкте болған шеңберде жататынын көрсет.
14. Жазықтыққа кеңістіктің бір нүктесінен ұзындығы 20 cm және 15 cm болған екі көлбеу өткізілген. Бірінші көлбеудің жазықтықтағы проекциясы 16 cm. Екінші көлбеудің проекциясын тап.
15. Жазықтыққа кеңістіктегі бір нүктеден перпендикуляр және көлбеу өткізілген. Перпендикулярдың ұзындығы 6 cm, көлбеудің ұзындығы 9 cm. Перпендикулярдың көлбеуге түсірілген проекциясын тап.
16. Қандай да бір A нүктеден берілген α жазықтыққа *(3-сурет)* AO перпендикуляр және бір-біріне тең AB және AC көлбеулер өткізілген. Көлбеулер перпендикулярмен $BAO = CAO = 60°$-тық, ал өзара $CAB = 90°$-тық бұрыш жасайды. $AO = 1$ cm. Көлбеулердің табандары арасындағы BC қашықтықты тап.
17. Теңбүйірлі үшбұрыштың табаны және биіктігі 4 cm-ден. Берілген нүкте үшбұрыш жазықтығынан b cm қашықтықта және оның төбелерінен бірдей қашықтықта тұр. Осы қашықтықты тап.
18. Теңбүйірлі ABC үшбұрыш берілген, оның табаны $b = 6$ cm және бүйір қабырғасы $a = 5$ cm. Үшбұрышқа іштей сызылған шеңбердің O центрінен үшбұрыш жазықтығына $OK = 2$ cm перпендикуляр өткізілген. K нүктеден үшбұрыштың қабырғаларына дейінгі және B төбесіне дейінгі болған қашықтықты тап.
19. ABC үшбұрышта B бұрыш тік болып, катет $BC = a$. A төбесінен үшбұрыш жазықтығына D перпендикуляр өткізілген. D және C нүктелер арасындағы қашықтық f-ке тең болса, D нүктеден BC катетқа дейінгі болған қашықтықты тап.
20. ABC үшбұрышта C – тікбұрыш. CD – осы үшбұрыштың жазықтығына өткізілген перпендикуляр. D нүкте A және B нүктелермен қосылған. Егер $CA = 3$ dm, $BC = 2$ dm және $CD = 1$ dm болса, AOB үшбұрыштың ауданын анықта.
21. $ABCD$ тік төртбұрыштың A төбесінен оның жазықтығына AK перпендикуляр өткізілген, оның K төбесі төртбұрыштың басқа төбелерінен 6 cm, 7 cm және 9 cm қашықтықта жатыр. AK перпендикулярдың ұзындығын тап.
22. A және B нүктелер α жазықтықта жатыр. AC және BE осы жазықтыққа өткізілген перпендикулярлар. Егер: $AC = a$ және $BD = b$ болса, AD және BC

3



4



түзулердің қиылысуын дәлелде және олардың қиылысу нүктесінен α жазықтыққа дейінгі қашықтықты тап.

23. Берілген тікбұрыштың жазықтығынан тыс жатқан M нүкте оның B төбесінен a қашықтықта, әрбір қабырғасынан b қашықтықта жатыр. Тікбұрыштың жазықтығынан M нүктеге дейінгі MO қашықтық нешеге тең *(4-сурет)*?
24. α жазықтықта AB және CD параллель түзулер берілген, олардың арасындағы қашықтық a-ға тең. α жазықтықта жатпайтын AB-дан b қашықтықта және CD-дан c қашықтықта S нүкте берілген. Егер: a) $a = 66$, $b = c = 65$; b) $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$ екені белгілі болса, S нүктеден a жазықтыққа дейінгі қашықтықты анықта.
25. Егер жазықтықта жатқан бұрыштың төбесінен жазықтыққа бұрыштың қабырғаларымен тең бұрыштар жасайтын көлбеу өткізілсе, бұл көлбеудің проекциясы берілген бұрыштың биссектрисасы болатынын дәлелде.

2. Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

1. Тікбұрышты параллелепипед табанының қырлары 4 cm және 3 cm, параллелепипедтің биіктігі 5 cm. Оның диагоналын және диагональдың табан жазықтығымен жасаған бұрышын тап.
2. Тікбұрышты параллелепипедтің диагоналы параллелепипед табанының жазықтығымен 45°-тық бұрыш жасайды. Табанының қабырғалары 120 cm және 209 cm. Параллелепипедтің биіктігін анықта.
3. Дұрыс төртбұрышты пирамиданың биіктігі h, апофеманың табан жазықтығына көлбеу бұрышы 60°. Пирамиданың бүйір қырларын тап.
4. Дұрыс үшбұрышты пирамиданың бүйір қыры b-ға тең болып, пирамида табанымен 30°-тық бұрыш жасайды. Пирамида табанының қабырғасын тап.
5. Көлбеу a-ға тең. Егер көлбеу проекциялар жазықтығымен: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°-тық бұрыш жасайтын болса, бұл көлбеудің жазықтықтағы проекциясы ұзындығын тап.
6. Нүкте жазықтықтан h қашықтықта жатыр. Осы нүктеден жазықтыққа өткізілген және онымен: a) 30°; b), 45°; c) 60°-тық бұрыштар жасаған көлбеудің ұзындығын тап.
7. Кесіндінің жазықтыққа түсірілген проекциясы оның өзінен екі есе кіші болуы үшін кесіндіні жазықтыққа қандай бұрышпен көлбеу етіп өткізу керек?
8. Жазықтықтан a қашықтықта тұрған нүктеден оған екі көлбеу өткізілген. Бұл көлбеулер жазықтықпен 45°-тық бұрыш, өзара 60°-тық бұрыш жасайды. Көлбеулердің төбелері арасындағы қашықтықты анықта.
9. Жазықтықтан a қашықтықта тұрған нүктеден жазықтықпен 30°-тық бұрыш жасайтын екі көлбеу

Геометрия – математиканың бір бөлімі деп саналады. Бірақ Ежелгі Грецияда «математика» мен «геометрия» сөздерінің арасына теңдік таңбасы қойылған болып, тіпті атақты Платон мектебінің кіре берісінде: «Бұл жерге геометрияны білмейтін адам кірмесін!» деген жазу жазылған еді.

өткізілген. Олардың жазықтықтағы проекциялары өзара 120°-тық бұрыш жасайды. Көлбеулердің төбелері арасындағы қашықтықты анықта.

10. AB түзу a жазықтықта жатыр. B нүктеден AB-ға перпендикуляр BC және BD түзулер өткізілген. Олар α жазықтықтың бір жағында болып, оған 50° және 15°-қа көлбеу. CBD бұрышты тап.
11. Теңбүйірлі тікбұрышты үшбұрыштың бір катеті a жазықтықта жатып, екінші катеті a жазықтықпен 45°-тық бұрыш жасайды. Бұл жағдайда гипотенуза α жазықтықпен 30°-тық бұрыш жасайтынын негіздеп бер.
12. Егер AB көлбеу α жазықтықпен 45°-тық бұрыш жасайтын болса, α жазықтықта жатқан AC түзу AB көлбеудің проекциясымен 45°-тық бұрыш жасайды. Ол жағдайда $\angle BAC = 60°$ болатынын дәлелде.
13. Егер үшбұрышты дұрыс пирамиданың биіктігі табанының қабырғасына тең болса, бүйір қырлары табан жазықтығымен 60°-тық бұрыш жасайтынын дәлелде.

3. Параллель түзулер және жазықтықтар

1. A және B нүктелер α жазықтықтан тыс жатыр. AC және BD осы жазықтыққа перпендикуляр. $AC = 3\ m$, $BD = 2\ m$, $CD = 24\ dm$. A және B нүктелер арасындағы қашықтықты анықта.
2. 125 cm ұзындықтағы кесіндінің ұштары жазықтықтан 100 cm және 56 cm қашықтықта. Кесінді проекциясының ұзындығын тап.
3. α жазықтықтың A нүктесінен көлбеу түзу өткізілген және онда B және a нүктелер алынған. $AB = 8\ cm$ және $AC = 14\ cm$. B нүкте α жазықтықтан 6 cm қашықтықта. α жазықтықтан C нүктеге дейінгі қашықтықты тап.
4. 10 cm ұзындықтағы кесінді жазықтықты қияды. Оның төбелері жазықтықтан 5 cm және 3 cm қашықтықта. Кесіндінің жазықтықтағы проекциясының ұзындығын тап.
5. Кесінді жазықтықты қияды. Оның төбелері жазықтықтан 8 cm және 2 cm қашықтықта. Кесіндінің центрінен жазықтыққа дейінгі қашықтықты тап.
6. Жазықтықпен қиылыспайтын кесіндінің төбелері жазықтықтан 30 cm және 50 cm қашықтықта. Осы кесіндіні 3 : 7 қатынаспен бөлетін нүкте жазықтықтан қандай қашықтықта болады? *(екі жағдайды қарастыр)*.
7. Дұрыс үшбұрыш жазықтыққа проекцияланған. Оның төбелері жазықтықтан 10 dm, 15 dm және 17 dm қашықтықта. Үшбұрыштың центрінен проекциялар жазықтығына дейінгі қашықтықты тап.
8. Жазықтыққа параллель AB кесінді берілген, оның ұзындығы a-ға тең. B төбесі мен екінші төбесінің A_1 проекциясын қосатын BA_1 кесінді жазықтықпен 60°-тық бұрыш жасайды. BA_1 кесіндінің ұзындығын анықта.
9. α жазықтықтың A және B нүктелерінен онда жатпайтын өзара параллель кесінділер сызылған: $AC = 8\ cm$ және $BD = 6\ cm$. C және D нүктелер арқылы өткізілген түзу α жазықтықты E нүктеде қияды. $AB = 4\ cm$ болса, BE қашықтықты анықта.
10. a-ға тең AB кесінді α жазықтықта жатыр, әрбірі b-ға тең AC және BD кесінділер α жазықтықтан тыс жатыр. AC кесінді α жазықтыққа перпендикуляр, AB-ға перпендикуляр BD α жазықтықпен 30°-тық бұрыш жасайды. CD қашықтықты анықта.

4. Жазықтыққа параллель түзу

1. а) Берілген нүктеден берілген жазықтыққа параллель түзу өткіз.
b) Берілген нүктеден сондай a кесінді өткіз, оның берілген жазықтықтағы проекциясы өзіне тең болсын.
2. Үшбұрышты дұрыс призма табанының a қабырғасы және b бүйір қырына негізінен призманың бүйір қыры және осі арқылы өткізілген қиманың ауданын тап.
3. Сыртқы A нүктеден a жазықтыққа AB кесінді өткізілген. Бұл кесінді C нүктеде

(A-дан B-ға қарай) 3 : 4 қатынаста бөлінген және одан α жазықтыққа параллель CD = 2 cm кесінді өткізілген. α жазықтыққа D нүкте арқылы ADE кесінді өткізілген. B және E нүктелер арасындағы қашықтықты тап.

4. AB және CD – бір-бірімен қиылысқан екі жазықтықтағы параллель кесінділер. AE және DF жазықтықтардың қиылысу сызығына өткізілген перпендикулярлар. AD = 5 cm және EF = 4 cm болса, AB және CD түзулердің арасындағы қашықтықты тап.

5. $ABCD$ параллелограмның A және D төбелері M жазықтықта, B және C төбелері онда жатпайды, AD = 10 cm, AB = 15 cm, AC және BD диагональдардың M жазықтықтағы проекциялары сәйкесінше 13,5 cm және 10,5 cm-ге тең. Диагональдарды анықта.

6. Ромб қабырғаларының бірі арқылы қарама-қарсы қабырғадан 4 cm қашықтықта жазықтық өткізілген. Ромб диагональдарының осы жазықтықтағы проекциялары 8 cm және 2 cm. Ромб қабырғаларының проекцияларын тап.

7. Тікбұрышты ABC үшбұрыштың C тікбұрышы төбесінен гипотенузаға параллель және одан 1 dm қашықтықта жазықтық өткізілген *(5-сурет)*. Катеттердің бұл жазықтықтағы проекциялары 3 dm және 5 dm, Гипотенузаның осы жазықтықтағы проекциясын анықта.

8. AB және CD – бір-бірінен 28 cm қашықтықтағы, α жазықтықта жатқан екі параллель түзу, ал EF – сыртқы түзу AB-ға параллель және AB-дан 17 cm, α жазықтықтан 15 cm қашықтықта, EF мен CD арасындағы қашықтықты тап (екі жағдайды қарастыр).

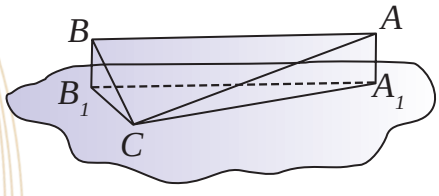
9. α жазықтыққа параллель AB кесіндінің төбелерінен сол жазықтыққа AC перпендикуляр және $BD \perp AB$ көлбеу өткізілген. Егер $AB = a$, $AC = b$ және $BD = c$ болса, CD қашықтықты анықта *(6-сурет)*.

10. Төртбұрышты дұрыс пирамида табанының диагоналы арқылы бүйір қырға параллель жазықтық өткіз. Табанының қабырғасы a-ға тең, бүйір қыры b-ға тең. Пайда болған қиманың ауданын анықта.

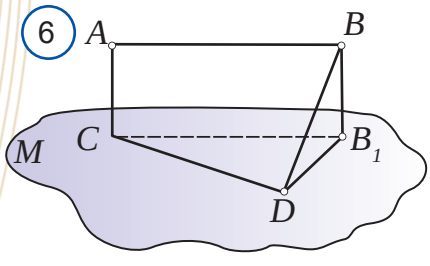
11. Үшбұрышты дұрыс $SABC$ пирамида табанының қабырғасы a, бүйір қыры b. Бұл пирамиданың AB және BC қырлары центрінен SB қырға параллель жазықтық өткіз. Пайда болған қиманың ауданын анықта *(7-сурет)*.

12. Төртбұрышты дұрыс пирамиданың әрбір қыры a-ға тең. Табанының екі сыбайлас қабырғасының центрлерінен және биіктігінің центрінен жазықтық

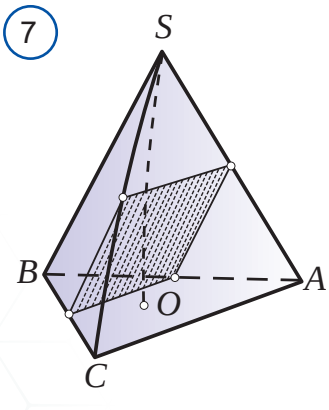
5



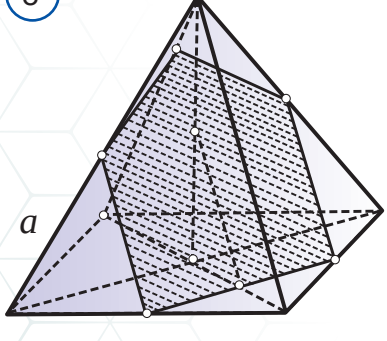
6



7



8



өткіз *(8-сурет)*, сондай-ақ оның ауданын тап.

5. Параллель жазықтықтар

1. Берілген нүктеден берілген жазықтыққа параллель жазықтық өткіз.
2. Қыры a-ға тең болған кубқа сондай жазықтық өткізілсін, бұл жазықтық жоғарғы табанының екі сыбайлас қабырғасы центрлерінен және төменгі табанының центрінен өтсін. Қиманың периметрін есепте.
3. Екі параллель жазықтық аралығы 8 dm. Ұзындығы 10 dm болған кесіндінің төбелері осы жазықтықтарға түйіскен. Кесіндінің әрбір жазықтыққа түсірілген проекциясын анықта.
4. α және β жазықтықтар параллель. α жазықтықтың A және B нүктелерінен β жазықтыққа AC = 37 cm және BD = 125 cm көлбеулер өткізілген. AC көлбеудің жазықтықтардың біріндегі проекциясы 12 cm. BD көлбеудің проекциясы ұзындығын тап.
5. Екі параллель жазықтық арасына 4 m ұзындықта перпендикуляр және 6 m ұзындықта көлбеу өткізілген. Әрбір жазықтықта олардың төбелері арасындағы қашықтық 3 m-ден. Перпендикуляр мен көлбеудің центрлері арасындағы қашықтықты тап.
6. Қосындысы c-ға тең болған екі кесіндінің төбелері екі параллель жазықтыққа түйіседі. Олардың проекциялары a және b болса, кесінділер ұзындықтарын тап.
7. Екі параллель жазықтық α және β арасына AC және BD кесінділер өткізілген (A және B нүктелер α жазықтықта жатыр). AC = 13 cm, BD = 15 cm, AC және BD-ның берілген жазықтықтардың біріндегі проекциялары ұзындықтарының қосындысы 14 cm. Бұл проекциялардың ұзындықтарын және жазықтықтар арасындағы қашықтықты тап.
8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубтың AA_1 және CC_1 қарама-қарсы қырларының K және L центрлері түзулер арқылы кубтың B және D_1 төбелерімен қосылған. Кубтың қыры a-ға тең. Жасалған $KBLD_1$ төртбұрыштың қабырғалары мен диагональдарын тап және оның пішінін анықта.
9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубта ретімен төмендегі қырлардың центрлерін қос: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA және AA_1. Жасалған фигураның дұрыс алтыбұрыш екенін дәлелде. Егер кубтың қыры a-ға тең болса, алтыбұрыш ауданын тап.
10. Дұрыс призманың табанының қабырғасы 3 dm-лік алтыбұрыштан құралған. Призманың биіктігі 13 dm. Призманың жоғарғы және төменгі табандарының екі қарама-қарсы қабырғасы арқылы өткізілген қиманың ауданын анықта.

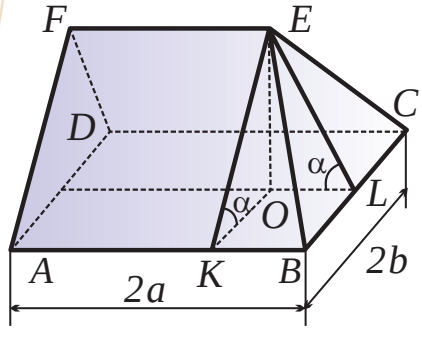
6. Перпендикуляр жазықтықтар

1. Дұрыс призманың табаны ABC теңбүйірлі үшбұрыш болып, оның AB және BC қабырғалары 7 cm-ден, үшінші – AC қабырғасы 2 cm. AC қабырға арқылы табан жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасап, қарама-қарсы тұсындағы бүйір қыр мен D нүктеде қиылысатын жазықтық өткізілген. Алынған қиманың ауданын және бүйір қырдың BD кесіндісін анықта.
2. Екі теңбүйірлі үшбұрыш ортақ табанға ие, олардың жазықтықтары бір-біріне қатысты 60° көлбеу. Ортақ табан 16 cm-ге тең. Бір үшбұрыштың бүйір қабырғасы 17 cm-ге тең, екіншісінің бүйір қабырғалары өзара перпендикуляр. Үшбұрыштардың төбелері арасындағы қашықтықты анықта.
3. Тікбұрышты үшбұрыштың катеттері 7 cm және 24 cm. Гипотенуза арқылы өтетін және үшбұрыш жазықтығымен 30°-тық бұрыш жасайтын жазықтық өткізілген. Осы жазықтықтан тікбұрыш төбесіне дейінгі қашықтықты анықта.
4. AB түзу α жазықтыққа параллель болып, одан a қашықтықта жатыр. AB арқылы β жазықтық өтеді, бұл жазықтық α жазықтықпен 45°-тық бұрыш жасайды. β жазықтықта AB мен 45°-тық бұрыш жасайтын түзу өткізілген. Осы түзудің AB мен

α жазықтық арасындағы кесіндісін анықта.

5. Берілген жазықтыққа перпендикуляр болған және осы жазықтықта берілген түзумен қиылысатын түзулердің геометриялық орнын тап.
6. Берілген нүктеден басқа бір жазықтыққа перпендикуляр жазықтық өткіз.
7. AB – өзара перпендикуляр болған α және β жазықтықтардың қиылысқан түзуі. CD a жазықтықтағы кесінді болып, AB-ға параллель және одан 60 cm қашықтықта turadi. β жазықтықтағы E нүкте AB-дан 91 cm қашықтықта тқр. E-ден CD-ға дейінгі қашықтықты тап.
8. AB түзу өзара перпендикуляр жазықтықтардағы A және B нүктелерді қосады. A және B нүктелерден жазықтықтардың қиылысқан түзуіне түсірілген перпендикулярлар сәйкесінше a және b-ға тең. Олардың табандары арасындағы қашықтық c-ға тең. AB кесіндінің ұзындығын және оның берілген жазықтықтарға түсірілген проекцияларының ұзындықтарын анықта.

9



9. Алтыбұрышты дұрыс пирамиданың бүйір қыры 8 dm-ға, табанының қабырғасы 4 dm-ға тең. Табанның екі сыбайлас қабырғасы центрлері арқылы табанға перпендикуляр жазықтық өткізілген. Қиманың ауданын тап.
10. Табаны $ABCD$ тік төртбұрыштан құралған үйге жаңбыр суы төрт қабырғасынан ағып түсетін шатыр орнату керек *(9-сурет)*. AB = 18 m, BC = 12 m. Шатырдың барлық жақтары табан жазықтығымен 40°-тық бұрыш құрайды. Егер шатырдың 1 m^2-ін жабу үшін 15 черепица жұмсалса, шатырды жабу үшін қанша черепица керек?

Іс жүзіндік компетенцияларды қалыптастыруға қатысты есептер

1. Он алтылық қарындашпен және ашық кітаптың көмегімен түзулер арасындағы, түзу мен жазықтық арасындағы, жазықтықтар арасындағы бұрыштардың рәміздерін көрсет.
2. Екі симметрия осіне ие, 9-суретте көрсетілген жаңбыр суы шатырдан қай бағытта ағып түсетінін анықта.
3. Жанына жақындауға болмайтын мұнараның биіктігін анықтау үшін қандай өлшемдер жүргізу керек?
4. Биіктігі белгілі, бірақ жақындауға болмайтын ғимаратқа дейінгі қашықтықты табу үшін қандай өлшемдер жүргізу керек?
5. Неге түс кезінде көлеңкелер жоғалады?
6. Ағаштың төбесіне шықпай-ақ оның биіктігін қалай өлшеуге болады?

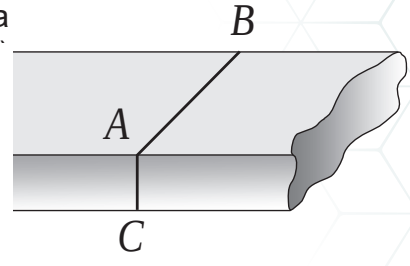
7. Дөңгелек үстелге a-ға тең болған квадрат пішіндегі үлкен дастарқан салынды. Шеңбердің центрі квадраттың центрімен қабаттасады. Дастарқанның төбелері оның қабырғаларының центрлеріне қарағанда еденге қаншалықты жақын?

Жауабы: $a \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{2} \approx 0{,}207\ a$.

8. Қабырғалардың тіктігі ватерпаспен (бір ұшына тас байланған жіп) тексеріледі. Ватерпастың жібі қабырғаға барынша жабысып, оған параллель болса, қабырға тік деп шешіледі. Бұл шешім қаншалықты дұрыс? Бұл тексеру тәсілі неге негізделген?

9. Аралау беті араланатын тақтаның барлық қырларына перпендикуляр болуын қамтамасыз ету үшін (10-сурет) тақтаның бетіне аралау сызықтарын қалай белгілеу керек?

10



10. Бөлменің сыбайлас қабырғаларының бір-біріне перпендикуляр екенін тексеру үшін Пифагор теоремасы қалай қолдануға болады?

11. Бағанның тіктігі бағанның табанымен бір түзуде жатпайтын екі нүктеден қарау арқылы тексеріледі. Мұндай тексеру тәсілін негіздеп бер.

Нұсқау. Түзу және жазықтықтың перпендикулярлық белгісін пайдалан.

12. Жақын баруға болмайтын төбедегі бір нүктеде биік бағана орнатылған. Оның тіктігін ватерпаспен қалай тексеруге болады?

Шешуі. Бағанның қандай да бір тік түзумен бір жазықтықта жататынын және басқа тік түзумен бір (басқа) жазықтықта жататынын көрсету жеткілікті. Ватерпасты алдымызға оның және бағанның жоғары төбелері мен көзіміз бір түзуде жатқанда ватерпастың жібі мен бағана бір түзуде жататындай етіп қоямыз. Бұл әдіс мыналарға негізделген: 1) тік бағана кез келген түзумен бір жазықтықта жатуы керек; 2) егер екі параллель түзу екі қиылысатын жазықтықта жатса, бұл түзулер жазықтықтың қиылысу сызығына да параллель болады.

13. Екі тік орналасқан жазық айна берілген. Осы айналардың бірінің бетіне параллель болған көлденең сәуле екінші айнадан бірінші айнаның бетіне перпендикуляр болған түзудің бойымен сынады. Айналардың арасындағы бұрышты тап.

Нұсқау. Жарықтың сыну заңын қолдан.

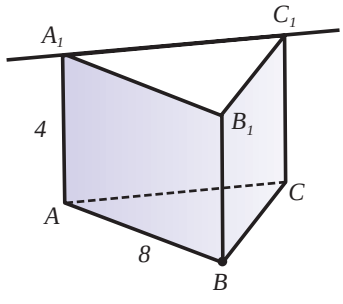
Жауабы: 45°.

14. Көлденең сәуле тік орналасқан екі жазық айнадан сынуда. Алдымен сәуле бірінші айнаның бетіне параллель болған болса, екі рет шағылысу нәтижесінде екінші айнаның жазықтығына параллель болып қайтты. Айналардың арасындағы бұрышты тап.

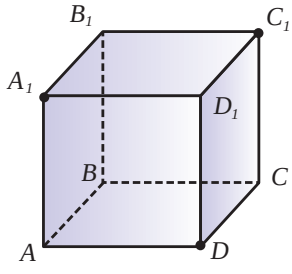
Жауабы: 60º.

ӨЗІҢДІ СЫНАП КӨР

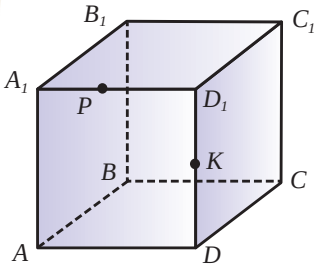
1. Үшбұрышты дұрыс призма берілген. Оның A_1C_1 қыры және B төбесінен өтетін қиманың ауданын тап.



2. Кубтың толық беті 12-ге тең. Оның A_1, C_1 және D төбесінен өтетін қимасының ауданын тап.

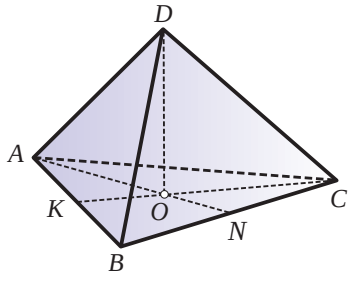


3. PK түзу қайсы түзулерді қиып өтеді?



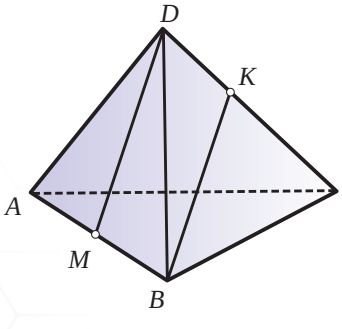
A) A_1B_1 және DC
B) A_1A_1 және AD
C) A_1B_1 және AD
D) D_1C_1

4. AOD жазықтық BDC жазықтықты қайсы түзудің бойымен қиып өтеді?



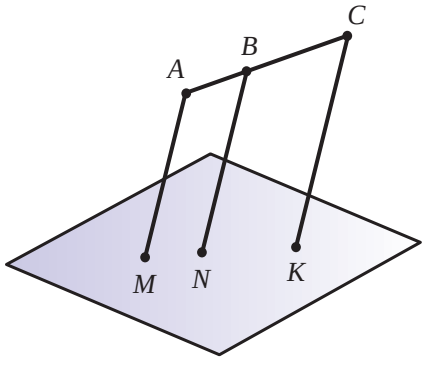
A) DO
B) AN
C) DN
D) DC

5. Дұрыс пайымдауды көрсет: MD түзу ...

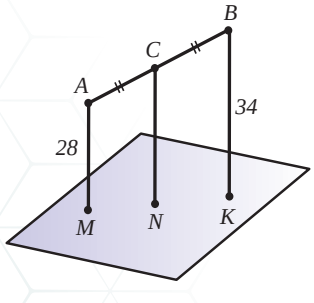


A) BK түзуді қиып өтеді
B) BK түзуге параллель
C) BK түзуге айқас
D) BKC жазықтықпен қиылыспайды

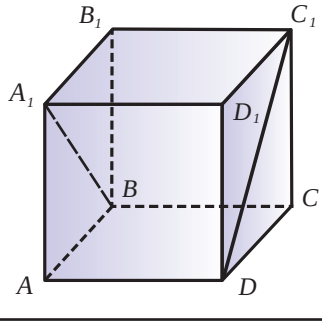
6. Суретте $AM \parallel BN \parallel CK$, AB = 18, BC = 36, NK = 24. MN-ді тап.



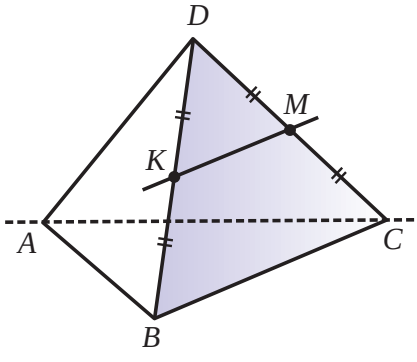
7. Суретте $AM//CN//BK$, AM = 28, BK=34. CN-ді тап.



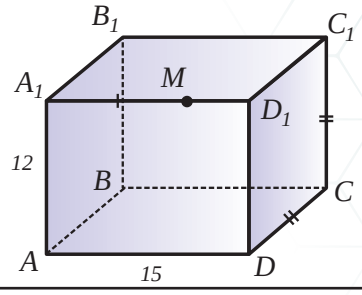
8. Куб берілген. BA_1 және DC_1 түзулердің арасындағы бұрышты тап.



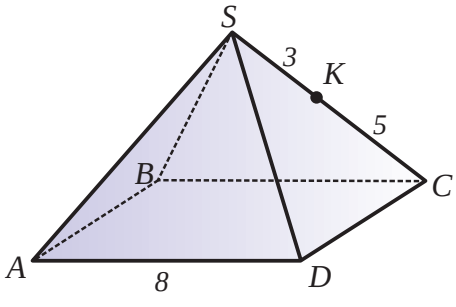
9. Дұрыс тетраедр берілген. KM және AC түзулер арасындағы бұрышты тап.



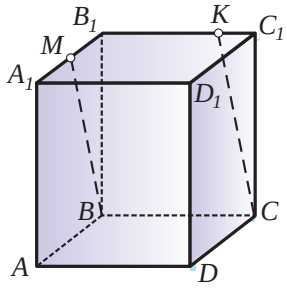
10. Тікбұрышты параллелепипед берілген. $DC = CC_1$, $A_1M : MD_1 = 2 : 1$, $AA_1 = 12$, $AD = 15$. Параллелепипедтің CDM жазықтықпен қимасының периметрін тап.



11. $SABCD$ – дұрыс пирамида. $KC = 5$, $KS = 3$, $AD = 8$. Пирамиданың ADK жазықтықпен қимасы периметрін тап.

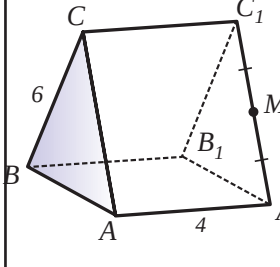


12. AOD жазықтық BDC жазықтықты қайсы түзудің бойымен қиып өтеді?



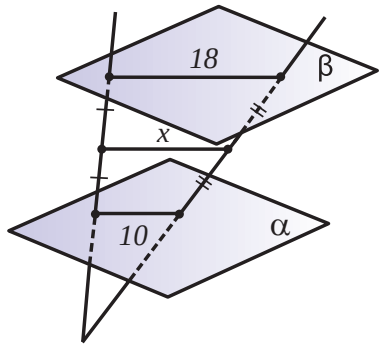
A) AA_1D_1 жазықтықты қиып өтеді
B) BM түзуге параллель
C) AA_1B_1 жазықтыққа параллель
D) ABA_1 жазықтықты қиып өтеді

13. Дұрыс призма берілген. $BC = 6$, $AA_1 = 4$. Призманың BMC жазықтықпен қимасының периметрін тап.

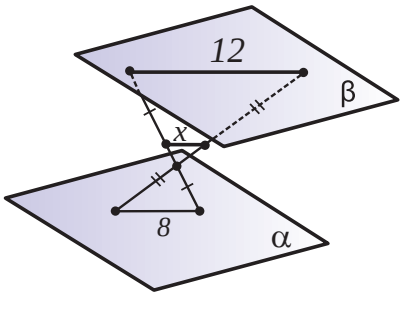


A) AA_1D_1 жазықтықты қиып өтеді
B) BM түзуге параллель
C) AA_1B_1 жазықтыққа параллель
D) ABA_1 жазықтықты қиып өтеді.

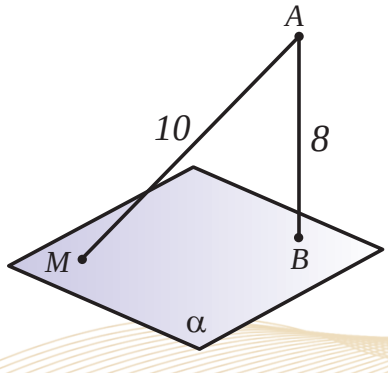
14. $\alpha \parallel \beta$. x = ?



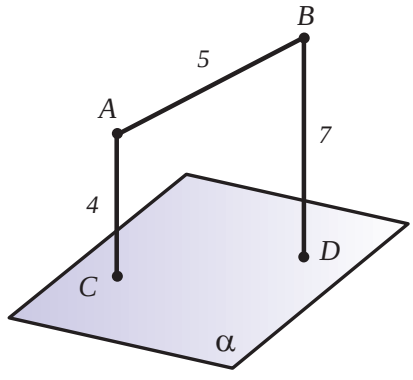
15. $\alpha \parallel \beta$. x = ?



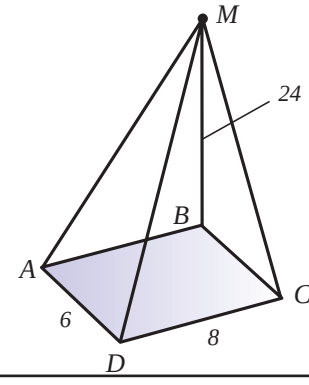
16. $AB \perp \alpha$. MB = ?



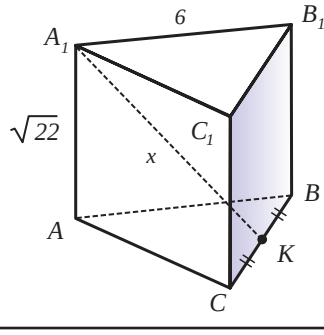
17. $AC \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$. CD = ?



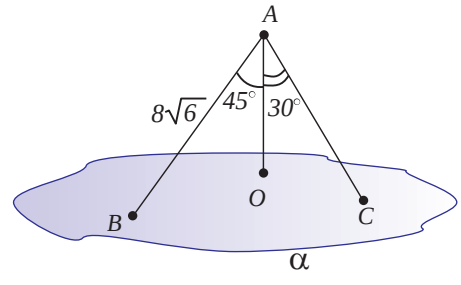
18. $ABCD$ – тік төртбұрыш
$MB \perp AB$, $MB \perp BC$. MD = ?



19. Дұрыс пирамида берілген. A_1K -ні тап.



20. $AO \perp \alpha$, $AB = 8\sqrt{6}$, $\angle SAO = 45°$.
$\angle CAO = 30°$. OC = ?

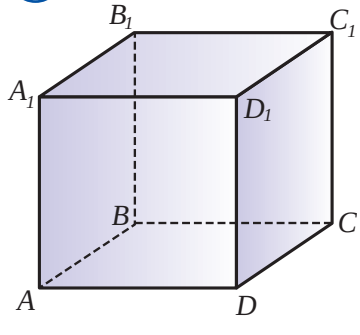


21. Кубтың бір төбесінен шыққан үш қырының төбелерінен өтетін жазықтық өткіз. Кубтың қыры a-ға тең. Қиманың ауданын есепте.
22. Теңқабырғалы үшбұрыштың қабырғасы 3 cm. Үшбұрыштың әрбір төбесінен 2 cm қашықтықтағы нүкте мен оның жазықтығы арасындағы қашықтықты тап.
23. Теңбүйірлі үшбұрыштың AC табаны α жазықтықта жатыр. Егер AB = 5, AC = 6 және үшбұрыш жазықтығы мен α жазықтық арасындағы екіжақты бұрыш 60°-қа тең болса, b нүктеден α жазықтыққа дейінгі қашықтықты тап.
24. 10 cm ұзындықтағы кесінді жазықтықты қияды. Оның төбелері жазықтықтан 3 cm және 2 cm қашықтықта. Берілген кесінді мен жазықтық арасындағы бұрышты тап.
25. $ABCD$ трапецияның DA табаны α жазықтықта, CB табаны одан 5 cm алыста. Егер $DA : CB = 7 : 3$ болса, P жазықтықтан осы трапеция диагональдарының қиылысқан M нүктеге дейінгі қашықтықты тап.
26. AB кесінді α жазықтыққа параллель. AC және BD кесінділер α жазықтыққа өткізілген екі тең көлбеу болып, AB кесіндіге перпендикуляр және одан түрлі бағытта өткізілген. AB = 2 cm болып, α жазықтықтан 7 cm қашықтықта тұр, AC және BD кесінділердің әрбірі 8 cm-ден. CD қашықтықты анықта.
27. AB түзу – 90°-қа тең екіжақты бұрыштың қыры. AA_1 және BB_1 түзулер бұл бұрыштың түрлі жақтарына тиісті.
$AA_1 \parallel BB_1$, BB_1 кесінді AB-ға перпендикуляр. AA_1 және BB_1

түзулердің қиылысуын дәлелде. Осы түзулер арасындағы бұрышты тап.

28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубта AB_1C_1D және A_1D_1CB қималар жазықтықтары арасындағы сызықты бұрышты сал және градус өлшемін тап.
29. Дұрыс тетраедрдің қыры a-ға тең. AB қырдан өтіп, оны 1 : 3 қатынаста болатын және BC қырға параллель жазықтықпен қиғанда пайда болатын қиманы сал. Қиманың ауданын тап.
30. Тік параллелепипедтің табаны диагональдары 48 cm және 20 cm болған ромбтан құралған. Параллелепипедтің үлкен диагоналы табан жазықтығымен 45°-тық бұрыш жасайды. Оның толық бетінің ауданын тап.
31. Пирамиданың табаны ауданы $16\sqrt{3}$-ке тең болған тікбұрышты үшбұрыштан құралған. Екі бүйір жақтары табан жазықтығына перпендикуляр, үшіншісі табанмен 45°-тық бұрыш құрайды. Пирамида қырларының ұзындығын және бүйір бетінің ауданын тап.
32. Тік призма табанының катеттері 12 cm және 9 cm болған тікбұрышты үшбұрыштан құралған. Егер призманың бүйір қырынан өтетін ең кіші қима квадрат болса, оның бүйір бетінің ауданын тап.
33. Пирамиданың табаны кіші диагоналы d және доғал бұрышы α болған ромбтан құралған. Пирамида табанындағы барлық екіжақты бұрыштар β-ға тең. Пирамиданың бүйір бетінің ауданын тап.
34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубының қыры a-ға тең. Кубты AA_1, AD, A_1B_1 қырларының центрінен өтетін жазықтықпен қиғанда пайда болған қиманы сал.
35. 1-суретке орай, берілген түзулердің өзара қандай орналасқанын анықта және олардың арасына сәйкес ($\otimes$ – қиылысу, // – параллельдік, $\div$ – айқастық) белгілерін қой.

1



Түзулер	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
AD					
A_1B_1					
AB					
A_1D					
BD					

36. 1-суреттегі түзу мен жазықтық өзара қандай орналасқанын анықта және олардың арасына сәйкес ($\otimes$ – қиылысу, // – параллельдік, $\div$ – айқастық және $\subset$ – тиісті) белгілерін қой.

Түзулер / Жазықтықтар	AA_1	BC_1	CC_1	CB_1	AB_1
ADD_1					
AA_1B_1					

ABD					
AA_1D					
BCD					

37. Берілген жазықтыққа бір нүктеден перпендикуляр және көлбеу өткізілген. Олардың арасындағы бұрыш 45°. Перпендикулярдың ұзындығы a-ға тең. Көлбеудің ұзындығын тап.
38. Жазықтыққа берілген нүктеден әрбірі 2 cm-ге тең екі көлбеу өткізілген. Олар арасындағы бұрыш 60°, проекциялары арасындағы бұрыш тікбұрыш. Берілген нүкте мен жазықтық арасындағы қашықтықты тап.
39. Берілген жазықтыққа бір нүктеден екі тең көлбеу өткізілген. Олардың арасындағы бұрыш 60°, проекциялары арасындағы бұрыш тік. Әрбір көлбеу мен оның проекциясының арасындағы бұрыштарды тап.
40. Тікбұрышты ABC үшбұрыштың катеттері – 15 m және 20 m. Тікбұрыштың C төбесінен бұл үшбұрыш жазықтығына перпендикуляр етіп CD = 35 m кесінді өткізілген. D нүктеден AB гипотенузаға дейінгі қашықтықты тап.
41. Үшбұрыштың қабырғалары: 10 cm, 17 cm және 21 cm. Осы үшбұрыштың үлкен бұрышының төбесінен оның жазықтығына 16 cm ұзындықта перпендикуляр өткізілген. Оның төбелерінен үшбұрыштың үлкен қабырғасына дейінгі қашықтықтарды анықта.
42. ABC үшбұрыштың A төбесінен оның жазықтығы жатпайтын AD түзу өткізілген, ол түзу AB және AC қабырғалармен тең сүйір бұрыштар жасайды. Егер AB = 51 m, AC = 34 m және BC = 30 m болса, AD түзудің үшбұрыш жазықтығына түсірілген проекциясы BC қабырғаны қандай бөліктерге бөледі?
43. Жазықтықтан a қашықтықта тұрған нүктеден екі көлбеу өткізілген, бұл көлбеулер жазықтықпен 45°-тық және 30°-тық бұрыш, өзара тікбұрыш жасайды. Көлбеулердің төбелері арасындағы қашықтықты анықта.
44. Берілген нүктеден берілген түзуге параллель жазықтық өткіз. Мұндай жазықтықтардан нешеу өткізуге болады?
45. Жазықтық және оған параллель түзу берілген. Жазықтықта алынған нүкте арқылы берілген түзуге параллель етіп, сол жазықтықта түзу өткіз.
46. Екі параллель жазықтық арасындағы екі түзу кесіндісінің ұзындықтары 51 cm және 53 cm. Олардың бұл жазықтықтардың біріне түсірілген проекцияларының қатынасы 6 : 7 түрінде. Берілген жазықтықтар арасындағы қашықтықты анықта.
47. Кеңістіктегі екі тікбұрыш сондай орналасқан, олардың сәйкес қабырғалары бір-біріне параллель әрі бірдей бағытталған, сондай-ақ олардың төбелерін қосатын кесіндіге перпендикуляр. Бұл кесіндінің ұзындығы a-ға тең. Бір бұрыштың бір қабырғасында оның төбесінен бастап b кесінді ажыратылған. Екінші бұрыштың оған параллель болмайтын қабырғасында c кесінді ажыратылған. Осы кесінділердің төбелері арасындағы қашықтықты анықта.
48. Бүйір жақтары квадрат болған алтыбұрышты дұрыс призманың төменгі табанының бір қабырғасы және жоғарғы табанының оған қарсы жатқан қабырғасы арқылы өткен жазықтықпен қиылған. Табанның қабырғасы a-ға тең. Жасалған қиманың ауданын анықта.
49. ABC үшбұрыш қабырғалары: AB = 9, BC= 6 және AC = 5. AC қабырға арқылы үшбұрыш жазықтығымен 45°-тық бұрыш жасайтын α жазықтық өтеді. α жазықтықпен B төбесі арасындағы қашықтықты тап.
50. Берілген түзуден екінші бір жазықтыққа перпендикуляр жазықтық өткіз. Неше сондай жазықтық өткізуге болады?

I. Планиметрия

1.1. Бұрыштар және түзулер

Параллель және қиылысатын түзулер

Жазықтықта екі түзу немесе параллель *(1-сурет)* немесе қиылысатын *(2-сурет)* болуы мүмкін.

Сыбайлас және тік бұрыштар

Сыбайлас бұрыштар қосындысы 180°-қа тең *(3-сурет)*. Вертикаль бұрыштар тең *(4-сурет)*.

Екі түзуді үшінші түзу қиғанда пайда болатын бұрыштар *(5-сурет)*:

1) $\angle 1$ және $\angle 5$, $\angle 2$ және $\angle 6$, $\angle 3$ және $\angle 7$, $\angle 4$ және $\angle 8$ – сәйкес бұрыштар;

2) $\angle 3$ және $\angle 6$, $\angle 4$ және $\angle 5$ – *ішкі тұстас бұрыштар*;

3) $\angle 3$ және $\angle 5$, $\angle 4$ және $\angle 6$ – *ішкі айқыш бұрыштар* деп аталады.

Түзулердің параллельдік белгілері

Егер екі түзуді үшінші түзу қиғанда *(5-сурет)*,

1) ішкі айқыш бұрыштар тең болса немесе;

2) сәйкес бұрыштар тең болса немесе;

3) ішкі айқыш бұрыштар қосындысы 180°-қа тең болса, берілген түзулер параллель болады.

Параллель түзулердің қасиеттері:

Егер екі параллель түзуді үшінші түзу қиып өтсе *(5-сурет)*:

1) ішкі айқыш бұрыштар тең болады;

2) сәйкес бұрыштар тең болады;

3) ішкі айқыш бұрыштар қосындысы 180°-қа тең болады. Егер $a \parallel b$ және $a \parallel c$ болса, $b \parallel c$ болады *(6-сурет)*.

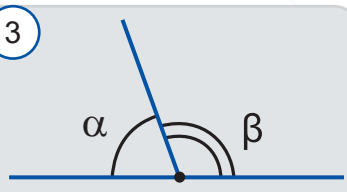
1



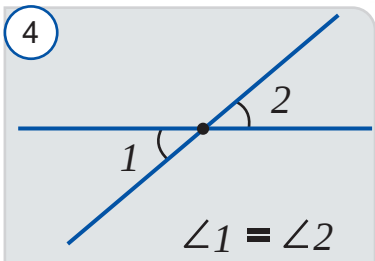
2



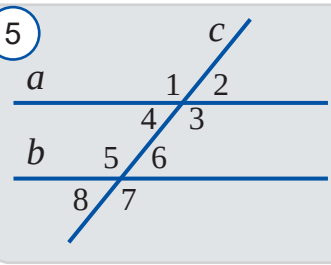
3



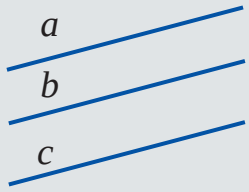
4



5

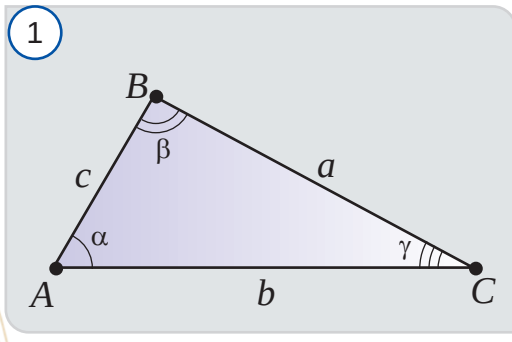


6



1.2. Үшбұрыштар

1°. Негізгі ұғымдар



Жазықтықта бір түзуде жатпайтын үш нүкте берілген болсын. Осы нүктелердің әр екеуін кесінділермен жалғаймыз. Жасалған фигура *үшбұрыш* деп аталады. Нүктелер үшбұрыштың төбелері, кесінділер *қабырғалары* деп аталады. Белгіленуі: A, B, C – ұштары, A, B, C – қабырғалар *(1-сурет)*. Үшбұрыш үш ішкі бұрышқа ие: $\angle BAC$, $\angle CBA$, $\angle ACB$.

Белгіленуі: α, β, γ.

Үшбұрыштың орта сызығы – оның екі қабырғасының центрлерін қосатын кесінді.

Медиана – үшбұрыш төбесін оған қарама-қарсы қабырғаның центрімен қосатын кесінді. Үшбұрышта 3 та медиана болып, олар m_a, m_b, m_c түрінде белгіленеді.

Биссектриса – үшбұрыш төбесін оған қарама-қарсы қабырғамен қосатын және осы төбедегі бұрыштың биссектрисасында жататын кесінді. Үшбұрышта үш биссектриса болып, олар l_a, l_b, l_c түрінде белгіленеді.

Биіктік – үшбұрыш төбесінен оған қарама-қарсы қабырға жатқан түзуге түсірілген перпендикуляр. Үшбұрышта үш биіктік болып, олар h_a, h_b, h_c түрінде белгіленеді. Орта сызық – екі қабырға центрлерін қосатын кесінді. Орта сызықтардың саны да 3.

Периметр – үш қабырға ұзындықтарының қосындысы. Белгіленуі: P.

Үшбұрыштар қабырғаларына қарай үш түрге бөлінеді: а) теңқабырғалы ($a=b=c$); b) теңбүйірлі (A, B, C-лардың кез келген екеуі тең); c) әр түрлі қабырғалы (A, B, C-лардың кез келген екеуі тең емес).

Үшбұрыштың үш қабырғасын жанап өтетін шеңбер оған *іштей сызылған шеңбер* деп аталады (мұндай шеңбер бар және жалғыз). Іштей сызылған шеңбер радиусы r арқылы белгіленеді.

Үшбұрыштың үш төбесінен өтетін шеңбер оған *сырттай сызылған шеңбер* деп аталады және оның радиусы R арқылы белгіленеді (мұндай шеңбер бар және жалғыз).

2°. Негізгі қатынастар

1) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Үшбұрыш ішкі бұрыштарының қосындысы 180°-қа тең.

2) Үш медиана бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте медианаларды 2 : 1 қатынаста бөледі. Медиана үшбұрышты аудандары тең екі үшбұрышқа бөледі. Медианалардың ұзындықтары $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. формулалармен табылады.

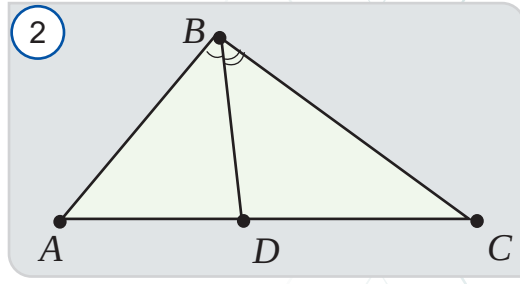
3) Үш биссектриса бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте іштей сызылған шеңбер центрі болады. Биссектриса өзі түсірілген қабырғаны қалған қабырғаларға пропорциональ бөліктерге бөледі *(2-сурет)*.

BD биссектриса болса, $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$.

Биссектриса ұзындықтары осы формулалармен табылады.

$$l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)};\qquad l_b=\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}\sqrt{p(p-b)};$$

$$l_c=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\sqrt{p(p-c)},\ \text{мұнда}\quad p=a+b+c.$$

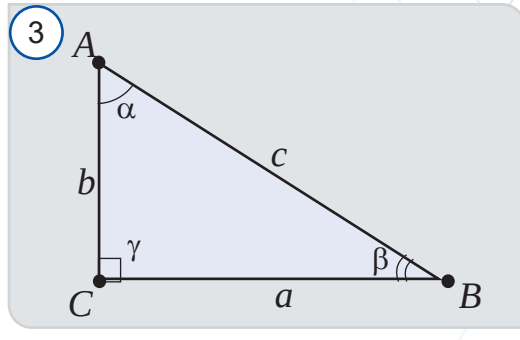


4) Үшбұрыш биіктіктері немесе олардың жалғасы бір нүктеде қиылысады. Биіктік ұзындықтары

$$h_a=\frac{2S}{a};\quad h_b=\frac{2S}{b};\quad h_c=\frac{2S}{c};$$

формулалармен табылады.

Мұнда S – үшбұрыштың ауданы.



5) Үшбұрыш қабырғаларының центрлік перпендикуляры бір нүктеде қиылысады. Бұл нүкте үшбұрышқа *сырттай сызылған шеңбердің центрі* болады.

6) Үшбұрыштың орта сызығы үшінші қабырғаға параллель және оның жартысына тең.

7) Синустар теоремасы:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

8) Косинустар теоремасы:

$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha;\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta;\ c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$

9) Үшбұрыш ауданын есептеу формулалары:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;\qquad S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}bc\sin\beta.$$

10) Герон формуласы:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\qquad p=\frac{a+b+c}{2};\qquad S=\frac{abc}{4R};\qquad S=pr.$$

3°. Маңызды жеке жағдайлар

а) Тікбұрышты үшбұрыш *(3-сурет)*.

$\angle\gamma=90°$, $\alpha+\beta=90°$, AC және BC – катеттер, AB – гипотенуза.

Пифагор теоремасы: $a^2+b^2=c^2$.

$$S=\frac{1}{2}ab;\qquad R=\frac{c}{2};\qquad r=\frac{a+b+c}{2};$$

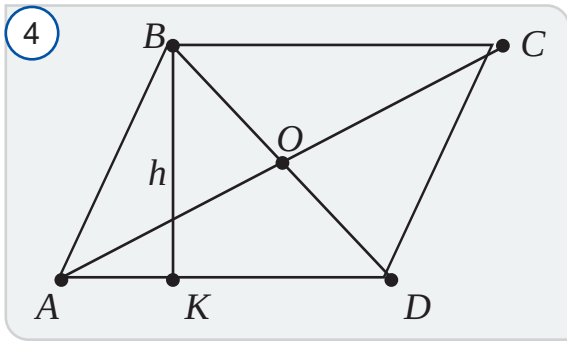
$$\frac{a}{c}=\sin\alpha;\qquad \frac{a}{c}=\cos\beta;\qquad \frac{b}{c}=\sin\beta;\qquad \frac{b}{c}=\cos\alpha;$$

$$\frac{a}{b}=tg\alpha;\qquad \frac{a}{b}=ctg\beta;\qquad \frac{b}{a}=ctg\alpha;\qquad \frac{b}{b}=tg\beta.$$

b) Теңбүйірлі үшбұрыш.

$$\alpha=\beta=\gamma=60°;\qquad S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6};\qquad R=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

1.3.Төртбұрыштар



1°. Параллелограмм

Қарама-қарсы қабырғалары параллель болған төртбұрыш *параллелограмм* деп аталады *(4-сурет)*. Сыбайлас болмаған төбелері қосатын кесінді *диагональ* деп аталады.

AB және CD; AD және BC параллель қабырғалар;

BD және AC диагональдар.

Негізгі қасиеттер және қатынастар:

1) Диагональдардың қиылысу нүктесі параллелограмның симметрия центрі болады. 2) Қарама-қарсы қабырғаларының ұзындықтары өзара тең: $AB = CD$ және $AD = BC$.

3) Параллелограмның қарама-қарсы бұрыштары өзара тең: $\angle BAD = \angle BCD$ және $\angle ABC = \angle ADC$.

4) Сыбайлас бұрыштардың қосындысы 180°-қа тең.

5) Диагональдар қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді: $BO = OD$ және $AO = OC$.

6) Қабырғалары квадраттарының қосындысы диагональдары квадраттарының қосындысына тең: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ немесе $2 \cdot (AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$.

7) Параллелограммның ауданы: a) $S = ah_a$, мұнда: $a = AD$ қабырға, $h_a = BK$ – биіктік. b) $S = absin\alpha$, мұнда: $b = AB$ – қабырға, $\alpha = \angle BAD$ – AB және AD қабырғалар арасындағы бұрыш.

2°. Ромб

Барлық қабырғалары өзара тең болған параллелограмм *ромб* деп аталады. Параллелограмм үшін орынды болған барлық қасиеттер ромб үшін де орынды.

Ромбтың қосымша қасиеттері

1) Ромб диагональдары өзара перпендикуляр.

2) Ромб диагональдары ішкі бұрыштардың биссектрисалары болады.

3) Ромб ауданы $S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$, мұнда d_1, d_2, – ромб диагональдары.

3°. Тік төртбұрыш

Барлық бұрыштары 90°-қа тең болған параллелограмм *тік төртбұрыш* деп аталады.

1) Тік төртбұрыш диагональдары өзара тең.

2) Тік төртбұрыш ауданы $S = a \cdot b$, мұнда a және b – тік төртбұрыштың сыбайлас қабырғалары.

4°. Квадрат

Барлық қабырғалары өзара тең болған тік төртбұрыш *квадрат* деп аталады. Ромб және тік төртбұрыштар үшін орынды болған барлық қасиеттер квадрат үшін де орынды.

Егер a – квадрат қабырғасы, d диагоналы болса:

$$S = a^2; \quad S = \frac{d^2}{2}; \quad d = a\sqrt{2}.$$

5°. Трапеция

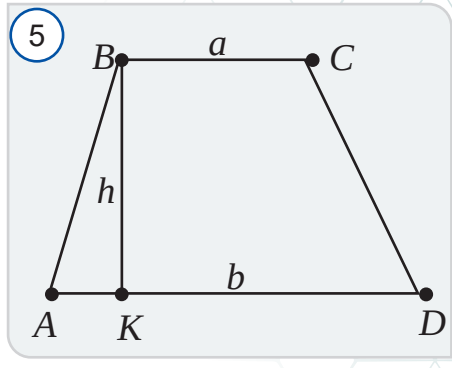
Табандар деп аталатын екі қабырғасы өзара параллель және бүйір қабырғалар деп аталатын қалған екі қабырғасы параллель болмаған төртбұрыш *трапеция* деп аталады.

Бүйір қабырғалар центрлерін қосатын кесінді трапецияның *орта сызығы* деп аталады.

Негізгі қасиеттер:

1) трапеция орта сызығы табандарға параллель және табандар қосындысының жартысына тең болады;

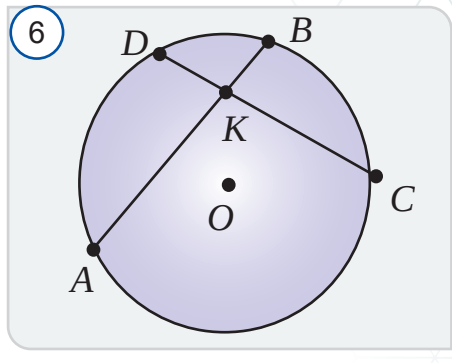
2) трапеция ауданы $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, мұнда a және b – табандар, h – биіктік *(5-сурет)*.



1.4. Шеңбер, дөңгелек

1°. Оң сан R және жазықтықта O нүкте берілген болсын. O нүктеден R қашықтықта орналасқан нүктелерден құралған фигура шеңбер деп аталады. O нүкте *шеңбер центрі,* центр мен шеңбердегі нүктені қосатын кесінді *радиус*, R саны *радиус ұзындығы* деп аталады. Шеңбердегі екі нүктені қосатын кесінді *ватар*, центрден өтетін ватар *диаметр* деп аталады.

Жазықтықтың шеңбермен шектелген бөлігі *дөңгелек* деп аталады.



Негізгі қатынастар:

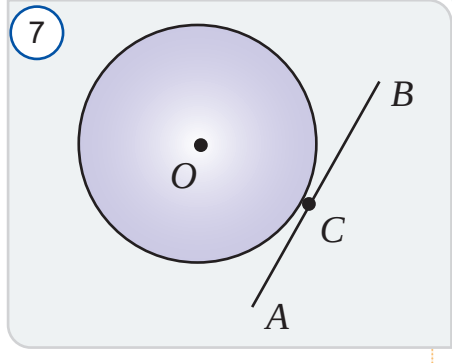
1) $D = 2R$, мұнда: D – диаметр ұзындығы.

2) $L = 2\pi R$ – шеңбердің ұзындығы.

3) $S = \pi R^2$ – дөңгелектің ауданы.

4) AB және CD ватарлар K нүктеде қиылысса *(6-сурет)*, $AK \cdot KB = CK \cdot KD$ қатынас орындалады.

5) Ватарды тең екіге бөлетін диаметр осы ватарға перпендикуляр болады.



6) Тең ватарлар центрден тең қашықтықта орналасқан және, керісінше, центрден тең қашықтықта орналасқан ватарлар өзара тең.

2°. Жанама

Шеңбер (немесе дөңгелек) мен бір ғана ортақ нүктеге ие болған түзу жанама деп аталады. Нүкте *жанау нүктесі* деп аталады *(7-сурет)*.

Шеңбермен 2 ортақ нүктеге ие болған түзу *қиюшы* деп аталады.

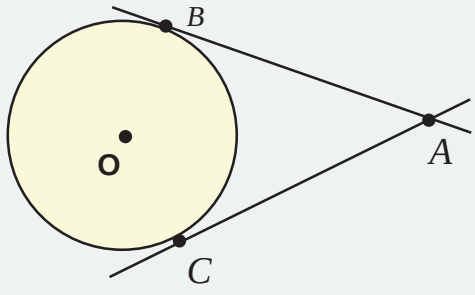
Жанаманың қасиеттері:

1) Жанау нүктесіне өткізілген радиус жанамаға перпендикуляр болады.

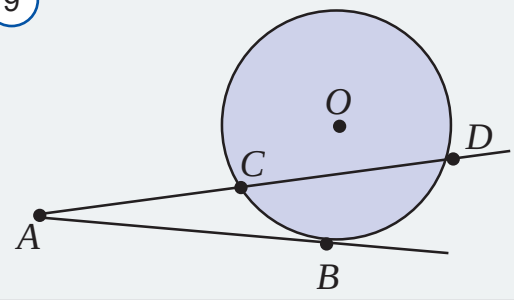
2) Дөңгелектен тыс жатқан нүктеден осы дөңгелекке екі жанама өткізуге болады, бұл жанамалардың кесінділері өзара тең *(8-сурет)*: $AB = AC$.

3) Егер AC қиюшы болып, шеңберді C және D нүктелерде қиып өтсе, AB жанама болса, $AB^2 = AD \cdot AC$ теңдік орынды *(9-сурет)*.

8



9



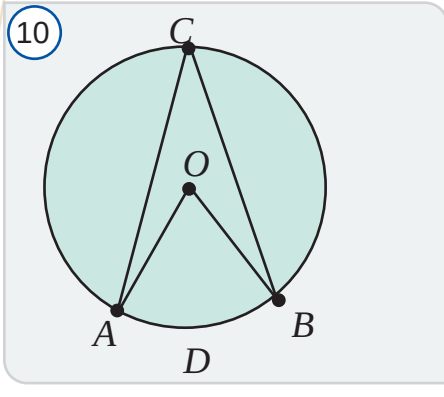
3°. Центрлік және іштей сызылған бұрыштар

Шеңбердегі екі нүкте арқылы шеңбер екі бөлікке бөлінеді. Бұл бөліктер *доғалар* деп аталады. Белгіленуі: ADB, ACB.

AOB бұрыш ADB доғаға түйіскен центрлік бұрыш *(10-сурет)*, ACB бұрыш ADB доғаға түйіскен және шеңберге *іштей сызылған бұрыш* деп аталады. Бұл бұрыштардың арасында $\angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ қатынас орынды.

Атап айтсақ, жарты шеңберге түйіскен ішкі бұрыш тікбұрыш болады *(11-сурет)*. Бір доғаға түйіскен шеңберге іштей сызылған бұрыштар өзара тең болады.

10



4°. Сектор және сегмент

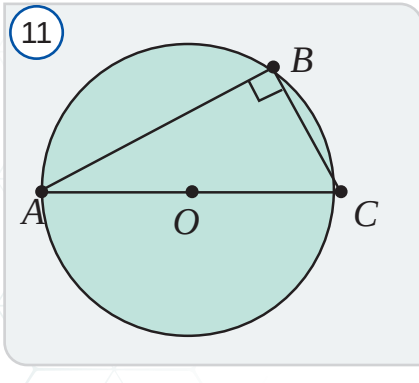
Дөңгелектің екі радиусымен шектелген бөлігі *сектор* деп аталады *(12-сурет)*. Сектор доғасының ұзындығы

$l = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$, мұнда α – центрлік бұрыштың градус өлшемі.

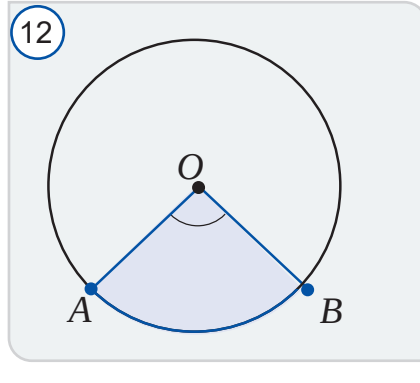
Сектор ауданы: $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360^\circ}$; $S = \frac{1}{2} \cdot R \cdot l$.

Сегмент – дөңгелектің ватары және осы ватар түйіскен доғасымен шектелген бөлігі *(13-сурет)*.

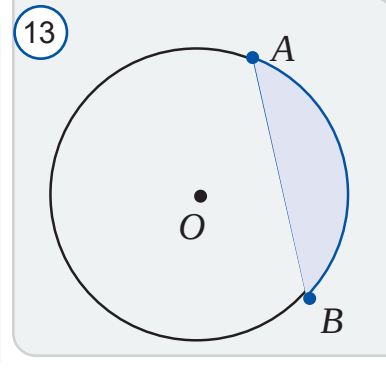
11



12



13



Сегмент ауданы: $S = S_{сектор} \pm S_{\Delta} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha \pm \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot \sin\alpha$.

1.5. Дұрыс көпбұрыштар

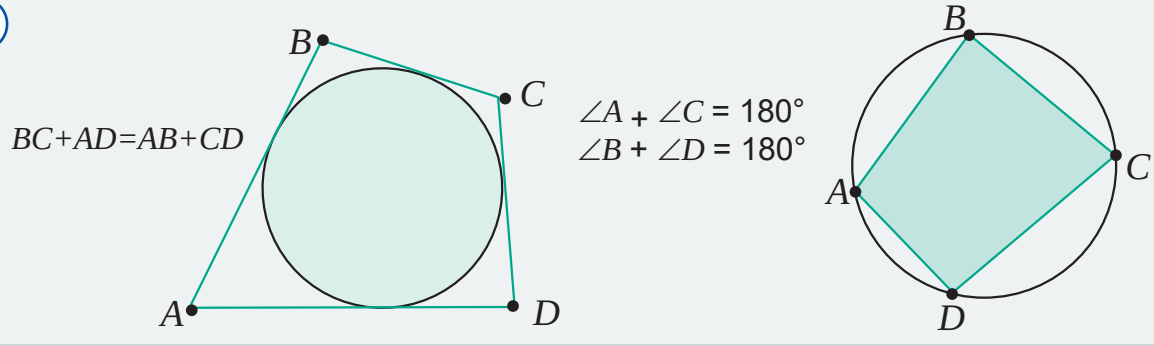
Дұрыс n бұрыштың қабырғасы a_n, периметрі P_n, ауданы S_n, іштей сызылған шеңбер радиусы r_n, сырттай сызылған шеңбер радиусы R_n, ішкі бұрышы α_n болса,

$$P_n = n \cdot a_n; \quad S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot r_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot a_n \cdot r_n; \quad \alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r_n = \frac{a_n}{2 \cdot tg\frac{180^\circ}{n}}$$

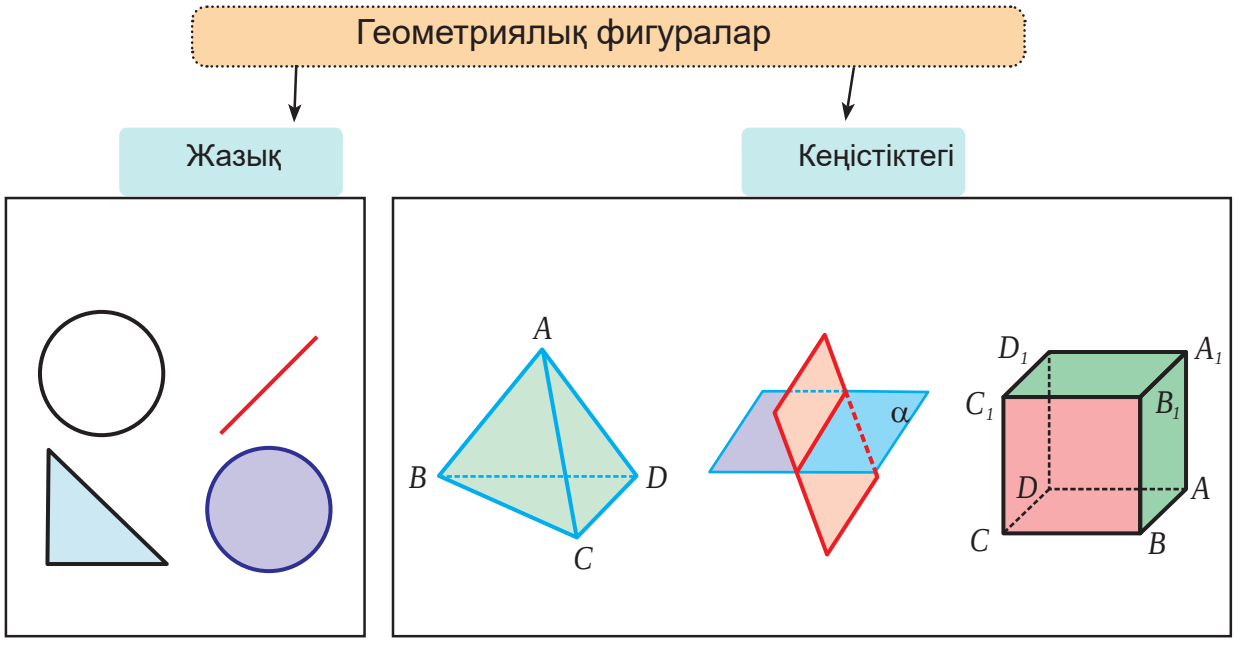
Шеңберге сырттай және іштей сызылған төртбұрыштар *(14-сурет)*.

14



II. Стереометрия

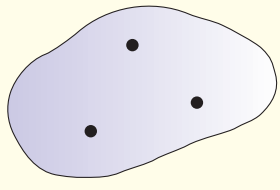
Кеңістіктегі геометриялық фигуралар жазықтықта толық жатқан немесе жатпайтынына қарай жазық және кеңістіктегі фигураларға бөлінеді.



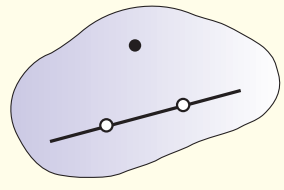
2.1. Стереометрияның негізгі ұғымдары

Геометрияның *стереометрия* бөлімі кеңістіктегі геометриялық фигуралардың (немесе денелердің) қасиеттерін үйренеді. *Стереометрия* сөзі грек тілінен алынған болып, *stereos* – “кеңістіктегі” *metreo* – “өлшеймін” деген мағынаны аңғартады. Кеңістіктегі негізгі геометриялық фигуралар нүкте, түзу және жазықтық. Олар стереометрияның негізгі ұғымдары болып, оларға анықтама берілмейді.

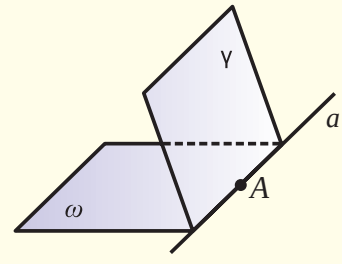
Стереометрия аксиомалары және олардан туындайтын нәтижелер



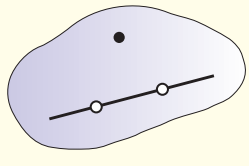
S_1 аксиома. Бір түзуде жатпайтын үш нүкте арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.



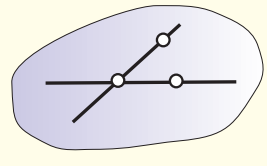
S_2 аксиома. Егер түзудің екі нүктесі бір жазықтықта жатса, ол жағдайда оның барлық нүктелері осы жазықтықта жатыр.



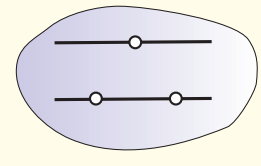
S_3 аксиома. Егер екі жазықтық ортақ нүктеге ие болса, ол жағдайда олар осы нүктеден өтетін ортақ түзуге де ие болады.



1-нәтиже. Түзу және онда жатпайтын нүкте арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.



2-нәтиже. Қиылысатын екі түзу арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.



3-нәтиже. Параллель екі түзу арқылы бір ғана жазықтық өткізуге болады.

2.2. Кеңістіктегі түзу және жазықтықтардың орналасуы

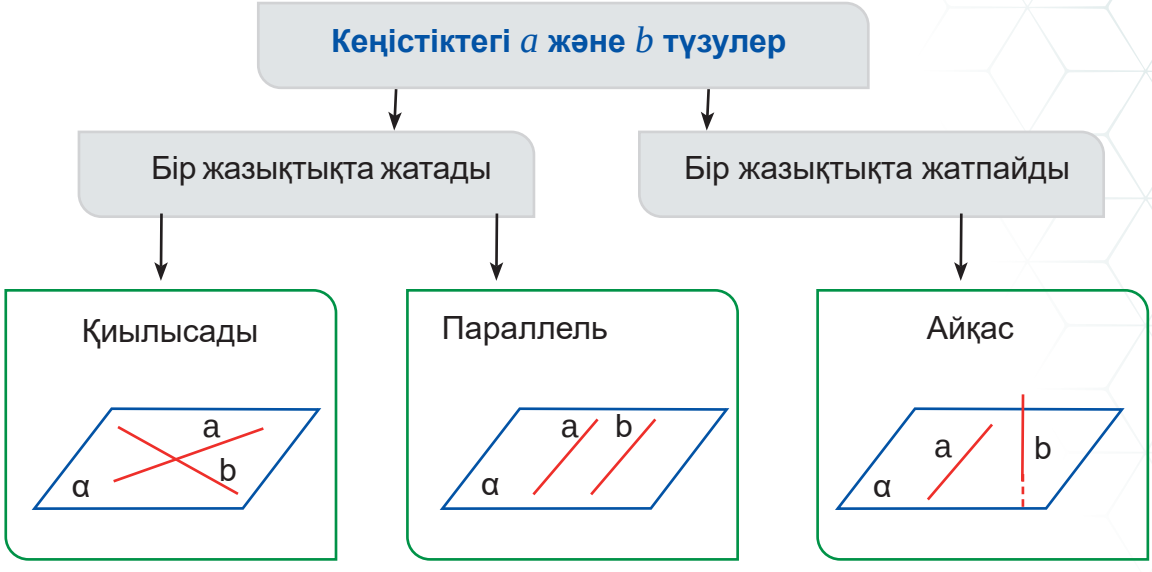
Кеңістіктегі түзулер

Кеңістіктегі екі түзу бір жазықтықта жатуы немесе жатпауы мүмкін.

Бір жазықтықта жатқан және тек бір ортақ нүктеге ие болған түзулер *қиылысатын түзулер* деп аталады.

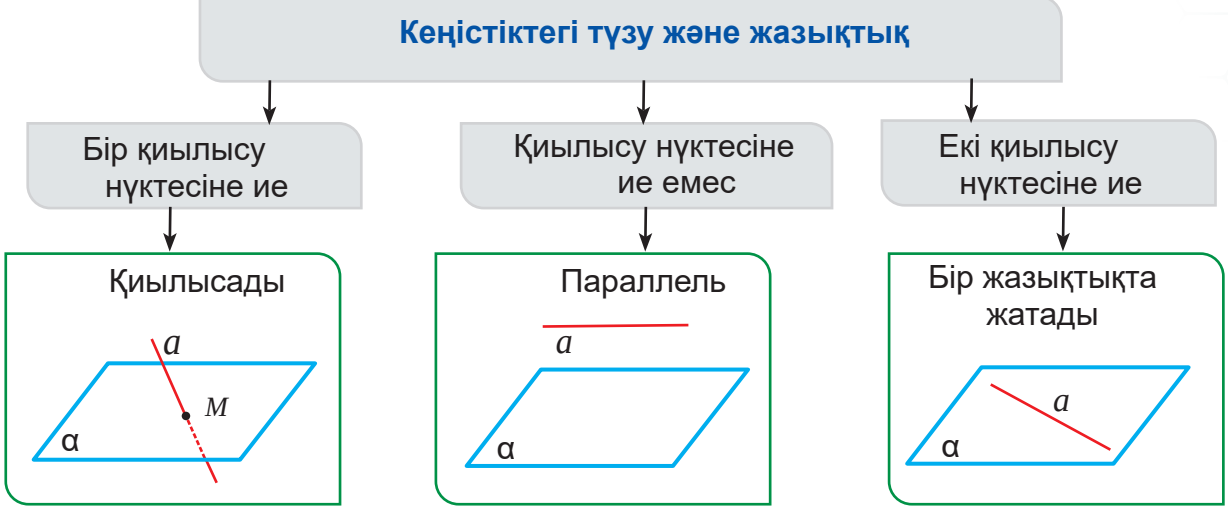
Бір жазықтықта жатқан және өзара қиылыспайтын түзулер *параллель түзулер* деп аталады.

Кеңістіктегі бір жазықтықта жатпайтын екі түзу *айқас түзулер* деп аталады.



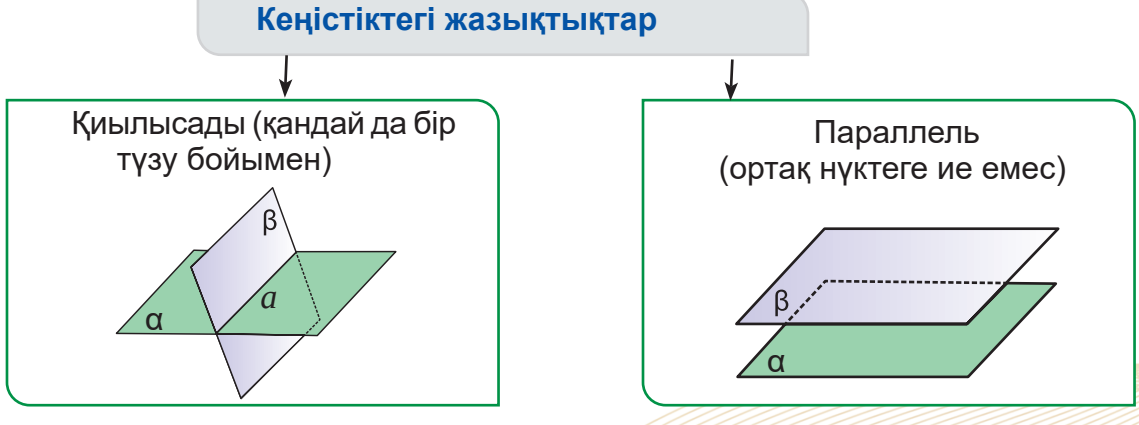
Кеңістіктегі түзулер және жазықтықтар

Түзу жазықтықта жатуы, оны қиып өтуі немесе қиып өтпеуі, яғни жазықтыққа параллель болуы мүмкін.



Кеңістіктегі жазықтықтар

Кеңістіктегі жазықтықтар қандай да бір түзу бойымен қиылысады немесе ортақ нүктеге ие болмауы, яғни өзара параллель болуы мүмкін.



Фигуралар	Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы		
a және b түзулер	Бір жазықтықта жатады.	Бір ортақ нүктеге ие.	Қиылысушы: $a \otimes b$
		Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $a \parallel b$
	Бір жазықтықта жатпайды.		Айқас: $a \div b$

Фигуралар	Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың өзара орналасуы		
a түзу және α жазықтық	a түзу α жазықтық жатпай-ды.	a түзу α жазықтықпен бір ортақ нүктеге ие.	Қиылысушы: $a \otimes \alpha$
		a түзу α жазықтықпен бір ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $a \parallel \alpha$
	a түзу α жазықтықта жатады.		$a \subset \alpha$

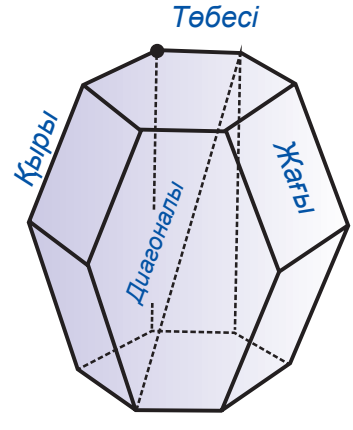
Фигуралар	Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы	
α және β жазықтықтар	Ортақ нүктеге ие.	Қиылысушы: $\alpha \cap b = a$ түзу.
	Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $\alpha \parallel \beta$.

2.3. Көпжақтар

Кеңістіктегі дене және көпжақ

Кеңістіктегі денелерді қандай да бір материалдық дене иеленген болмыстың бөлігі ретінде көз алдымызға келтіруге болады. Кеңістіктегі денені оның беті шектеп тұрады.

Беті жазық көпбұрыштан құралған дене *көпжақ* деп аталады.

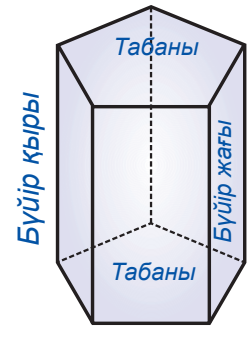


Призма

Призма деп екі жағы тең көпбұрыштардан құралған, параллель жазықтықтарда жататын және қалған барлық қырлары өзара параллель көпжаққа айтылады.

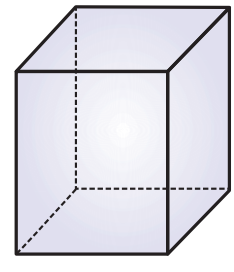
Дұрыс призма табандары дұрыс көпбұрыштардан құралған тік призмаға айтылады.

Дұрыс призманың бүйір беті табанының периметрі мен биіктігінің көбейтіндісіне тең.



Параллелепипед

Табаны параллелограмнан құралған призма *параллелепипед* деп аталады. Оның барлық алты жағы параллелограмнан құралған.



Параллелепипедтің қасиеттері

1) Параллелепипедтің диагональдарының центрлері оның *симметрия центрі* деп аталады.

2) Параллелепипедтің қарама-қарсы жақтары тең және параллель.

3) Параллелепипедтің барлық төрт диагоналы да бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді.

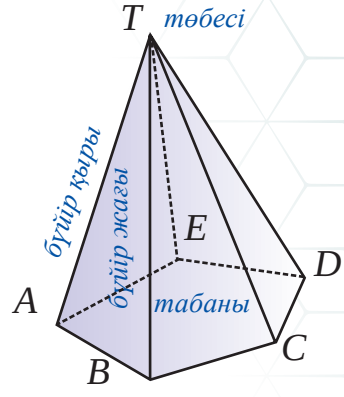
Бүйір қырлары табан жазықтығына перпендикуляр параллелепипед *тік параллелепипед* деп аталады.

Тікбұрышты параллелепипед тік параллелепипед болып, табандары тік төртбұрыштардан құралған. Тікбұрышты параллелепипедтің қырлары тең болса, мұндай параллелепипед *куб* деп аталады.

Кубтың барлық жақтары тең квадраттардан құралған.

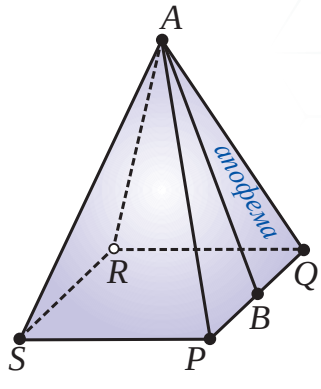
Пирамида

Пирамида деп оның бір жағы кез келген көпбұрыштан, қалған жақтары ортақ төбеге ие болған үшбұрыштардан құралған көпжаққа айтылады.



Пирамиданың биіктігі деп пирамиданың төбесінен табан жазықтығына түсірілген перпендикулярға айтылады.

Дұрыс пирамида деп табаны дұрыс көпбұрыштан құралған болып, биіктігі табанының центріне түсетін пирамидаға айтылады. Дұрыс пирамиданың барлық бүйір қырлары бір-біріне тең; барлық бүйір жақтары теңбүйірлі үшбұрыштар болады.

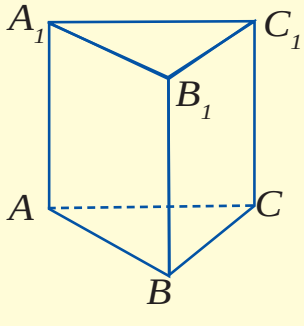
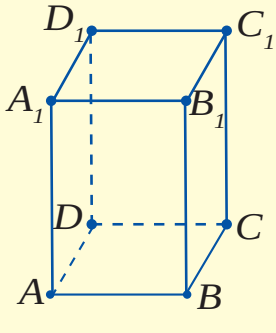
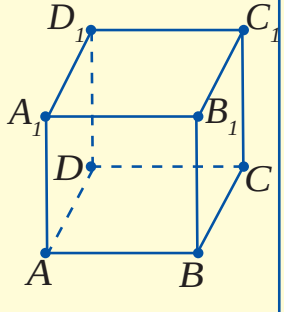
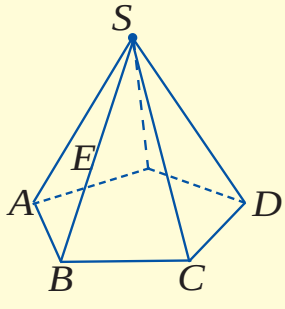


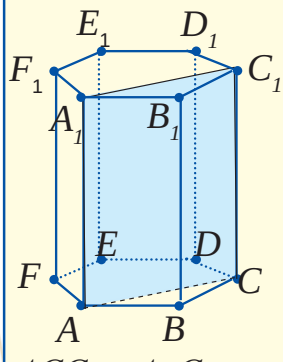
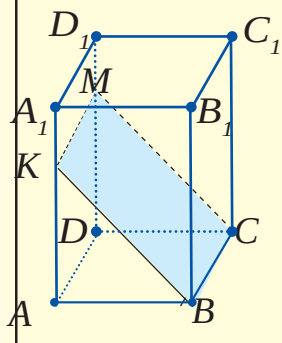
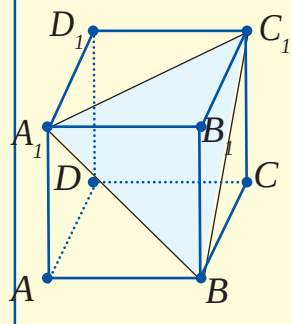
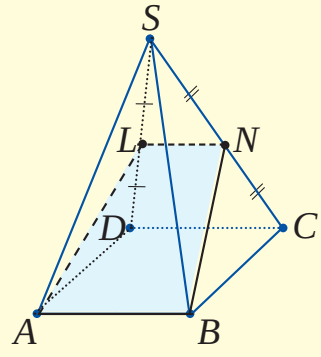
Егер пирамиданың табаны n бұрыштан құралған болса, ол жағдайда мұндай пирамида *n бұрышты пирамида* деп аталады. Үшбұрышты пирамида *тетраедр* деп аталады.

Егер тетраедрдің барлық қырлары тең болса, мұндай тетраедр *дұрыс тетраедр* деп аталады.

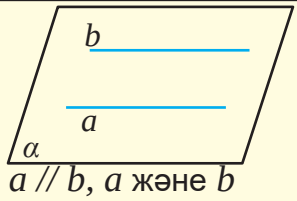
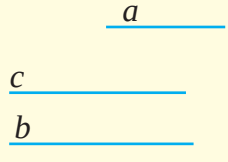
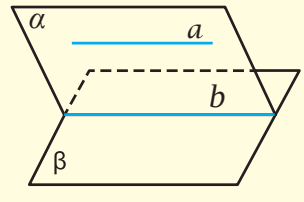
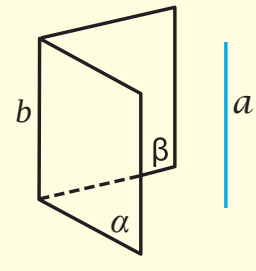
Дұрыс пирамиданың бүйір беті төмендегі формуламен есептеледі:

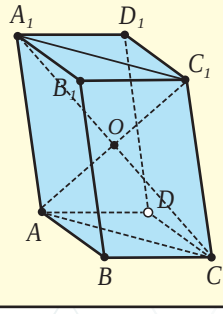
$S_{\text{бүйір}} = P \cdot h$, мұнда P – пирамида табанының периметрі, h – апофема.

Көпжақтар			
Призма	**Тікбұрышты параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
			
Табандары – көпбұрыш, жақтары – параллелограмдар.	Табандары – тік төртбұрыш, жақтары – тік төртбұрыштар.	Табандары – квадрат, жақтары – квадрат.	Табаны – көпбұрыш, жақтары – үшбұрыш.

Көпжақтардың қарапайым қималары			
Көпбұрышты призма	**Тікбұрышты параллелепипед**	**Куб**	**Пирамида**
 $ACC_1 - A,\ C,$ C_1 нүктелерден өтетін, қиюшы жазықтық; ACC_1A_1 – қима.	 $CBK - K$ нүкте және CB түзуден өтетін, қиюшы жазықтық; $CBKM$ – қима.	 $A_1BC_1 - BC_1$ және BA_1 түзулерден өтетін, қиюшы жазықтық; A_1C_1B – қима.	 $ABN - AB$ және LN параллель түзулерден өтетін, қиюшы жазықтық; $ABNL$ – қима.

2.4. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың параллельдігі

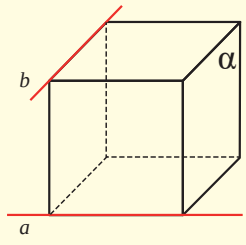
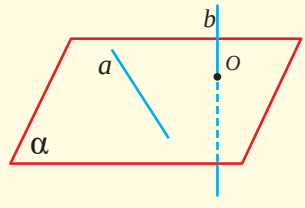
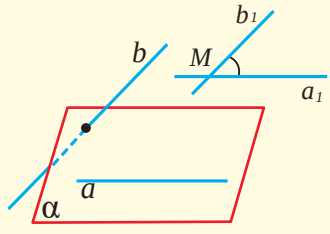
Параллель түзулер			
Анықтамасы	**Белгілері**		
 $a \parallel b$, a және b түзулер бір жазықтықта жатып өзара қиылыспайтын болса *параллель түзулер* деп аталады.	 Егер $a \parallel b$, $a \parallel c$ болса, $b \parallel c$ болады.	 Егер $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, $b \parallel a$ болады.	 Егер $\alpha \cap \beta = b$, $a \parallel \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, $a \parallel b$ болады.

Параллелепипедтің қасиеттері	
	1-қасиет. Табанының диагональдары мен бүйір қырларынан құралған төртбұрыш (AA_1C_1C) параллелограмм. 2-қасиет. Қарама-қарсы жақтары өзара тең ($AA_1B_1B = DD_1C_1C$). 3-қасиет. Барлық диагоналы бір нүктеде қиылысады және қиылысу нүктесінде тең екіге бөлінеді ($AO = OC_1$, $CO = OA_1$).

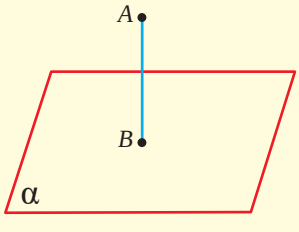
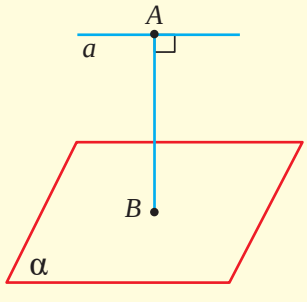
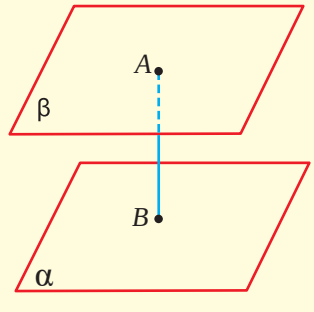
2.5. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтардың перпендикулярлығы

Түзу мен жазықтықтың перпендикулярлығы

Егер жазықтықты қиып өтетін түзу жазықтықтағы осы қиылысу нүктесінен өтетін кез келген түзуге перпендикуляр болса, ол жағдайда түзу осы жазықтыққа перпендикуляр деп аталады.

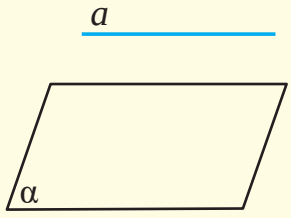
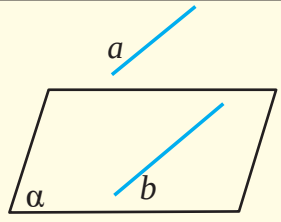
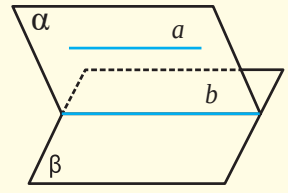
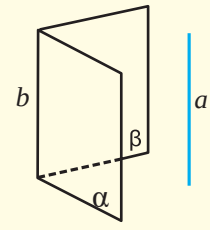
Айқас түзулер		
Анықтамасы	**Белгісі**	**Арасындағы бұрыш**
 Бір жазықтықта жатпайтын түзулер *айқас түзулер* деп аталады және $a \div b$ түрінде өрнектеледі.	 Егер $a \subset \alpha,\ a \cap b = O,$ $O \notin a$ болса $a \div b$ болады.	 Айқас түзулер арасындағы бұрыш деп оларға параллель болған, қиылысатын түзулер арасындағы бұрышқа айтылады.

Фигуралар	Кеңістіктегі түзулердің өзара орналасуы		
a және b түзулер	Бір жазықтықта жатады	Бір ортақ нүктеге ие.	Қиылысушы: $a \otimes b.$
		Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $a \mathbin{/\!/} b.$
	Бір жазықтықта жатпайды		Айқас: $a \div b.$

Кеңістіктегі қашықтықтар		
Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық	**Түзуден жазықтыққа дейінгі қашықтық**	**Жазықтықтар арасындағы қашықтық**
 $A \notin \alpha$ $AB \perp \alpha$	 $a \mathbin{/\!/} \alpha,$ $A \in a, AB \perp \alpha$	 $\alpha \mathbin{/\!/} \beta,$ $A \in \beta, AB \perp \alpha$

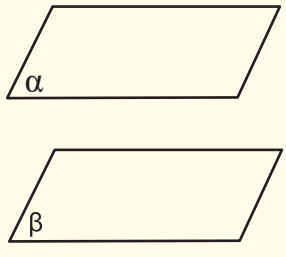
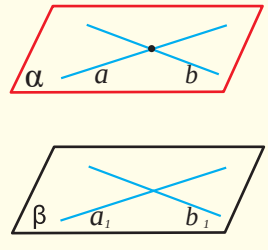
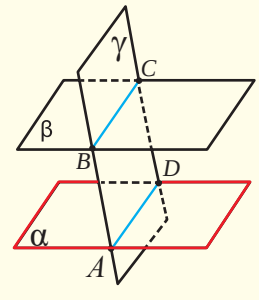
Кеңістіктегі түзу және жазықтықтардың параллельдігі

a түзу және α жазықтық	Көп ортақ нүктелерге ие.	Түзу жазықтықта жатыр: $a \subset \alpha.$
	Бір ортақ нүктеге ие.	Түзу жазықтықты қияды: $a \otimes \alpha.$
	Ортақ нүктеге ие емес.	Түзу жазықтыққа параллель: $a \mathbin{/\!/} \alpha.$

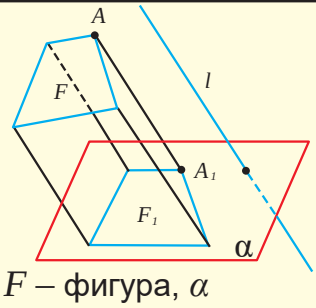
Анықтамасы	Белгілері	Қасиеттері	
			
Егер a түзу α жазықтықпен ортақ нүктеге ие болмаса, *түзу* және *жазықтық параллель* деп аталады және $a \parallel \alpha$ түрінде белгіленеді.	Егер a түзу – α жазықтықта жатпаса, $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ болса, ол жағдайда $a \parallel \alpha$ болады.	Егер b түзу α және β жазықтықтар қиылысу сызығы, $a \subset \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, ол жағдайда $b \parallel a$ болады.	Егер b түзу – α және β жазықтықтар қиылысу сызығы, $a \parallel \alpha$ және $a \parallel \beta$ болса, $a \parallel b$ болады.

Кеңістіктегі жазықтықтардың параллельдігі

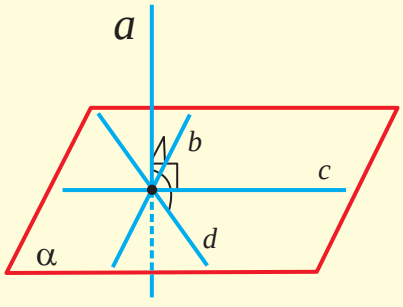
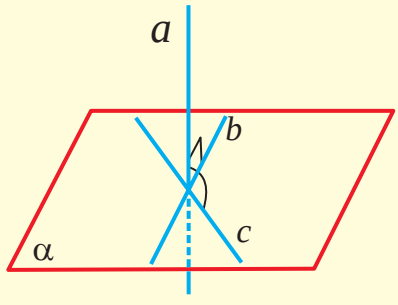
α және β жазықтықтар	Ортақ нүктеге ие	Қиылысады: $a \otimes \beta$.
	Ортақ нүктеге ие емес.	Параллель: $a \parallel \beta$.

Анықтамасы	Белгісі	Қасиеті
		
Қиылыспайтын α және β жазықтықтар *параллель жазықтықтар* деп аталады және $\alpha \parallel \beta$ түрінде белгіленеді.	Егер $a \subset a$, $b \subset \alpha$, $a \otimes b$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a_1 \otimes b_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ болса, $\alpha \parallel b$ болады.	Егер $\alpha \parallel \beta$ және γ қиюшы жазықтық, $\alpha \cap \gamma = AD$ және $\beta \cap \gamma = BC$ болса, $AD \parallel BC$ болады.

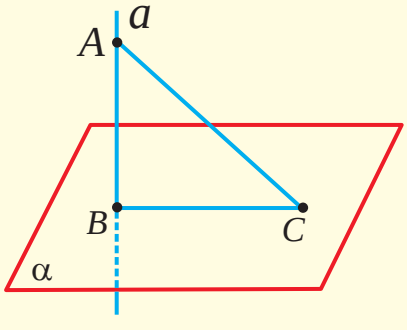
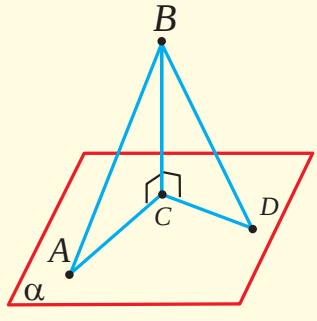
Параллель проекциялау

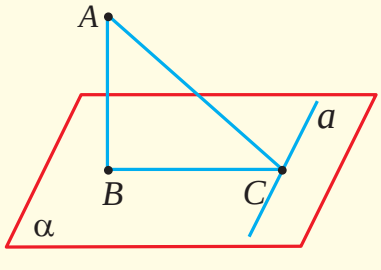
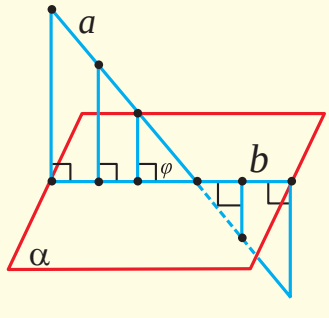
Анықтамасы	Параллель проекциялауда фигуралардың қасиеттері	
	Сақталады	Сақталмайды
	1) нүкте нүктеге, түзу түзуге, кесінді кесіндіге, үшбұрыш үшбұрышқа өтеді; 2) нүктелердің түзуге тиістілігі; 3) нүктелердің түзуге қатысты орналасуы; 4) түзулердің параллельдігі; 5) бір немесе параллель түзулерде жатқан кесінділердің теңдігі (немесе пропорциональдығы).	1) кесінді ұзындығы; 2) бұрыш шамасы; 3) түзулердің перпендикулярлығы; 4) бұрыштар теңдігі (пропорциональдығы); 5) қиылысатын түзулерде жатқан кесінділердің теңдігі (пропорциональдығы).
F – фигура, α – проекциялау жазықтығы, l - проекциялау бағыты, $F_1 - F$ фигура проекциясы.		

Түзудің жазықтыққа перпендикулярлығы

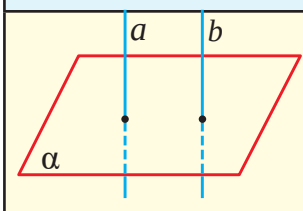
Анықтамасы	Белгісі
 Егер кез келген $b \in \alpha$ үшін $a \perp b$ болса, $a \perp \alpha$ деп аталады.	 Егер $b \in \alpha$, $c \in \alpha$ үшін $a \perp b$, $a \perp c$ болса, $a \perp \alpha$ болады.

Перпендикуляр және көлбеу

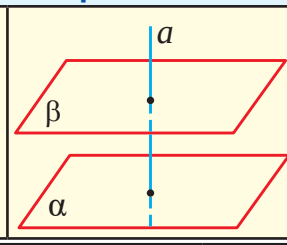
Анықтамасы	Қасиеттері
 Егер $a \perp \alpha$, $AB \notin \alpha$ болса, AB – α жазықтыққа A нүктеден түсірілген перпендикуляр; AC – көлбеу, BC – көлбеудің α жазықтыққа проекциясы.	 $BC < AB$, $BC < BD$. Егер $AB = BD$ болса, $AC = CD$ болады. Егер $AC = CD$ болса, $AB = BD$ болады. Егер $AC > CD$ болса, $AB > BD$ болады.

Үш перпендикуляр туралы теорема	Түзу және жазықтық арасындағы бұрыш
 $AB \perp a$ Егер $a \perp BC$ болса, $a \perp AC$ болады. Егер $a \perp AC$ болса, $a \perp BC$ болады.	 b – a-ның α жазықтықтағы проекциясы. φ – a және α жазықтық арасындағы бұрыш.

Жазықтықтардың параллельдігі мен перпендикулярлығы арасындағы байланыстар

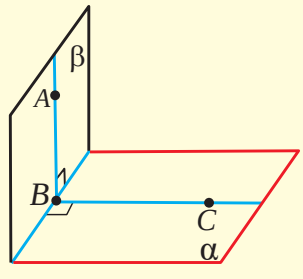
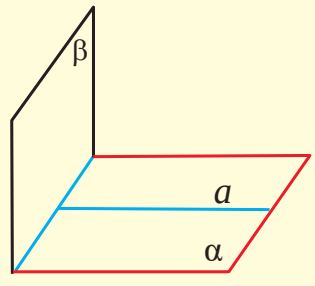
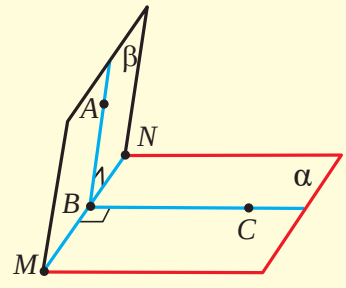


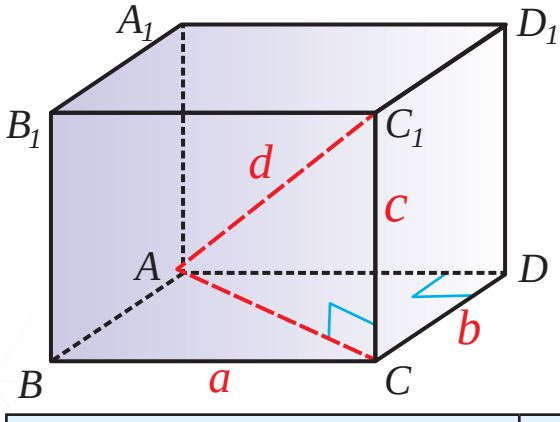
Егер $a \parallel b$, $\alpha \perp a$ болса, $\alpha \perp b$ болады.
Егер $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$ болса, $a \parallel b$ болады.



Егер $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$ болса, $a \perp \alpha$ болады.
Егер $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$ болса, $\alpha \parallel \beta$ болады.

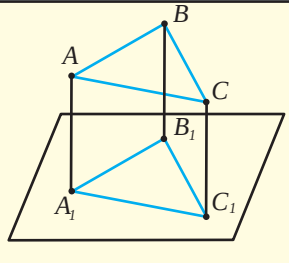
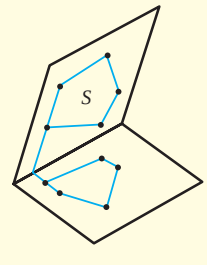
Жазықтықтардың перпендикулярлығы

Анықтамасы	Белгісі	Жазықтықтар арасындағы бұрыш
		
Егер $\angle ABC = 90°$ болса, α және β жазықтықтар перпендикуляр деп аталады.	Егер $a \subset \alpha$ және $a \perp \beta$ болса, $\alpha \perp \beta$ болады.	Егер $AB \perp MN$ және $CB \perp MN$ болса, $\angle ABC$ – α және β жазықтықтар арасындағы бұрыш.



Жалпыланған Пифагор теоремасы

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Кеңістіктегі ортогональ проекция	Көпбұрыш проекциясының ауданы
	
Ортогональ проекцияда $l \perp \alpha$. l – проекциялау бағыты; α – проекциялау жазықтығы.	S – көпбұрыш ауданы; S_1 – көпрбұрыш проекциясының ауданы; φ – көпбұрыш және проекция жазықтықтары арасындағы бұрыш.

$$S_1 = S \cdot \cos\varphi$$

O‘quv nashri

ГЕОМЕТРИЯ

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining
10-sinfi uchun darslik

(Qozoq tilida)

Аудармашы Тұрсынәлі Ахметов
Редактор Нұрбол Каракулов
Техникалық редактор Акмал Сулаймонов
Беттеген және дизайнер Ихволдин Салохитдинов
Суретші Умид Сулаймонов
Корректор Дилнура Байдиллева

Басуға __.__.2022 жылы рұқсат берілді. Пішімі 60x84 1/8.
Ариал гарнитурасы. Офсеттік әдіспен басылды. Шартты
баспа табағы 22,32. Есепті баспа табағы 19,43.
Таралымы _____ дана. Тапсырыс № ____.

“Book Media Nashr” ЖШҚ баспаханасында басылды.
Ташкент қаласы, Учтепа ауданы,
Чиланзар 14-квартал, 32а үй.

Пайдалануға берілген оқулықтың жағдайын көрсететін кесте

№	Оқушының аты, фамилиясы	Оқу жылы	Оқулықтың пайдалануға берілгендегі жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы	Оқулықты тапсырғандағы жағдайы	Сынып жетекшісінің қолы
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Пайдалануға берілген оқулықты оқу жылы аяқталғанда қайтарып тапсырады. Жоғарыдағы кестені сынып жетекшісі төмендегі бағалау мөлшері негізінде толтырады:

Жаңа	Оқулықты алғаш рет пайдалануға берілгендегі жағдайы.
Жақсы	Мұқаба бүтін, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыралмаған. Барлық парақтары бар, жыртылмаған, көшпеген, беттеріне жазбаған және сызбаған.
Орташа	Мұқаба езілген, аздап қана сызылған, шеттері жейілген, оқулықтың негізгі бөлігінен ажыраған жерлері бар. Пайдаланушы жағынан қанағаттанарлық жөнделген. Жұлынған, кейбір беттері сызылған.
Нашар	Мұқаба былғанған, сызылған, жыртылған, негізгі бөлігінен ажыраған немесе мүлдем жоқ, нашар жөнделген. Беттері жыртылған, парақтары жетіспейді, сызып, бояп тасталған. Оқулық қалпына келтіруге жарамайды.