

MATEMATIKA



ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ GEOMETRIYA I BÓLIM

Orta bilimlendiriw mákemesiniń 10 - klassları hám orta arnawlı,
kásip - óner bilimlendiriw mákemesiniń
oqıwshıları ushın sabaqlıq

1 - basılıwı

Ózbekistan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrliğı tastıyqlağan

TASHKENT
2017

UWK: 51(075.3)

KVK: 22.1

M 54

Algebra hám analiz tiykarları bóliminiń avtorları:

Mirzaaxmedov M. A., Ismailov Sh.N., Amanov A.Q.

Geometriya bóliminiń avtorı:

Haydarov B.Q.

Pikir bildiriwshiler:

Beshimov R.B. – Mirza Ulugbek atındaǵı Ózbekistan Milliy Universiteti "Geometriya hám topologiya" kafedrasınıń baslıǵı, fizika – matematika ilimleriniń doktori.

Pardaeva M.D. – Ózbekistan Respublika bilimlendiriw orayı direktori orınbasarı.

Davletov D.E. – Nizamiy atındaǵı TMPU "Matematikanı oqıtıw metodikası" kafedrası baslıǵı, fizika - matematika ilimleriniń kandidatu.

Rahimov G.M. – TIAXMII qasındaǵı akademiyalıq licey oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidatu, docent.

Akmalov A.A. – Tashkent qalası XBKQTQAI prorektorı, pedagogika ilimleriniń kandidatu, docent.

Sabaqlıqta qollanılǵan shártli belgiler:



– máseleni sheshiw (dálillew) diń baslanıwı



– máseleni sheshiw (dálillew) diń tamamlanıwı



– baqlaw jumısları hám test (sınaq) shınıǵıwları



– soraw hám tapsırmalar



– tiykarǵı maǵlıwmatlar



– quramalıraq shınıǵıwlar

Respublika máqsetli kitap qorı qarjıları esabınan baspadan shıǵarıldı.

ISBN 789943485952

© Barlıq huqıqlar qorǵanılgan

© JShJ "EXTREMUM PRESS", 2017

I BÓLIM



KÓPLIKLER. LOGIKA

1-4

KÓPLIKLER TÚSINIGI, KÓPLIKLER ÚSTINDE ÁMELLER. TOLÍQTÍRÍWSHÍ KÓPLIK

Kóplikler matematikanıń dáslepki túsiniyelerinen biri bolıp, onı ózinen ápiwayıraq túsiniyeler arqalı anıqlap bolmaydı. Turmısta belgili obektler jıynaǵın bir pútın zat dep qarawǵa tuwrı keledi. Máselen, biolog málim (belgili) bir aymaqtaǵı ósimlikler hám haywanat dúnyasın úyrenen eken, ol jániwarlardı túrleri boyınsha, túrlerin bolsa tuqımları boyınsha klasargá ajıratıp shıǵadı. Hár bir túr bir pútın dep qaralatuǵın jániwarlar jıynaǵı (kompleksi) bolıp esaplanadı.

Kóplik qálegen tábiyatlı obektlerden ibarat bolıwı múmkin. Máselen, Evroaziya materigindegi barlıq dáryalar yamasa sózliktegi barlıq sózler kóplik bola aladı.

Obektler jıynaǵın matematikalıq jaqtan túsindiriw beriw ushın kóplik túsiniyin ataqlı nemis matematigi **G.Kantor** (1845 – 1918) tómendegishe kirgizgen:

«Kóplik oyımızda bir pútın dep qaralıwshı jıynaq bolıp esaplanadı».

Kóplikti dúziwshı obektler onıń elementleri delinedi.

Kóplik, ádette, qolaylıq ushın, latin álipbesiniń bas háripleri, máselen, $A, B, C, \dots$, onıń elementleri bolsa kishi háripleri, máselen, $a, b, c, \dots$ menen belgilenedi.

Elementleri $a, b, c, \dots$ bolǵan A kóplik qawsırmalar (skobkalar) járdeminde $A = \{a, b, c, \dots\}$ kórinisinde jazıladı.

$\{6, 11\}$, $\{11, 6\}$, $\{11, 6, 6, 11\}$ jazıwlar bir kóplikti anlatadı.

Máselen, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – onlıq sanaq sistemasındaǵı cıfralar kópligi, $V = \{a, e, i, o, u\}$ – inglis tilindegi dawıslı háripler kópligi. 10 “A” klastaǵı oqıwshılar kópligin $\{a_1, a_2, \dots, a_{30}\}$ benen belgilesek, a_1 – jurnaldaǵı birinshi nomerli oqıwshı, $\dots$, a_{30} – jurnaldaǵı otızınshı nomerli oqıwshını bildiredi.

x A kópliktiń elementi ekenligi $x \in A$ kórinisinde, elementi emesligi bolsa $x \notin A$ kórinisinde jazıladı hám birinshi jaǵdayda " x element A -ǵa tiyisli", ekinshi jaǵdayda " x element A -ǵa tiyisli emes" dep oqıladı.

Máselen, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ushın $4 \in A$, biraq $9 \notin A$.

Eger kóplikti quraytuǵın elementler shekli sanda bolsa, bunday kóplik **shekli kóplik**, kerı jaǵdayda bolsa **sheksiz kóplik** delinedi.

Máselen, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ kóplik shekli, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ – barlıq natural sanlar kópligi bolsa sheksiz kóplik esaplanadı.

$n(A)$ dep shekli A kópliktiń barlıq elementleri sanın belgilesek, $A = \{2, 3, 5, 8, 13, 21\}$ kópliktiń barlıq elementleri sanı 6 ǵa teń bolǵanı ushın, $n(A) = 6$ boladı.

Sheksiz kóplikke jáne bir mısıl retinde 13 ten kishi bolmaǵan barlıq natural sanlar kópligin keltiriwge boladı.

Birde bir elementke iye bolmaǵan kóplik bos kóplik delinedi hám $\emptyset$ kórinisinde belgilenedi.

$\emptyset$ kóplik te shekli esaplanadı hám onıń ushın $n(\emptyset) = 0$.

Sheksiz A kóplik ushın $n(A) = \infty$ belgilew qabıl etilgen.

Eger A kópliktiń hámme elementleri B kóplikke tiyisli bolsa, A kóplik B kópliktiń úles kópligi delinedi hám $A \subseteq B$ kibi jazıladı.

Bunday jaǵdayda " A kóplik B da jatadı" yamasa " A kóplik B nıń bólegi" dep te ataladı.

$\{a\}$ kóplik $\emptyset$ hám $\{a\}$, yaǵnıy eki úles kópliklerge iye.

$\{a, b\}$ kóplik bolsa tórt dana: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ hám $\{a, b\}$ úles kópliklerge iye.

Máselen, $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sebebi, birinshi kópliktiń hámme elementleri ekinshi kópliktiń de elementleri boladı.

A kópliktiń B kóplikke tiyisli bolmaǵan elementleri bar bolsa, A kóplik B nıń úles kópligi bola almaydı hám bul jaǵday $A \not\subseteq B$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ bolsın. $1 \notin B$ bolǵanı ushın $A \not\subseteq B$.

$\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$ qatnaslar orınlı ekenligi málim.

$A \subseteq B$, hám $B \subseteq A$ bolsa, bul kóplikler birdey elementlerden ibarat bolıp, olar teń (ústpe-úst túsiwshi) kóplikler delinedi hámde bul $A = B$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, durıs úshmúyeshlikler kópligi barlıq múyeshleri óz – ara teń bolǵan úshmúyeshlikler kópligi menen ústpe-úst túsedı. Bunıń sebebi qálegen úshmúyeshliktiń barlıq múyeshleri teń hám kerisinshe, eger úshmúyeshlikte barlıq múyeshler teń bolsa, ol durıs boladı.

Tiykargı sanlı kópliklerdi esletip ótemiz:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – natural sanlar kópligi; $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ – pütün

sanlar kópligi; $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ – racional sanlar kópligi;

$\mathbb{R}=(-\infty; +\infty)$ – haqıyqıy sanlar kópligi.

Kópliklerdiń birlespesi hám kesilispesi

1) A, B kópliklerdiń **birlespesi** dep bul kópliklerden keminde birewiniń elementi bolğan elementlerden quralğan kóplikke ataladı.

A, B kópliklerdiń birlespesi $A \cup B$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $P = \{1, 3, 4\}$ hám $Q = \{2, 3, 5\}$ ushın $P \cup Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) A, B kópliklerdiń **kesilispesi** dep bul kópliklerdiń ulıwma elementlerinen quralğan kóplikke ataladı.

A, B kópliklerdiń kesilispesi $A \cap B$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, $P = \{1, 3, 4\}$ hám $Q = \{2, 3, 5\}$ ushın $P \cap Q = \{3\}$.

Ulıwma elementlerge iye bolmağan eki kóplik **óz-ara kesilispeytuǵın** kóplikler delinedi.

I-misal. $M = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ hám $N = \{3, 4, 6, 9, 10\}$ kóplikler ushın tómendegilerdi anıqlań:

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| a) ras yaki jalğan ekenin: | I $4 \in M$; | II $6 \notin M$; |
| b) kópliklerdi tabıń: | I $M \cap N$; | II $M \cup N$; |
| c) shın yamasa ótirik ekenligin: | I $M \subseteq N$; | II $\{9, 6, 3\} \subseteq N$. |

 a) 4 sanı M kópliktiń elementi bolmağanı ushın $4 \in M$ qatnas jalğan (ótirik). 6 sanı M kópliktiń elementi bolmağanı ushın $6 \notin M$ qatnas ras (shın).

b) $M \cap N = \{3, 9\}$, sebebi tek 3 hám 9 sanları ǵana eki kópliktiń de elementleri. $M \cup N$ kóplikti tabıw ushın yaki M ge yaki N ge tiyisli bolğan elementlerdi jazamız: $M \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

c) $M \subseteq N$ qatnas jalğan (orınlı emes), sebebi M kóplikte N ge tiyisli emes (bolmağan) elementler bar. $\{9, 6, 3\} \subseteq N$ qatnas shın, sebebi N de $\{9, 6, 3\}$ kóplik elementleri bar. 

Shınıǵıwlar

1. $\in, \notin, \subseteq$ belgilerden paydalanıp, jazıń:

- 5 sanı D kópliktiń elementi;
- 6 sanı D kópliktiń elementi emes;
- $\{2, 5\}$ kóplik $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kópliktiń úles kópligi;
- $\{3, 8, 6\}$ kóplik $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kópliktiń úles kópligi emes;

2. a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$, $B = \{5, 8, 10, 13, 9\}$;
 b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$;
 c) $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kóplikler ushın $A \cup B$ hám $A \cap B$ lardı tabıń.
3. Kópliklerdiń elementleri sanın tabıń:
 a) $A = \{6, 7, 9, 11, 12\}$; b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
 c) $A \cap B$; d) $A \cup B$.
4. Kópliklerdiń shekli yamasa shekli emesligin anıqlań:
 a) 10 nan úlken biraq 20 dan kishi natural sanlar kópligi;
 b) 5 ten úlken bolğan natural sanlar kópligi.
5. Kópliklerden qaysıları óz – ara kesilispeydi:
 a) $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$;
 b) $P = \{3, 5, 6, 7, 8, 10\}$; $Q = \{4, 9, 10\}$?

Ayırım jaǵdaylarda kóplikti beriw ushın onıń elementleri ushın orınlı, basqa elementler ushın orınlı bolmaǵanan *xarakteristikalıq qásiyet* kórsetiledi. Eger x element P qásiyetke iye degen pikir qısqasha $P(x)$ dep jazılǵan bolsa, P qásiyetke iye bolǵan barlıq elementler kópligi $\{x|P(x)\}$ kóriniste belgilenedi.

Máselen, $A = \{x | -2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ jazıw tómendegishe oqıladı: "-2 den úlken yamasa teń hámde 4 ten kishi yamasa teń bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi".

Bul kóplik sanlar kósherinde tómendegishe súwretlenedi:



$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ekenligi kórinip turıptı hám ol shekli, bunda $n(A) = 7$.

Tap usınday $B = \{x | -2 \leq x < 4, x \in \mathbb{R}\}$ jazıw tómendegishe oqıladı: "-2 den úlken yamasa teń hámde 4 ten kishi bolǵan barlıq haqıyqıy sanlar kópligi".

Bul kóplik sanlar kósherinde tómendegishe súwretlenedi:



$B = [-2, 4)$ ekenligi kórinip turıptı hám ol sheksiz, bunda $n(B) = \infty$.

2-misal. $A = \{x | 3 < x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsın.

- a) Bul jazıw qalay oqıladı?
- b) Bul kópliktiń elementlerin atpa – at jazıp shıǵıń;
- c) $n(A)$ nı tabıń.

- △ a) "3 ten úlken hámde 10 nan kishi yamasa teń bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi";
 b) $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
 c) $n(A) = 7$. ▲

Shınıǵıwlar

6. Kópliklerden qaysıları shekli, qaysıları sheksiz:
 a) $\{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{x \mid -2 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$;
 c) $\{x \mid x \geq 5, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $\{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$?
7. Jazıwları oqıń:
 a) $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x \mid -2 < x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$;
 c) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$; d) $A = \{x \mid 5 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{Q}\}$.
 Eger múmkin bolsa, usı kóplikler elementlerin atpa – at jazıp shıǵıń.
8. Tómendegi kópliklardi jazıń:
 a) "-100 den úlken hámde 100 den kishi bolǵan barlıq pútin sanlar kópligi";
 b) "1000 nan úlken bolǵan barlıq haqıyqıy sanlar kópligi";
 c) "2 den úlken yamasa teń hámde 3 ten kishi yamasa teń bolǵan barlıq racional sanlar kópligi".
9. Sorawlarǵa juwap berıń:
 a) $\{a, b, c\}$ hám $\{a, b, c, d\}$ kópliklerdiń barlıq úles kópliklerin jazıń. Olar qansha?
 b) Eger B kóplik n elementke iye bolsa, ol jaǵdayda B kóplik neshe úles kópliklerge iye?
10. Qaysı jaǵdaylarda $A \subseteq B$ boladı?
 a) $A = \emptyset$ hám $B = \{2, 5, 7, 9\}$; b) $A = \{2, 5, 8, 9\}$ hám $B = \{8, 9\}$;
 c) $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$ hám $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$;
 d) $A = \{x \mid 3 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Q}\}$ hám $B = \{x \mid 0 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{R}\}$;
 e) $A = \{x \mid -10 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$ hám $B = \{z \mid 0 \leq z \leq 5, z \in \mathbb{Z}\}$;
 f) $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$ hám $B = \{y \mid 0 < y \leq 2, y \in \mathbb{Q}\}$.

Meyli, bizdi 1 den úlken yamasa teń hámde 8 den kishi yamasa teń bolǵan barlıq natural sanlar kópligi qızıqtırsın hám biz onıń úles kópliklerin qarap shıqpaqshımız.

Ádette bul jaǵdayda $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{N}\}$ kóplik kirgiziledi hám ol **universal kóplik** dep ataladı.

A kóplikning A' **tolıqtırwshısı** dep U universal kópliktiń A ға tiyisli bolmağan barlıq elementleri kópligine ataladı.

Máselen, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ universal kóplik bolsa, $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ kópliktiń **tolıqtırwshısı** $A' = \{2, 4, 6\}$ kóplik boladı.

Bunnan

- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = U$
- $n(A) + n(A') = n(U)$, ekenligi málim,

yaǵnıy A hám A' kóplikler ulıwma elementlerge iye emes hámde olardı quraytuǵın barlıq elementler U dı payda etedi.

3-mısal. Universal kóplik $U = \{\text{Barlıq natural sanlar}\}$ bolsa, C' tı tabıń.

- a) $C = \{\text{Barlıq jup sanlar}\};$
- b) $C = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{Z}\}, U = \mathbb{Z}.$

- △ a) $C' = \{\text{Barlıq taq natural sanlar}\};$
- b) $C' = \{x \mid x \leq 1, x \in \mathbb{Z}\}.$ ▲

4-mısal. $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \mid -3 \leq x < 2, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegi kóplik elementlerin jazıń:

- a) $A;$ b) $B;$ c) $A';$ d) $B';$
- e) $A \cap B;$ f) $A \cup B;$ g) $A' \cap B;$ h) $A' \cup B'.$

- △ a) $A = \{1, 2, 3, 4\};$ b) $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$
- c) $A' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 5\};$ d) $B' = \{-5, -4, 2, 3, 4, 5\}$
- e) $A \cap B = \{1\};$ f) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
- g) $A' \cap B = \{-3, -2, -1, 0\};$ h) $A' \cup B' = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}.$ ▲

Shınıǵıwlar

11. C' tı tabıń.

- a) $U = \{\text{inglis tili háripleri}\}, C = \{\text{únli háripler}\};$
- b) $U = \{\text{pútın sanlar}\}, C = \{\text{teris pútın sanlar}\};$
- c) $U = \mathbb{Z}, C = \{x \mid x \leq -5, x \in \mathbb{Z}\};$
- d) $U = \mathbb{Q}, C = \{x \mid x \leq 2 \text{ yamasa}, x \geq 8, x \in \mathbb{Q}\}.$

12. $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}, A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}, B = \{x \mid 5 \leq x \leq 8, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

- a) $A;$ b) $A';$ c) $B;$ d) $B';$
- e) $A \cap B;$ f) $A \cup B;$ g) $A \cap B'.$

13. $n(U) = 15, n(P) = 6, n(Q) = 4$ bolsa, tómendegilerdi tabıń:

- a) $n(P');$ b) $n(Q).$

- 14.** $U = \{x \mid 0 < x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 \leq x \leq 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tóمندegilerdi tabıń:

- a) B' ; b) C' ; c) A' ; d) $A \cap B$;
 e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$; g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$;

5-mısal. $U = \mathbb{N}$, $P = \{4 \text{ sanınıń 50 den kishi bolǵan eselileri}\}$ hám
 $Q = \{6 \text{ sanınıń 50 den kishi bolǵan eselileri}\}$ bolsın.

- a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
 b) $P \cap Q$ dı tabıń;
 c) $P \cup Q$ dı tabıń;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

 a) $P = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,

$Q = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$;

b) $P \cap Q = \{12, 24, 36, 48\}$;

c) $P \cup Q = \{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 48\}$;

d) $n(P \cup Q) = 16$ hám $n(P) + n(Q) - n(P \cap Q) = 12 + 8 - 4 = 16$.

Demek, $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı eken. 

Shıńǵırlar

- 15.** $U = \mathbb{N}$, $P = \{25 \text{ ten kishi bolǵan ápiwayı sanlar}\}$ hám
 $Q = \{2, 4, 5, 11, 12, 15\}$ bolsın.

- a) P kóplik elementlerin jazıń;
 b) $P \cap Q$ dı tabıń;
 c) $P \cup Q$ dı tabıń;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

- 16.** $U = \mathbb{N}$, $P = \{30 \text{ dıń bóliwshileri}\}$ hám
 $Q = \{40 \text{ tıń bóliwshileri}\}$ bolsın.

- a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
 b) $P \cap Q$ dı tabıń;
 c) $P \cup Q$ dı tabıń;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

- 17.** $U = \mathbb{N}$, $P = \{4 \text{ sanınıń 30 hám 60 sanlar arasındadı eselileri}\}$ hám
 $Q = \{6 \text{ sanınıń 30 hám 60 sanlar arasındadı eselileri}\}$ bolsın.

- a) P, Q kóplikler elementlerin jazıń;
 b) $P \cap Q$ dı tabıń;
 c) $P \cup Q$ dı tabıń;
 d) $n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

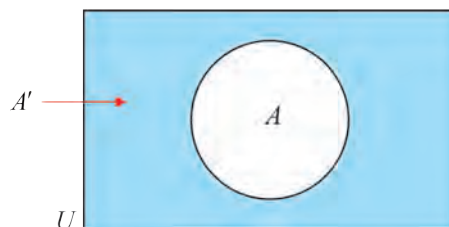
- 18.** $U = \{x \mid 0 \leq x < 12, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{x \mid 2 < x < 7, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $B = \{x \mid 3 \leq x < 9; x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid 5 < x \leq 11, x \in \mathbb{Z}\}$ bolsa, tómendegilerdi
 tabıń:
- a) B' ; b) C' ; c) A' ;
 d) $A \cap B$; e) $(A \cap B)'$; f) $A' \cap C$;
 g) $B' \cup C$; h) $(A \cup C) \cap B'$.
- 19.** $U = \mathbb{Z}$, $C = \{y \mid -4 \leq y \leq -1, y \in \mathbb{Z}\}$ hám
 $D = \{y \mid -7 \leq y < 0, y \in \mathbb{Z}\}$ bo'lsin.
- a) C, D kóplikler elementlerin jazıń;
 b) $C \cap D$ nı tabıń;
 c) $C \cup D$ nı tabıń;
 d) $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$ teńlik orınlı ekenligin tekserin.
- 20.** $U = \mathbb{N}$, $P = \{12 \text{ niń bóliwshileri}\}$, $Q = \{18 \text{ dıń bóliwshileri}\}$ hám
 $R = \{27 \text{ niń bóliwshileri}\}$ bolsın.
- a) P, Q, R kóplikler elementlerin jazıń;
 b) **I** $P \cap Q$; **II** $P \cap R$;
 III $Q \cap R$; **IV** $P \cup Q$;
 V $P \cup R$; **VI** $Q \cup R$;
 c) **I** $P \cap Q \cap R$; **II** $P \cup Q \cup R$,
 lardı tabıń;
- 21.** $U = \mathbb{N}$, $A = \{4 \text{ sanınıń } 40 \text{ tan kishi bolğan eselileri}\}$,
 $B = \{6 \text{ sanınıń } 40 \text{ tan kishi bolğan eselileri}\}$ hám
 $C = \{12 \text{ sanınıń } 40 \text{ tan kishi bolğan eselileri}\}$ bolsın.
- a) A, B, C kóplikler elementlerin jazıń;
 b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
 III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
 c) $A \cup B \cup C$ nı tabıń;
 d) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) +$
 $+ n(A \cap B \cap C)$ teńlik orınlı ekenligin tekserin.
- 22.** $U = \mathbb{N}$, $A = \{6 \text{ sanınıń } 31 \text{ den kishi bolğan eselileri}\}$,
 $B = \{30 \text{ sanınıń bóliwshileri}\}$ hám
 $C = \{30 \text{ sanınan kishi bolğan ápiwayı sanlar}\}$ bolsın.
 Kóplikler elementlerin jazıń:
- a) A, B, C ;
 b) **I** $A \cap B$; **II** $B \cap C$;
 III $A \cap C$; **IV** $A \cap B \cap C$.
 c) $A \cup B \cup C$ nı tabıń;

d) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ teńlik orınlı ekenligin tekseriń.

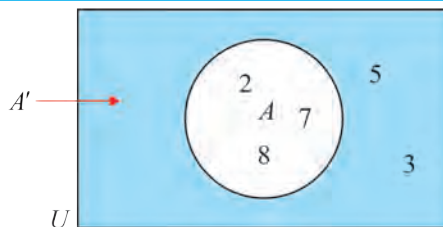
Venn diagrammaları

Kópliklerdi Venn diagrammaları járdeminde súwretlew máqsetke muwapıq. Venn diagrammasında U universal kóplik – tuwrı tórtmúeshlik, kóplik bolsa usı tórtmúeshlik ishinde jatırǵan dóńgelek kórinisinde súyretlenedi.

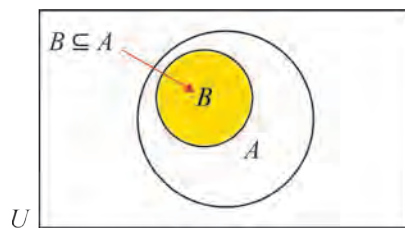
Máselen, súwrette U universal kóplik ishinde A kóplik súwretlengen. Universal kópliktiń sheńberden tısqaridaǵı boyalǵan bólegi A kóplikning A' tolıqtırılıshın bildiredi:



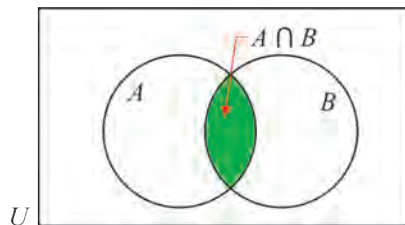
Eger $U = \{2, 3, 5, 7, 8\}$, $A = \{2, 7, 8\}$ hám $A' = \{3, 5\}$ bolsa, usı kóplikler Venn diagrammasında usılayınsha (tómendegishe) súwretlenedi:



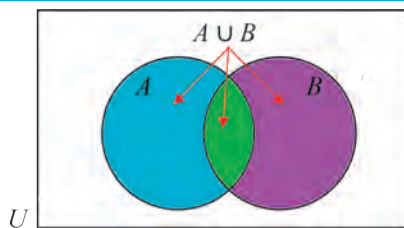
Eger $B \subseteq A$ bolsa, ol jaǵdayda B kópliktiń qálegen elementi A kóplikke tiyisli. Demek, buǵan sáykes Venn diagrammasında B kóplikti ańlatıwshı dóńgelek A kóplikti ańlatıwshı dóńgelek ishinde jatadı:



$A \cap B$ kesilispe elementleri hám A ǵa, hám B ǵa tiyisli boladı. Demek, buǵan sáykes Venn diagrammasında $A \cap B$ kóplikti ańlatıwshı boyalǵan bólegi usılay súwretlenedi:



$A \cup B$ birlespe elementleri yaki A ga, yaki B ga, yaki ekewine de tiyisli boladı. Demek, buğan saykes Venn diagrammasında $A \cup B$ kópikliti añlatıwshı bólegi usılay (tómendegishe) súwretlenedi:



6-mısal.

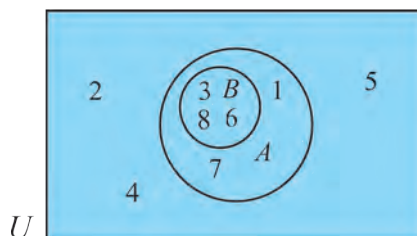
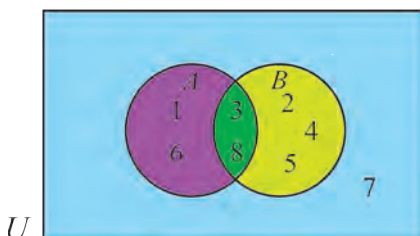
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bolsa, tómendegi kópiklerdi Venn diagrammasında súwretleń:

a) $A = \{1, 3, 6, 8\}$ hám $B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$;

b) $A = \{1, 3, 6, 7, 8\}$ hám $B = \{3, 6, 8\}$.

△ a) $A \cap B = \{3, 8\}$

b) $A \cap B = \{3, 6, 8\}$, $B \subseteq A$



Shınıǵıwlar

23. A, B kópiklerdi Venn diagrammasında súwretleń:

a) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ hám $B = \{5, 7\}$;

b) $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 6\}$ hám $B = \{3, 5, 7\}$;

c) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ hám $B = \{1, 4, 6, 7\}$;

d) $U = \{3, 4, 5, 7\}$, $A = \{3, 4, 5, 7\}$ hám $B = \{3, 5\}$.

24. $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{10 \text{ nan kishi bolğan taq sanlar}\}$ hám $B = \{10 \text{ nan kishi bolğan ápiwayı sanlar}\}$ bolsın.

a) A, B kópiklerdiń elementlerin jazıń;

b) A, B kópiklerdi Venn diagrammasında súwretleń;

c) $A \cap B$ hám $A \cup B$ kópiklerdi tabıń.

25. $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{6 \text{ nıń eselileri}\}$ hám $B = \{9 \text{ dıń eselileri}\}$ bolsın.

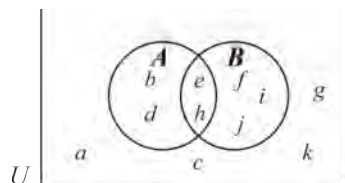
a) A, B kópiklerdiń elementlerin jazıń;

b) $A \cap B$ hám $A \cup B$ kópiklerdi tabıń;

c) A, B kópiklerdi Venn diagrammasında súwretleń.

26. A, B kópliklerdi Venn diagrammasında súwretleń.

Tómendegi kóplikler elementlerin jazıń:



I A ;

II B ;

III A' ;

IV B' ;

V $A \cap B$;

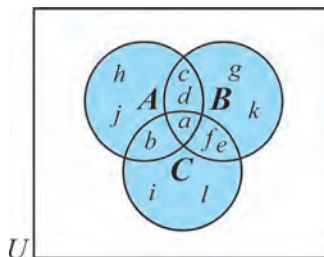
VI $A \cup B$;

VII $(A \cup B)'$;

VIII $A' \cup B'$.

27.

A, B, C kóplikler Venn diagrammasında súwretlengen.



a) Kóplikler elementlerin jazıń:

I A ;

II B ;

III C ;

IV $A \cap B$;

V $A \cup B$;

VI $B \cap C$;

VII $A \cap B \cap C$;

VIII $A \cup B \cup C$.

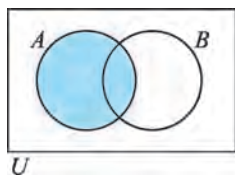
b) Tómendegilerdi tabıń:

I $n(A \cup B \cup C)$;

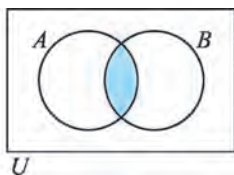
II $n(A) + n(B) + n(C) -$
 $- n(A \cap B) - n(A \cap C) -$
 $- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

Venn diagrammasında kópliklerdi boyap súwretlew múmkin.

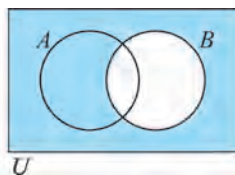
Máselen, súwrette, sáykes túrde, $A, A \cap B, B', A \cap B'$ kóplikler boyalgan:



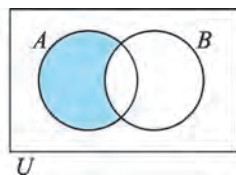
A



$A \cap B$



B'

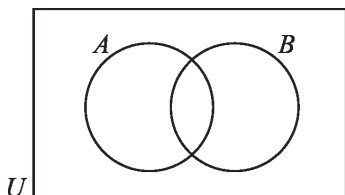


$A \cap B'$

Shınıǵırlar

Diagrammalardı dápterinizge kóshirıń hám kórsetilgen kópliklerdi boyan:

28.



a) $A \cap B$;

b) $A \cap B'$;

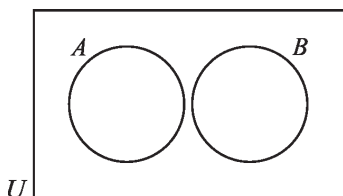
c) $A' \cup B$;

d) $A \cup B$;

e) $(A \cap B)'$;

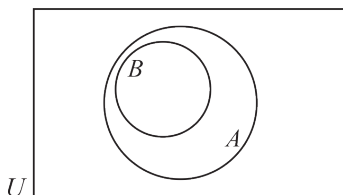
f) $(A \cup B)'$.

29.



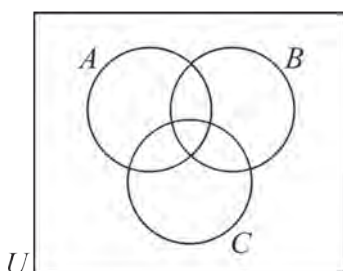
- | | |
|--------------------|------------------|
| a) A ; | b) B ; |
| c) A' ; | d) B' ; |
| e) $A \cap B$; | f) $A \cup B$; |
| g) $A' \cap B$; | h) $A \cup B'$; |
| i) $(A \cap B)'$. | |

30.



- | | |
|--------------------|------------------|
| a) A ; | b) B ; |
| c) A' ; | d) B' ; |
| e) $A \cap B$; | f) $A \cup B$; |
| g) $A' \cap B$; | h) $A \cup B'$; |
| i) $(A \cap B)'$. | |

31.



- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| a) A ; | b) B' ; |
| c) $B \cap C$; | d) $A \cup B$; |
| e) $A \cap B \cap C$; | f) $A \cup B \cup C$; |
| g) $(A \cap B \cap C)'$; | h) $(A \cup B) \cup C$; |
| i) $(B \cap C) \cap A$. | |



AYTÍMLAR. BIYKARLAW, KONYUNKCIYA HÁM DIZYUNKCIYA

Shın (ras) yamasa jalğan (ótirik) bolğan xabar gáp *aytım* delinedi.

Soraw kórinisindegi gáppler, predmetke qatnas ın bildiriwshi xabar gáppler, máselen, "Jasıl reń jaǵımlı", aytım bola almaydı.

Ayırım aytımlardıń shın – jalğanlıǵın bir mánisli anıqlanbaydı.

Máselen, "Bul jazıwshı Nókiste tuwılǵan" aytımın belgili bir jazıwshıǵa qaraǵanda shın da, jalğan da bolıwı múmkin.

1-misal. Tómendegilerden qaysı biri aytım boladı?

Eger ol aytım bolsa, onıń shın – jalğanlıǵı bir mánisli anıqlana ma?

- | | |
|---------------------------------|-----------------------|
| a) $20:4=80$; | b) $25 \cdot 8=200$; |
| c) Meniń qálemim qærde? | |
| d) Sening kózleriń jasıl reńde. | |

- △ a) Bul aytım hám ol jalğan, sebebi $20:4=5$ boladı;
- b) Bul aytım hám ol shın;
- c) Bul soraw gáp bolğanı ushın, ol aytım bolmaydı;
- d) Bul aytım. Onıń shın – jalğanlıǵı bir mánisli anıqlanbaydı, sebebi

ayırım insanlarga qarata ol jalğan, ayırımlarına qarata bolsa shın. ▲

Biz aytımlardı $p, q, r, \dots$ háripler menen belgileymiz.

Máselen, p : Shiyshembi kúni jamgır jawdı;

q : $20:4=5$;

r : x – jup san.

Quramalıraq aytımlardı dúziw ushın $\wedge$ (konyunkciya, "hám", "biraq"), $\vee$ (dizyunkciya, "yaki"), $\neg$ (biykarlanıw, "...emes", "...nadurıs") **logikalıq baylanıstırıwshılar** dep atalıwshı arnawlı belgilerden paydalanıladı. Olardı qarap shıǵayıq. **Biykarlanıwlanıw**

p aytım ushın " p emes" yaki " p ekeni nadurıs" kórinisindegi aytım p nıń biykarlanıwı delinedi hám $\neg p$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen, p : Shiyshembi kúni jamgır jawdı aytımınń biykarlanıw

$\neg p$: Shiyshembe kúni jamgır jawmadı;

p : Madinanıń kózi jasıl aytımınń biykarlanıw

$\neg p$: Madinaning kózi jasıl emes boladı.

p shın bolsa, $\neg p$ jalğan, p jalğan bolsa $\neg p$ shın aytım boladı. Bul maǵlıwmat **shınlıq kestesi** járdeminde túsindiriledi. Bunday keste p ǵa qarap jańa $\neg p$ aytımınń shınlıq mánisi shın T^1 yaki shın emes F^1 ligin anıqlaydı:

p	$\neg p$
T	F
F	T

Shınıǵıw

32. Tómendegilerden qaysı biri aytım boladı? Eger ol aytım bolsa, onıń shın – jalğanlıǵı bir mánisli anıqlana ma?

- a) $11-5=7$; b) 12 – jup san; c) $2 \in Q$; d) $2 \notin Q$.
 e) Parallelogramm 4 tárepke iye;
 f) 37 – ápiwayı san;
 g) Seniń boyıń neshe santimetr?
 h) Barlıq kvadratlar tórtmúyeshlik;
 i) Qar jawıp atır ma?
 j) Tórtmúyeshlik parallelogramm emes;
 k) Seniń úkeń (iniń) 13 jasta;

¹ T hám F háripleri, saykes túrde, inglis tilinde "true" (shın), "false" (jalğan) sózleriniń bas háriplerinen alınǵan.

- l) Sağan tariyxıy kitaplar jağa ma?
- m) Madina jaqsı qosıq aytadı;
- n) Sen Shımbayda tuwılğansañ;
- o) Qarama – qarsı múyeshler óz – ara teñ;
- p) Parallel tuwrı sızıqlar kesilisedi.

33. Aytımlardıń biykarlanıwın jazıń. Bul aytım hám onıń biykarlanıwın shın – jalğanlıgın anıqlań.

- a) p : barlıq tórtmúyeshlikler parallelogramm boladı;
- b) q : $\sqrt{5}$ – irracional san; c) r : 7 – racional san;
- d) s : $23-14=12$; e) t : $52:4=13$;
- f) u : qálegen eki jup sanlar ayırması taq boladı;
- g) p : izbe – iz kelgen natural sanlar kóbeymesi hár dayım jup boladı;
- h) q : barlıq doǵal múyeshler óz – ara teñ;
- i) r : barlıq trapeciyalar parallelogramm boladı;
- j) s : eger úshmúyeshlikte eki múyeshi óz – ara teñ bolsa, ol teñ qaptallı boladı;

34. $x, y \in \mathbb{R}$ bolsın. Aytımlardıń biykarlanıwın jazın:

- a) $x > 5$; b) $x \geq 3$;
- c) $y < 8$; d) $y \leq 10$.

35. Berilgen r, s aytımlar ushın s aytım r aytımınıń biykarlanıwı bola ma?

Eger s aytım r aytımınıń biykarlanıwın bolmasa, r aytımınıń durıs biykarlanıwın tabıń.

- a) r : Madinanıń boyı 140 sm den uzın; s : Madinanıń boyı 140 sm den pás;
- b) r : Aybek futbol menen shuǵıllanadı; s : Aybek muzıka menen shuǵıllanadı;
- c) r : Men búgin qara shay ishtim; s : Men búgin kók shay ishtim;
- d) r : Men Samarqandda bolǵanman; s : Men hesh qashan Samarqandda bolmaǵanman.

2-misal.

Aytımınıń biykarlanıwın dúziń:

- a) x – qawın, $x \in \{qawınlar, \acute{g}arbızlar\}$; b) $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$; c) $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$;

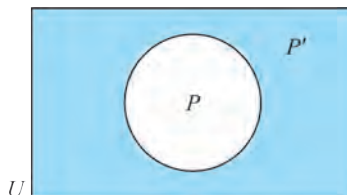
 a) x – ğarbız; b) $x = 1$; c) $x < 2$ hám $x \in \mathbb{Z}$. 

Shınıǵıw

36. Aytımınıñ biykarlanıwın dúziń.

- a) $x \in \{1, 2, 3, 4\}$; b) $x \in \{atlar, qoylar\}$;
c) $x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$; d) x – oqıwshı bala, $x \in \{oqıvchılar\}$;
e) x – oqıwshı qız, $x \in \{qızlar\}$.

Aytımınıñ biykarlanıwın Venn diagrammasınan paydalanıp ta dúziw mümkin.

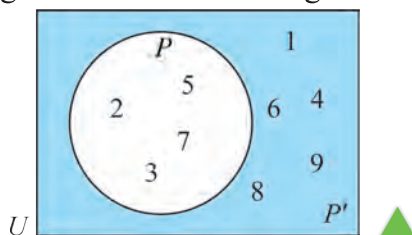


Diagrammada U – barlıq sanlar kópligi, P kóplik p aytımınıñ **shınılıq kópligi**, yaǵnıy ol shın aytım bolatuǵın x lardıń kópligi, P' kóplik dep $\neg p$ biykarlanıwınıñ shınılıq kópligi súwretlengen.

3-misal. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da p : x – **ápiwayı san** aytımdı qarayıq. p hám $\neg p$ nıń shınılıq kópligin tabıń.

△ P kóplik p aytımınıñ **shınılıq kópligi**, P' kóplik $\neg p$ biykarlanıwınıñ shınılıq kópligi bolsın. Ol jaǵdayda $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $P' = \{1, 4, 6, 8, 9\}$.

Bul kóplikler Venn diagrammasında tómendegishe súwretlenedi:



Shınıǵıwlar

37. Aytımlardıń biykarlanıwın dúziń, Venn diagrammasında súwretleń:

- a) $U = \{x \mid 20 < x < 30\}$ da p : x – ápiwayı san;
b) $U = \{x \mid 1 < x < 10\}$ da p : x – jup san.

38. $U = \{10\text{-klass oqıwshıları}\}$, $M = \{\text{muzıka dógereginde shuǵıllanatuǵın oqıwshılar}\}$, $O = \{\text{orkestrda nama shertetuǵın oqıwshılar}\}$ bolsa, tómendegi aytımlardı Venn diagrammasında súwretleń.

- a) Muzıka dógereginde shuǵıllanatuǵın barlıq oqıwshılar orkestrda nama shertedi;
b) Orkestrda nama shertetuǵın oqıwshılardan hesh biri muzıka dógereginde shuǵıllanbaydı;

c) Orkestrda nama shertetuğın oqıwshılardıń hámmesi muzıka dógeresinde shuğıllanbaydı.

39. $U = \{x \mid 5 < x < 15, x \in \mathbb{N}\}$ da $p: x < 9$ aytımdı Venn diagrammasında súwretleń hám $\neg p$ biykardıń shınlıq kópligi elementlerin jazıń.

40. $U = \{x \mid x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ da $p: x - \text{jup san}$ aytımdı Venn diagrammasında súwretleń hám biykarlanıwın shınlıq kópligi elementlerin jazıń.

Konyunkciya

Eger eki aytım **"hám"** sózi menen baylanıssa, payda bolğan jańa aytım berilgen aytımlar *konyunkciyası* delinedi.

p, q aytımlardıń konyunkciyası $p \wedge q$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen,

p : Erkin túslıkte palaw jedi;

q : Erkin túslıkte somsa jedi;

Aytımlardıń konyunkciyası tómendegishe boladı:

$p \wedge q$: Erkin túslıkte palaw hám somsa jedi.

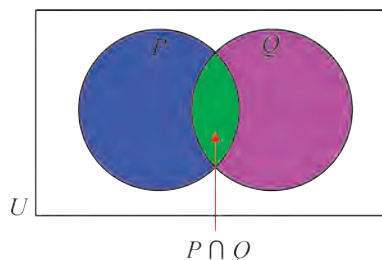
Kórinip turıptı, $p \wedge q$ aytım Erkin túslıkte hám palaw, hám somsa jegende, yaǵnıy p, q aytımlardıń ekewi de shın bolǵanda ǵana shın boladı. Eger p, q aytımlardıń birewi jalǵan bolsa, ol jaǵdayda $p \wedge q$ aytım shın bolmaydı.

p, q aytımlardıń konyunkciyası tómendegi shınlıq kestesine iye:

p	q	$p \wedge q$	
T	T	T	p, q aytımlardıń ekewi de shın bolǵanda $p \wedge q$ shın boladı.
T	F	F	p, q aytımlardıń keminde birewi jalǵan bolǵanda $p \wedge q$ aytım jalǵan boladı.
F	T	F	
F	F	F	

Birinshi hám ekinshi ústinler p, q aytımlardıń múmkin bolğan shınlıq mánislerinen quralǵan.

Diagrammada P kóplik p aytımınıń, Q kóplik bolsa q aytımınıń shınlıq kóplikleri bolsa, $p \wedge q$ aytımınıń shınlıq kópligi eki aytım shın bolğan $P \cap Q$ kóplik boladı:



Shinigiwlar

41. Tóمندegi aytımlardıń konyunkciyasın jazıń:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| a) p : Madina – terapevt; | q : Munisa – stomatolog; |
| b) p : x san 15 ten úlken; | q : x 30 dan kishi; |
| c) p : hawa bulıtlı; | q : : jamgır jawıp atır; |
| d) p : Alımnıń shashları qara | q : Alımnıń kózleri jasıl. |

42. $p \wedge q$ aytımınıń shın – jalğan ekenligin anıqlań:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) p : 5 – taq san | q : 5 – ápiwayı san; |
| b) p : kvadrat tórt tárepke iye; | q : úshmúyeshlik bes tárepke iye; |
| c) p : $39 < 27$; | q : $16 > 23$; |
| d) p : 12 sanı 3 ke bólinedi; | q : 12 sanı 4 ke bólinedi; |
| e) p : $5+8 = 12$; | q : $6+9 = 15$. |

43. $U = \{ x \mid 1 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{Z} \}$ ushın, p : x –jup san, q : x sanı 7 den kishi aytımlar berilgen.

- a) Venn diagrammasında p , q aytımlardıń shınlıq kópliklerin;
b) $p \wedge q$ aytımınıń shınlıq kópligin súwretleń.

Dizyunkciya

Eger eki aytım "yaki" sózi menen baylanıssa, payda bolğan jańa aytım berilgen aytımlar *dizyunkciyası* delinedi.

p , q aytımlardıń dizyunkciyası $p \vee q$ kórinisinde belgilenedi.

Máselen,

p : Erkin búgin kitapxanaǵa bardı; q : Erkin búgin teatrǵa bardı.

Aytımlardıń dizyunkciyası tómendegishe anlatıladı:

$p \vee q$: Erkin búgin yaki kitapxanaǵa yaki teatrǵa bardı.

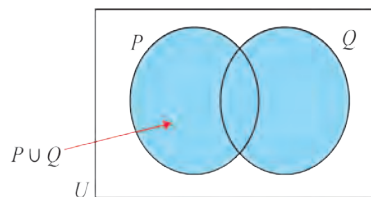
Kórinip turıptı, $p \vee q$ aytım Erkin búgin kitapxana yaki teatrdan birine yaki ekewine de barǵanda shın boladı.

Eger p , q aytımlardıń ekewi de jalğan bolsa, ol jaǵdayda $p \vee q$ aytım shın bolmaydı.

p , q aytımlardıń dizyunkciyası tómendegishe shınlıq kestesine iye:

p	q	$p \vee q$	
T	T	T	p , q aytımlardıń birewi shın bolǵanda $p \vee q$ shın boladı.
T	F	T	
F	T	T	
F	F	F	p , q aytımlardıń ekewi jalğan bolǵanda $p \vee q$ aytım jalğan boladı.

Diagrammada P kóplik p aytimniń, Q kóplik bolsa q aytimniń shınlıq kóplikleri bolsa, $p \vee q$ aytimniń shınlıq kópligi eki aytım shın bolğan $P \cup Q$ kóplik boladı:



Shınıǵıwlar

- 44.** $p \vee q$ aytimniń shın – jalǵan ekenligin anıqlań:
- p : 24 sanı 4 ke bólinedi, q : 24 sanı 6 ǵa bólinedi;
 - p : $-8 > -5$, q : $5 < 0$.
- 45.** $p \vee q$ aytimniń shın – jalǵan ekenligin anıqlań:
- p : 5 hám 9 sanlardıń arifmetikalıq ortashası 7 ge teń, q : 8 hám 14 sanlardıń arifmetikalıq ortashası 10 ǵa teń;
 - p : $5+8 = 12$, q : $6+9 = 15$.
- 46.** $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbb{Z}\}$ ushın:
- p : x san 3 ke eseli, q : x – ápiwayı san aytımlardı qarayıq.
- Venn diagrammasında p , q aytımlardıń shınlıq kópliklerin súwretleń;
 - I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$
aytımniń shınlıq kópliklerin súwretleń.
- 47.** $U = \{x \mid 1 \leq x \leq 12, x \in \mathbb{Z}\}$ ushın:
- p : x – ápiwayı san, q : x san 12 niń bóliwshisi aytımlardı qarayıq.
- Berilgen Venn diagrammasında p , q aytımlardıń shınlıq kópliklerin súwretleń;
 - I** $\neg p$; **II** $p \vee q$; **III** $p \wedge q$
aytımlardıń shınlıq kópliklerin súwretleń.
- 48.** x : Sarvar erteń júziwge baradı; y : Sarvar erteń futbolǵa baradı
Tómenдеги x , y hám $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikalıq baylanıstırıwshılar járdeminde ańlatıń:
- Sarvar erteń júziwge barmaydı;
 - Sarvar erteń júziwge hám futbolǵa baradı;
 - Sarvar erteń yaki júziwge yaki futbolǵa baradı;
 - Sarvar erteń júziwgede, futbolǵa da barmaydı;
 - Sarvar erteń júziwge baradı, biraq futbolǵa barmaydı;
- 49.** Gáplerdi $\neg$, $\vee$, $\wedge$ logikalıq baylanıstırıwshılar járdeminde ańlatıń:
- Sarvarǵa muzqaymaq hám salqın ishimlikler jaǵadı;
 - Sarvarǵa muzqaymaq jaǵadı, biraq salqın ishimlikler jaqpaydı;

- c) x sanı 10 nan úlken bolǵan ápiwayı san;
d) kompyuter islemeydi.

50. Aytımlar Sarvardıń kún tártibin shamalap belgileydi:

- p : Sarvar erte turdı;
 q : Sarvar azanǵı awqatqa qaymaq jedi;
 r : Sarvar túslikte sorpa ishti;
 s : Sarvar keshki awqatqa palaw jedi;
 u : Sarvar sport penen shuǵıllandı;
 v : Sarvar kitap oqıdı.

Tómendegilerdi tabiiy tilde ańlatıń (aytıń):

- a) q ; b) s ; c) $q \wedge u$; d) $r \wedge s$; e) $r \vee s$; f) $u \vee v$

8-9 LOGIKALÍQ TEŇ KÚSHLILIK. LOGIKALÍQ NÍZAMLAR

Mánisine qarap tábiyiy tildegi ápiwayı aytımlardı háripler menen belgilep biykarlanıw, konyunkciya hám dizyunkciya kórinisinde logikalıq baylanıstırıws-hılar járdeminde quramalıraq aytımlardıń shın – jalǵanlıǵına itibar bermesten simbolikalıq kórinislerin dúzeyik.

Tábiyiy tildegi aytım	Simvolikalıq kórinisi
Biykarlanıwlanıw: 1. Sálım úyde emes. 2. Qarjı ańsatlıq penen tabılmaydı. 3. Rashittiń kitap oqıp atırǵanlıǵı naduris. 4. Maryam Buxaradan ekenligi jalǵan.	$\neg S$ $\neg M$ $\neg R$ $\neg B$
Konyunkciya: 5. Akmal hám Samir ekewi oqıwshı. 6. Babur hám de Aybek sport penen shuǵıllanadı. 7. Babur kúshli, biraq Aybek onnan kúshlirek. 8. Barlıq media (xabar) quralları qarsı bolsa da, "Barselona" futbol klubı eń jaqsı klub dep tabıldı.	$A \wedge S$ $B \wedge A$ $B \wedge A$ $M \wedge B$
Dizyunkciya: 9. Rano yaki metroda yaki avtobusta keledi 10. Babur yaki Aybek sporttıń usı túrin tańladı.	$M \vee A$ $B \vee A$

Biykarlanıw, konyunkciya hám dizyunkciya ushın shınlıq kestelerin ulıwmalastırıp quramalıraq aytımlar ushın shınlıq kestesiń dúziw múmkin:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

1-misal. $p \vee \neg q$ aytimni shınlıq kestegin dıziń.

1-qádem

Birinshi hám ekinshi baǵanada p, q lardıń mımkin bolǵan shınlıq mánislerinen payda bolǵan kesteni jazamız:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

2-qádem

Úshinshi baǵanada q dıń shınlıq mánislerine qarab $\neg q$ dıń shınlıq mánislerin jazamız:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	
T	F	T	
F	T	F	
F	F	T	

3-qádem

Tórtinshi baǵana p hám $\neg q$ dıń shınlıq mánislerine qarab $p \vee \neg q$ dıń shınlıq mánislerin Újazamız: ▲

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

Hár dayım shın bolǵan aytım **logikalıq nızam yamasa tautologiya** delinedi. Aytım logikalıq nızam ekenliginiń shınlıq kestesi járdeminde dáliyllew mımkin.

2-misal. $p \vee \neg p$ aytım tautologiya ekenligin dáliylleń.

▲ Shınlıq kestegin dúzemiz:

$p \vee \neg p$ aytım bárqulla shın mánislerdi (úshinshi baǵanaǵa qarań) qab qıl qılǵanı ushın ol tautologiya boladı. ▲

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

Eki aytımlardıń shınlıq kestelerinde sáykes baǵanalar birdey bolsa, bul aytımlar logikalıq teń kúshli delinedi.

3-misal. $\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$ aytımlar logikalıq teń kúshli ekenligin dáliylleń.

▲ $\neg(p \wedge q)$ va $\neg p \vee \neg q$ aytımlar ushın shınlıq kestelerin dúzemiz:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	F	F	T	T	T

$\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$ aytımlardıń shınlıq kestelerindegi sáykes baǵanalar birdey, demek, bul aytımlar logikalıq teń kúshli.

Bul qatnastı $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ kórinisinde jazamız ▲

Shınıǵıwlar

51. Aytımlar ushın shınlıq kestelerin dúziń:

- a) $\neg p \wedge q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p \vee \neg q$; d) $p \vee p$.

52. Aytımlar tautologiya boladı ma?

- a) $\neg p \wedge \neg q$; b) $(p \vee q) \vee \neg p$; c) $p \wedge \neg q$?

53. Logikalıq teń kúshlilikke dálilley:

- a) $\neg(\neg p) = p$; b) $p \wedge q = p$; c) $p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$;
d) $\neg(q \wedge \neg p) = \neg q \wedge (p \vee q)$.

54. Meyli aytımlar berilgen bolsın:

p : Sarvar almalar dı jaqsı kóredi;

q : Sarvar júzimdi jaqsı kóredi.

Tómendegi aytımlardı tábiyiy tilde ańlatıń:

- a) $p \vee q$; b) $\neg(p \vee q)$; c) $\neg p$; d) $\neg p \wedge \neg q$.

55. Shınlıq kestesi dúzip, $\neg(p \vee q)$ hám $\neg p \wedge \neg q$ aytımlar logikalıq teń kúshli ekenligin dálilley.

10-11

IMPLIKACIYA, KONVERSIYA, INVERSIYA HÁM KONTROPOZICIYA.

Implikasiya

Eki aytım "eger bolsa, ol jaǵdayda ..." kórinisinde baylanısqanda aytımlar *implikasiyasına* iye bolamız.

"Eger p bolsa, ol jaǵdayda q " implikativlik aytım $p \Rightarrow q$ kórinisinde belgilenedi hám " p dan q kelip shıǵadı", " p aytım q ushın jeterli", " q aytım p ushın zárúr" mánislerdi de ańlatadı.

Bunda p aytım q ushın *jeterli shárt*, q aytım p ushın *zárúrli shárt* dep júrijizledi.

Máselen, p : *Sarvardin televizori bar*;
aytimlar ushin

q : *Sarvar kinoni koredi*

$p \Rightarrow q$: *Sarvardin televizori bolsa, ol kinoni koredi* aytımın ańlatadı.

Tap usınday $p \Rightarrow q$: *Sarvar kinoni kóriwi ushin onda televizor bolıwı jeterli aytımdı* hasıl qılamız.

$p \Rightarrow q$ aytım tek ǵana p shın bolı p, q jalǵan bolsa p aytım shın bolǵanı ushin tómendegi shınlıq kestesi hasıl qılamız:

Ápiwayı aytımlar hám de logikalıq bayla(nıstır)ı wshılar járdeminde shın – jalǵanlıqqa itibar bermesten quramalıraq aytımlardı dúziw múmkin.

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

1-mısal. p : "Ayzada kinofilmlerdi kóp koredi"; q : "Barno kinofilmlerdi kóp koredi"; r : "Barno imtixannan óte almaydı"; s : "tań qalarıq waqıya júz beredi" aytımlar berilgen bolsın.

△ Ol jaǵdayda tómendegilerge iye bolamız:

1. $p \wedge \neg q$: "Ayzada kinofilmlerdi kóp koredi, Barno bolsa yaq".
2. $p \Rightarrow \neg q$: "Ayzada kinofilmlerdi kóp korse, Barno kinofilmlerdi kóp kormeydı".
3. $p \Rightarrow (r \vee s)$: "Barno kinofilmlerdi kóp korse, ol yaki imtixannan óte almaydı yaki tań qalarıq waqıya júz beredi".
4. $(p \wedge \neg s) \Rightarrow r$: "Barno kinofilmlerdi kóp korse hám tań qalarıq waqıya júz bermese, ol jaǵdayda Barno imtixannan óte almaydı".
5. $(q \wedge s) \vee r$: "Yaki Barno kinofilmlerdi kóp koredi hám tań qalarıq waqıya júz beredi, yaki Barno imtixannan óte almaydı". ▲

Ekvivalenciya

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ kórinisindegi aytım p hám q aytımlardıń ekvivalenciya delinedi hám $p \Leftrightarrow q$ kórinisinde belgilenedi.

$p \Leftrightarrow q$ jazıw " p aytım q ushin zárúr hám jeterli" yaki " p aytım q bolǵanda ǵana orınlı boladı", dep oqladı.

2-mısal. p : x – san jup, q : x sannıń aqırǵı cıfrası jup aytımlar ushin $p \Leftrightarrow q$ aytım qalay oqladı?

△ $p \Leftrightarrow q$: x san jup bolsa onıń aqırǵı cıfrası jup boladı;

$q \Leftrightarrow p$: x sannıń aqırǵı cıfrası jup bolsa, ol jup boladı.

aytımlardı qarasaq, $p \Leftrightarrow q$ jazıw " x san jup bolıwı ushin onıń aqırǵı cıfrası jup bolıwı zárúr hám jeterli" yaki " x san onıń aqırǵı cıfrası jup bolǵanda ǵana jup boladı" dep oqladı. ▲

Endi qálegen p hám q aytımlar berilgen bolsa

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ aytım ushın shınlıq kesesin dúzemiz:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Demek, $p \Leftrightarrow q$ aytılardıń shınlıq kesesin tómendegishe boladı. $p \Leftrightarrow q$ aytım p hám q aytımlardıń shınlıq mánisleri birdey (yaǵnıy yaki ekewi de shın yaki ekewi de jalǵan) bolǵanda ǵana shın bolıwı kórinip turıptı.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Shınıǵıwlar

56. Tómendegi implikativ aytımlarda zárúrli hám jeterli shártlerdi anıqlań hám bul aytımlardı "zárúr", "jeterli" sózlerin qollanıp basqasha ańlatıń:

- eger men azanǵı avtobusqa úlgermesem, mektepke kesh qalaman;
- eger temperatura jeterli she páseyse, salmadaǵı suw muzlap qaladı;
- agar $x > 20$ bolsa, $x > 10$ boladı;
- eger men gol ursam, bizin toparımız jeniske erisiwi múmkin.

57. $p \Rightarrow q$ aytımdı tábiyiy tilde ańlatıń:

- p : quyash jarqıraydı, q : men shomılıwǵa baraman;
- p : x san 6 ǵa bólinedi, q : x – san jup;
- p : muzlatqishta máyekler bar, q : Madina tort pisiredi.

- 58.**
- $p \Rightarrow \neg q$;
 - $\neg q \Rightarrow \neg p$;
 - $(p \vee q) \Rightarrow p$;
 - $q \wedge (p \Rightarrow q)$;
 - $p \Leftrightarrow \neg q$;
 - $(p \Leftrightarrow q) \wedge \neg p$;
 - $p \Rightarrow (p \wedge \neg q)$;
 - $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$

aytımlardıń shınlıq kestelerin dúziń.

59. Aytımlardı simvolikalıq kóriniste ańlatıń:

p : jamǵır jawdı, q : kólmekler payda boldı;

- jamǵır jawsa, kólmekler payda boladı;
- kólmekler payda boldı, demek jamǵır jawdı;
- kólmekler joq;
- jamǵır jawmadı;
- eger jamǵır jawmasa, kólmekler payda bolmaydı;
- eger kólmekler payda bolmasa, jamǵır jawmaǵan;

- g) eger kólmekler payda bolmasa, jamgır jawadı;
h) kólmekler payda bolıwı ushın jamgır jawıwı zárúr hám jeterli.

60. Shinlıq kestelerin dúzip

$$\neg p \Rightarrow q = p \vee q;$$

$$p \Leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \text{ ekenligin dáliyllen.}$$

61. $q \Rightarrow p$ aytımlar logikalıq teń kúshli aytımlardı tabıń:

- a) $p \Rightarrow q$; b) $\neg q \Rightarrow p$;
c) $q \Rightarrow \neg p$; d) $\neg(\neg p \Rightarrow \neg q)$.

62. Aytımlardıń qaysıları hár dayım shın, hár dayım jalğan boladı?

- a) $p \Rightarrow (\neg p \wedge q)$; b) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$;
c) $(p \Rightarrow \neg q) \vee (\neg p \Rightarrow q)$.

Konversiya

$p \Rightarrow q$ aytımınń **konversiyası** dep $q \Rightarrow p$ aytımğa ataladı.
Konversiya tómendegishe shınlıq kestesine iye:

p	q	$q \Rightarrow p$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

3-mısal.

p : úshmúyeshlik teń qaptalı,

q : úshmúyeshliktiń eki múyeshi teń aytımlardı qarayıq.

$p \Rightarrow q$ aytımdı hám onıń konversiyasın tabiiy tilde ańlatıń.

$\triangle p \Rightarrow q$: Eger úshmúyeshlik teń qaptalı bolsa, ol jaǵdayda onıń eki múyeshi teń.

$q \Rightarrow p$: Eger úshmúyeshliktiń eki múyeshi teń bolsa, ol jaǵdayda bunday úshmúyeshlik teń qaptalı boladı. $\blacktriangle$

Inversiya

$p \Rightarrow q$ aytımınń **inversiyası** dep $\neg p \Rightarrow \neg q$ aytımğa ataladı.

Inversiya tómendegi shınlıq kestesine iye:

Bul keste $q \Rightarrow p$ aytımınń shınlıq kesti menen
ústpe - úst túsedı, demek konversiya hám
inversiya logikalıq teń kúshli eken.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow \neg q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Kontrapoziciya

$p \Rightarrow q$ aytımının kontrapoziciyasi dep $\neg q \Rightarrow \neg p$ aytımına ataladı.

Kontrapoziciya tómendegi shınlıq kestesine iye. Bul keste $p \Rightarrow q$ aytımının shınlıq kestesi menen ústpe – úst túsedı, demek implikaciya hám kontrapoziciya logikalıq teń kúshli eken.

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

4-mısal. "Hámme oqıtıwshılar mektep aynalasında jasaydı" aytımının kontrapoziciyasın dúziń.

△ Usı aytım tómendegishe ańlatılıwı múmkin: "Eger bul adam oqıtıwshı bolsa, ol mektep aynalasında jasaydı".

Bul xabar gáp $p \Rightarrow q$ kóriniske iye, bul jerde:

p : Bul adam – oqıtıwshı, q : Bul adam mektep aynalasında jasaydı.

$\neg q \Rightarrow \neg p$ kontrapoziciya tómendegishe ańlatıladı:

"Eger bul adam mektep aynalasında jasamasa, ol jaǵdayda ol oqıtıwshı emes". ▲

5-mısal.

p : Samandar kitapxanada,

q : Samandar kitap oqıp atır

aytımların qarayıq. Ol ushın imlikaciya, konversiya, inversiya hám kontrapoziciyanı dúziń.

△ Implikasiya

Samandar kitapxanada bolsa, ol kitap oqıydı.

$p \Rightarrow q$

Konversiya

Samandar kitap oqısa, ol kitapxanada boladı.

$q \Rightarrow p$

Inversiya

Samandar kitapxanada bolmasa, ol kitap oqımaydı.

$\neg p \Rightarrow \neg q$

Kontrapoziciya

Samandar kitap oqımaytuǵın bolsa, ol kitapxanada bolmaydı.

$\neg q \Rightarrow \neg p$

Implikasiya hám konversiya logikalıq teń kúshli bolmaydı, sebebi, máselen, Samandar kitaptı klassta oqıwı da múmkin ekenligin aytıwımız dárkar. ▲

Shınıǵıwlar

63. Konversiya hám inversiyani dúziń:

a) eger Dilbar sviter kiyse, ol ısınadı;

b) eger eki úshmúyeshlik uqsas bolsa, olardıń sáykes múyeshleri teń boladı;

- c) eger $2x^2 = 12$ bolsa, ol jaǵdayda $x = \pm\sqrt{6}$ boladı;
 d) eger Alım oyın oynasa, ol quwanadı;
 e) eger úshmúyeshlik durıs (teń tárepli) bolsa, ol jaǵdayda onıń tárepleri teń boladı.

64. Tómenдеги aytımlardıń kontrapolicıyaların dúziń:

- a) barlıq átir gúller tikenli;
 b) barlıq sudyalar hár dayım durıs qarar shıǵaradı;
 c) hámme jaqsı futbolchılar toptı anıq móljelge tebedi;
 d) suyıqlıq ıdıshǵa quyılǵanda ıdıstıń formasın qabıl etedi;
 e) eger insan hadal hám oqımısli bolsa, ol jetilissenliklerge erisedi.

65. a) "barlıq 10-klass oqıwshıları matematikanı úyrenedi" aytımnıń kontrapoziciyasın dúziń

- b) "barlıq 10-klass oqıwshıları matematikanı úyrenedi" aytımın shın bolsa, tómendegiler haqqında qanday tastıyqlawǵa kelesiz:

"Sháwkat- 10-klass oqıwshısı";

"Mirislam matematikanı úyrenbeydi";

"Dániyar ham matematikanı, hám angichan tilin úyrenbekte"?

66. Aytımlarnıń kontrapoziciyaların dúziń:

- a) x sanı 3 ke bólinedi $\Rightarrow x^2$ sanı 9 ǵa bólinedi;
 b) x sanınıń aqırǵı cıfrası 2 bolsa: $\Rightarrow x - \text{jup san}$;
 c) $ABCD$ –tórtmúyeshlik $\Rightarrow AB \parallel CD$ hám $AD \parallel BC$;
 d) ABC – durıs úshmúyeshlik $\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$.

67. p : Úy eń kóbi menen 3 aynalı boladı,

q : Úy sırtqa tútın shıǵaratuǵın morıǵa iye aytımlardı qarayıq.

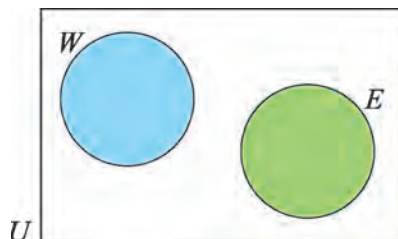
Ol jaǵdayda $p \Rightarrow q$: Eger úy eń kóbi menen 3 aynalı (derezeli) bolsa, ol sırtqa tútın shıǵaratuǵın morıǵa iye;

- a) konversiya, inversiya hám kontrapozisiyanı dúziń;

b) tómendegi jaǵdaylarda implikaciya, konversiya, inversiya hám kontrapoziciya ushın shın – jalǵanlıqtı anıqlań:



68. Diagrammada W – jaqsi özlestirmeytuğın oqıwshılar, E bolsa 10 – klass oqıwshıları kóplıgın súwretleydi.
Tómendegi aytımlardı tolıqtırın:



- a) gan jaqsi özlestire almaytuğın oqıwshılar joq;
- b) gan 10 – klass oqıwshıları joq;
- c) eger $x \in W$ bo'lsa, ol jağdayda
- d) eger $x \in E$ bolsa, ol jağdayda
- e) c hám d qatarlar arasında qanday baylanıs bar?

12-13 PREDIKATLAR HÁM KVANTORLAR

Predikatlar hám kvantorlar

Ayırım aytımlarda ózgeriwshiler qatnasıp, usı ózgeriwshiler ornına konkret mánislerdi qoysaq, aytım payda boladı. Bunday aytım **predikat** delinedi..

1-misal. $P(x)$: " $x^2 > x$ " predikat bolsa,

$P(2)$, $P(\frac{1}{2})$, $P(-\frac{1}{2})$ aytımlardıń shın – jalğanlıgın anıqlań.

△ $P(2)$: $2^2 > 2$ – shın. $P(\frac{1}{2})$: $(\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{2}$ – jalğan. $P(-\frac{1}{2})$: $(-\frac{1}{2})^2 > -\frac{1}{2}$ – shın. ▲

Ayırım predikatlarda ózgeriwshini onıń mánisine qarap anıqlaw múmkin.

Máselen, "Bul shayır Shımbayda tuwılğan" hám "Ol Shımbayda tuwılğan" xabar gáplerde ózgeriwshi "Bul shayır" sóz birikpesi yaki "ol" almasıgı boladı. Olardıń ornına "Ibrayım Yusupov" mánisin qoysaq, "Ibrayım Yusupov Shımbayda tuwılğan" shın aytımdı, "Muxammad Yusup" mánisin qoysaq, "Muxammad Yusup Shımbayda tuwılğan" jalğan aytımdı hasıl qılamız.

x arqalı ózgeriwshini belgilesek, joqarıdağı xabar gáplerdi " x Toshkentte tuwılğan" kórinisinde jazıw múmkin.

Predikatta bir yaki bir neshe ózgeriwshi qatnasıwı múmkin, qatnasqan ózgeriwshilerge qarap predikat $P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$, kórinisinde belgilenedi.

Predikatlar benen birge $\forall$ (ulıwmalıq kvantorı, "barlıq lar ushın") hám $\exists$ (bar bolıw kvantorı, "usınday bar bolıp") arnawlı belgilerden paydalanıp, jańa

aytımlar hasil qılınadı. Máselen, $\forall xP(x)$ kórinistegi jańa aytım x tıń barlıq má-nisleri ushın $P(x)$ ekenligi, $\exists xP(x)$ kórinistegi jańa aytım bolsa x tıń $P(x)$ bolatuǵın mánisi bar ekenligin bildiredi.

Máselen, $P(x)$: " x Xojelide tuwılǵan" predikattı qaraymız. Ol jaǵdayda $\forall xP(x)$ kórinisindegi jańa aytım "hámme Xojelide tuwılǵan" kibi, $\exists xP(x)$ kórinisindegi jańa aytım bolsa "sonday adamlar bar, olar Xojelide tuwılǵan" kibi oqıladı.

$\forall xP(x)$, $\exists xP(x)$ kórinistegi aytımlardıń shın – jalǵanlıǵın anıqlaw ushın mısallar keltiremiz.

2-mısal.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ bolsa, $\forall x \in D, x^2 \geq x$ aytım shın ekenligin dáliylleń.

$\Delta 1^2 \geq 1, 2^2 \geq 2, 3^2 \geq 3, 4^2 \geq 4, 5^2 \geq 5$ ekenligi málim.

Demek, $\forall x \in D, x^2 \geq x$ aytım shın eken. $\blacktriangle$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ aytım jalǵan bolıwın dáliyllew ushın x tıń ol jalǵan bolatuǵın bir mánisin tabıw jeterli.

Shınnan da, $x = \frac{1}{2}$ bolǵanda $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$ boladı.

x tıń $\forall xP(x)$ aytımınıń jalǵan ekenligin kórsetiwshi bir mánisi *kontrmısal* delinedi.

3-mısal

$\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 \geq m$ aytım shın ekenligin dáliylleń.

$\Delta 1^2 = 1$ bolǵanı ushın, $\exists m \in \mathbb{Z}, m^2 \geq m$ aytım shın eken.

Eger, $E = \{5, 6, 7, 8\}$ bolsa, $\exists m \in E, m^2 \geq m$ aytım jalǵan, sebebi

$5^2 = 25 \neq 5; 6^2 = 36 \neq 6; 7^2 = 49 \neq 7; 8^2 = 64 \neq 8.$ $\blacktriangle$

Biykarlanıwlanıw ámeli menen baylanıslı eki kerekli logikalıq nızamlardı keltiremiz:

$$\neg(\exists xP(x)) = \forall x(\neg P(x)), \quad \neg(\forall xP(x)) = \exists x(\neg P(x)).$$

Usı nızamlardıń mánisin túsiniw ushın mısal keltireyik.

$P(x)$: " x klasslasım tek ǵana ayırıqsha bahalarǵa oqıydı" predikattı qarayıq.

$\neg(\exists xP(x))$ jazıw "klasslaslarım arasında tek ǵana ayırıqsha bahalarǵa oqıytuǵınları joq" aytımdı, $\forall x(\neg P(x))$ jazıw bolsa oǵan teń kúshli aytım bolǵan "Hámme klasslaslarım tek ǵana ayırıqsha bahalarǵa oqımaydı" aytımdı bildiredi.

Tap usınday $\neg(\forall xP(x))$ formula "Hámme klasslaslarım tek ǵana ayırıqsha bahalarǵa oqıytuǵınlıǵı durıs emes" aytımdı, $\exists x(\neg P(x))$ formula bolsa oǵan teń kúshli aytım bolǵan "Ayırım klasslaslarım tek ǵana ayırıqsha bahalarǵa oqımaydı" aytımdı bildiredi.

$P(x,y)$ predikattan kvantorlar járdeminde

$$\forall xP(x,y), \quad \forall yP(x,y), \quad \exists xP(x,y), \quad \exists yP(x,y)$$

kórinistegi bir ózgeriwshili predikatlardı, olardan bolsa óz náwbetinde

$$\begin{aligned} \forall x\exists yP(x,y), \quad \exists y\forall xP(x,y), \quad \exists x\forall yP(x,y), \quad \forall y\exists xP(x,y), \\ \forall x\forall yP(x,y), \quad \forall y\forall xP(x,y), \quad \exists x\exists yP(x,y), \quad \exists y\exists xP(x,y) \end{aligned}$$

kórinistegi aytımlardı qurıw múmkin.

$\forall x\forall yP(x,y)$, $\forall y\forall xP(x,y)$ hám de $\exists x\exists yP(x,y)$, $\exists y\exists xP(x,y)$ aytımlardıń mánisleri birdey bolsa da, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$ aytımlar teń kúshli emes eken.

Máselen, $P(x,y)$: *y insan x klasslasarımınń ákesi* predikattı qaraymız.

Bul jaǵday $\forall x\exists yP(x,y) = \text{"qálegen klasslasımınń ákesi bar"}$; $\exists y\forall xP(x,y) = \text{"sonday insan bar, ol barlıq klasslasarımınń ákesi boladı"}$ aytımlardı bildiredi.

Tap sonday, $\exists x\forall yP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$ aytımlar teń kúshli emesligin kórsetiw múmkin (óz betińizshe mısallar dúziń).

Predikatar hám kvantorlar járdeminde logikalıq nızamların hasıl qılıw múmkin.

Máselen, «Eger barlıq ǵarǵalar qara bolsa, qara bolmaǵan quslardıń hesh biri ǵarǵa emes», aytım

$$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x))$$

logikalıq nızamǵa misal bola aladı.

Shınıǵırlar

69. Aytımlardı predikatar hám kvantorlar járdeminde ańlatıń:

- ayırım quslar usha olmaydı;
- ayırım jazıwshılar shayır emes;
- ayırım peshsheler shaqpaydı;
- hámme planetalar shar ko'rinisinde;
- barlıq áskerler kúshli insanlar;
- barlıq xirurglar – shıpkarlar;
- hámme ayıwlar pal menen azıqlanadı;
- hár qanday dóńgelek-tegis figura;
- ayırım qoyanlar kapustanı jaqsı kóredi;
- ayırım kitaplar qızıqlı;
- hámme analar balaların erkeletedi.

Usı aytımlardıń biykarın dúzip kóriń:

- 70.** Aytımlardı, múmkin bolsa, dawam ettiriń:
- a) hesh qanday sút emiziwshi jabralardan dem ala almaydı. Sazan jabralardan dem aladı. Demek, . . . ;
 - b) barlıq insanlardıń kemshilikleri bar. Barlıq patshalar – insanlar. Demek, . . . ;
 - c) qızıl reńdegi gúllerdiń iysi joq. Bul gúldiń iysi joq. Demek...;
 - d) qasqırlar qozılardı jeydi. Bul haywan qozını jeydi. Demek...;
 - e) barlıq planetalar – aspan deneleri. Ay – planeta emes. Demek...;
 - f) barlıq metallar elektr togın jaqsıótkizedi. Altın – metall. Demek ;
 - g) barlıq quslar máyek qoyadı (tuwadı). Barlıq quslar omırtqalı. Demek....;
 - h) eger insanning temperaturasi joqarı bolsa, ol kesellengen boladı. Bul insannıń temperaturası biyik. Demek...;
 - i) eger insannıń temperaturası joqarı bolsa, ol kesellengen boladı. Bul insan kesel emes. Demek....
- 71.** $P(x,y)$: y insan x tıń perzentı, predikatlar berilgen bolsın. Aytımlardı tabiiy tilde ańlatıń.
- a) $\exists z P(x,z) \wedge P(z,y)$; b) $\forall x \exists y P(x,y)$; c) $\forall x \exists y P(y,x)$.
- 72.** $F(x,y)$: x insan y ti óz dostı dep esaplaydı, predikat berilgen bolsın. Aytımlardı tabiiy tilde ańlatıń:
- a) $\forall x \forall y F(x,y) \Rightarrow F(x,y)$; e) $\exists y \forall x F(y,x)$;
 - b) $\forall x \exists y F(x,y)$; f) $\forall y \exists x F(x,y)$;
 - c) $\exists y \forall x F(x,y)$; g) $\exists x \forall y F(y,x)$.
 - d) $\forall x \exists y F(y,x)$;
- 73.** $D(m,n)$: n pútin san m pútin sanğa qaldıqsız bólinedi, predikat berilgen bolsın. Aytımlardan qaysı biri shın?
- a) $\forall m \forall n D(m,n)$; d) $\exists n \forall m D(n,m)$;
 - b) $\forall n \exists m D(m,n)$; e) $\forall n \exists m D(n,m)$;
 - c) $\exists m \forall n D(n,m)$; f) $\exists m \forall n D(n,m)$;
- 74.** Aytımlardan qaysıları durıs? Tiyisli mısallar keltiriń.
- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$;
 - b) barlıq basqa sanlardan kishi bolğan san bar;
 - c) eger $\forall x \exists y P(x,y)$ bolsa, ol jaǵdayda $\exists y \forall x P(x,y)$ boladı.

14-15

DURÍS PIKIR JÚRGIZIW (ARGUMENTACIYA) NÍZAMLARÍ. SOFIZMLER HÁM PARADOKSLAR

Pikirdi tuwrı hám izbe-iz bayanlaw ushın logika nızamlarınan paydalanıw zárúr. Anıqlıq, durıslıq, izbe-izlik hám tiykarlanğanlıq oy-pikirlewdiń zárúr sıpatlarınan bolıp tabıladı. Logika nızamları oy-pikirler hám tastıyıqlawlar arasındagı zárúr baylanıslardı ornatadı.

Tastıyıqlaw – bul oy-pikirdiń forması bolıp, onıń járdeminde tiykarlar dep atalıwshı bir yamasa bir neshe pikirlerden juwmaq dep atalıwshı belgili bir pikir alınadı. Máselen, «Temir - metall» degen tastıyıqlawda predmet (temir) penen onıń qásyeti (metall ekenligi) ortasındagı qatnas kórsetilgen. «Tárbiya huqıqtan ilgeri payda bolğan» degen tastıyıqlawda bolsa eki predmet (tárbiya hám huqıq) ortasındagı qatnas kórsetilgen. Mazmun jaǵınan túrlishe bolğan bul tastıyıqlawda dúzilisine kóre birdey bolıp: olarda predmet haqqındaǵı túshinikler kompleksi (S) menen predmet belgisi haqqındaǵı túsiniq (R) ortasındagı qatnas kórsetilgen, yaǵnıy R diń S ke sáykesligi tasdıyqlanğan.

Ulıwma jaǵdayda tastıyıqlaw $S \Rightarrow R$ logikalıq kóriniste ańlatıladı.

Biz S aytımlar kompleksin **tiykar**, R aytımdı bolsa **juwmaq** dep ataymız. Tastıyıqlawda tiykar hám juwmaq "Demek" bayla(nıstır)ıwshı sóz benen baylanısadı.

Ádette $S \Rightarrow R$ tastıyıqlawda tiykar hám juwmaq gorizontál sızıq penen bunday ajratıladı: $\frac{S}{P}$. Ápiwayı bir mısál keltireyik.

Eger Sabır sport penen shuǵıllansa, ol den-sawlıǵı bekkem boladı.

Sabır sport penen shuǵıllanıp atır. Demek, Sabır den-sawlıǵı bekkem boladı. Bul tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin tabayıq.

p : Sabır sport penen shuǵıllanbaqta.

q : Sabır den-sawlıǵı bekkem aytımların qarasaq, tastıyıqlaw tómende-
gi kóriniske iye boladı:

$$\frac{\left. \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array} \right\} \text{tiykar}}{q \left. \right\} \text{juwmaq}}$$

$p \Rightarrow q$ hám aytımlardan q aytım kelip shıqqanı ushın, tastıyıqlaw $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ logikalıq kóriniske iye.

Tastıyıqlawdıń shınılıq kestesin dúzemiz:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Nátiyjede tautologiyanı payda qıldıq. Bul jaǵday tastıyıqlawdıń **durıslıǵın** kórsetpekte, yaǵnıy berilgen tiykarlardan durıs juwmaq shıǵarǵanlıǵın bildirmekte.

1-misal. Tómenдеgi tastıyıqlaw qáteligin dáııyllen:

Eger úshmúyeshlik úsh tárepke iye bolsa, ol jaǵdayda $2+4=7$.

Demek, úshmúyeshlik úsh tárepke iye.

 Bul tastıyıqlawdıń logikalıq kórinisin tabayıq.

p : úshmúyeshlik úsh tárepke iye.

q : $2+4=7$

aytımlardı qarasaq, tastıyıqlaw tómenдеgi kóriniske iye boladı:

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array}} \right\} \text{tiykar}}{q \left. \vphantom{q} \right\} \text{juwmaq}}$$



$p \Rightarrow q$ hám q aytımlardan p aytımlı kelip shıqqanı ushın, tastıyıqlawdıń $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ logikalıq kóriniske iye.

Shınılıq kestesin dúzemiz:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Nátiyjede tautologiya payda bolmadı. Bul jaǵday tastıyıqlawdıń **qáteligin** kórsetpekte, yaǵnıy berilgen tiykarlardan durıs juwmaq shıǵarılmaǵanlıǵın bildirmekte.

Tómenде biz durıs tastıyıqlawlardı (**argumentaciya** nızamların) keltiremiz:

T	Tastıyıqlaw	Ma'nisi	Misal
1°.	$\frac{p \Rightarrow q}{p}$ q	P durıs bolǵanda q durıs bolsın. Bunda p durıs. Demek, q da durıs.	Eger sabaqlıqtı oqısam ayrıqsha baha alaman. Sabaqlıqtı oqıdım. Demek, ayrıqsha baha alaman.

2°.	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$	p duris bolganda, q duris bolsin. Biraq q qáte. Demek, p da qáte.	Eger kitap oqisam, ayriqsha baha alaman. Ayriqsha baha almadim. Demek, kitap oqimadim..
3°.	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$	p yamasa q duris hám p naduris bolsin. Demek, q naduris.	Men yaki kitap oqiyman, yaki kino kóremen. Men kitap oqimadim. Demek, men kino kórdim.
4°.	$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline p \Rightarrow r \end{array}$	P dan q hám de q dan r kelip shiqsin. Ol jaǵdayda p dan r kelip shıǵadı.	Eger hawa ashıq bolsa, men sport maydanshaǵa baraman. Eger men sport maydanshaǵa barsam, futbol oynayman. Demek, hawa ashıq bolsa, men futbol oynayman.

Biz tastıyqlawdıń durıslıǵın dáııyllewdi shınıǵıw retinde oqıwshıǵa usınıs etemiz.

Shınıǵıwlar

75. Tómendegı tastıyqlawdı qarayıq:

Ádil shamallaǵanda ǵana, onıń dene temperaturası joqarı boladı.

Ádildin denesiniń temperaturası joqarı emes.

Demek, Ádil shamallamaǵan.

a) tastıyqlawdıń logikalıq kórinisin jazıń;

b) tastıyqlawdıń duris ekenligin dáııylleń.

76. tastıyqlawdıń logikalıq kórinisin jazıń:

$$\begin{array}{ccccc} \text{a)} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \\ & \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \neg p \end{array} & \begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array} & \begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \hline p \end{array} & \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array} & \begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow p \\ \hline p \end{array} \end{array}$$

b) hár bir tastıyqlaw ushın shınılıq kesesin jazıp, olardan qaysıları duris ekenligin tabıń.

c) tábiyiy tilde ańlatılıwına mısallar keltiring.

77. Aytımlardı tastıyqlaw kórinisinde jazıń:

a) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;

c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$;

b) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow p$;

d) $(p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \vee p)$.

Payda bolǵan tastıyqlawlardıń qaysıları duris?

78. p : x – ápiwayı san hám q : x – taq san aytımların qarayıq:

Tómendegı tastıyqlawlardan qaysıları duris?

a) Eger x – ápiwayı san bolsa, ol taq boladı. x – taq yaki ápiwayı san. Demek, x – taq san;

b) x – taq yamasa ápiwayı, biraq bir waqıtta emes. x – taq san. Demek, x – ápiwayı san.

79. Tastıyıqlaw berilgen: Dáwrán jarısta qatnasıwı ushın ol yaki Singapurğa yaki Gongkongqa baradı. Dáwrán Singapurğa bariwı belgili. Demek, Dáwrán Gongkongqa barmaydı.

- a) shınlıq kestesi járdeminde bul tastıyıqlaw nadurıs ekenligin dáliyllen;
- b) nege bul tastıyıqlaw nadurıs ekenligin túsintiriń.

80. Tómendegi tastıyıqlawlardan qaysıları durıs, qaysıları nadurıs:

- a) Turdıbay saat 10.00 da yaki kinoga yaki teatrğa baradı. Turdıbay saat 10.00 da kinoga barmadı. Demek, Turdıbay saat 10.00 da teatrğa bardı;
- b) x sanı 4 ke eseli bolsa, ol jup san boladı. x - jup san, Demek, ol 4 ke eseli;
- c) x sanı yaki 30 dıń yaki 50 dıń bóliwshisi. Demek, x sanı 50 dıń bóliwshisi;
- d) eger izbe - izlik arifmetikalıq progressiya bolmasa, ol geometriyalıq progressiya boladı. Demek, izbe - izlik yaki arifmetikalıq yaki geometriyalıq progressiya boladı;
- e) barlıq klasslaslarım jaqsı oqıydı. Máqset jaqsı oqıydı. Demek, Máqset meniń klasslasım.

81. Aytımlardı dawam ettirip, durıs tastıyıqlawlardı hasıl qılın:

- a) Ekewimizden birimiz házir stomatolog qabılına kiriwimiz kerek. Men kirmeymen. Demek;
- b) Men yaki mektepke baraman yaki anam meni qattı urıadı. Búgin men mektepke anıq barmayman. Demek;
- c) Eger men máseleni durıs shıǵarsam, onıń juwabı kitaptaǵı juwap penen birdey boladı. Meniń nátiyjem kitaptaǵı juwaptan parıqlı. Demek;
- d) Eger Genri úylengen bolsa, onıń mülkine ómirlik joldası iye boladı. Eger úylenbegen bolsa, onıń mülkine inisi iye boladı. Demek, onıń mülkine;
- e) Yaki poezd kesh qalıp atır, yaki onı biykar qılǵan. Eger onı biykar qılǵan bolsa, men búgin hesh qayerge ketpeymen. Eger ol kesh qalıp atırǵan bolsa, men jumısqa óz waqtında bara almayman. Demek men;
- f) Eger 2 – ápiwayı san bolsa, ol eń kishi ápiwayı san boladı. 2 - ápiwayı san. Demek

Sofizmler hám paradokslar

Sofizm² – jalǵandı ras, al rastı jalǵan etip kórsetiw ushın arnalǵan, sanalı túrdegi qáteliklerdi bildiredi.

Sofizmge uqsas (tiyisli) máselelerdi dáslep, eradan aldınǵı V ásirde Áyemgi Greciyada jasaǵan matematik Zenon dúzgen.

Zenon, ataqlı shapqır Axillestin aldında súyretilip kiyatırǵan tasbaqanı hesh qashan quwıp jete almaslıǵın matematik olıq aytımlar járdeminde tómendegishe "dáliyllegen". Axilles tasbaqaǵa qaraǵanda 10 márte tezirek júre aladı. Dáslep, tasbaqa 100 metr aldında bolsın. Axilles bul 100 metrdi júrip ótkenshe, tashbaqa 10 metr ilgerileydi. Axilles bul 10 metrdi júrip ótkenshe tasbaqa jáne 1 metr jılısadı hám t.b. Olar arasındǵı aralıq hár dayım qısqarıp baradı, biraq hesh qashan nolge aylanbaydı.

Zenon máseleleri sheksizlik, háreket, kosmos túshinikleri menen baylanıslı bolıp, olar matematika hám fizika pánleriniń rawajlanıwında úlken áhmiyetke iye boldı.

Ayırım sofizmler ullı babalarımız Farobiy shıǵarmalarında, Beruniy menen Ibn Sinonıń jazılmalarında talqılǵan.

Biz tómende eń ápiwayı sofizmlerge mısallar keltirip olardı túsiniwge háreket qılmaqshımız.

2-misal. *1000 sum qayerge ketti?* 3 dos asxanada awqatlanıp bolǵannan keyin xızmetshi olarǵa 25000 sumlıq esaptı berdi. 3 dostıń hár biri 10000 sumnan pul berip, 30000 sumdı xızmetshige berdi. Xızmetshi olarǵa 5000 sum qaytıw berdi. Doslar 1000 sumnan bólisip aldı hám 2000 sumdı taksi ushın berdi. Qaytıp kiyatırǵanda doslardan biri esaplay bashladı, "Hár birimiz 9000 sumnan hárejet qıldıq, bul 27000 sum boladı, 2000 sum taksige berdik, bunı qossa 29000 sum boladı. 1000 sum qayerge ketdi?"

△ Bul jerdegi tiykarǵı "qátelik" esaplawdıń nadurıs qılınǵanlıǵında. 3 dos 9000 sumnan 27000 sum pul tóledi. Bunnan 25000 sumın awqatqa tólep, 2000 sumın taksi ushın dostına berdi, demek ulıwma esap 27000 sum boladı. Joqarıdaǵı esaplawda 2000 sum 27000 sumnıń ishinde jatır. ▲

3-misal. *"2·2=5" sofizmi:* 20–16–4=25–20–5 durıs teńlikti ápiwayılas-tıramız:

$$2(10-8-2)=25-20-5$$

$$2 \cdot 2 \cdot (5-4-1)=5 \cdot (5-4-1)$$

Aqırǵı teńliktiń oń hám shep táreplerin ulıwma (5–4–1) kóbeytiwshige qısqartırıp, 2·2=5 teńlikti hasıl qılamız.

△ Bul jerdegi qılınıp atırǵan tiykarǵı "qátelik" $2 \cdot 2 \cdot (5-4-1)=5 \cdot (5-4-1)$ teńliktiń eki jaǵın nolge teń bolǵan (5–4–1) kóbeytiwshige qısqartırıwda. ▲

Paradoks² – kópshilik tárepinen qabıl etilgen ádettegi pikirge óz mazmunı yaıi kórinisi menen keskin qarama – qarsı bolǵan, kútilmegen aytım. Hár qanday paradoks "gúmansız durıs" (tiýkarlı ma, tiýkarsız ba – bunnan qátti názer) esaplanǵan ol yaıi bul pikirdi biýkar etiwdey kórinedi. "Paradoks" termininiń ózi de dáslep antik filosofiyada hár qanday basqasha, original pikirdi ańlatıw ushın isletilgen.

Paradokslar, ádette, logikalıq tiýkarları tolıq anıqlanbaǵan teoriyalarda ushıraydı.

4-mısal. Jalǵanshı paradoksi "Men tastıyqlap atırǵan barlıq nárese jalǵan" aytımdı qarayıq.

△ Eger bul aytım shın bolsa, bul aytımınń mánisine tiýkarlap ayılǵan aytımınń jalǵan ekenligi haqıyqat. Eger bul aytım jalǵan bolsa, aytımdaǵı pikir – jalǵan. Demek, bul aytım jalǵan degen aytım jalǵan, sonday eken, bul aytım haqıyqat. Qarama-qarsılıq. ▲

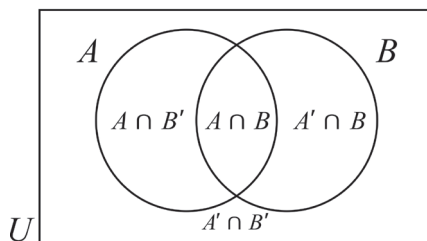
5-mısal. Refleksivlik paradoksi. Qaraqalpaq tilindegi sózdiń mánisi ózinde ańlatılsa, onı refleksiv dep atayıq.

Máselen, "qaraqalpaqsha" sózi refleksiv, "inglizshe" sózi bolsa refleksiv emes. Tap sonday, "on eki háripli" sózi ondaǵı háripler sanı shınnan da, 12 ge teń bolǵanı ushın refleksiv, "altı háripli" sózi bolsa refleksiv emes. Barlıq refleksiv sózler kópigin qarayıq. "Refleksiv emes" sóziniń ózi refleksiv bola ma?

△ Eger bul sóz refleksiv bolsa, onda mánisine kóre, ol refleksiv emes. Eger bul sóz refleksiv emes bolsa, onda onıń mánisi ózinde ańlatılǵanı ushın, ol refleksiv boladı. Qarama-qarsılıq. ▲

16-18 MÁSELELER SHESHIW

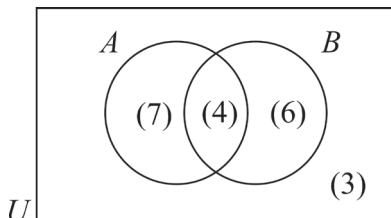
1-másele. Kesilisetuǵın eki A , B kóplikler universal kóplikti tórt bólekke ajıratadı:



² Áyemgi grekshe παραδοξος – kútilmegen, basqasha (ǵalati)

△ Demek, universal kópplik elementleri sanı usı úles kópplik elementleri sanı qosındısına teń eken.

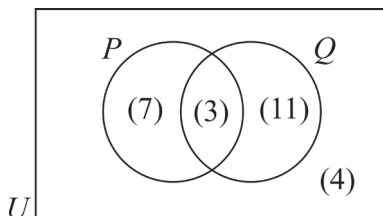
Tómendegi diagrammada universal kópplik sáykes bólekleriniń elementleri sanı qawsırmaǵa alınıp jazılǵan:



Bul jerde, máselen, A , B kóppliklerdiń ekewine 4 element, 3 element bolsa birewine de tiyisli emes.

U kópliktiń qálegen elementi 4 bólektiń keminde birewine tiyisli bolǵanı ushın U kópplik elementleriniń sanı $7 + 4 + 6 + 3 = 20$ ǵa teń. ▲

2-másele. Súwretke qarap, tómendegi kóppliklerdiń elementleri sanın tabıń:



- a) P ; b) Q ; c) $P \cup Q$;
 d) P ǵa tiyisli, biraq Q ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;
 e) Q ǵa tiyisli, biraq P ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi;
 f) P ǵa da, Q ǵa da tiyisli bolmaǵan elementler kópligi.

- △ a) $n(P)=7+3=10$; b) $n(Q)=7+4=11$;
 c) $n(P \cup Q)=7+3+11=21$; d) $n(P, \text{ biraq } Q \text{ emes})=7$;
 e) $n(Q, \text{ biraq } P \text{ emes})=11$. ▲

3-másele. Eger $n(U)=30$, $n(A)=14$, $n(B)=17$ hám $n(A \cap B)=6$ bolsa,

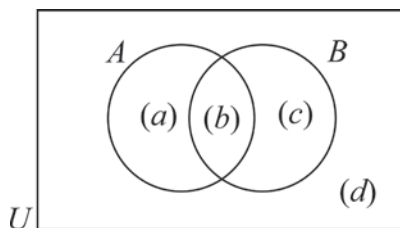
a) $n(A \cup B)$ nı tabıń.

b) A ǵa tiyisli, biraq B ǵa tiyisli bolmaǵan elementler kópligi neshe elementten turadı?

△ Venn diagrammasın dúzemiz:

$n(A \cap B)$ dan $b=6$; $n(A)$ dan $a+b=14$; $n(B)$ dan $b+c=17$; $n(U)$ dan $a+b+c+d=30$ teńlik kelip shıǵadı.

Demek, $b=6$, $a=8$, $c=11$, $d=5$.



Diagrammadan tóمندegilerge iye bolamiz:

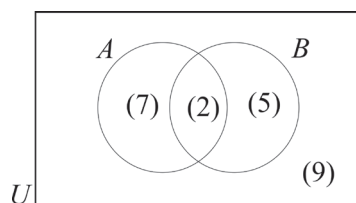
a) $n(A \cup B) = a + b + c = 25$;

b) A ga tiyisli, biraq B ga tiyisli bolmağan elementler sanı $a = 8$ ge teń. ▲

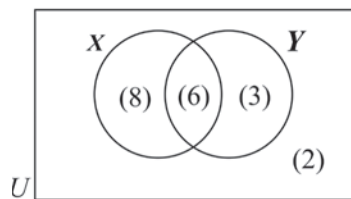
Shınıǵıwlar

Diagrammadan paydalanıp, tóمندegi kóplikler elementleri sanın tabıń:

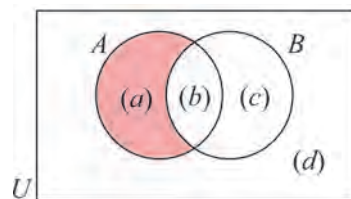
- 82.** a) B ; b) A' ; c) $A \cup B$;
d) A ga tiyisli, biraq B ga tiyisli bolmağan elementler kópligi;
e) B ga tiyisli, biraq A ga tiyisli bolmağan elementler kópligi;
f) A ga da, B ga da tiyisli bolmağan elementler kópligi.



- 83.** a) X' ; b) $X \cap Y$; c) $X \cup Y$;
d) X ke tiyisli, biraq Y ke tiyisli bolmağan elementler kópligi;
e) Y ke tiyisli, biraq X ke tiyisli bolmağan elementler kópligi;
f) X ke de, Y ke de tiyisli bolmağan elementler kópligi.



- 84.** a) $n(B)$; b) $n(A')$;
c) $n(A \cap B)$; d) $n(A \cup B)$;
e) $n((A \cap B)')$; f) $n((A \cup B)')$.



- 85.** $n(U) = 26$, $n(A) = 11$, $n(B) = 12$ hám $n(A \cap B) = 8$ bolsa

a) $n(A \cup B)$ nı tabıń;
b) B ga tiyisli, biraq A ga tiyisli bolmağan elementler kópligi neshe elementten turadı?

- 86.** $n(U) = 32$, $n(M) = 13$, $n(M \cup N) = 26$ hám $n(M \cap N) = 5$ bolsa

a) $n(N)$; b) $n((M \cup N)')$ tı tabıń.

87. $n(U)=50$, $n(S)=30$, $n(R)=25$ va $n(R \cup S)=48$ bolsa

a) $n(R \cap S)$;

b) S ke tiyisli, biraq R ge tiyisli bolmağan elementler kópligi neshe elementten turadı?

4-másele. Sport dógeresine qatnasqan 27 oqıwshıdan 19ı qara shashlı, 14i qara kózli hám 11i ham qara shashlı hám qara kózli.

a) Bul maǵlıwmattı Venn diagrammasında súwretleń hám túsintiriń.

b) **I** Ya qara shashlı, ya qara kózli;

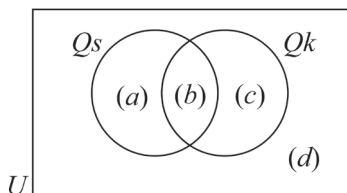
II qara shashlı, biraq qara kózli emes; oqıwshılar qansha?

△ a) Qs – qara shashlı, Qk bolsa qara kózli oqıwshılar kópligi bolsın.

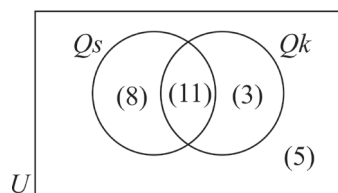
Tómendegi diagrammağa iye bolamız:

Bunda

$$a+b+c+d=27; \quad a+b=19; \quad b+c=14; \\ b=11; \quad a=8; \quad c=3; \quad d=5.$$



Yaǵnıy



b) Diagrammağa qarap, tómendegilerdi anıqlaymız:

I Ya qara shashlı ya qara kózli oqıwshılar sanı

$$n(Qs \cap Qk)=8+11+3=22;$$

II qara shashlı, biraq qara kózli emes oqıwshılar sanı

$$n(Qs \cap Qk')=8. \quad \blacktriangle$$

Shınıǵıwlar

88. Badminton klubında 41 qatnasıwshıdan 31i jalǵız ózi hám 16sı juplıqlarda oynaydı. Neshe qatnasshı hám jalǵız ózi hám juplıqlarda oynaydı?

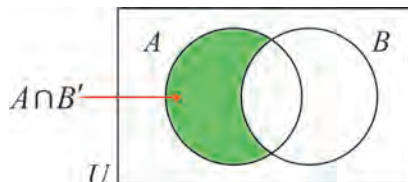
89. Kárxanada 56 ishshi islemekte. 1 hápte ishinde solardan 47si kúndizgi hám 29ı keshki smenalarda isledi. Neshe ishshi hám kúndizgi hám keshki smenada isledi?

90. Tómendegi Venn diagrammasına qarap

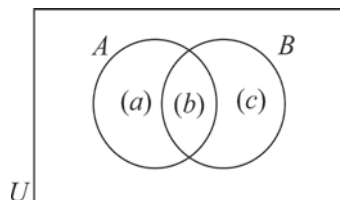
$$n(A \cap B')=n(A)-n(A \cap B),$$

$$n(A' \cap B)=n(B)-n(A \cap B)$$

teńlikler orınlı ekenligin kórsetiń.



- 91.** Venn diagrammasidan paydalanib
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 formulani keltirib shigarin.



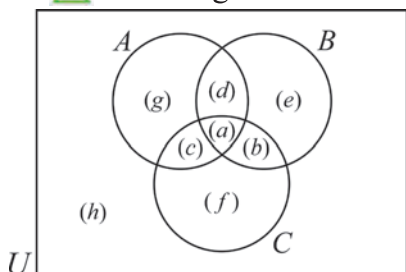
- 92.** 50 oqirshidan 40i ingliz tilin, 25i bolsa nemis tilin uyrenbekte. Eki tildi de uyrenip atirgan oqirshilar qansha?

5-masele. Futbol jarisinda qaladan ush A , B ham C komandalar qatnaspagta. Qala turginlarinin 20 procenti A komandanı, 24 procenti B komandanı ham 28 procenti C komandanı qollap quwatlaydı. Qala turginlarinin 4 procenti ham A , ham B komandağa, 5 procenti ham A , ham C komandalargä, 6 procenti bolsa ham B , ham C komandalardi qollap quwatlaydı. Bunnan basqa, qala turginlarinin 1 procenti barlıq komandalardi qollap quwatlaganlığı malim (belgili).

Qala turginlarinin neshe procenti:

- tek gana A komandanı qollap quwatlaydı;
- ham A , ham B komandalardi qollap quwatlap, C komandanı qollap quwatlamaydı;
- hesh qanday komandanı qollap quwatlamaydı?

△ Venn diagrammasın maqlıwmatlar menen toltiramız.



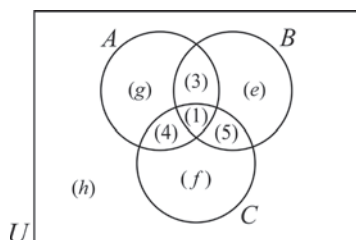
$a=1$, sebebi qala turginlarinin 1 procenti barlıq komandalardi qollap quwatlaydı.

$a+d=4$, sebebi qala turginlarinin 4 procenti ham A , ham B komandalardi qollap quwatlaydı.

$a+b=6$, sebebi qala turginlarinin 6 procenti ham B , ham C komandalardi qollap quwatlaydı.

$a+c=5$, sebebi qala turginlarinin 5 procenti ham A , ham C komandalardi qollap quwatlaydı. Demek, $d=3$, $b=5$, $c=4$.

Natijjede tomendegi diagramma hasil boladı:



Bunnan tisqari, qala turginlarinin 20 procenti A komandanı qollap quwatlaganlığı ushın $g+1+4+3=20$, yağniy $g=12$.

Tap usınday, qala turginlarinin 24 procenti B komandanı qollap quwatlaganı ushın $e+1+5+3=24$, yağniy $e=15$.

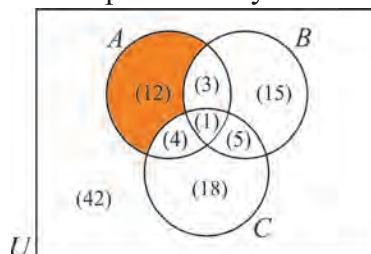
Hámde qala turǵınlarınıń 28 procenti C komandanı qollap quwatlaytuǵınlıǵı ushın $f+1+5+4=28$, yaǵniy $f=18$.

Qala turǵınları 100 procent bolǵanı ushın, hesh qaysı komandanı qollap quwatlamaganlar procenti $h=42$ ge teń.

a) Tek ǵana A komandanı qollap quwatlaytuǵınlardıń procenti sáykes bólekti boyap tabamız: $g=20-4-3-1=12$.

b) hám A , hám B komandalardı qollap quwatlap, C komandanı qollap quwatlamaytuǵınlar procenti $12+3+15=30$ ǵa teń.

c) hesh qanday komandanı qollap quwatlamaytuǵınlardıń procenti $h=42$ ge teng. ▲



Shınıǵıwlar

93. Xalıq aralıq konferenciya 58 qatnasıwshılar túrli tillerde, yaǵniy 28i arab, 27si qıtay, 39ı anglichan tillerinde sóylese aladı.

- a) tek ǵana qıtay tilinde sóylesip biletuǵınlar;
- b) usı tillerden birewinde de sóylesip bilmeytuǵınlar;
- c) arab tilinde de, qıtay tilinde de sóylesip bilmeytuǵınlar neshe?

94. Tómendegi aytımlardıń biykarın dúziń:

- a) quyash jarqırıp tur hám hawa ıssı;
- b) eger aspan bulıtsız bolsa men dáryaǵa baraman;
- c) jawın jawmay atır;
- d) men ya baqlaw (jazba) jumısına tayarlanaman, yamasa baqlaw (jazba) jumıstı jaqsı jaza almayman.
- e) ayırım oqıwshılar intalı; f) barlıq oqıwshılar intalı;
- g) intalı oqıwshılar joq;
- h) ayırım oqıwshılardıń kózleri jasıl reńde.

Aytımlardı logikalıq bayla(nıstır)wshılar járdeminde ańlatın (**95–104**): Eger oqıwshı matematikanı ózlestirse, onıń sanası keńeedi.

95.

96. Eger men matematikanı hám shet tilin ózlestirsem, men dem alıwǵa yaki úyge, yaki tawǵa ketemen.

97. Dem alıs kúnleri baslanǵanı jalǵan.

98. Eger insan jaslıǵınan ózin basqara alsa, ol jaǵdayda onıń átirapındaǵıları onnan o'kpelemeydi hám onı húrmet qıladı.

99. Eger metallıdan elektr toki ótse, onıń temperaturası kóteriledi.

100. Ol úyge ya takside, ya poezdda ketedi.

- 101.** Bul zat ushın qara yaki rengli metall isletilgen.
- 102.** Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı jeterli.
- 103.** Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı zárúr.
- 104.** Dem alıs kúnleri baslanıwı ushın oqıw sheregi tamam bolıwı zárúr hám jeterli.
Aytımlardı logikalıq bayla(nıstırı)wshılar járdeminde ańlatıń hám shın – jalǵanlıǵın anıqlań (**105–117**):
- 105.** Eger insan ruxıy kesel bolsa, ol jaqınların tanımaydı. Bul insan ruxıy kesel. Demek, ol jaqınların tanımaydı.
- 106.** Eger men saǵan isense, sen meni aldaysań. Demek, men saǵan isenbesem sen meni alday almaysań.
- 107.** Erteń biz teatrǵa yaki muzeyge baramız. Eger teatrǵa barsaq, úyge kesh qaytamız. Eger muzeyge barsaq, úyge erterek jetip kelemiz. Biraq biz úyge kesh qaytpaymız. Demek, biz teatrǵa emes, muzeyge baramız.
- 108.** Eger ol Alisherdiń ákesi bolsa, ol Murattıń ákesi bola almaydı. Ol Alisherdiń hám Jámshittiń ákesi ekenligi nadurıs eken. Ol ya Jámshittiń ya Murattıń ákesi ekenligi anıqlandı. Demek, ol Alisherdiń ákesi emes.
- 109.** Eger házir qıs bolsa, hawanıń temperaturası pás boladı. Házir gúz bolmasa, qıs boladı. Házir gúz. Demek, hawa temperaturası pás emes.
- 110.** Eger Polat qızıǵıwshań bolmasa, ol jurnalist bolmaydı. Eger Polat jurnalist bolsa, ol oqıtıwshı bolmaydı. Polat júdá qızıǵıwshań, biraq ol oqıtıwshı emes. Demek, Polat – jurnalist.
- 111.** Eger jamǵır jawsa, aspan bulıtlı boladı. Eger aspan bulıtlı bolmasa, quyash boladı. Jamǵır jawıp atır, biraq quyash bar. Demek, quyash bolsa, aspan bulıtlı bolmaydı.
- 112.** Eger Murat jáne tezlikti asırsa, onıń hújjetleri alıp qoyıladı. Eger Murat más halda rulge otırsa, ol tezlikti asırmaydı. Búgin Murat más bolmaydı hám tezlikti asırmaydı. Demek, onıń hújjetleri búgin alıp qoyılmaydı.
- 113.** Kóbeytiw kestesi bilmeytuǵınlar sawatsız esaplanadı. Álipbeni bilmeytuǵınlar da sawatsız esaplanadı. Ol ya kóbeytiw kestesi ya álipbeni bilmeydi. Demek, ol sawatsız.
- 114.** Eger ol haq bolsa, men onnan keshirim sorawım kerek. Eger men haq bolsam, ol mennen keshirim sorawı kerek. Ekewimizden birimiz álbette keshirim sorawımız kerek. Juwmaq: birimiz haq.
- 115.** Men ya mektepke baraman, ya maǵan anam baqıradı. Men mektepke barmayman. Demek, maǵan anam álbette baqıradı.

- 116.** Eger men máseleni qátesiz shıǵarsam, alıńǵan nátiyje sabaqlıqtaǵı juwap penen birdey boladı. Meniń nátiyjem menen sabaqlıqtaǵı juwap parıqlanbaqta. Demek, men máseleni sheshiwde qátege jol qoyǵanman.
- 117.** Pán quramalı emes yaki ol jaqsı oqıtılmaqta. Eger pán quramalı bolmasa, onı ózlestiremen. Eger pán jaqsı oqıtılsa, onı ózlestiremen. Demek, barlıq hallarda pándi ózlestiremen.
- 118.** Shıńlıq kesteleri járdeminde tómendegi aytımlardıń túrin anıqlań hám tábiyiy tildegi sáykes xabar gápke mısál keltiriń.
- | | |
|--|---|
| a) $p \vee q \Rightarrow p \vee q$; | d) $p \vee q \Rightarrow \neg q \wedge p$; |
| b) $p \Rightarrow \neg q \vee (p \Rightarrow q)$; | e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$; |
| c) $\neg(q \Rightarrow \neg p) \wedge \neg q$; | f) $\neg(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$. |
- Tómendegi aytımlardı logikalıq bayla(nıstır)ıwshılar járdeminde anlatıń hám shın – jalǵanlıǵın anıqlań(119-130):
- 119.** Barlıq delfinler – sút emiziwshiler. Bir de balıq sút emiziwshi emes. Demek, bir de balıq delfin emes.
- 120.** Barlıq sıyırlar - sút emiziwshiler. Barlıq sıyırlar pishendi jeydi. Demek, ayırım sút emiziwshiler pishendi jeydi.
- 121.** Ayırım studentler isleydi hám ayırım studentler jaqsı oqıydı. Demek, ayırım jaqsı oqıytuǵın studentler ishinde isleytuǵınları bar.
- 122.** Barlıq metallar qattı halda. Sinap – metall. Demek, sinap qattı halda.
- 123.** Hesh qanday metall gaz emes. Ayırım zatlar metallar. Demek, ayırım zatlar – gaz emes.
- 124.** Barlıq metallar ıssılıqtı jaqsı ótkizedi. Barlıq metallar elektr togın ótkizedi. Demek, ayırım elektr ótkiziwshiler ıssılıqtı jaqsı ótkizedi.
- 125.** Ayırım er adamlar – matematikler. Ayırım matematikler – fisosoflar. Demek, ayırım filosoflar – er adamlar.
- 126.** Barlıq alpinistler qorıqpaslar. Ayırım alpinistler erkekler. Demek, ayırım erkekler qorıqpas boladı.
- 127.** Barlıq ilimpazlar aqıllı. Ayırım aqıllı insanlardıń tili ótkir. Demek, ayırım tili ótkirler – ilimpaz.
- 128.** Barlıq shet tili oqıtıwshıları shet tilin jaqsı bileği. Shet tilin jaqsı biletuǵınlardıń ayırımları matematikanı jaqsı kórmeydi. Demek, matematikanı jaqsı kóretuǵınlardıń ayırımları shet tili oqıtıwshıları emes.
- 129.** Barlıq kromanyonlar – agressiv. Bir de bir neandertal kromanyon emes. Demek, hesh qanday neandertal agressiv emes.

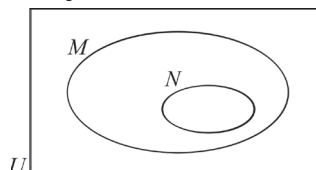
- 130.** Ayırım sût emiziwshiler – kitler. Barlıq kitler - iri haywanlar. Demek, Ayırım iri haywanlar sût emiziwshiler.
- Tekstlerdi oqıń hám jaǵdaydı aytıp berıń (**131–138**):
- 131.** Krit filosofi Epimenid barlıq kritikler ótirikshi (jalǵanshı) ekenligin tasdıyıqladı. Epimenid shın sóyledi me?
- 132.** Aflatun: Házir Sakrat aytqan barlıq nárse jalǵan (ótirik).
Sakrat: Házir Aflatun aytqan gáp jalǵan. Kim shın sóyledi?
- 133.** Qaǵazdıń bir tárepine: "Qaǵazdıń basqa tárepine jazılǵan gáp jalǵan", Usı qaǵazdıń ekinshi tárepine: "Qaǵazdıń basqa tárepine jazılǵan gáp jalǵan" dep jazılǵan. Qaǵazdıń qaysı tárepine shın gáp jazılǵan?
- 134.** Ataqlı (belgili) filosof Protagor Evatldı esheyin huqıqqa úyretiw ushın shákirtlikke aldı. Bunda eger Evatl óziniń birinshi sud májlisinde (jıynalıısında) jeńip shıqsa, maǵan bir muǵdardaǵı pul tóleydi mánisindegi shártname (kelisim) dúzildi.
- Oqıwdan soń Evatl jumısqa hesh shıqpadı. Nátiyjede onıń birinshi sud májlisinde qatnasıw - qatnaspawlıǵı belgisiz bolıp qaldı. Protagor óziniń shákirti ústinen sudqa arız (shikayat) qıldı. Sud processinen (járayanınan) úzindi:
- Protagor.* Hár qanday jaǵdayda da bul jigit maǵan tólewı kerek. Haqıyqattan da, eger ol bul sudta jeńip shıqsa, shártnamaǵa kóre ol maǵan toleydi. Eger utpasa, sud qararına kóre maǵan tóleydi.
- Evatl.* Men Protagorga hesh nárse bermeymen! Eger men sudta jeńip shıqsam, jeńip shıqqan adam retinde hesh nárse bermeymen. Biraq men utqızıwǵa da tayarman. Bul jaǵdayda shártnamaǵa kóre men hesh nárse tólemeymen.
- 135.** Bul qızıqarlı gápte sózler sanı jetige teń.
- 136.** Bul gápti oqıw qadaǵalanǵan (múmkin emes).
- 137.** Bir insan totıqustı satıp atırǵanda totıqus qálegen tilde esitken hár bir sózdi tákirarlaydı, dep isentirdi. Biraq satıp alınǵan totıqus hesh nárse sóylemedi. Eger satıwshı aldamaǵanlıǵı málim (belgili) bolsa, jaǵdaydı túsintiriń.
- 138.** Dániyardaǵı kitaplar sanı 1000 nan kóp.
Yaq, ondaǵı kitaplar 1000 nan kem.
Onda keminde bir kitap bar.
Usı úsh aytımnan keminde birewi shın. Dániyarda neshe kitap bar?

Baqlaw jumisi topsirmalari

I variant

1. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$,
 $A = \{0 \text{ hám } 9 \text{ arasindaǵı barlıq jup sanlar}\}$, $B = \{18 \text{ sanınıń natural bóliwshileri}\}$ bolsa, $A \cap B$ kóplik elementlerin jazıń.

2. Diagrammanı dápterinizge kóshiriń
hám $M \cap N$ kóplikti belgileń..



3. p : x – jup san, q : x san 3 ke bólinedi aytımdı qarayıq.
Aytımlardı sózler járdeminde ańlatıń.
Olar qaysı x larda shın? Jalǵan?

a) $\neg p$; b) $p \Rightarrow q$ c) $p \Rightarrow \neg q$.

4. Tómendegilerden qaysıları logikalıq teń kúshli?

a) $p \Rightarrow q$ hám $p \Leftrightarrow \neg p$; b) $p \Leftrightarrow q$ hám $(p \wedge q) \wedge \neg p$.

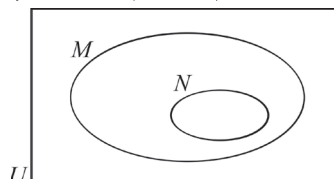
5. Tastıyıqlawlardıń logikalıq kórinisin jazıń. Bul tastıyıqlawlardıń durıs – qáteligin tekseriń.

Eger aspan bulıtlı bolsa, men bas kiyimimdi kiyemen. Aspan bulıtlı.
Demek, men bas kiyimimdi kiyemen.

II variant

1. $U = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$, $A = \{0 \text{ hám } 9 \text{ arasindaǵı barlıq jup sanlar}\}$, $B = \{18 \text{ sanınıń natural bóliwshileri}\}$ bolsa, $(A \cap B)'$ kóplik elementlerin jazıń.

2. Diagrammanı dápterinizge kóshiriń
hám $M \cap N'$ kóplikti belgileń.



3. p : x – jup san, q : x san 3 ke bólinedi aytımdı qarayıq.
Aytımlardı sózler járdeminde ańlatıń.
Olar qaysı x larda shın? Jalǵan?

a) $p \vee q$; b) $\neg p \wedge q$ c) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

4. Tómendegilerden qaysıları logikalıq teń kúshli?

a) $\neg(p \wedge q)$ hám $\neg p \vee \neg q$; b) $\neg p \Rightarrow \neg q$ hám $q \Rightarrow p$.

5. Tastıyıqlawlardıń logikalıq kórinisin jazıń. Bul tastıyıqlawlardıń durıs – qáteligin tekseriń. Barlıq oqıtıwshılar ilimge tırısqaq. Muazzam Alimova oqıtıwshı emes. Demek, Muazzam Alimova ilimge tırısqaq emes.



II BAP

FINANSLÍQ MATEMATIKA ELEMENTLERI

19-21 ÁPIWAYÍ PROCENTLER, QURAMALÍ PROCENTLER

Belgili muǵdardaǵı pul qarızǵa berilgende qarız alıwshı belgilengen múddette qarız beriwshige (*kreditorǵa*) alınǵan summanı (qarızdı) qaytarıwı haqqında kelisiledi.

Bunnan basqa (tısqarı) hár bir qarız alıwshı kreditorǵa qosımsha pullardı tólewdi óz juwapkershiligine aladı.

Qarızdar tárepinen tólenetuǵın pul qarız muǵdarına, tólew múddetine hám kreditor tárepinen dáramat alıw máqsetinde belgilengen procent stavkasına baylanıslı.

Kreditordıń qarızdarǵa málim (belgili) muǵdardaǵı puldı belgilengen múddette qarızǵa bergenligi aqıbetinde alatuǵın dáramatın esaplaw ushın ádette eki usıl: **ápiwayı procentler hám quramalı procentler** usılları qollanıladı.

Ápiwayı procentler

Ápiwayı procentler – kreditordıń qarızdarǵa málim (belgili) muǵdardaǵı puldı belgilengen múddette qarızǵa bergenligi nátiyjesinde alatuǵın dáramatı esaplaw usılı.

Máselen, 2 000 000 sum 3 jılǵa qarızǵa alınbaqta. Bunda kreditor tárepinen hár jıl 17% procent stavkası belgilendi.

Bul halda 1 jıldan soń $\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000$ sum, 3 jıldan soń bolsa qosımsha pul

$\frac{17}{100} \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 1\,020\,000$ sum tólewi lazım.

Bul misaldan tómendegi **ápiwayı procentler formulası** dep atalıwshı qatnas kelip shıǵadı:

$$I = \frac{C r n}{100},$$

bul jerde C – dáslep alınǵan qarız muǵdarı, I – C muǵdardaǵı puldı paydalanganı ushın qarızdardıń kreditorga tóleytuǵın procent tólemi. Usı parametr **procent** tólemi yaki, ápiwayıraq, procent dep te ataladı, r – hár jılǵa belgilengen procent stavkası, n – jıllar sanı.

1-misal. 8 000 000 sum jılına 7 procent stavkasında 18 ayǵa alınǵan bolsa, procent tólemin esaplań.

$$\triangle C = 8000000, \quad r = 7\%, \quad n = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ jıl.}$$

$$\text{Demek, } I = \frac{C r n}{100} = \frac{8000000 \cdot 7 \cdot 1,5}{100} = 840 \text{ 000 sum. } \blacktriangle$$

2-misal. Kreditör tárepinen procent stavkası hár jılǵa 8% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) 4 jıl ishinde alınǵan qarızdı hám **procent** tólemin qosımsha 1600 AQSh dollardı tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qansha muǵdarda qarız alǵan edi?

$\triangle$ Ápiwayı procentler formulasına boyınsha

$$I = \frac{C r n}{100}, \text{ bul jerde } I = 1600; r = 8; n = 4.$$

$$\text{Demek, } 1600 = \frac{C \cdot 8 \cdot 4}{100}.$$

Bunnan, $C = 5000$ (AQSh dollari). $\blacktriangle$

3-misal. Bank dáslep 4000 AQSh dollari muǵdarında qarız berip 18 ayda 900 AQSh dollari dáramat aldı. Eger tólem hár jılı ámelge asırılatsuǵın bolsa, jıllıq procent stavkası neshege teń?

$\triangle$ Ápiwayı procentler formulasına boyınsha

$$I = \frac{C r n}{100}, \text{ bul jerde } I = 900; n = 18 \text{ ay} = 1,5 \text{ jıl, } C = 4000.$$

$$\text{Demek, } 900 = \frac{4000 \cdot r \cdot 1,5}{100}.$$

Bunnan, $r = 15\%$. $\blacktriangle$

4-misal. Kreditör dáslep 2000 AQSh dollari muǵdarında qarız berip, bir neshe jıllar dawamında hár jılı tólungennen soń barlıǵı bolıp 3000 AQSh dollardı aldı. Eger procent stavkası hár jılǵa 12,5% dep belgilengen bolsa, tólemler neshe jılǵa ámelge asırılǵan?

△ Kreditor 3000–2000=1000 (AQSh dollari) muǵdarında dáramat alǵan. Ápiwayı procent formulasına kóre

$$I = \frac{C \cdot r \cdot n}{100}, \text{ bul jerde } I=1000; C=2000; r=12,5\%.$$

$$\text{Demek, } 1000 = \frac{2000 \cdot 12,5 \cdot n}{100}$$

Juwap: 4 jıl. ▲

Quramalı procentler

Quramalı procent usılınıń mazmunın túsintiriw ushın tómendegi máselege itibar beremiz.

5-misal.

Eger 6000 AQSh dollari muǵdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 8% penen 3 jılda tólew shártı menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen alınatuǵın dáramat qansha boladı?

△ Jıllıq quramalı procent stavkasın itibarǵa alıp, hár jılǵı procent tólem muǵdarın esaplaymız:

Jıl	Qarız (1)	Procent tólemi $= \frac{C \cdot r \cdot n}{100}$ (2)	Balans (1) + (2)
1	\$6000,00	$\$6000,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$480,00$	\$6480,00
2	\$6480,00	$\$6480,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$518,40$	\$6998,00
3	\$6998,00	$\$6998,00 \times \frac{8}{100} \times 1 = \$559,87$	\$7558,27

Demek, 6000 AQSh dollari muǵdardagı qarızdan qutılıw ushın 3 jıl dawamında 7558,27 AQSh dollari muǵdarındaǵı tólemlerdi ámelge asırıwı zárúr.

Bunda kreditor \$7558.27 - \$6000 = \$1558.27 muǵdarda dáramat aladı. Bul dáramat ulıwma *quramalı procent tólemi (ústeme procent)* dep júritiledi. ▲

Kreditor dáramatı aqırǵı jılda hasıl bolǵan balans hám dáslepki qarız muǵdarı ayırmasına teń ekenligi kórinip turıptı.

Quramalı procentler usılı jıldı yarım jıllıqlarǵa, shereklerge, aylarǵa, kúnlerge bólip qollanıwı da múmkin.

6-misal.

Eger 10000 AQSh dollari muğdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6% penen 1 jılǵa shereklerge bólip tólew shárti menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen alınatuǵın dáramat qansha boladı?



Sherek	Qarız (1)	Procent tólemi = $\frac{Crn}{100}$ (2)	Balans (1) + (2)
1	\$10000,00	$10000,00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$150,00$	\$10150,00
2	\$10150,00	$10000,00 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$152,25$	\$10302,25
3	\$10302,25	$10302,25 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$154,53$	\$10456,78
4	\$10456,78	$10456,78 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{4} = \$156,85$	\$10613,63

Demek, 10000 AQSh dollari muğdardagı qarızdan qutılıwı ushın 1 jıl dawamında 10613,63 AQSh dollari muğdarındaǵı tólemlerdi ámelge asırıw zárúr. Bunda kreditor 613,63 AQSh dollari muğdarda dáramat aladı. ▲

Eger qarız bir neshe jılǵa berilgen bolsa, juwmaqlawshı (aqırǵı) balans tómendegishe esaplanadı:

$$A = C(1 + \frac{r}{100})^n,$$

Bul jerde A — juwmaqlawshı balans, C — dáslep alınǵan qarız muğdarı, r — hár jılǵa belgilengen procent stavkası, n — jıllar sanı.

Eger qarız n jılǵa berilgen bolsa, tólemler bolsa hár jıldı k bólekke (yarım jıllıqlar, sherekler, aylar hám t.b.) bólip ámelge asırılsa, tólenetuǵın ulıwma muğdar

$A = C(1 + \frac{r}{100k})^{kn}$ formula boyınsha esaplanadı.

Eki usılda da ulıwma quramalı procent tólemi (ústeme procent)

$I = A - C$ formula boyınsha esaplanadı.

6-misaldı usı formulaǵa súenip shıǵaramız.

$C=10000$, $r=6$, $n=1$, $k=4$.

$$A = C \times (1 + \frac{r}{100k})^{kn}; \quad A = 10000 \times (1 + \frac{6}{100})^4; \quad A = 10613,64.$$

Demek, 10000 AQSh dollari muğdarındaǵı qarızdan qutılıwı ushın 1 jıl dawamında 10613,64 AQSh dollari muğdarındaǵı tólemnerdi ámelge asırıw zárúr. Bunda kreditor 613,64 AQSh dollari muğdarda dáramat aladı.

Eger bankke ápiwayı procent boyınsha qoyılǵan dáslepki pul muğdarı C sum bolsa, n jıldan soń bank kliyentke $a_n = C(1 + \frac{nr}{100})$ sum muğdarda pul tóleydi, bunda r banktiń jıllıq procent stavkası.

Eger usı pul muğdarı quramalı procent boyınsha bankke qoyılsa, n jıldan soń bank kliyentke $b_n = C(1 + \frac{r}{100})^n$ sum muğdarında pul tóleydi.

a_n – izbe – izlik arifmetikalıq progressiyanı,

b_n – izbe – izlik geometriyalıq progressiyanı hasıl qılıwı kórinip tur.

Shınıǵıwlar

1. a) 3 000 funt sterling jıllı procent stavkası 7% boyınsha 3 jılǵa qarızǵa alınsa;
b) 6100 AQSh dollari jıllıq procent stavkası 5,9% boyınsha 15 ayǵa qarızǵa alınsa;
c) 800 000 Yaponiya enası jıllıq procent stavkası 6,5% boyınsha 4 jıl 7 ayǵa qarızǵa alınsa;
d) 250 000 evro jıllıq procent stavkası 4,8% boyınsha 134 kúnge qarızǵa alınsa;
kreditorǵa tólenetuǵın procent tólemin tabıń.
2. 130000 AQSh dollari qarızǵa berilgen bolsa, kreditor qaysı hallarda kóbirek dáramat aladı: jıllıq procent stavkası 7% boyınsha 5 jılǵa, yaki jıllıq procent stavkası 7,7% boyınsha 5,5 jılǵa belgilengende me?
3. Kreditor tárepinen procent stavkası hár jılǵa 7% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) 5 jıl ishinde alınǵan qarızdı hám procent tólemine qosımsha 910 AQSh dolların tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qansha muğdarda qarız alǵan?
4. Jıllı procent stavkası 8% dep belgilengen. 3 jıl ishinde procent tólemine qosımsha 3456 funt sterling tólenen bolsa, qansha muğdarda qarız alınǵan?
5. Investor 21 ayda 2300 evro dáramat almaqshı. Hár jılǵı procent stavkası 6,5% dep belgilengen bolsa, investor qansha muğdarda investiciya kirgiziwi lazım?
6. a) Kreditor 4500 AQSh dollari muğdarında qarız berip, 3 jıl 900 AQSh dollarına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?
b) Kreditor 170000 Yaponiya enası muğdarında qarız berip, 2 jıl 170000 Yaponiya enasına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?

7. 8 ay davamında 9000 AQSh dollari muğdarında qarız alınıp, qarızdan basqa (tısqari) qosımsha 700 AQSh dollari tólendi. Jıllıq procent stavkası neshege teń?
8. Puqara 26 million sum bankke qoyıp, onıń esabında 18 ayda 32 million sum bolğanın anıqladı. Jıllıq procent stavkası neshege teń?
9.
 - a) Kreditor 20000 AQSh dollari qarız berip, 5000 AQSh dollarına teń dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası 7% bolsa, qarız neshe jılğa alınğan?
 - b) Kreditor 1200 evro muğdarında qarız berip 487 evro dáramat aldı. Jıllıq procent stavkası 6,75% bolsa, qarız neshe jılğa alınğan?
10. Kliyent bankke 9400 funt sterlingdi jıllıq procent stavkası 6,75% penen qoydı. 1800 funt sterling dáramat alıw ushın qansha waqıt kerek?
11. Eger:
 - a) 4500 evro qarız jıllıq quramalı procent stavkası 7% penen 3 jılda tólew shárti menen;
 - b) 6000 AQSh dollari qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5% penen 4 jılda tólew shárti menen;
 - c) 7400 funt sterling muğdarında qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6,5% penen 3 jılda tólew shárti menen alınğan bolsa, juwmaqlawshı (aqırǵı) balanstı esaplań.

22-24

MÁSELELER SHESHIW

1-másele.

Meyli, is bilermen 23000 AQSh dollari muğdarında qarızdan qutılıwı ushın tólemlerdi hár jılı emes, máselen, ayma-ay teń bóleklerde ámelge asırıwǵa qarar qıldı. Eger tólew dáwiri 6 jıl, jıllıq procent stavkası 8% bolsa, ol hár ayda qanday muğdardaǵı tólemlerdi ámelge asırıwı kerek?

△ 1-qádem

Procent tólem muğdarın esaplaymız.

$C=23\ 000$, $r=8\%$, $n=6$ bolğanı ushın

$$I = \frac{Crn}{100} = \frac{23000 \cdot 8 \cdot 6}{100} = \$11040.$$

2-qádem

Artqan kapital pul muğdarın, yaǵnıy ulıwma tólenetuǵın summanı esaplaymız:

$$C+I = \$23000 + \$11040 = \$34040.$$

3-qádem

Neshe ay dawamında tóleniwi kerekligin esaplaymız:

$$6 \times 12 = 72 \text{ oy.}$$

4-qádem

Demek, hár ayda tólenetuǵın pul muǵdarı

$$\frac{\$34040}{72} \approx \$472,78 \text{ ge teń.} \blacktriangle$$

2-másele.

Eger 8800 evro qarız jıllıq quramalı procent stavkası 4,5% penen hár jılı tólew shártı menen alınǵan bolsa, kreditor tárepinen 3,5 jılda alınǵan dáramat qansha boladı?

$$\blacktriangle C=8800, r=4,5\%, n=3,5, k=12 \times 3 \frac{1}{2} = 42$$

$$\text{Demek, } A = C \times \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}; \quad A = 8800 \times \left(1 + \frac{4.5}{1200}\right)^{42},$$

$$A = 10298,08, \quad \text{yaǵniy } I = A - C = 10298,08 - 8800 = 1498,08$$

3,5 jılda alınǵan dáramat €1498,08 ge teń. $\blacktriangle$

3-másele.

Eger bankten 50000 AQSh dollari muǵdarında alınǵan kredit jıllıq quramalı procent stavkası 5,2% penen hár sherekte tólew shártı menen alınǵan bolsa, bankke 3 jılda qansha AQSh dollari tólenedi?

$$\blacktriangle A=50000, r=5,2\%, n=3, k \cdot n=4 \times 3=12$$

$$\text{Demek, } A = C \times \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn} \quad 50000 = C \times \left(1 + \frac{5,2}{400}\right)^{12}$$

$$C = 42820,99. \text{ Bankke 3 jılda } \$42821 \text{ tólenedi. } \blacktriangle$$

Jaylar, imáratlar, texnikalıq qurallar, ásbap-úskineler, inventarlar, kompyuterler hám t.b. lar paydalı xızmet múddeti dawamında eskiredi. Eskiriw olardan paydalanıw waqtında usı qurallardıń texnikalıq óndiris qásiyetlerin áste-sekin joǵaltıw processin jobalaydı.

Amortizaciya paydalanılǵan qurallar bahaların olardıń eskiriwine muwapıq túrde zattıń ózine túser bahasına, dáwir qárejetlerine ótkiziw, paydalanılǵan qurallardıń ornın qaplaw máqsetinde pul fondın (xorın) jámlew processin jobalaydı.

Amortizaciya mánisin esaplaw ushın tómendegi formuladan poydanalıladı:

$$A = C \times \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n,$$

Bul jerde A – n dáwir bóleginen keyin bolğan amortizaciya mánisi, C – dáslepki baha, r – hár jılğa belgilengen amortizaciya normasi, n – dáwir bólekleri sanı (máselen, jıllar).

4–másele.

Qurılıs úskenesi 2400 funt sterling bahada satıp alınğan. Eger amortizaciya normasi 15% dep belgilengen bolsa, onıń 6 jıldan keyingi mánisin tabıń..

 $A = C \times (1 - \frac{r}{100})^n$, bul jerde $C = 2400$, $r = 15$, $n = 6$.

Demek,

$$A = 2400 \times (1 - 0,15)^6,$$

$$A = 2400 \times (0,85)^6.$$

Amortizaciya mánisi shama menen 905.16 funt sterling ekenligin tabamız.

Demek, úskineniń 6 jıldan keyingi mánisi

$$£2400 - £905,16 = £1494,84 \text{ ke teń. } \triangle$$

Paydalanılğan tovar (máselen mebel, elektron – kúndelikli texnika, kompyuter, avtomashina hám t.b.) lardı yaki úy – jaydı (ipoteka) satıp alıw ushın túrli kreditlerdi rásmiylestiredi. Ádette, bunday kreditler qısqa múddetlerge beriledi hám turaqlı yaki ózgeriwshen ústeme procent belgilenedi.

Tómende biz fomulalardan paydalanbastan tez esap – kitaplar ushın kredit tólemi kestegin keltiremiz (1000 pul birligine muwapıq):

Aylar	Jıllıq ústeme procent						
	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%
12	86,0664	86,5267	86,9884	87,4515	87,9159	88,3817	88,8488
18	58,2317	58,6850	59,1403	59,5977	60,0571	60,5185	60,9820
24	44,3206	44,7726	45,2273	45,6847	46,1449	46,6078	47,0735
30	35,9789	36,4319	36,8883	37,3482	37,8114	38,2781	38,7481
36	30,4219	30,8771	31,3364	31,7997	32,2672	32,7387	33,2143
42	26,4562	26,9142	27,3770	27,8445	28,3168	28,7939	29,2756
48	23,4850	23,9462	24,4129	24,8850	25,3626	25,8455	26,3338
54	21,1769	21,6416	22,1124	22,5894	23,0724	23,5615	24,0566
60	19,3328	19,8012	20,2764	20,7584	20,2470	21,7424	22,2444

5-másele.

Puqara 9200 evro kredit aldı. Oğan 12% jıllıq procent tólemi hám 3,5 jıllıq tólew múddeti belgilengen. Bir ayğa qansha tóleniwi kerek? Barlıgı bolıp qansha tóleniwi kerek?

△ Tólew múddeti 42 ay bolğanı ushın kestelerden hár bir 1000 evroğa €29,2756 evro tóleniwi kerekligin anıqlaymız.

Demek, 9200 evro ushın hár ayda $€9200 = €29,2756 \times 9,2$

$= €269,33552 \approx €269,340$ tólewi kerek.

Barlıgı bolıp

$= €269,40 \times 42 = €11314,80$ tólewi kerek. ▲

Shınıgıwlar

12. 10000 AQSh dollari muğdarında qarız 10 jılğa jıllıq procent stavkası 5,75% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde hár yarım jılda qanday muğdarda ámelge asırıwı kerek?
13. 15000 evro muğdarındaqı qarız 36 ayğa jıllıq procent stavkası 4,5% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde hár sherekte qanday muğdarda beriw kerek?
14. Bir kisi bankten 8000 funt sterlingdi 3,5 jılğa hár ayda 230 funt sterling tólew shártı menen kreditke aldı. Oğan qanday jıllıq procent stavkası belgilengen edi?
15. 6800 AQSh dollari muğdarındaqı qarız 2,5 jılğa jıllıq procent stavkası 8% boyınsha alındı. Qarız tólemlerin teń bóleklerde ayma-ay tólew ushın hár ayda qanday muğdarda beriw kerak?
16. Eger
 - a) 950 evro muğdardaqı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5,7% penen 2 – jıldıń aqırında;
 - b) 4180 funt sterling muğdarındaqı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 5,75% penen 3 – jıldıń aqırında;
 - c) 237000 Yaponiya yenası muğdarındaqı qarız jıllıq quramalı procent stavkası 7,3% penen 4 – jıldıń aqırında esaplasa, ulıwma quramalı procent tólemin tabıń.
17. Maks 8500 AQSh dollari muğdarındaqı bank depozitine pul qoydı. Jıllıq quramalı procent stavkasın 6% belgilep, bank Maks hár sherekte esabına pul ótkizbekte. 1 jıldan soń Makstıń esabında qansha pul boladı?
18. Mariya 24000 funt sterlingdi jıllıq quramalı procent stavkası 5% boyınsha bankke qoydı. Hár ayda bank onıń esabına pul ótkizbekte. 3 aydan soń Mariyanıń esabında qansha pul boladı?
19. Kreditor 45000 AQSh dollari muğdarında jıllıq quramalı procent stavkası 8,5% boyınsha qarız berdi. Eger tólemler
 - a) ápiwayı procentler;

- b) hár yarım jılğa quramalı procentler;
c) hár sherekte quramalı procentler boyınsha ámelge asırılsa, 3 jıldan soń alıńǵan dáramtlardı salıstırıń.

- 20.** Ofis ushın mebel 2500 evroǵa satıp alındı. Bunday zatlardıń amortizaciya normasi 15% ke teń ekenligi málim. Tómenдеgi kesteni dápterіnizge kós-hiriń hám toltırıń.

Jıllar	Amortizaciya	Bahası
0		€2500
1	$15\% \cdot €2500 = €375$	
2		
3		

- 21.** Puqara mebel satıp alıw ushın 1200 AQSh dollari muǵdarında kredit aldı. Jıllıq procent stavkası 8%, tólew múddeti 5 jıl bolsa, ol hár ayda qancha tólewı kerek? Barlıǵı bolıp qansha pul muǵdarı tólenedi? Kredit tólemi kestesinen paydalanıń.

- 22.** Puqara úy-jaydı ońlaw ushın 14000 AQSh dollari muǵdarında kredit aldı. Jıllıq procent stavkası 11%, tólew múddeti 4 jıl bolsa, ol hár ayda qansha tólewı kerek? Barlıǵı bolıp qancha pul muǵdarı tólenedi? Kredit tólewı kestesinen paydalanıń.

Baqlaw jumısı tapsırmaları

1. Bank tárepinen hár jılğa procent stavkası 14% dep belgilengen. Tádbirkar (is bilermen) banktan alǵan qarızın hám procent tólemine qosımsha 16000000 sumdı 5 jıl ishinde tóledi hám qarızdan qutıldı. Tádbirkar (is bilermen) qancha muǵdarda qarız alǵan?
2. Puqara dáslep bankke 20000000 sum amanat qoyıp 15 ayda 900000 sum dáramat aldı. Eger tólem hár jılı ámelge asırıǵan bolsa, jıllıq procent stavkası neshege teń?
3. Eger 20000000 sum qarız jıllıq quramalı procent stavkası 6% penen 1 jılда shereklerge bólip tólew shárti menen alıńǵan bolsa, kreditor alatuǵın dáramadı qansha boladı?
4. Djon úy-jay satıp alıw ushın 5 jılğa 25000 AQSh dollari muǵdarında kredit alǵan. Jıllıq quramalı procent stavkası 8% bolsa hám tólemler hár ayda ámelge asırılatuǵın bolsa ol hár ayda qancha pul tólewı kerek? Kreditor qansha dáramat aladı?
5. Úskene 45000 AQSh dollarına satıp alındı hám 2 jıl 3 aydan soń eskiriw nátiyjesinde onıń bahası 28500 AQSh dollarına teń. Úskene-niń jıllıq amortizaciya normasın tabın.





III BAP

ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEŃLEMELER

25-28

ÁPIWAYÍ RACIOLNAL TEŃLEMELER HÁM OLARDÍN SISTEMALARÍ

Eger bir teŃlemenin barlıq sheshimleri ekinshi teŃlemenin de sheshimleri bolsa, onda ekinshi teŃleme birinshisiniń *nátiyjesi* delinedi.

Ekinshi teŃlemenin sheshimleri kóplikleri ústpe – úst tússe, bunday teŃlemeler *teń kúshli* delinedi.

1-misal. TeŃlemeler teń kúshli me?

$$1) x + 2 = 3 \text{ hám } x + 5 = 6; \quad 2) \frac{x^2 + x}{x-1} = 0 \text{ hám } \frac{x+1}{x-1} = 0.$$

△ 1) Eki teŃleme birdey korengi iye: $x = 1$. Basqa korenler joq bolǵanı ushın bul teŃlemeler teń kúshli.

2) Birinshi teŃleme 0 korengi iye, ekinshisi bolsa bunday korengi iye emes. Demek, berilgen teŃlemeler teń kúshli emes. ▲

x ózgeriwshili eki $P(x)$ hám $Q(x)$ kóp aǵzalı berilgen bolsın.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ kórinisindegi ańlatpa *racional ańlatpa* delinedi.

Eger $A(x)$ hám $B(x)$ – racional ańlatpa bolsa,

$$A(x) = B(x)$$

kórinisindegi teŃleme *racional teŃleme* delinedi.

Dáslep eń ápiwayı kórinistegi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad (1)$$

racional teŃlemenı qarayıq.

$\frac{m}{n}$ bólshek nolge teń bolıwı ushın onıń alımı nolge teń bolıwı, bólimi bolsa nolge teń bolmaslıǵı (0 ge bóliw múmkin emes!) zárúr hám jeterli ekenligi málim.

Demek, (1) teńlemeni shıǵarıw ushın $Q(x) \neq 0$ hám $P(x)=0$ shártlerdi bir waqıtta qanaatlantıratuǵın x belgisizdiń barlıq mánislerin tabıw zárúr hám jeterli. Bul jaǵday qısqa kóriniste tómendegishe jazıladı:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

2-mısal. Teńlemelerdi sheshiń (shıǵarıń):

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 7} = 0; & 2) \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 7} = 0; \\ 3) \frac{2x^2 - 5x + 3}{9x - 13,5} = 0; & 4) \frac{(x-1)^2(x+2)}{x-1} = 0. \end{array}$$

 1) $x^2 - 2x + 1 = 0$ teńleme jalǵız $x=1$ korengge iye. $x=1$ bolǵanda bólimi nolden parıqlı. Demek, berilgen teńleme jalǵız (tek ǵana bir) $x=1$ sheshimge iye.

2) $x^2 - 2x + 3 = 0$ kvadrat teńleme sheshimge (haqıyqıy sheshimge) iye emes, sebebi $D=1-3=-2<0$. Demek, berilgen teńleme korenlerge iye emes.

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ kvadrat teńleme ushın. $D=b^2-4ac=(-5)^2-4 \cdot 2 \cdot 3=25-24=1>0$, demek bul teńleme eki korengge iye: $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4}$; $x_1 = \frac{5-1}{4} = 1$; $x_2 = \frac{5+1}{4} = 1,5$.

Biraq 1,5 sanı $\frac{2x^2 - 5x + 3}{9x - 13,5}$ ańlatpanıń bólimin nolge aylantıradı, 1 sanı bolsa – yaq. Demek, berilgen teńleme jalǵız $x=1$ korengge iye.

4) $(x-1)^2(x+2)=0$ teńleme 1 hám -2 eki korengge iye. Biraq 1 sanı $(x-1)$ bólimdi nolge aylantıradı, -2 sanı bolsa – yaq. Demek, berilgen teńleme jalǵız $x=-2$ korengge iye. 

Eger $A(x)$ yaki $B(x)$ ańlatpanıń keminde birewi bir neshe racional ańlatpalar qosındısı kórinisinde bolsa, $A(x) = B(x)$ racional teńlemeni sheshiw qaǵıydası sonday bolıwı múmkin:

1-qádem. Teńlemege kirgen bólshektiń ulıwma bólimi tabıladı;

2-qádem. Teńlemenıń eki bóleginin ulıwma bólimge kóbeytiriledi;

3-qádem. Hasıl bolǵan teńleme korenleri tabıladı;

4-qádem. Tabılǵan korenlerden ulıwma bólimin nolge aylantıratuǵınları alıp taslanadı.

3-мисал. $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)}$ Теңлемени шешің.

△ Теңлемениң еки тәрепин $2x(2-x)$ ultiwma bólimge kóbeytemiz.

Hasıl bolğan $4x+x(2-x) = 8$ теңлемедә ápiwayılastırılardı orınlap, usı kvadrat теңlemege kelemiz: $x^2-6x+8=0$;

$$D=9-8=1>0,$$

Demek, bul теңleme eki korengе iye: $x_1=2$; $x_2=4$.

Tekseriw.

Eger $x=2$ bolsa, bólim $x(2-x) = 2(2-2) = 0$. Yaǵnıy $x=2$ berilgen теңlemenің koreni emes.

Eger $x=4$ bolsa, bólim $x(2-x) = 4(2-4) \neq 0$. Yaǵnıy $x=4$ berilgen теңlemenің koreni. *Juwap:* 4 ▲

Eger $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$; $B(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ kórinisinde bolsa, $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ kórinis-

tegi racional теңlemenі sheshiw ushın $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ proporciyanıń tiykargı qásiytinen paydalanıw máqsetke muwapıq:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Bunda tómendegi algoritm boyınsha is tutıladı:

1-qádem. $f(x)q(x) = p(x)g(x)$ теңleme korenleri tabıladı;

2-qádem. Tabılğan korenlerden $q(x), g(x)$ bólimlerin nolge aylantıratuǵınların alıp taslanadı.

4-мисал. $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4}$ теңлемени шешің.

△ $(x-2)(x-4) = (x+2)(x+3)$; $x^2-4x-2x+8 = x^2+3x+2x+6$;

$$-6x+8-5x-6 = 0;$$

$$-11x = -2;$$

$$x = \frac{2}{11}.$$

Eger $x = \frac{2}{11}$ bolsa, $x+2 = \frac{2}{11}+2 \neq 0$; $x-4 = \frac{2}{11}-4 \neq 0$.

Juwap: $\frac{2}{11}$. ▲

Айırım hallarda berilgen теңлемедә qolay almastırıw orınlaw, ápiwayılıraq теңlemege keliw múmkin.

5-мисал. Теңлемени шешің:

$$1) \left(\frac{2x}{x+1} \right)^4 + 5 \left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 - 36 = 0; \quad 2) \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x + 2} + \frac{x}{x^2 - 2x + 2} = 1.$$

 1) $\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 = t$ алмастыру оринlayмыз. Бул halда $t \geq 0$ ҳам теңleme

$t^2 + 5t - 36 = 0$ kórinisti aladı. Aqırǵı teñleme $t = -9$ ҳам $t = 4$ korenlerge iye, solardan ekinshisi oń.

Demek, $\left(\frac{2x}{x+1} \right)^2 = 4$, yaǵnıy $\frac{2x}{x+1} = 2$ yamasa $\frac{2x}{x+1} = -2$.

$\frac{2x}{x+1} = 2$ teñleme sheshimge iye emes, $\frac{2x}{x+1} = -2$ teñleme bolsa jalǵız $x = -0,5$ sheshimge iye.

Juwap: $x = -0,5$. 

2) $x = 0$ sanı teñlemeni qanaatlantırwı kórinip turıptı. Meyli, $x \neq 0$ bolsın. Teñlemeniń alımın ҳам bólimin x ke bólsek:

$$\frac{x + 3 + \frac{2}{x}}{x - 1 + \frac{2}{x}} + \frac{1}{x - 2 + \frac{2}{x}} = 1 \text{ teñlemeni hasıl qılamız}$$

$$z = x + \frac{2}{x} - 2 \text{ almaстыrwıdı orınlasaq, berilgen teñleme}$$

$$\frac{z + 5}{z + 1} + \frac{1}{z} = 1 \text{ kórinisti aladı.}$$

Aqırǵı teñlemeni shıǵaramız:

$$\begin{aligned} \frac{z + 5}{z + 1} + \frac{1}{z} = 1 &\Leftrightarrow \frac{(z + 5)z}{(z + 1)z} + \frac{z + 1}{z(z + 1)} - \frac{z(z + 1)}{z(z + 1)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{z^2 + 5z + z + 1 - z^2 - z}{z(z + 1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{5z + 1}{z(z + 1)} = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Endi x ti tabamız.

$$x + \frac{2}{x} - 2 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} - \frac{9}{5} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x + 10 = 0.$$

$5x^2 - 3x + 10 = 0$ kvadrat teñlemeniń diskriminantı teris bolǵanlıǵı ushın, ol haqıyqıy sheshimge iye emes.

Juwap: $x = 0$. 

Racional teńlemeler sistemaları

Racional teńlemelerden quralǵan sistemalardı sheshiw (shıǵarıw) bizge málim bolǵan qosıw, ornına qoyıw hám t.b. usıllarǵa súyenedi. Bunda qatnasqan racional ańlatpalardıń bólimleri nolge teń bolmaslıǵın aytıp ótemiz.

6-misal. Sistemanı sheshiń:

$$1) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2xy - 3\frac{x}{y} = 15, \\ xy + \frac{x}{y} = 15. \end{cases}$$

 1) Birinshi teńlemede $\frac{x}{y} = t$ almasıw orınlasaq, $\frac{y}{x} = \frac{1}{t}$ ($t \neq 0$) boladı.

$$t - \frac{1}{t} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 6t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2}, \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ yaǵniy } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ \frac{x}{y} = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Bunnan yaki $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ yaki $\begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ x^2 - y^2 = -5. \end{cases}$ sistemalardı hasıl qılamız.

Bul sistemalardı sheshemiz:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ \frac{9}{4}y^2 - y^2 = 5 \end{cases} \text{ yaki } \begin{cases} x = -\frac{2}{3}y, \\ \frac{4}{9}y^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

Birinshi sistema (3, 2), (-3, -2) sheshimlerge iye, ekinshi sistema bolsa sheshimge iye emes.

Juwap: (3; 2), (-3; -2).

2) $a=xy$, $b=\frac{x}{y}$ belgilew kirgizeyik.

$$\begin{cases} 2a - 3b = 15, \\ a + b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12, \\ b = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 12, \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y \cdot 3y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

Juwap: (6; 2), (-6; -2). 



Soraw hám tapsırmalar

1. Racional teńlemege anıqlama beriń.
2. Teń kúshli teńlemelerge anıqlama beriń.
3. Teń kúshli teńlemeler sistemasına mısál keltiriń.

Shınıǵıwlar

1. Teńlemelerdi sheshiń (1–2):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{9}{2(x+4)} + \frac{1}{x-1}; & \text{b)} \frac{2y-5}{y+5} = \frac{3y+21}{2y-1}; & \text{c)} \frac{5x-7}{x-3} = \frac{4x-3}{x}; \\ \text{d)} \frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{4x}{x^2-1}; & \text{e)} \frac{x^2-2x}{x-2} = x^2-2; & \text{f)} \frac{1}{x} - \frac{2x}{x+1} = 0; \\ \text{g)} \frac{7}{2x+9} - 6 = 5x; & \text{h)} \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x+2} = \frac{3}{2}; & \text{i)} \frac{15}{x-2} = \frac{14}{x} + 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{2. a)} \frac{1}{x^2-12x+36} + \frac{12}{36-x^2} = \frac{1}{x+6}; & \text{b)} \frac{8c-3}{4c^2-2c+1} + \frac{6}{8c^3+1} = \frac{2}{2c+1}; \\ \text{c)} \frac{3x-2}{x-1} + \frac{x-4}{x+3} = \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+3)}; & \text{d)} \frac{2-3x}{x+1} - \frac{4}{3} \cdot \frac{x+1}{2-3x} = \frac{4}{3}; \\ \text{e)} \frac{x-49}{x+6} + \frac{2x+50}{x+5} = 2; & \text{f)} \frac{(x+2)^2-9}{x-1} \cdot (x-5) = -24. \end{array}$$

3. Teń kúshli teńlemelerdi kórsetiń:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{(5x-4)}{x+1} = 0; & \text{b)} 5x-4=0; & \text{c)} (5x-4)(x+1)=0; \\ \text{d)} 10x=8; & \text{e)} \left(x-\frac{4}{5}\right)(x+1)=0; & \text{f)} 6x-4=x; \\ \text{g)} x^2+2x+18=0; & \text{h)} 2x^2+2x+11=0. \end{array}$$

Teńlemeler sitemasın sheshiń (4–7):

$$\begin{array}{lll} \text{4. a)} \begin{cases} \frac{x}{2y+3} = 3, \\ \frac{y}{2y+3} = -\frac{1}{9}; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 2, \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 2; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{25}{y} = 7, \\ \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 2. \end{cases} \\ \text{5. a)} \begin{cases} \frac{5x}{8y} = \frac{8y}{5x}, \\ 5x-8y = 20; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x + \frac{7}{y} = 11, \\ 7x + \frac{2}{y} = 16; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} \frac{(x-9)(x-6)}{y+8} = 0, \\ \frac{(y+8)(y-8)}{x-6} = 0. \end{cases} \end{array}$$

6. a) $\begin{cases} 4x = \frac{25}{y} + 15, \\ 4y = \frac{25}{x} + 15; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{4x-7} = -\frac{y}{4x-7}, \\ 4x^2 - 11y + 7 = 0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x}{5x-4y} = \frac{y}{5y-4x}, \\ xy = -16. \end{cases}$
7. a) $\begin{cases} (x+1)(x-8) = 0, \\ \frac{y-3}{x+y-2} = 5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{4}{y^2}, \\ xy = -8; \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{x^2}{y^5} = 5 \frac{x^2}{y^4}, \\ x-5y = 15. \end{cases}$
8. Klubtin zalında 320 dana orinliq bolıp, qatarlar boyınsha birdey bo'listirilgen(taqsimlangan). Hár bir qatardagi orinliqlar sanı 4 ke arttırılıp, jáne bir qatar qoyılğannan soń zalda 420 orın boldı. Zaldaqı qatarlar sanı qansha boldı?
9. 108 imtixan tapsırıwshı shıǵarma jazdı. Olarǵa 480 bet qaǵaz tarqatıldı, sonıń menen birge hár bir qız hár bir ul balaǵa qaraǵanda bir bet artıq qaǵaz aldı. Hámme qızlar bolsa ul balalar neshe bet qaǵaz alǵan bolsa, sonsha bet qaǵaz aldı. Neshe qız hám ul balalar bolǵan?

29-32 ÁPIWAYÍ IRRACIONAL TEŃLEMELER HÁM OLARDÍN SISTEMALARI

Ózgeriwshisi koren astında qatnasqan teńleme *irrational teńleme* delinedi.

Irrational teńlemelerdin bazı bir túrlerin sheshiw usılların keltireyik.

$$I \quad \sqrt{f(x)} = g(x) \quad (1)$$

Kórinistegi ápiwayı irrational teńlemeni qarayıq.

$f(x)$, $g(x)$ ańlatpalar teris emes bolǵanda bul teńlemenin eki bólegin kvadratqa kótersek, teń kúshli teńlemege kelemiz.

$f(x)=g^2(x) \geq 0$ bolǵanı ushın $f(x)$ ańlatpa teris emes boladı.

$$\text{Demek, teńlemeni sheshiw } \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

qaǵıyda boyınsha ámelge asırıladı.

Tap sonday $\sqrt[n]{f(x)} = h(x)$ kórinistegi teńleme $\begin{cases} f(x) = h^{2n}(x) \\ h(x) \geq 0 \end{cases}$ sistemaǵa teń kúshli.

1-misal. $\sqrt{4+2x-x^2} = x-2$ teńlemeni sheshiń.

△ Teńlemeni hár eki jaǵın (bólegin) kvadratqa kóteremiz hám nátiyjede $2x-x^2=x^2-4x$ yaki $2x(x-3)=0$ teńlemege iye bolamız. Bunnan $x_1=0$, $x_2=3$ korenlerdi hasil qilamız. $x>2$ bo'lgani uchun $x=3$ berilgen teńlemenin sheshimi. ▲

II $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ kórinistegi teńleme.

Eki ańlatpanıń kóbeymesi nolge teń bolıwı ushın, olardan keminde birewi nolge teń bolıwı kerek.

Demek, $f(x) \cdot \sqrt{g(x)} = 0$ bolıwı ushın yaqı $g(x)=0$ teńlik yaqı $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ sistema orınlı bolıwı kerek.

Bul jaǵday qısqasha $\begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) = 0, \text{ kibi jazıladı.} \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

2-misal. $(x^2 + 3x - 10)\sqrt{x + 4} = 0$ teńlemenı sheshiń.

$$\triangle (x^2 + 3x - 10)\sqrt{x + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 10 = 0, \\ x + 4 \geq 0, \\ x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5, \\ x = 2, \end{cases} \\ x + 4 \geq 0, \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -4. \end{cases}$$

Juwap: -4 hám 2. 

3-misal. $(x - 3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2x - 6$ teńlemenı sheshiń.

 Berilgen teńleme $(x - 3)(\sqrt{x^2 - 5x + 4} - 2) = 0$ kóriniske keltiriledi.

$\begin{cases} x = 3, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$ sistema sheshimge iye bolmaǵanlıǵı ushın $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 2$ teńlemenı qaraw jeterli. Bul teńlemenıń eki tárepın kvadratqa kótersek, oǵan teń kúshli bolǵan $x^2 - 5x + 4 = 4$ teńlemenı hasıl qılamız.

Juwap: 0 hám 5. 

III $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$ kórinistegi teńleme.

Bunday teńlemelerdi sheshiwde koren dárejesi n sanınıń – jup–taqlıǵına qaraladı hám berilgen teńlemenı teń kúshli teńlemege alıp kelinedi.

Eger ***n - taq bolsa:*** $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Máselen, $\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)}$ teńleme $f(x)=g(x)$ teńlemege teń kúshli.

4-misal. $\sqrt{x^2 + 8x - 8} = \sqrt{2x - 1}$ teńlemenı sheshiń.

$$\triangle \sqrt{x^2 + 8x - 8} = \sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow x^2 + 8x - 8 = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -7. \end{cases}$$

Juwap: 1 hám -7. 

Eger n *jup*, ya'niy $n=2k$ bolsa, berilgen te'leme usi sistemalardın hár birine teń kúshli boladı:

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ yamasa } \sqrt[2k]{f(x)} = -\sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Ámelde solardan ańsıraǵı bolǵanları tańlanadı.

5-misal. $\sqrt[6]{x^2 - 2} = \sqrt[6]{x}$ te'lemenı sheshiń.

$$\triangle \sqrt[6]{x^2 - 2} = \sqrt[6]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Juwap: $x=2$. $\blacktriangle$

IV O'zgeriwshilerdi almastırıw

6-misal. $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + 3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 4$ te'lemenı sheshiń.

$$\triangle u = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} \text{ almastırıw kirgizemiz. Ol jaǵdayda}$$

$$\begin{cases} u + \frac{3}{u} = 4, \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ u = 3, \\ u \geq 0. \end{cases}$$

Endi berilgen te'lemenıń korenlerin tabamız.

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 1, \\ \sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 1, 2. \end{cases}$$

Juwap: $x=2$ hám $x=1, 2$. $\blacktriangle$

7-misal. $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 6$ te'lemenı sheshiń.

$$\triangle z = \sqrt{x^2 + 3x} \text{ almastırıw kirgizemiz.}$$

$$\begin{cases} z^2 + z = 6, \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3, \\ z = 2, \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 2.$$

Endi berilgen te'lemenıń korenlerin tabamız.

$$\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Juwap: $x = -4$ hám $x = 1$. ▲

Irracional teńlemeler sisteması

Irracional teńlemelerden quralǵan sistemalardı sheshiw bizge málim bolǵan qosıw, ornına qoyıw hám t.b. usıllarǵa súyenedi (tayanadı). Álbette bunda qatnasqan irracional ańlatpalar bar tarawların inábatqa alıw kerekligin aytıp ótemiz

8-misal. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.



$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 25, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 13, \\ xy = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x, \\ x(13 - x) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x, \\ x^2 - 13x + 36 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Bul sistemadan (4; 9) hám (9; 4) sheshimlerdi tabamız. ▲

9-misal. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9 \end{cases}$ teńlemeler sistemasın sheshiń.



$\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$ dep belgileymiz, hám de qısqa kóbeytiw formulasınan paydalansaq

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3, \\ x + y = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ (u + v)(u^2 - uv + v^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ u^2 - uv + v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ (u + v)^2 - 3uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

sistemaǵa iye bolamız. Bul sistemanıń sheshimi $u_1=1$, $v_1=2$, $u_2=2$, $v_2=1$ boladı. Bunnan (1; 8) hám (8; 1) sheshimlerin tabamız. ▲

10-másele

Tegislikte $A(3; 4)$ hám $B(-2; 5)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x; 0)$ noqattı tabıń.



$AC=BC$ ekenliginen eki noqat arasındadıǵı aralıq formulasına kóre:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (0-5)^2} \text{ irracional teńlemenı payda etemiz.}$$

Bul teńlemeni teń kúshli teńleme qásiyetlerinen hám qısqa kóbeytiw formulalarınan paydalanıp shıǵarsaq, $(x-3)^2+16=(x+2)^2+25$ yaki $-10x=4$ teńlemeni payda etemiz. Aqırǵı teńlemenıń koreni $x=-0,4$ boladı. Demek, izlengen noqat $C(-0,4; 0)$ eken. ▲

11-másele

Tegislikte $A(-1; 2)$ hám $B(3; -4)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan hám $y=3x$ tuwrı sızıqta jatıwshı noqattı tabıń.

▲ Shártke kóre izlengen noqattıń ordinatası $y=3x$ boladı. Demek, izlenip atırǵan noqat $C(x; 3x)$ koordinatalı noqat eken. $AC=BC$ ekenliginen eki noqat arasındaǵı aralıq formulasına kóre, $\sqrt{(x+1)^2 + (3x-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (3x+4)^2}$ irracional teńlemeni payda etemiz. Bul teńlemeni shıǵarsaq, $(x+1)^2+(3x-2)^2=(x-3)^2+(3x+4)^2$, yaki $-28x=20$ teńlemege kelemiz. Aqırǵı teńlemenıń koreni $x=-\frac{5}{7}$ boladı. Demek, izlengen noqat $C(-5/7; -15/7)$ eken.

Juwap: $C(-5/7; -15/7)$. ▲

Soraw hám tapsirmalar

1. Irracional teńlemege anıqlama berıń hám mısıl keltiriń.
2. Teń kúshli irracional teńlemege anıqlama berıń.
3. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \\ \sqrt{xy} = b \end{cases}$ kórinistegi teńlemeler sisteması qalay shıǵarıladı?
4. $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a, \\ x + y = b \end{cases}$ kórinistegi teńlemeler sisteması qalay shıǵarıladı?

Shınıǵıwlar

Teńlemeni sheshiń (10–19):

- | | | | | |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------------|-------------------------|
| 10. | a) $\sqrt{3x+5}=-8$; | b) $\sqrt{4x-6}=9$; | c) $\sqrt{5x+9}=17$; | d) $\sqrt{13x+5}=-17$. |
| 11. | a) $\sqrt{12x-11}=15$; | b) $\sqrt{23x+5}=-7$; | c) $\sqrt{23x-7}=27$; | d) $\sqrt{6x+13}=-2$. |
| 12. | a) $\sqrt{x^2-3x+1}=x+2$; | b) $\sqrt{x^2+5x+2}=x+4$. | | |
| 13. | a) $\sqrt{x^2+7x+1}=x-1$; | b) $\sqrt{x^2-6x+2}=x+5$. | | |
| 14. | a) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{-2x-1}$; | b) $\sqrt{-2x^2-3x-2}=\sqrt{x+1}$. | | |
| 15. | a) $\sqrt{x^2+8x-7}=\sqrt{-x-1}$; | b) $\sqrt{-x^2+3x+5}=\sqrt{x+10}$. | | |

16. a) $x^2 + 3x - 1 + \sqrt{x^2 + 3x - 9} = 0$; b) $x^2 - x - 7 + \sqrt{x^2 - x - 9} = 0$.
17. a) $x^2 + 2x - 11 + \sqrt{x^2 + 2x - 1} = 0$; b) $x^2 - 8x + 3 + \sqrt{x^2 - 8x - 7} = 0$.
18. a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$; b) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x} = 5$.
19. a) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x+11} = 5$; b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 3$.

Тенлемелер sistemasın shıǵarın (20–23):

20. a) $\begin{cases} 2\sqrt{x} = 3y, \\ y^2 + 2\sqrt{x} = 4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5\sqrt{x} = 4y, \\ y^2 + 5\sqrt{x} = 5. \end{cases}$
21. a) $\begin{cases} x - 4\sqrt{y} = 1, \\ x + 2y = 17; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2\sqrt{y} = -2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$
22. a) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 5)(\sqrt{y} - 3) = 0, \\ 3x + 5y = 60; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{y} - 3) = 0, \\ 3x + 2y = 15. \end{cases}$
23. a) $\begin{cases} 5x - 3\sqrt{y} = -34, \\ 5x + 3\sqrt{y} = -16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 6x - 5\sqrt{y} = -37, \\ 6x + 5\sqrt{y} = 13. \end{cases}$

24. Tegislikte $A(5; 7)$ hám $B(-3; 4)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x; 0)$ noqattı tabıń.

25. Tegislikte $A(5; 9)$ hám $B(-6; 7)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(x; 0)$ noqattı tabıń.

33–36 АПИWAYІ КОРСЕТКИШЛИ ТЕНЛЕМELER HАM OLARDІN SISTEMALARI

Корсеткишли тенлемелер

Ўзгериwshisi дареjеде qatnasqan тенлеme корсеткишли тенлеme delinedi.

Корсеткишли тенлемелерди sheshiwde tómendegi birdeyliklerden paydalanıladı:
($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$)

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;
- $a^x a^y = a^{x+y}$;
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $a^x b^x = (ab)^x$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$;
- $a^0 = 1$.

Корсеткишли тенлемелердин гey bir túrlerin sheshiw usıllarin keltireyik.

I Birdey tiykarğa keltiriw

Bul usılda teńleme $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ kórinistegi teńlemege alıp kelinedi. Bunnan $f(x) = g(x)$ boladı.

1-misal. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$ teńlemenı sheshiń.

 $\frac{3}{7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-1}$ ekenin inábatqa alıp, berilgen teńlemenı.

$\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$ kóriniste jazamız. 1-birdeylikke kóre $3x-7 = -7x+3$, $x = 1$.

Juwap: 1. 

2-misal. $0,125 \cdot 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}$ teńlemenı sheshiń.

 Teńlemenı tómendegi kóriniste jazamız

$$\frac{1}{8} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-x} \qquad 2^{-3} \cdot 2^{2(2x-8)} = \left(2^{-2} \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

2-birdeylikke kóre $2^{-3+2(2x-8)} = (2^{-2-0,5})^{-x}$ yaki $2^{4x-19} = 2^{2,5x}$.

Aqırǵı teńleme $4x-19 = 2,5x$

teńlemege teń kúshli. Bunnan $x = \frac{38}{3}$.

Juwap: $x = \frac{38}{3}$. 

II Yańa o'zgeriwshini kirgiziw.

3-misal. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ teńlemenı sheshiń.

 2-birdeylikti qollap, teńlemenı $5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 - 250 = 0$ kóriniside jazıp alamız.

$5^x = t > 0$ dep, jańa ózgeriwshi kirgizemiz. Ol jaǵdayda $\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0$ teńlemege kelemiz.

Ol $t_1 = -50$, $t_2 = 25$ korengiye. Biraq $t_1 = -50$ koren $t > 0$ shártti qanaatlantırmaydı. Demek, $5^x = 25$ hám $x = 2$.

Juwap: $x = 2$. 

4-misal. $9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$ teńlemenı sheshiń.

 Teńlemenıń eki jaǵın (bólegin) $4^x \neq 0$ ge bólemiz:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \text{ yaki } \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$ dep, aqirgı teńlemenı $t^2 + t - 2 = 0$ kóriniske keltiremiz. Bul

teńlemenıń sheshimlerin tabamız: $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

t_1 diń mánisi ushın $t > 0$ shárt orınlanbaydı. Demek,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow x = 0.$$

Juwap: $x=0$. ▲

5-misal. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$. teńlemenı sheshiń.

▲ $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) = 1$ bolǵanı ushın $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Teńlemenı $\left(\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4$ kóriniste jazamız.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t > 0$ dep belgilesek, bunnan $\frac{1}{t} + t = 4$, yaǵnıy $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Aqirgı teńleme $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ korenge iye.

1-hal. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$, $\left(2 + \sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2 + \sqrt{3}$, $\frac{x}{2} = 1$, $x = 2$.

2-hal. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}x} = 2 - \sqrt{3}$,

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}x} = 2 - \sqrt{3}, \quad -\frac{x}{2} = 1, \quad x = -2.$$

Juwap: $x = -2$ hám $x = 2$. ▲

III Uliwma kóbeytiwshini qawsırma (dan tısqarıǵa) sırtına

6-misal. $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ teńlemenı sheshiń.

▲ shep tárepte 6^x ti, oń tárepte bolsa 2^x ti qawsırma sırtına shıǵaramız. Nátiyjede $6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$ yaki $6^x = 2^x$ teńlemege kelemiz. Bul teńlemenıń eki tárepın $2^x \neq 0$ ge bólsek, $3^x = 1$, yaǵnıy $x = 0$ di payda qılamız.

Juwap: $x=0$. ▲

Ен апиwayı kórsetkishli teńlemeler sisteması

7-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń:
$$\begin{cases} 3^{x+y} = 27, \\ 2^{5x-y} = 8. \end{cases}$$

△ Дареjeniń qásiyetlerine kóre teńlemeler sisteması tómendegi teńlemeler sistemasına teń kúshli: $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^3, \\ 2^{5x-y} = 2^3. \end{cases}$ Bunnan $\begin{cases} x + y = 3, \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ sistemaǵa kelemiz.

Onıń sheshimleri $x=1, y=2$ ekeni kórinip tur

Juwap: $x=1, y=2$. ▲

8-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń:
$$\begin{cases} 3^{5x+6y} = 9, \\ 2^{7x+3y} = 8. \end{cases}$$

△ Дареjeniń qásiyetlerine kóre teńlemeler sisteması tómendegi kórinisti aladı:

$$\begin{cases} 3^{5x+6y} = 3^2, \\ 2^{7x+3y} = 2^3. \end{cases}$$

Ақırғы теңлемелер sisteması bolsa: $\begin{cases} 5x + 6y = 2, \\ 7x + 3y = 3. \end{cases}$ sıзıqlı sistemaǵa teń kúshli.

Сызıqlı теңлемелер sistemasınıń 2-теңлемесин (-2) ge kóbeytirip 1-теңlemege qoysaq, $-9x = -4$ теңлемени payda qılamız. Bunnan $x = \frac{4}{9}$ ekeni tabıladı. Onı

2-теңlemege qoysaq, $\frac{28}{9} + 3y = 3$ yaki $3y = 3 - \frac{28}{9}$, yaki $3y = -\frac{1}{9}$, yaki $y = -\frac{1}{27}$ ni

tabamız. Juwap: $x = \frac{4}{9}, y = -\frac{1}{27}$. ▲

9-mısal. Teńlemeler sistemasın sheshiń:
$$\begin{cases} 4^x + 5^y = 9, \\ 4^x - 5^y = -1. \end{cases}$$

△ $4^x = u, 5^y = v$ belgilew kiritsek, berilgen teńlemeler sisteması usı kórinisti aladı:

$$\begin{cases} u + v = 9, \\ u - v = -1. \end{cases} \quad \text{Bul teńlemeler sistemasınıń sheshimi } u=4, v=5. \text{ Ol jaǵdayda } 4^x=4$$

hám $5^y=5$ теңлемени hasıl qılamız. Bul jerden $x=1, y=1$ sheshimlerdi tabamız.

Juwap: $x=1, y=1$. ▲

Shinigiwlar

Teñlemeni sheshiñ (26–35):

26. a) $4^{3x+5}=4^{3-5x}$; b) $7^{4x+5}=7^{9-5x}$; c) $6^{x+5}=6^{3x}$;
d) $8^{x+5}=8^{2-5x}$; e) $11^x=11^{2+5x}$; f) $2^{x-5}=2^{25x}$.

27. a) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^x = -6$; b) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} = 68$;
c) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^x = 31$; d) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^x = 10$.

28. a) $11^{3x^2+46}=11^{x^2+25x}$; b) $3^{x^2-4x}=3^{2(x^2-15)}$;
c) $7^{2x^2-4}=7^{3(x^2-x)}$; d) $5^{5x^2+x}=5^{3(x^2-2x)}$.

29. a) $9^x+3^x-6=84$; b) $25^x+5^x-30=0$;
c) $5 \cdot 4^{x+2}-6=0$; d) $9^x+3^x-12=0$.

30. a) $9 \cdot 25^x - 7 \cdot 15^x - 16 \cdot 9^x = 0$; b) $7 \cdot 16^x + 9 \cdot 12^x - 16 \cdot 9^x = 0$.

31. a) $4^x+7 \cdot 6^x-8 \cdot 9^x=0$; b) $9 \cdot 16^x+7 \cdot 12^x-16 \cdot 9^x=0$.

32. a) $\frac{(x+2)^2-9}{x-1} \cdot (x-5) = -24$; b) $\frac{4}{5} \cdot (0,8)^{x-1} = (1,25)^{x+3}$.

33. a) $32^{x^2+x} = \frac{4}{16^x}$; b) $4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$.

34. a) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; b) $5 \cdot 2^{3(x-1)} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$.

35. a) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5 \cdot (\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$; b) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$.

36. Kliyent 100 000 000 sumdı banke jıllıq 22% procent stavkası menen belgili (málim) bir múddetke qoydı. Múddet aqırında ol 221 533 456 sum aldı. Pul neshe jılğa qoyılğan ekenin tabıñ.

37. Tadbirkar (is bilermen) 10 000 000 sumdı bankke jıllıq 21% procent stavkası menen belgili (málim) múddetke qoydı. Múddet aqırında ol 17 715 610 sum aldı. Pul neshe jılğa qoyılğan ekenin tabıñ.

38. Xalıqtıñ sanı jılına 4% artsa, neshe jıldan soñ xalıqtıñ sanı 3 ese artadı?

39. Xalıqtıñ sanı jılına 2% kemeyse, neshe jıldan soñ ol 10% kemeyedi?

Teñlemeler sistemasın sheshiñ (40–43):

40. a) $\begin{cases} 3^{5x-6y} = 27, \\ 2^{7x+3y} = 32; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x+16y} = 81, \\ 2^{3x-5y} = 4; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3^{x+2y} = 81, \\ 9^{3x} \cdot 3^y = 27. \end{cases}$

41. a) $\begin{cases} 3^{5x-y} = 243, \\ 2^{7x+11y} = 16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^{x+8y} = 9, \\ 2^{x-12y} = 64; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 2^x - 2^y = 2. \end{cases}$

42.

$$a) \begin{cases} 5^{3x-y} = 25, \\ 2^{x^2+xy+y^2} = 8; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5^{x+2y} = 125, \\ 2^{x^2+3xy-y^2} = 8; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 11^x + 7^y = 18, \\ 11^x - 7^y = 4. \end{cases}$$

43.

$$a) \begin{cases} 5^{x+y} = 25, \\ 2^{x^2-3xy+2y^2} = 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5^{3x-y} = 25, \\ 2^{x^2+xy+y^2} = 8; \end{cases}$$

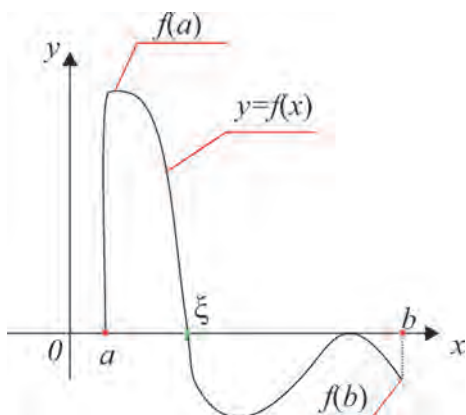
$$c) \begin{cases} 6^x + 3^y = 39, \\ 6^x \cdot 3^y = 108. \end{cases}$$

37-38

TEŃ LEMELERDI SHAMALAP SHÍĠARIW

Eger $f(x)$ kópaǵzalı $[a, b]$ kesindi ushlarında túrli belgili mánislerdi qabıl etse, yaǵnıy $f(a) \cdot f(b) < 0$ bolsa, bul kesindi ishinde $f(x) = 0$ teńlemenıń keminde bir sheshimi bar (boladı). Yaǵnıy, sonday $\xi \in [a, b]$ ("ksi" dep oqıladı) tabıladı, bunda $f(\xi) = 0$ boladı.

Bul tastıyq tómendegi sıızılmada súwretlengen.



Teńlemenıń tek ǵana bir sheshimin óz ishine alǵan $[a, b]$ kesindini qarayıq.

Kesindini teń ekige bóliw usılı $[a, b]$ kesindi hasıl bolatuǵın kesindi uzınlıǵı berilgen ε anıqlıqtan kishi bolǵanǵa shekem teń ekige bóliwden ibarat

Bunıń ushın:

1) $x=a$ da $f(x)$ ańlatpanıń $f_a = f(a)$ mánisi esaplanadı.

2) kesindi teń ekige bólinedi, yaǵnıy

$x = (a+b)/2$ esaplanadı;

3) $f(x)$ ańlatpanıń $x = (a+b)/2$ degi f_x mánisi esaplanadı.

4) $f_a \cdot f_x > 0$ shárt tekseriledi;

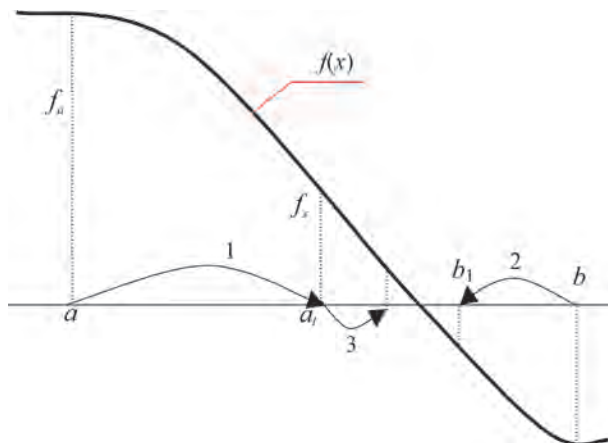
5) eger bul shárt orınlansa, jańa kesindiniń shep shegarası retinde (sıpatında) aldınǵı kesindiniń ortası alınadı, yaǵnıy $a=x$, $f_a=f_x$ dep alınadı (kesindiniń shep shegarası ortaǵa ótedi);

6) eger bul shárt orınlanbasa, jańa kesindiniń oń shegarası ortaǵa ótedi, yaǵnıy $b=x$ dep alınadı;

7) kesindini nábettegi bóliniwden soń $b-a < \varepsilon$ shárt orınlanıwı tekseriledi.

8) eger bul shárt orınlansa, esaplawlar tawsıladı. Bunda shama menengi sheshim (sıpatında) x tıń aqırǵı esaplangan mánisi alınadı. Eger bul shárt orınlanbasa,

usı algoritmniń 2 – qádemine ótilip (qaytıp), esaplawlar dawam ettiriledi.
Kesindiniń teń ekige bóliw usılıniń mánisi usı sıızılmaǵa súwretlengen:



Haqıyqiy koren jatırǵan aralıqtı tabıw

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c=0$ teńleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıw ushın

$A=\max\{a,b,c\}$ hám $B=\max\{\frac{1}{c}; \frac{a}{c}; \frac{b}{c}\}$ esaplanadı.

Berilgen teńlemeniniń koreni ushın $\frac{1}{1+B} < |x| < 1+A$ teńsizlik orınlı boladı. Demek, berilgen teńlemeniniń keminde 1 koreni $(-1-A; 1+A)$ oralıqtı jaylasqan eken. Bul korendi shama menen tabıw ushın $-1-A < d_1 < d_2 < 1+A$ hám $f(d_1) \cdot f(d_2) = (d_1^3 + ad_1^2 + bd_1 + c)(d_2^3 + ad_2^2 + bd_2 + c) < 0$ teńsizliklerdi qanaatlantırıwshı d_1 hám d_2 pútin sanlar tabıladı.

1-misal. $2x^3+3x^2+5x+1=0$ teńleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıw.

△ Teńlemeniniń hár eki bólegin 2 ge bólsek, $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ teńleme payda

boladı. $a=\frac{3}{2}$; $b=\frac{5}{2}$; $c=\frac{1}{2}$ Bolǵanı ushın, $A=\max\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}\}=2,5$.

Demek, $x \in (-2,5; 2,5)$ aralıqtı teńlemeniniń keminde bir dana koreni bar. Teńleme $(0; 2,5)$ aralıqtı korenge iye emes, sebebi $x_0 \in (0; 2,5)$ bolsa, $2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 1 > 0$ boladı. Demek, teńleme $(-2,5; 0)$ aralıqtı korenge iye eken. Bul aralıqtı kishireytiriw ushın pútin sanlardı alamız, yaǵnıy $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$.

Endi $d_1=-2$; $d_2=-1$; $d_3=0$ sanlardı teńlemege qoyıp hám tómendegi shártti tekserip

$$d_1^3 + \frac{3}{2}d_1^2 + \frac{5}{2}d_1 + \frac{1}{2} = -8+6-5+0,5 = -6,5 < 0;$$

$$d_2^3 + \frac{3}{2}d_2^2 + \frac{5}{2}d_2 + \frac{1}{2} = -1+1,5-2,5+0,5 = -1,5 < 0;$$

$$d_3^3 + \frac{3}{2}d_3^2 + \frac{5}{2}d_3 + \frac{1}{2} = 0,5 > 0 \text{ теңлеменин кoreни } (-1;0) \text{ aralıqta ekenin tabamız.}$$



Теңлеменин кoreнин берилген ε anıqlıqta aralıqtı teń 2 ge bólip tabıw usılı

Eger $(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c)(\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c) < 0$ bolsa, теңлеменин кoreни $(\alpha; \beta)$ aralıqta bolıwı joqarıdan belgili. $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ bolsın. Eger $|\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c| < \varepsilon$ bolsa, $x = \gamma$ san – теңлеменин ε anıqlıqtaǵı koreni. Eger $(\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c)(\beta^3 + a\beta^2 + b\beta + c) < 0$ bolsa, koren $(\gamma; \beta)$ aralıqtan izlenedi; eger $(\gamma^3 + a\gamma^2 + b\gamma + c)(\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) < 0$ bolsa, koren $(\alpha; \gamma)$ aralıqtan izlenedi. Bul jaǵday koren kerekli anıqlıqta tabılǵanǵa shekem dawam ettiriledi.

2-mısal.

$x^3 + 1,5x^2 + 2,5x + 0,5 = 0$ теңleme korenin $\varepsilon = 0,1$ anıqlıqta tabıń.

△ Koreni $(-1;0)$ aralıqta jatıwı aldınǵı mısaldan belgili. $\gamma = \frac{-1+0}{2} = -0,5$ hám $(-0,5)^3 + 1,5(-0,5)^2 + 2,5(-0,5) + 0,5 = -0,5 < 0$ ekenliginen теңлеменин koreni $(-0,5; 0)$ aralıqta eken.

$\gamma = \frac{-0,5+0}{2} = -0,25$ hám $|(-0,25)^3 + 1,5(-0,25)^2 + 2,5(-0,25) + 0,5| = |-0,046| < 0,1$ bolǵanı ushın теңлеменин $0,1$ anıqlıqtaǵı sheshimi $x = -0,25$ boladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar



1. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ теңleme koreni jatırǵan aralıq qalay tabıladı?
2. Теңлеменин korenin berilgen ε anıqlıqta aralıqtı teń 2 ge bólip tabıw usılın túsintiriń.

Shınıǵıwlar

Теңleme koreni jatırǵan aralıqtı tabıń (44–47):

- | | | |
|-----|--------------------------------|--------------------------------|
| 44. | 1) $x^3 + 3x^2 + 5x + 1 = 0;$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 7x + 6 = 0.$ |
| 45. | 1) $2x^3 + 4x^2 + 5x + 1 = 0;$ | 2) $x^3 + 4x^2 + 9x + 17 = 0.$ |
| 46. | 1) $4x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0;$ | 2) $x^3 + x^2 + x + 19 = 0.$ |

47. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

Teñleme koreniñ $\varepsilon=0,1$ anıqlıqta tabıń (48–51):

48. 1) $x^3+3x^2+5x+1=0$; | 2) $x^3+3x^2+7x+6=0$.

49. 1) $2x^3+4x^2+5x+1=0$; | 2) $x^3+4x^2+9x+17=0$.

50. 1) $4x^3+3x^2+5x+7=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

51. 1) $2x^3+3x^2+5x+9=0$; | 2) $x^3+x^2+x+19=0$.

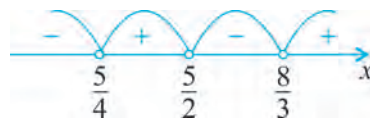
39-41 АПИWAYÍ РАЦИОНАЛ ТЕՒСИЗЛИКЛЕР HÁM OLARDÍŇ SISTEMALARÍ

Bir ózgeriwshili racional teńsizlikler hám olardı shıǵarıw usılları

$A(x)$ hám $B(x)$ racional ańlatpalar ushın $A(x)>B(x)$, $A(x)<B(x)$, $A(x)\geq B(x)$, $A(x)\leq B(x)$ qatnaslarǵa x ózgeriwshili teńsizlikler delinedi. x tiń teńsizlikti durıs sanlı teńsizlikke aylantırıwshı hár qanday mánisi teńsizliktiń sheshimi delinedi.

1-misal. Teńsizlikti sheshiń: $2(2x-5)(3x-8)(5-4x)<0$.

△ Teńsizlikti aralıqlar usılı járdeminde sheshemiz. Bul usıl menen 9-klassta tanısqansız. Qawsırmalar ishindegi ańlatpalardı nolge teńlestirip, $x_1=\frac{5}{4}$, $x_2=\frac{5}{2}$, $x_3=\frac{8}{3}$ sanlardı tabamız. Olar sanlar kósherin $(-\infty; \frac{5}{4})$, $(\frac{5}{4}; \frac{5}{2})$, $(\frac{5}{2}; \frac{8}{3})$, $(\frac{8}{3}; +\infty)$ aralıqlarǵa ajratadı. Teńsizlikke $(\frac{8}{3}; +\infty)$ aralıqqa tiyisli, máselen, $x=10$ sanın qoysaq, teńsizlik durıs teńsizlikke aylanadı. Demek, teńsizlik $(\frac{5}{4}; \frac{5}{2}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$ aralıqlarda orınlı. ▲

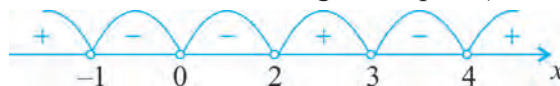


2-misal. Teńsizlikti sheshiń: $\frac{x^2(x+1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}>0$.

△ $x=2$, $x=4$ sanlar teńsizliktiń sheshimi emes. $x\neq 2$, $x\neq 4$ bolǵanda $(x-2)^2\cdot(x-4)^2>0$ boladı. Sol sebepli teńsizliktiń hár eki bólegin $(x-2)^2\cdot(x-4)^2$ ge kóbeytiw nátiyjesinde berilgen teńsizlikke teń kúshli tómendegi teńsizlik payda boladı: $(x+1)x^2(x-3)(x-2)(x-4)>0$.

Qawsırmalardı nolge teńlestirip, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=2$, $x_5=3$, $x_6=4$ sanlardı tabamız. Nátiyjede sanlar kósheri tómendegi aralıqlarǵa ajraladı: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$. Bul jerde nol sanı 2 márte ushıraydı. Sonıń ushın teńsizlik nol sanınıń eki janındaǵı aralıqta birdey belgige iye. Aqırǵı aralıqtan shegarada

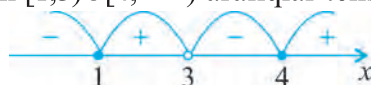
jatpağan $x=10$ sanın alıp teńsizlikke qoysaq, durıs sanlı teńsizlik hasıl boladı. Demek, teńsizliktiń sheshimi tómendegi aralıqlar: $(-\infty; -1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$. ▲



3-mısal. Teńsizlikti sheshiń: $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 3} \geq 0$.

▲ $x \neq 3$ bolǵanda $x^2 - 5x + 4 = 0$, alımın nolge teńlestirip, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ sanların hasıl qılamız. $x_1 = 1$ hám $x_2 = 4$ sanlar teńsizlikti qanaatlantıradı. Demek, sanlar kósheri tómendegi aralıqlarǵa ajıraladı: $(-\infty; 1]$, $[1; 3)$, $(3; 4]$, $[4; +\infty)$.

Aqırǵı aralıqtan shegarada bolmaǵan $x=5$ sanın alsaq, durıs sanlı teńsizlik hasıl boladı. Sonıń ushın $[1; 3) \cup [4; +\infty)$ aralıqlar teńsizliktiń sheshimi.



Ápiwayı racional teńsizlikler sisteması

4-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} 3x - 8 \leq 1, \\ 4x + 3 > 5. \end{cases}$

▲ Sistemaniń hár bir teńsizligin ápiwayılastırsaq, $\begin{cases} 3x \leq 1 + 8, \\ 4x > 5 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 9, \\ 4x > 2; \end{cases}$ yaǵnıy, $\begin{cases} x \leq 3, \\ x > 0,5. \end{cases}$ teńsizliklerdi hasıl qılamız. Demek, sistemaniń sheshimi $(-\infty; 3]$ hám $(0,5; +\infty)$ aralıqlardıń ulıwma bólegi, yaǵnıy $(0,5; 3]$ aralıqtan ibarat eken. ▲

5-mısal. Teńsizlikler sistemasın sheshiń: $\begin{cases} (3 - x)(4 + x) \geq 0, \\ (2 + x)(5 - x) < 0. \end{cases}$

▲ Sistemadaǵı hár bir teńsizlikti sheship, 1-teńsizliktiń sheshimi $[-4; 3]$ aralıq, 2-teńsizliktiń sheshimi bolsa $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$ aralıqlar ekenin tabamız. Demek, teńsizlikler sistemasınıń sheshimi bul sheshimlerdiń ulıwma bólegi, yaǵnıy $[-4; 2)$ aralıqtan ibarat boladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar



1. Teńsizliktiń sheshimin mısallarda túsintiriń.
2. Teń kúshli teńsizliklerge mısallar keltiriń.
3. Eń ápiwayı racional teńsizlikler sistemasın shıǵarıwdı bir mısalda túsintiriń.

Shinigiwlar

Teńsizlikti sheshiń (52–53):

52. 1) $(x-6)(3-17x)(2x+8) \leq 0$; 2) $(x^2+5x-6)(7x-11) > 0$;
 3) $(3+5x)(2x^2-6x+4) < 0$; 4) $\frac{2x-5}{2x+1} \geq 0$;
 5) $(x^2+6x-7)(x^2+x+1) \geq 0$; 6) $\frac{3x+11}{2-x} < 0$;
 7) $\frac{x-1}{4x-1} < 1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x} \geq 1$; 9) $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7} \leq 0$; 10) $\frac{x^3-1}{2x^2-3x+1} > 1$.

53. 1) $(x-5)(3-7x)(2x+8) \leq 0$; 2) $(x^2-5x-6)(7x+11) > 0$;
 3) $(3-5x)(2x^2-4x+4) < 0$; 4) $\frac{x-5}{2x+1} \geq 0$;
 5) $(x^2-6x-7)(x^2+x+1) \geq 0$; 6) $\frac{3x+1}{2-x} < 0$;
 7) $\frac{x+1}{4x-1} < 1$; 8) $\frac{2x-7}{3-7x} \geq 3$; 9) $\frac{x^2-5x+1}{x^2-7} \leq 0$; 10) $\frac{x^3+1}{2x^2-3x+1} > 1$.

Teńsizlikler sistemasın sheshiń (54–55):

54. 1) $\begin{cases} 3x-5 \leq 7x, \\ 2x+1 > -2x+3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} < 1, \\ -\frac{5x+1}{2} - \frac{7}{3} > \frac{x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x+5 \leq 7x, \\ 2x-1 > -3x+3. \end{cases}$

55. 1) $\begin{cases} 2(x-5) \leq 4(x+3), \\ 2x-1 > -5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{5x}{3} - \frac{2x}{4} \geq 3\frac{1}{3}, \\ 2 - \frac{5-4x}{2} < \frac{6x}{5}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 6x+5 \leq 7x, \\ 6x-4 > 3x+3. \end{cases}$

42-43

ÁPIWAYÍ IRRACIONAL TEŃSIZLIKLER

Irracional tengsizlik delingende belgisiz koren belgisi astında bolğan teńsizlik túsiniledi.

Teńsizliklerdiń sheshimleri kópligi, ádette, sanlardıń sheksiz kópliklerinen ibarat boladı, sol sebepli bul sanlardı dáslepki teńsizlikke qoyıw jolı menen sheshimler kópligin tekseriw, ulıwma aytqanda múmkin emes. Juwaptıń durılıǵın támiynleytuǵın bir ǵana jol – dáslepki teńsizlikti hár qanday almasırwda bul teńsizlikke teń kúshli teńsizlik hasıl bolıwın baqlap barıwımız kerek.

Irracional teńsizliklerdi shıǵarıp atırǵanda teńsizliktiń eki tárepın taq dárejege kóteriwdе hár dayım dáslepki teńsizlikke teń kúshli teńsizlik payda bolıwın yadta tutıwımız kerek. Eger teńsizliktiń eki tárepın jup dárejege kóterilip atırǵan

bolsa, ol jaǵdayda dáslepki teńsizlikke teń kúshli hám usınday teńsizlik belgisine iye bolǵan teńsizlik tek ǵana dáslepki teńsizliktiń eki bólegin teris emes bolǵan jaǵdayda ǵana payda boladı.

Irracional teńsizliktiń sheshimler kópligin tabıw ushın ádette teńsizliktiń eki bólegin natural dárejege kóteriwge tuwrı keledi. Irracional teńsizlikti shıǵarıwdıń tiykarǵı usıllarınan biri bul teń kúshli racional teńsizliklerge keltiriw usılı esaplanadı.

En ápiwayı irracional teńsizlikler tómendegi kóriniske iye:

- 1) $\sqrt{A(x)} < B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$;
- 2) $\sqrt{A(x)} > B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \geq B(x)$;
- 3) $\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ yaki $\sqrt{A(x)} \geq \sqrt{B(x)}$.

$\sqrt{A(x)} < B(x)$ yaki $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli

$$\begin{cases} A(x) < B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{yaki} \quad \begin{cases} A(x) \leq B^2(x), \\ A(x) \geq 0, \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

(1) sistemadaǵı birinshi teńsizlik berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteriw nátiyjesinde payda bolǵan teńsizlik, ekinshi teńsizlik sheshiminin bar ekenligi shártin bildiredi, úshinshi teńsizlik bolsa kvadratqa kóteriw múmkinligin bildiredi.

$\sqrt{A(x)} > B(x)$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikti sheshiw ushın usı sistemanı qaraw zárúr:

$$\begin{cases} A(x) > B^2(x), \\ B(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \quad (2)$$

$\sqrt{A(x)} > \sqrt{B(x)}$ irracional teńsizlik tómendegi teńsizlikler sistemasına teń kúshli:

$$\begin{cases} A(x) > B(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Berilgen teńsizliktiń eki jaǵı barlıq múmkin bolǵan x lar ushın teris emes bolǵanlıǵı sebepli onı kvadratqa kóteriw múmkin (3) sistemadaǵı birinshi teńsizlik berilgen teńsizlikti kvadratqa kóteriw nátiyjesinde payda bolǵan teńsizlik. Ekinshi teńsizlik sheshim (koren)niń bar ekenlik shártin bildiredi $A(x) \geq 0$ shárt álbette orınlanadı.

(1)–(3) qaǵıydalar irracional teńsizlikti sheshiwdiń tiykarǵı usılı esaplanadı. Onıń mánisin bir neshe mısallarda kórsetemiz.

1-мисал.

Теңсизlikti sheshiñ: $\sqrt{10x+5} < -3$.

△ Bul теңсизliktiñ оñ тärepi терis, sol менен birge shep тärepi мүмkin болған x lar ushın терis емес. Sonıñ ushın теңсизlik sheshimge iye емес.

Juwap: Sheshimge iye емес. ▲

2-мисал.

Теңсизlikti sheshiñ: $\sqrt{3x-9} > -5$.

△ Теңсизliktiñ оñ тärepi терis, sol менен birge shep тärepi мүмkin болған x lar ushın терis емес. Demek, usı теңсизlik $x \geq 3$ shártti qanaatlandıratuğın barlıq x lar ushın orıñlanadı.

Juwap: $x \in [3; +\infty)$. ▲

3-мисал.

Теңсизlikti sheshiñ: $\sqrt{2x-3} < 1$.

△ (1) qağıydağa kóre $\begin{cases} 2x-3 < 1^2, \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$

$B(x) = 1 \geq 0$ shárt barlıq x lar ushın orınlanganlığı ushın, onı bólek jazıw shárt емес.

Juwap: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$. ▲

4-мисал.

Теңсизlikti sheshiñ: $\sqrt{4x-3} > 1$.

△ Bul теңсизlik (2) qağıyda boyınsha sheshiledi. Bul jağdayda $B(x) = 1 \geq 0$ shárt barlıq x lar ushın orınlanganlığı ushın usı теңсизlikke теñ kúshli теңсизlikti jazıwımız мүмkin: $4x-3 > 1^2$.

Juwap: $x > 1$. ▲

5-мисал.

Теңсизlikti sheshiñ: $\sqrt{x+18} < 2-x$

△ Bul теңсизlik (1) qağıyda boyınsha sheshiledi:

$$\begin{cases} x+18 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x+18 < (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -18 \\ x \leq 2 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 \leq x < 2 \\ \begin{cases} x < -2 \\ x > 7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2.$$

Juwap: $x \in [-18; -2)$. ▲

6-misal. Теңsizlikti sheshiñ: $\sqrt{x^2 + x - 2} > x$.

△ Bul теңsizlik (2) қағыда бойынша sheshiledi:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \leq -2, \\ x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ x > 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + x - 2 > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

Juwap: $x \in (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$. ▲

7-misal. Теңsizlikti sheshiñ: $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

△ Bul теңsizlik (3) қағыда бойынша sheshiledi:

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

Juwap: $\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$. ▲

8-misal. Теңsizlikti sheshiñ: $\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x+6} < 1$

△ Belgisiz x tiñ теңsizlik mániske iye bolatuğın kópigin tabamız:

$$\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6, \\ -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

Eger $x+6 > 0$ bolsa, usı теңsizlikti kvadratqa kóteriw múmkin:

$$\begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ \sqrt{x^2 - 25} < x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x^2 - 25 < x^2 + 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < x \leq -5, \\ x \geq 5, \\ x > -\frac{61}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{61}{12} < x \leq -5, \\ x \geq 5. \end{cases}$$

$x < -6$ bolsa, berilgen теңsizlik álbette orinlanadı.

Juwap: $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-\frac{61}{12}; -5\right] \cup [5; +\infty)$. ▲

Jaña ózgeriwshini kirgiziw usılı

Irracional теңlemelerdi sheshiwde qollanılğan jaña ózgeriwshini kirgiziw usılı, irrational теңsizliklerge de qollaw múmkin.

9-мисал. Теңсизlikti sheshiñ: $-9\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 18 \geq 0$.

 Теңсизlikti tómendegishe jazıp alamız: $-9\sqrt[4]{x} + (\sqrt[4]{x})^2 + 18 \geq 0$.

Jaña ózgeriwshini kirgizemiz: $t = \sqrt[4]{x}$, $t \geq 0$. Bul jaǵdayda

$$\begin{cases} -9t + t^2 + 18 \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ t \leq 3, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 6, \\ 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Solay etip:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x} \geq 6, \\ 0 \leq \sqrt[4]{x} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6^4, \\ 0 \leq x \leq 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1296, \\ 0 \leq x \leq 81. \end{cases}$$

Juwap: $x \in [0; 81] \cup [1296; +\infty)$. 

10-мисал. Теңсизlikti sheshiñ: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.

 Jaña ózgeriwshini kirgizemiz: $\sqrt{15-x} = t$, $t > 0$.

Bul jaǵdayda $x = 15 - t^2$ hám t ózgeriwshige baylanıslı bolǵan jaña racional teñsizlikti hasıl qılamız:

$$\begin{cases} \frac{3-(15-t^2)}{t} < 1, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^2-t-12}{t} < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(t-4)(t+3)}{t} < 0, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4.$$

Bunnan x tı tabamız

$$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15-x < 16 \Leftrightarrow -1 < x < 15.$$

Juwap: $x \in (-1; 15)$. 

Soraw hám tapsırmalar



1. Irracional teñsizlik dep nege ataladı?
2. Irracional teñsizlikti sheshiwde teñ kúshli almasırwǵa say bolǵan mısıl keltiriñ.
3. Sheshimi bolmaǵan irracional teñsizlikke mısıl keltiriñ.

Shınıǵıwlar

Belgisizlerdiñ qaysı mánislerinde teñsizlikler mániske iye? (56–59)

56.

$$1) \sqrt{x} + \sqrt{2x-6} > 10; \quad 2) \sqrt[4]{18-2x} < 3.$$

57.

$$1) \sqrt{10-\sqrt{x-5}} < 27; \quad 2) \sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2.$$

58. 1) $\sqrt[3]{x^2 - x} > -x\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > \sqrt{8x-5}$.

59. 1) $\sqrt{x^2 + 3x + 1} < x + 1$; 2) $\sqrt{\frac{x+3}{4-x}} \geq 2$.

Тeңсизликлерди sheshiñ (60-66):

60. 1) $\sqrt{2x-1} < x+2$; 2) $\sqrt{x^2-1} > x-2$.

61. 1) $\sqrt[4]{2x^2-1} \leq x$; 2) $\sqrt{x^2-x-2} \geq 2x+3$.

62. 1) $x-3 < \sqrt{x^2+4x-5}$; 2) $\sqrt{x^2-55x+250} < x-14$.

63. 1) $\sqrt[3]{x^2+6x} > x$; 2) $\sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} \geq 2$.

64. 1) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3-x}$; 2) $x > \sqrt{x(1+\sqrt{x(x-3)})}$.

65. 1) $\frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \geq 4 + \frac{\sqrt{x}-1}{2}$; 2) $\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1} \geq 1$.

66. 1) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} > 8$; 2) $\sqrt[3]{x+1} \leq \sqrt[3]{5x}$.

67. Tegislikte $A(9; 4)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

68. Tegislikte $A(2; 4)$, $B(-3; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

69. Tegislikte $A(4; 4)$, $B(-5; 7)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

70. Tegislikte $A(2; 4)$, $B(+3; -5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

71. Tegislikte $A(5; 4)$, $B(-6; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

72. Tegislikte $A(8; 4)$, $B(-7; 5)$, $C(x; y)$ noqatlar berilgen. $AC > BC$ shártti qanaatlantırıwshı kóplikti (oblastı) tabıñ.

Baqlaw test tapsirmalari

Sinaw shiniǵıwlarınıń hár birine 4 danadan «juwap» berilgen. 4 dana «juwap» tıń tek ǵana birewi durıs, qalǵanları bolsa qáte. Oqıwshılardan sinaw shiniǵıwların orınlap, yaki bashqa aytımlar járdeminde tap sol durıs juwaptı tabıw (onı belgilew) talap qılınadı.

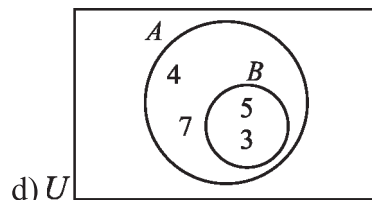
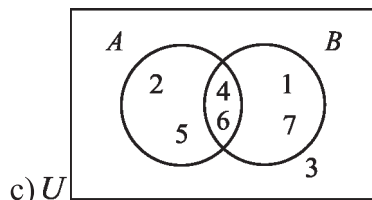
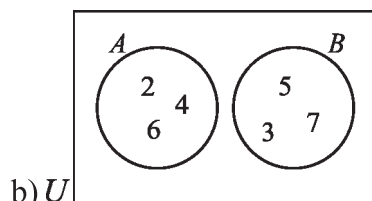
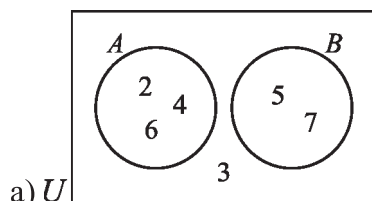
1. Teń kúshli teńlemelerdi kórsetiń:
1) $10x=8$; 2) $6x-4=x$; 3) $x^2+2x+18=0$.
A) 1 hám 3; B) 2 hám 3; C) 1 hám 2; D) hámmesi.
2. Teńlemenıń úlken koreniń tabıń: $(x-5)(x+4)(x-11)=0$.
A) -4; B) 5; C) 16; D) 11.
3. Bikvadrat teńlemenıń korenleri qosındısıń tabıń: $3x^4+8x^2-11=0$.
A) 1; B) -1; C) 0; D) 11/3.
4. Teńlemeler sistemasınıń neshe sheshimi bar? $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.
5. Teńlemenı sheshiń: $\sqrt{5x+9} = 7$.
A) 2; B) 4; C) 6; D) 8.
6. Teńlemeler sistemasınıń neshe sheshimi bar? $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 11, \\ \sqrt{xy} = 30. \end{cases}$
A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.
7. Tegislikte $A(3; 1)$ hám $B(7; 3)$ noqatlardan teń uzaqlıqta jaylasqan $C(5; x)$ noqattı tabıń.
A) (5;2); B) (5;3); C) (4;2); D) (4;3).
8. Teńlemenı sheshiń: $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} = 68$.
A) 1; B) 2; C) -1; D) 0.
9. Teńlemenıń pútin korenlerin tabıń: $11^{3x^2+23} = 11^{x^2+25x}$.
A) 1; B) -1; C) 2; D) 1 va -1.
10. Qaysıdır mámleket xalqınıń sanı jılına 3% kemeyse neshe jıldan soń xalıq sanı 20% kemeyedi?
A) 6; B) 2; C) 8; D) 4.
11. Teńsizlikti sheshiń: $(x^2+6x-7)(x^2+x+1) \leq 0$.
A) $[-7; 1]$; B) $[-7; -1]$; C) $[7; -1]$; D) $[7; 1]$.
12. $|x-2| \leq 5$ teńsizliktiń neshe pútin sheshimi bar?
A) 10; B) 11; C) 8; D) 9.
13. Teńsizlikti sheshiń: $|4x-1| \leq -2$.
A) $[-7; 1]$; B) $[-7; -1]$; C) $[7; -1]$; D) sheshimi joq.
14. $\sqrt{x^2-13x+12} \leq 5-x$ teńsizliktiń neshe pútin sheshimi bar?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

Juwaplar

I BAP.

1. a) $5 \in D$; b) $6 \notin G$; c) $\{2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; d) $\{3, 8, 6\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 2. a) **i**) $\{9\}$ **ii**) $\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. b) **i**) $\emptyset$ **ii**) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. c) **i**) $\{1, 3, 5, 7\}$ **ii**) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 3. a) 5; b) 6; c) 2; d) 9. 4. a) shekli; b) sheksiz. 5. a) kesilishmaydi; b) kesilishadi. 6. a) shekli; b) sheksiz; c) sheksiz; d) sheksiz. 7. a) i) A kóplik -1 den úlken yamasa teń hám 7 den kishi yamasa teń bolǵan pútín sanlar kópligi; **ii**) $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **iii**) 9. b) **i**) A kóplik -2 den úlken hám 8 den kishi bolǵan natural sanlar kópligi; **ii**) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **iii**) 8. c) **i**) A kóplik 0 den úlken yamasa teń hám 1 den kishi yamasa teń bolǵan haqıyqıy sanlar kópligi; **ii**) múmkin emes; **iii**) sheksiz. d) **i**) A kóplik 5 ten úlken yamasa teń hám 6 dan kishi yamasa teń bolǵan haqıyqıy sanlar kópligi; **ii**) múmkin emes; **iii**) sheksiz. 8. a) $A = \{x | -100 < x < 100, x \in \mathbb{Z}\}$; b) $A = \{x | x > 1000, x \in \mathbb{R}\}$; c) $A = \{x | 2 \leq x \leq 3, x \in \mathbb{Q}\}$. 9. a) **i**) 8 ta: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$; **ii**) 16 dana: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$; b) 2^n . 10. a) Awa; b) Yaq; b) Awa; d) Awa; e) Yaq; f) Yaq 11. b) $C' = \mathbb{N}$; c) $C' = \{x | x \geq -4, x \in \mathbb{Z}\}$; d) $C' = \{x | 2 < x < 8, x \in \mathbb{Q}\}$. 12. a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; b) $\{0, 1, 8\}$; c) $\{5, 6, 7, 8\}$; d) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; e) $\{5, 6, 7\}$; f) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; g) $\{2, 3, 4\}$. 13. a) 9; b) 11. 14. a) $\{1, 2, 10, 11, 12\}$; b) $\{1, 2, 3, 4, 12\}$; c) $\{1, 8, 9, 10, 11, 12\}$; d) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$; e) $\{1, 2, 8, 9, 10, 11, 12\}$; f) $\{8, 9, 10, 11\}$; g) $\{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$; h) $\{2, 10, 11\}$. 15. a) $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$; b) $\{2, 5, 11\}$; c) $\{2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 23\}$; d) $12 = 9 + 6 - 3 \checkmark$. 16. a) $P = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $Q = \{1, 2, 3, 5, 8, 10, 20, 30\}$; b) $\{2, 5, 10\}$; c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 40\}$; d) $12 = 8 + 8 - 4 \checkmark$. 17. a) $P = \{32, 36, 40, 44, 48, 52, 56\}$, $Q = \{36, 42, 48, 54\}$; b) $\{36, 48\}$; c) $\{32, 36, 40, 42, 44, 48, 52, 54, 56\}$; d) $9 = 7 + 4 - 2 \checkmark$. 18. a) $B' = \{0, 1, 2, 9, 10, 11\}$; b) $C' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; c) $A' = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11\}$; d) $A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$. 19. a) $C = \{-4, -3, -2, -1\}$, $D = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; b) $\{-4, -3, -2, -1\}$; c) $\{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$; d) $7 = 4 + 7 - 4 \checkmark$. 20. a) $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $Q = \{1, 2, 3, 5, 9, 18\}$, $R = \{1, 3, 9, 27\}$. b) **i**) $\{1, 2, 3, 6\}$; **ii**) $\{1, 3\}$; **iii**) $\{1, 3, 9\}$; **iv**) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$; **v**) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 27\}$; **vi**) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27\}$. c) **i**) $\{1, 3\}$; **ii**) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27\}$. 21. a) $A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$, $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$, $C = \{12, 24, 36\}$. b) **i**) $\{12, 24, 36\}$; **ii**) $\{12, 24, 36\}$; **iii**) $\{12, 24, 36\}$; **iv**) $\{12, 24, 36\}$. c) $\{4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36\}$. d) $12 = 9 + 6 + 3 - 3 - 3 + 3 \checkmark$. 22. a) $A = \{6, 12, 18, 24, 30\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. b) **i**) $\{6, 30\}$; **ii**) $\{2, 3, 5\}$; **iii**) $\emptyset$; **iv**) $\emptyset$. c) $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 23, 24, 29, 30\}$. d) $18 = 5 + 8 + 10 - 2 - 3 - 0 + 0 \checkmark$.

23.



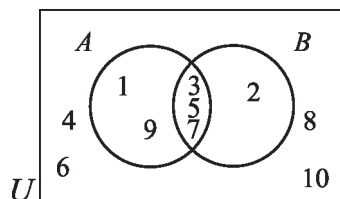
24.

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$;

b) $A \cap B = \{3, 5, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$;

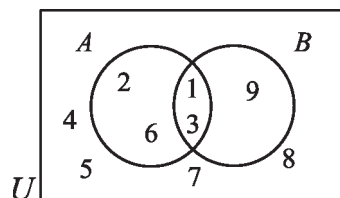


25. a) $A = \{1, 2, 3, 6\}$

$B = \{1, 3, 9\}$;

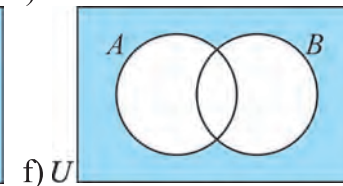
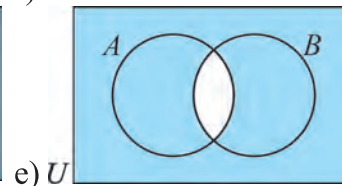
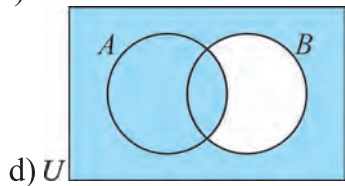
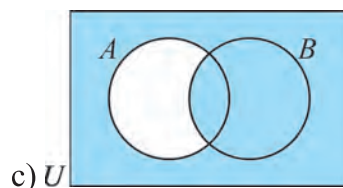
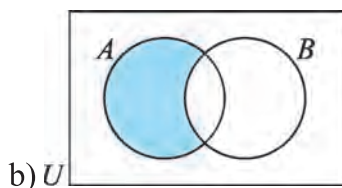
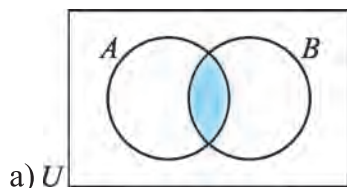
b) $A \cap B = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$;

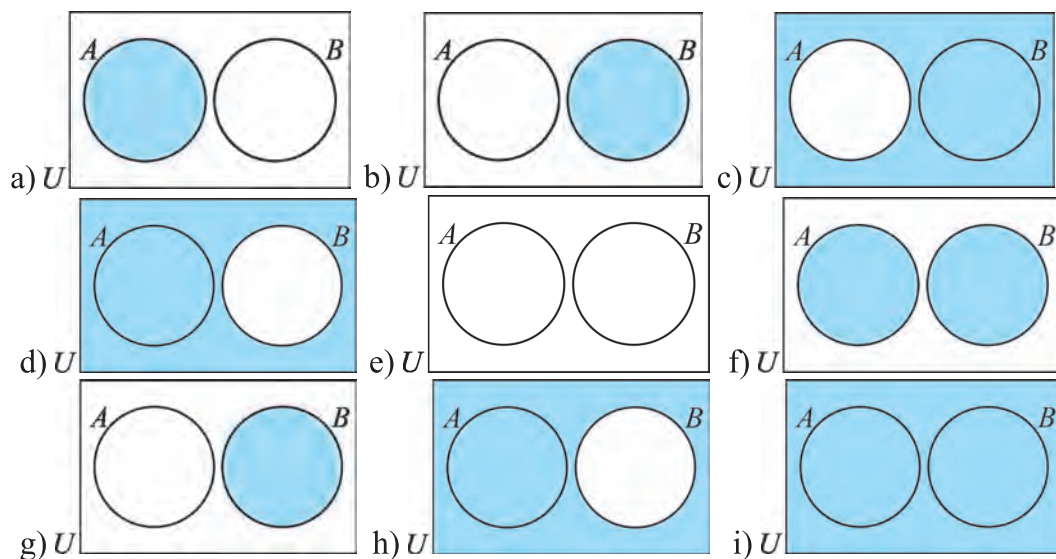


26. a) $\{b, d, e, h\}$; b) $\{e, f, h, i, j\}$; c) $\{a, c, f, g, i, j, k\}$; d) $\{a, b, c, d, g, k\}$; e) $\{e, h\}$; f) $\{b, d, e, f, h, i, j\}$; g) $\{a, c, g, k\}$; h) $\{a, b, c, d, f, g, i, j, k\}$. 27. a) **i)** $\{a, b, c, d, h, j\}$; **ii)** $\{a, c, d, e, f, g, k\}$; **iii)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **iv)** $\{a, c, d\}$; **v)** $\{a, b, e, f, i, l\}$; **vi)** $\{a, e, f\}$; **vii)** $\{a\}$; **viii)** $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$.

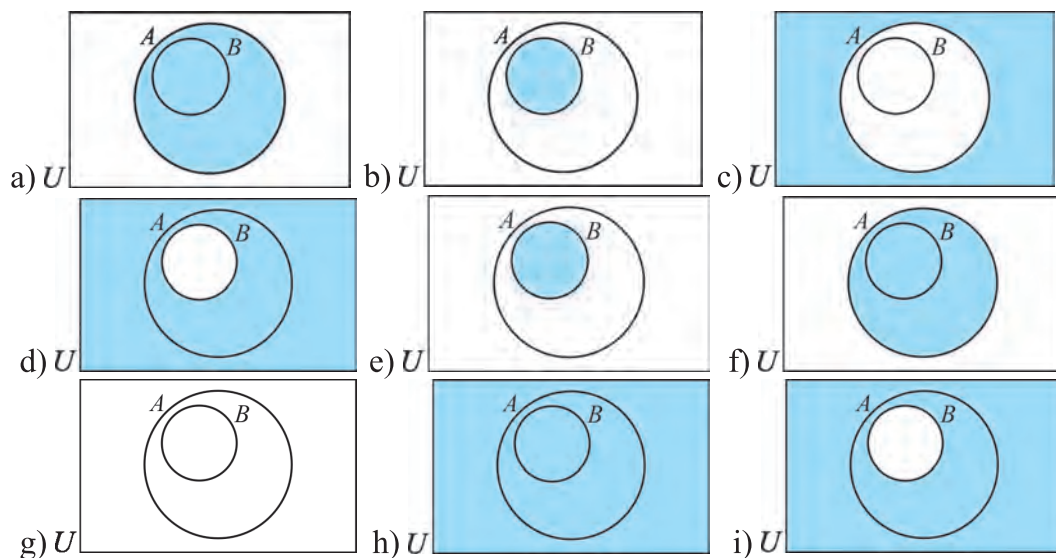
28.



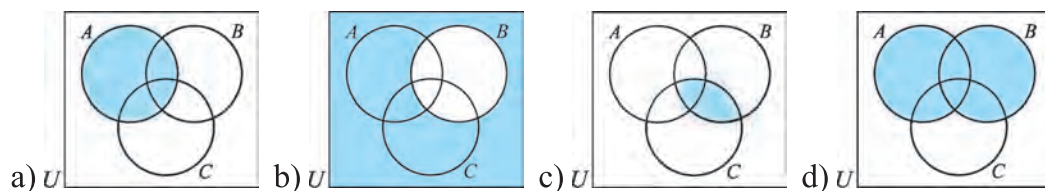
29.

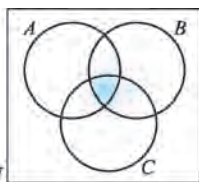


30.

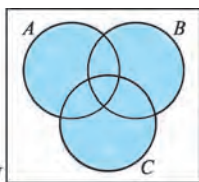


31.

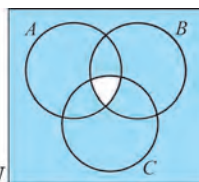




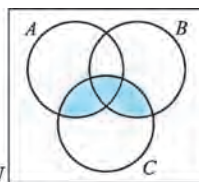
e) U



f) U



g) U



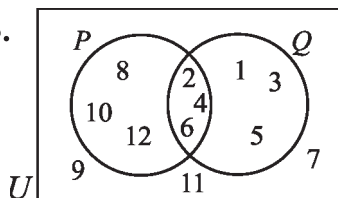
h) U

32. a) Awa, jalğan; b) Awa, shın; c) Awa, shın; d) Awa, shın; e) Awa, shın; f) Awa, shın; g) Yaq; h) Awa, shın; i) Yaq; j) Awa, anıq emes; k) Awa, anıq emes; l) Yaq; m) Awa, anıq emes; n) Awa, anıq emes; o) Awa, anıq emes; p) Awa, jalğan. 33. k) $\neg p$: Ayırım tórtmúyeshlikler parallelogramm emes; m) $\neg r$: 7 – racional san emes; n) $\neg s$: $23-14 \neq 12$; o) $\neg t$: $52:4 \neq 13$; p) $\neg u$: Ayırım eki jup sanlar ayırması jup boladı q) $\neg p$: Izbe – iz natural sanlar kóbeymesi hár dayım jup bolmaydı r) $\neg q$: Ayırım doǵal múyeshler óz-ara teń emes; s) $\neg r$: Ayırım trapeciyalar parallelogramm emes;

t) $\neg s$: Úshmúyeshlikte eki múyeshi óz-ara teń, biraq ol teń qaptallı emes.

34. a) $x \geq 5$; b) $x < 3$; c) $y \geq 8$; d) $y > 10$; 35. e) Yaq, Madinanıń boyı 140 sm bolıwıda múmkin; f) Yaq; g) Awa. 36. f) $x \geq 5, x \in \mathbb{N}$; g) x – sıyır, $x \in \{\text{atlar, qoylar, sıyırlar}\}$; h) $x < 0, x \in \mathbb{Z}$; i) x – qız bala oqıwshı, $x \in \{\text{oqıwshılar}\}$; j) x – oqıwshı emes qız bala, $x \in \{\text{qız balalar}\}$. 41. e) $p \wedge q$: Madina – terapevt, Munisa bolsa stomatolog; f) $p \wedge q$: 15 ten úlken hám 30 dan kishi; g) hawa bulıtlı hám jawın jawmaqta; h) Alımnıń shashları qara hám kózleri jasıl. 42. f) shın; g) jalğan; h) jalğan; i) shın; j) jalğan.

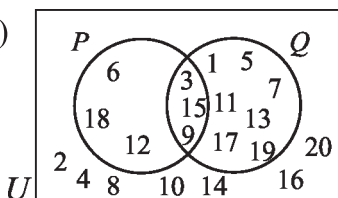
43.



44. a) shın; b) jalğan; .

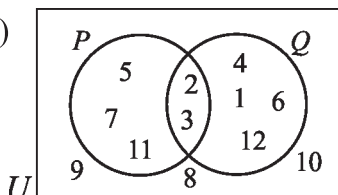
45. c) shın; d) shın.

46. a)



b) i) $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$;
ii) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19\}$;
iii) $\{3, 9, 15\}$;
iv) $\{1, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 17, 18, 19\}$.

47. a)



b) i) $\{2, 3\}$;
ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$;
iii) $\{1, 4, 5, 6, 7, 11, 12\}$.

48. a) $\neg x$; b) $x \wedge y$; c) $x \vee y$; d) $\neg x \wedge \neg y$; e) $x \wedge \neg y$. 50. a) Sarvar erte turdi; b) Sarvar keshki awqatqa palaw jedi; c) Sarvar azangı awqatqa qaymaq jedi hám sport penen shugıllandı; d) Sarvar túslikke sorpa ishti hám keshki awqatqa palaw jedi; e) Sarvar ya túslikke ya keshki awqatqa sorpa ishti.

51. a)

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

c)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

d)

p	$p \vee q$
T	T
F	F

52. a) tautologiya emes; b) tautologiya; c) tautologiya emes.

55.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

57. d) quyash sharaqlasa, men

shomılıwğa baraman; e) x san 6

ğa bólinse, ol jup boladı; f) Muz-

latqishta (xolodilnikte) máekler

bolsa, Madina tort pisiredi.

59. a) $p \Rightarrow q$; b) $q \Rightarrow p$; c) $\neg q$; d) $\neg p$; e) $\neg p \Rightarrow \neg q$; f) $p \Rightarrow \neg q$; g) $\neg q \Rightarrow p$; h) $p \Leftrightarrow q$; 63.

a) Konversiya: Eger Dilbar ınsına, ol jemper kiyedi; Inversiya: Eger Dilbar

jemper kiymese, ol ısına almaydı. b) Konversiya: Eger eki úshmúyeshliktiń

sáykes múyeshleri teń bolsa, olar uqsas boladı; Inversiya: Eger eki úshmúyeshlik

uqsas bolmasa, olardıń sáykes múyeshleri teń bolmaydı. c) Eger $2x^2=12$ bolsa, ol

jaǵdayda $x = \pm\sqrt{6}$ boladı; Konversiya: Eger $x = \pm\sqrt{6}$ bolsa, ol jaǵdayda $2x^2=12$

boladı. Inversiya: Eger $2x^2 \neq 12$ bolsa, ol halda $x \neq \pm\sqrt{6}$ boladı. d) Konversiya: Eger

Alım quwansa, ol oyın oynaydı; Inversiya: Alım oyın oynamasa, ol quwanbaydı.

e) Eger úshmúyeshlik durıs bolsa, ol halda onıń tárepleri teń boladı; Konversiya:

Eger úshmúyeshliktiń tárepleri teń bolsa, ol durıs boladı; Inversiya: Eger úshmú-

yeshlik durıs bolmasa, ol halda onıń tárepleri teń bolmaydı. 64. a) Eger gúl tikenli

bolmasa ol átirgúl bolmaydı; b) Durıs qarar shıǵara almaǵan insan sudya emes;

c) toptı anıq móljelge tebe almaǵan insan jaqsı futbolshı bola almaydı; d) Eger

zat quyılǵan ıdıs kórinisin qabıl qılmasa ol suyıqlıq emes; e) Eger insan tabıslı

bolmasa, ol hadal hám oqımısı emes; 65. a) matematikanı úyrenbeytuǵın insan

10 klass oqıwshısı emes; b) Sháwkat matematikanı úyrenedi; Mirislam 10 klass

oqıwshısı emes; Anıq juwmaq shıǵara almaymız. 66. a) x^2 sanı 9 ǵa bólinbese,

sanı 3 ke bólinbeydı; b) x -jup bolmasa, onıń aqırǵı cıfrası 2 emes; c) $AB \parallel CD$ hám

$AD \parallel BC$ bolmasa, $ABCD$ – tuwrı tórtmúyeshlik emes; d) $\angle ACB \neq 60^\circ$ bolsa, ACB

– durıs úshmúyeshlik emes. 67. i) Eger úy sırtına tútin shıǵaratuǵın trubaga iye

bolsa, eń kóbi menen 3 aynalı boladı; **ii)** Eger úy 3-ewden artıq aynalı bolsa, ol sırtına tütün shıǵaratuǵın trubáǵa iye bolmaydı; **iii)** Eger úy sırtına tütün shıǵaratuǵın trubáǵa iye bolmasa, eń kóbi menen 3 aynalı bolmaydı **69.** a) $\exists x P(x)$; b) $\exists x P(x)$; c) $\forall x P(x)$; d) $\forall x P(x)$; e) $\forall x P(x)$; f) $\forall x P(x)$; g) $\forall x P(x)$; h) $\forall x P(x)$; i) $\exists x P(x)$; j) $\exists x P(x)$; k) $\forall x P(x)$; **70.** a) Sazan sút emiziwshi emes; b) Barlıq qurallarda kemshilikler bar; f) Altın tokti jaqsı ótkizedi; g) Ayırım omırtqalılar bala tuwadı; h) Bul insan kesellengen. **71.** a) y x tiń aqlıǵı; b) Hár qanday insanda perzent bar; c) Hár qanday insan kimnińdir perzenti. **72.** a) Barlıq insanlar ushın eger biri basqasın dos dep esaplasa, ol da onı dos dep esaplaydı; b) Qálegen insan ushın ol dos dep esaplaytuǵın insan bar; c) Sonday insan bar, onı hámme dos dep esaplaydı; d) Hár qanday insan ushın onı dos dep esaplaytuǵın insanlar bar; e) Sonday insan bar, ol hámmeni dos dep esaplaydı; f) Sonday insan bar, olnı hámme dos dep esaplaydı. **73.** a) Qálegen pútın san ushın oǵan bólinetuǵın pútın san bar; b) Sonday pútın san bar, ol barlıq pútın sanlarǵa bólinedi; c) Qálegen pútın san ushın onıń bóliwshileri bar; d) Sonday pútın san bar, oǵan barlıq pútın sanlar bólinedi; e) Qálegen pútın san ushın onıń bóliwshileri bar; f) Sonday pútın san bar, ol barlıq pútın sanlarǵa bólinedi. **82.** a) 7; b) 14; c) 14; d) 7; e) 5; f) 9. **83.** a) 5; b) 6; c) 17; d) 8; e) 3; f) 2. **84.** a) $b+c$; b) $c+d$; c) b ; d) $a+b+c$; e) $a+c+d$; f) d . **85.** a) 15; b) 4. **86.** a) 18; b) 6. **87.** a) 7; b) 23.

II BAP.

1. a) £630; b) £630; c) ¥238333; d) €4402,46. 3. \$2600. 4. £14 400. 5. €20219,78. 6. a) $6\frac{2}{3}\%$; b) 9,41%. 7. $11\frac{2}{3}\%$. 8. 15,4%. 9. a) 4; b) 7; 11. a) €5512,69; b) \$7293,04; c) £18938,83. 12. 787,50. 13. €1418,75. 14. £1660. 15. \$274,83. 16. a) €111,39; b) £763,31; c) ¥77157. 17. \$9021,58. 18. €301,26. 19. a) \$7650; b) \$8151,65; c) \$8243,81.

20.

Jıllar	Amortizaciya	Bahası
0		€2500
1	15% €2500 = €375	€2125
2	15% €2125 = €318,75	€1806,25
3	15% €1806,25 = €270,94	€1535,31

III BAP.

1. a) 5; b) -2;50; c) 1;-9; d) $\emptyset$; e) -1; f) 1;-0,5; g) -1; -4,7; i) -4;7;
 2. a) 7; b) -0,25; c) koreni joq; ; e) -1;5; f) -1.
 3. a) hám b); a) hám d); a) hám f); b) hám d); b) hám f); d) hám f); c) hám e); g) hám h).
 4. a) (81/11;-3/11); b) (4;4); c) (9;8). 6. b) (1;1). 7. a) 8;-33/4.
 9. 48 qiz hám 60 jigit (óspirim). 11. a) $19\frac{2}{3}$; b) $\emptyset$; c) 32; d) $\emptyset$; 13. a) $\emptyset$; b) $-\frac{23}{16}$.
 15. a) $\frac{-9-\sqrt{105}}{2}$. 17. b) $\emptyset$; 19. a) 5. 21. a) (9;4). 23. a) (-5;9). 25. $\frac{21}{22}$.
 26. a) -0,25; b) -4/9; c) -2,5. 28. c) $\emptyset$. d) {0;-3,5}. 29. c) 0; d) 1. 31. a) 0; b) 0.
 37. 3 yil. 39. 8 yil. 41. a) $\left(\frac{69}{62}; \frac{35}{62}\right)$; b) $\left(\frac{18}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. 43. a) (1;1); b) (4/3; 2/3);
 53. 1) $\left[-4; \frac{3}{7}\right] \cup [5; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{11}{7}; -1\right) \cup (6; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$;
 4) $(-\infty; -0,5) \cup [5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$
 7) (0,25;1); 8) $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right) \cup \left[\frac{16}{23}; +\infty\right)$; 9) $\left(-\sqrt{7}; \frac{15-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\sqrt{7}; \frac{15+\sqrt{21}}{2}\right)$;
 10) $(0; 0,5) \cup (1; +\infty)$. 55. 1) $\left(\frac{1}{7}; +\infty\right)$; 2) $\emptyset$. 57. $(-\infty; -3]$; 59. 1) $\emptyset$. 2) $\emptyset$.
 61. 1) $[0; 1)$. 63. 1) $(-\infty; -2) \cup (0; 3)$. 65. 1) $[81; +\infty)$. 66. 2) $[0,25; +\infty)$.
 68. $y > 5x + 7$. 70. $y < (x-2) / 9$. 72. $y > 15x - 3$.

MAZMUNÍ

<i>I</i> bap. KÓPLIKLER. LOGIKA	3
1-4 sabaqlar. Kóplik túsiniǵı, kóplikler ústinde ámeller. Tolıqtırwshı kóplik	3
5-7 sabaqlar. Aytımlar. Biykarlanıwlanıw, konyunkciya hám dizyunkciya....	14
8-9 sabaqlar. Logikalıq teń kúshlilik. Logikalıq nızamlar.....	21
10-11 sabaqlar. Implikaciya, konversiya, inversiya hám kontrapoziciya	23
12-13 sabaqlar. Predikatlar hám kvantorlar.....	29
14-15 sabaqlar. Durıs pikir júrgiziw (argumentaciya) nızamları. Sofizmler hám paradokslar	33
16-18 sabaqlar. Máseleler shıǵarıw	38
<i>II</i> bap. FINANSLÍQ MATEMATIKA ELEMENTLERI	48
19-21 sabaqlar. Ápiwayı procentler, quramalı procentler	48
22-24 sabaqlar. Máseleler shıǵarıw	53
<i>III</i> bap. ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEÑLEMELER.....	58
25-28 sabaqlar. Ápiwayı racional teñlemeler hám olardıń sistemaları.....	58
29-32 sabaqlar. Ápiwayı irracional teñlemeler hám olardıń sistemaları	64
33-36 sabaqlar. Ápiwayı kórsetkishli teñlemeler hám olardıń sistemaları	69
37-38 sabaqlar. Teñlemelerdi shamalap shıǵarıw	74
39-41 sabaqlar. Ápiwayı racional teńsizlikler hám olardıń sistemaları	77
42-43 sabaqlar. Ápiwayı irracional teńsizlikler	79
Juwaplar	86

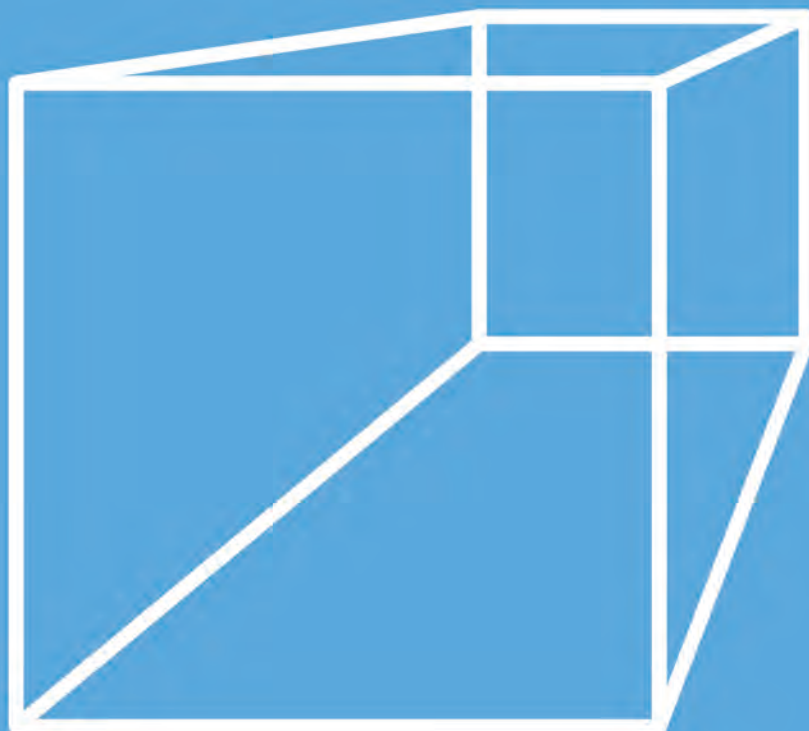
Paydalanilgan hám usınıs etiletuğın ádebiyatlar

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra hám analiz tiykarları. 10-klass ushın sabaqlıq. Tashkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studiyes SL 2 nd education. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. Часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. Abduhamidov A.U. hám basqalar. Algebra hám matematik analiz tiykarları, 1-bólim, Tashkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Филичева Н.П. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань" 2009.
6. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. М., "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я.Виленкина. М."Просвещение", 2004.
9. <http://www.ams.org/mathweb/> - Internette matematika (ingliz tilinde).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika hám informatika. Ilmiy – metodikalıq jurnal (2001 – jildan baslap shıǵa baslaǵan).
12. Mirzaahmedov M. A., Ismailov Sh.N. Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Математикадан қўлланма, I ва II қисмлар. Ўқитувчилар учун қўлланма. Проф. Азларов Т.А. таҳрири остида. Тошкент, "Ўқитувчи", 1979.
14. Мирзааҳмедов М. А., Сотиболдиев Д. А. Ўқитувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Тошкент, "Ўқитувчи", 1993.
15. <http://www.uzedu.uz> – Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portali.
16. <http://www.eduportal.uz> – Multimediya orayi xabar bilimlendiriw portali.
17. <http://www.problems.ru> – Matematikadan máseleler izlew tizimi (rus tilinde).
18. <http://matholymp.zn.uz> – O'zbekistanda hám dunyada matematikalıq olimpiadalar.

MATEMATIKA



GEOMETRIYA



10- klass

10 – klasta geometriyanıń stereometriya bólimin – keńisliktegi geometriyalıq sháqıl (dene)lerdiń qásietlerin dizimli úyreniwge kirisiledi. Sabaqlıqtan tiykarǵı keńisliktegi deneler: kópjaqlılar hám aylanba deneler hám olardıń tiykarǵı qásietleri, keńislikte parallel hám perpendikulyar tuwrı (sızıq)lar hám tegislikler hám de olardıń qásietlerine sáykes máseleler orın alǵan.

“Geometriya – 10” sabaqlıǵında teoriyalıq materiallar ápiwayı hám túsinerli tilde ańlatılıwına háreket etilgen. Barlıq tema hám túsiniqler túrli ómirlik mısallar arqalı ashıp berilgen. Hár bir temadan soń keltirilgen sorawlar, dálillewge, esaplawǵa hám soǵıwǵa say kóplep másele hám mısallar oqıwshını tvorchestvolıq pikirlewge úndeydi, ózlestirilgen bilimlerde tereńlestiriwge hám bekkemlep barıwǵa járdem beredi.

“Geometriya – 10” sabaqlıǵı ulıwma orta bilimlendiriw mektepleriniń 10 – klas oqıwshılarına mólsherlengen, onınan geometriyanı óz betinshe úyrenbekshi hám tákirarlamaqshi bolǵan kitap oqıwshılar da paydalanıwları múmkin.

M A Z M U N Í

I bólim. Planimetriyanı sistemali tákirarlaw

1. Planimetriyanıń logikalıq dúzilisi 97
2. Geometriyalıq máseleler hám olardı shıǵarıw usılları 103
3. Ámeliy shınıǵıw hám qollanıwlar 108

II bólim. Stereometriyaǵa kirisiw

4. Keńislikte geometriyalıq figuraler. Kópjaqlılar 112
5. Aylanba deneler: cilindr, konus hám shar 116
6. Ámeliy shınıǵıw hám qollanıwlar 119

III bólim. Keńislikte tuwrı sızıqlar hám tegislikler

7. Keńislikte tuwrı (sızıq)lar hám tegislikler 112
8. Kópjaqlılar hám olardıń ápiwayı keimlerin
soǵıw (jasaw) 116
9. Ámeliy shınıǵıw hám qollanıwlar 119

Sabaqlıqtın "Geometriya" bo‘liminde islatilgen belgiler hám olarding talqini:



– teorema



– aksioma



– tema boyınsha sorawlar



– aktivlestiriwshi shınıǵıwlar



– teorema dáliliniń aqırı



– ámeliy qollanıw



– tariyxıy úzindiler



– geometriyalıq basqatırmalar



I BÓLIM

PLANIMETRIYANÍ SISTEMALÍ TÁKIRARLAW

1

PLANIMETRIYANÍN LOGIKALÍQ DÜZILISI

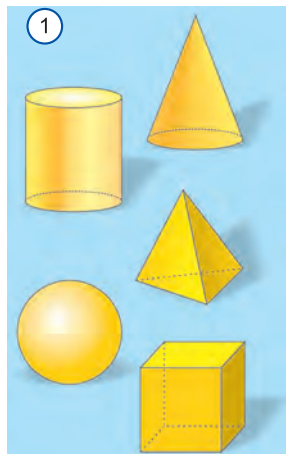
Geometriya real ómirdegi predmetlerdín muǵdarlıq (sanlı) kórsetkishleri hám keńisliktegi shákillerdi úyrenetuǵın pán. Zatlardıń basqa qásietlerin basqa pánler úyrenedi. Eger birár zat úyrenilip atırǵanda, onıń tek ǵana keńisliktegi ko'rinisi hám ólshemleri esapqa alınsa, onda *geometriyalıq ko'rinis* dep atalıwshı abstrakt ob'ektke ie bolamız.

Geometriya– grekshe sóz bolıp, “jer ólshew” degen mánini bildiredi. Mektepte úyreniletuǵın geometriya áyemgi grek ilimpazı Evklid atı menen *Evklid geometriyası* dep ataladı. Geometriya eki bólekten: planimetriya hám stereometriyadan ibarat. *Planimetriya* – tegisliktegi, *stereometriya* bolsa keńisliktegi geometriyalıq figurallerdín qásietlerin úyrenedi (1 – súwret).

Geometriyalıq shákillerdi bir – birinen parıqlaw ushın olardıń qásietleri anıqlanadı, yaǵnıy olarǵa *anıqlama* beriledi. Biraq, hámme shákillerge de anıqlama berip bolmaydı. Olardıń dáslepki bir neshewin anıqlamasız qabıl qılıwǵa májbúrmiz. Olardı anıqlanb(anıqlama berip bolm)aytuǵın, *dáslepki (tiykarǵı) geometriyalıq figuraler* dep alamız

Geometriyanıń logikalıq qurılısı tómendegi tártipte ámelge asırıladı:

1. Aldın tiykarǵı (dáslepki) geometriyalıq figuraler anıqlamasız qabıl qılınadı;
2. Dáslepki geometriyalıq figuralerdín tiykarǵı qásietleri dálilsiz qabıl qılınadı;
3. Basqa geometriyalıq figuraler tiykarǵı shákiller hám olardıń qásietlerine súenip (tayanıp) anıqlama beriledi hámde olardıń qásietleri oǵan shekem belgili bolǵan qásietlerge súenip dállillenedi.



Pánniń bunday dúzilisi *aksiomatikalıq dúzilis* dep ataladı. *Aksioma* dep durıslıǵı dálilsiz qabıl qılınatuǵın qásietke aytıladı.

Usı waqıtqa shekem biz úyrengen planimetriyanıń tiykarǵı shákileri bul noqat hám tuwrı sıziq edi. Olardı anıqlamasız qabıl qıldıq. Kesindi, nur, úshmúeshlik hám basqa geometriyalıq koorinisilerge bolsa anıqlama berdik. Sonday-aq, tómendegi qásietlerdi (tastıyqlardı) dálilsiz aksioma retinde (sıpatında) qabıl qıldıq:

I. Tiyislilik aksiomaları toparı (gruppası)

1.1. *Tegislikte qanday tuwrı (sızıq) alınbasın, onda bul tuwrıǵa tiyisli bolǵan noqatlar da, tiyisli bolmaǵan noqatlar da bar.*

1.2. *Hár qanday eki noqattan tek ǵana bir tuwrı sıziq ótedi.*

II. Tártip aksiomaları toparı (gruppası)

2.1. *Bir tuwrı sıziqta alınǵan qálegen úsh noqattıń tek ǵana birewi qalǵan ekewiniń arasında jatadı.*

2.2. *Hár bir tuwrı tegislikte eki bólekke: eki yarım tegislikke ajratadı.*

III. Ólshew aksiomaları toparı (gruppası)

3.1. *Hár qanday kesindi nolden pariqlı belgili uzınlıqqa ie bolıp, ol oń san menen anlatıladı. Kesindi uzınlıǵı onıń qálegen noqatı ajratqan bólekleri uzınlıqları qosındısına teń.*

3.2. *Hár qanday múesh belgili gradus ólwewine ie bolıp, onıń mánisi oń san menen anlatıladı. Jayıq múeshtiń gradus ólshemi 180° qa teń. Múeshtiń gradus ólshemi, múesh tárepleri arasınan ótiwshi qálegen nur ajratqat múeshler gradus ólshemleriniń qosındısına teń.*

IV. Teń figuranı qoyıw aksiomaları gruppası

4.1. *Qálegen nurǵa onıń ushınan baslap, berilgen kesindige teń jalǵız (tek ǵana bir) kesindini qoyıw múmkin.*

4.2. *Qálegen nurdan belgili yarımtegislikke berilgen, jayıq bolmaǵan múeshke teń jalǵız (tek ǵana bir) múeshti qoyıw múmkin.*

4.3. *Hár qanday úshmúeshlik ushın oǵan teń úshmúeshlik bar hám onı nurdan belgili yarımtegislikke jalǵız (tek ǵana bir) tárizde qoyıw múmkin.*

V. Parallellik aksioması

5.1. *Tegislikte tuwrı sıziqtan tısqarıda alınǵan noqattan bul tuwrı sıziqqa tek ǵana bir dana parallel tuwrı sıziq ótkiziw múmkin.*

Birar tasdıyqtıń durıslıǵın logikalıq aytımlar járdeminde keltirip shıǵarıwǵa *dálil* dep ataladı. Durıslıǵın dálillew jolı menen tiykarlanatuǵın tasdıyq bolsa *teorema* dep ataladı. Teorema ádette shárt hám juwmaq bóleklerden ibarat boladı. Teoremanıń birinshi – shárt bóleginde neler berilgeni bayan qılınadı. Ekinshi

– juwmaq bóleginde bolsa neni dálillew kerekligi (lazımlıǵı) ańlatıladı.

Teoremanı dálilew – onıń shártinen paydalanıp, buǵan shekem dálillengen hám qabı qılınǵan qásietlerge súenip (tayanıp), talqıllaw júrgizip, juwmaq bóleginde ańlatılǵan pikir gáptiń durıslıǵın keltirip shıǵarıw esaplanadı. Teoremanıń shárt hám juwmaq bóleklerin anıqlastırıp alıw – teoremanı aydınlastıradı, onı túsiniw hám dálillew procesin jeńillestiredi.

Grek ilimpazı Platon geometriyada ájayıp bir nızamlıqtı sezgen (payqaǵan): aldın úyrenilgen, durıslıǵı dálillengen qásietlerden logikalıq pikirlew, talqınlaw júrgiziw arqalı jańa qásietlerdi keltirip shıǵarsa bolar eken. Bunday ájayıp imkáníyattan paydalanıp, qalǵan qásietler teoremlar kórinisinde ańlatıladı hám aksiomalar hámde usı waqıtqa shekem durıslıǵı dálillengen qásietlerge tiykalanıw, logikalıq pikirler júrgiziw arqalı dálillenedi.

Pikir júrgiziw procesinde dálilenbegen qásietlerden (olardıń durıslıǵı ashıq – aydın kórinip turǵan bolsa da) paydalanıw qadaǵan etiledi.

Sonday qılıp, geometriyanı bir imárat (jay) dep qaraytuǵın bolsaq, dáslepki túsiniqler hám aksiomalar onıń fundamentin quraydı. Bul fundament ústinde qurılǵan gerbishler jańa túsiniqler hám teoremlar kórinisinde dálillengen qásietlerden ibárat boladı.

Geometriyanı óz betinshe pán retinde tiykarlawda áyemgi (qádimgi) grek ilimpazları úlken úles qosqan. Máselen, Gippokrat Xiosskiy geometriya tiykarları haqqındaǵı dáslepki tásewirlerin bayan etken. Bul taraw boyınsha tiykarǵı jumıslardı ullı grek ilimpazı Evklid (eramızǵa shekem 356 – 300 – jıllar) ámelge asırǵan. Onıń tiykarǵı shıǵarması “Negizler” planimetriya, stereometriya hám sanlar teoriyasınıń bazı máselelerin, sonday-aq, algebra, qatnaslar ulıwma teoriyası, maydan hám kólemlerdi esaplaw usılı hámde shekler teoriyası elementlerin óz ishine aladı. “Negizler”de Evklid áyemgi grek matematikasınıń barlıq jetilissenliklerin jámledi hám onıń rawajı ushin tiykar jarattı.

"Negizler" 13 kitaptan ibárat bolıp, bul shıǵarma eramızdan aldınǵı V – IV ásirler grek matematiklari shıǵarmaları qayta islenbesten ibárat. Shıǵarmada 23 anıqlama, 5 postulat hám 9 aksioma berilgen. Shıǵarmada tuwrı tórtmúeshlikke, kvadratqa, sheńberge durıs anıqlama berilgen. Noqat hám sızıqqa tómendegi anıqlamalar berilgen: “Noqat dep sonday zatqa ayıqladı, ol bóleklerge ie emes”, “Sızıq dep eni joq uzınlıqqa ayıqladı”.

"Negizler"de 9 aksioma – dálilsiz qabıl qılınatuǵın pikirler bayan qılınǵan.



Evklid
(eramızdan aldınǵı 356
– 300 – jıllar)



Omar Hayyam
(1048–1131)

Geometriyalıq – jasawlardı ámelge asırıw múmkinligin bayan etiwshi matematik postulatlardan tómendegi besewin bayan etilgen:

I. Hár qanday eki noqattan tek ǵana bir tuwrı (tuwrı sıızıq) ótkiziw múmkin.

II. Tuwrı sıızıq kesindisin sheksiz dawam ettiriw múmkin.

III. Hár qanday oraydan qálegen aralıta sheńber jasaw múmkin.

IV. Hámme tuwrı múeshler óz-ara teń.

V. Bir tegislikte jatırǵan eki tuwrı sıızıqtı úshinshi tuwrı sıızıq kesip, bir tárepli ishki múeshler payda etse hám

múeshler qosındısı eki tuwrı múeshтен kishi bolsa, usı tuwrı (tuwrı sıızıq)lar dawam ettirilgende olar qosındısı eki tuwrı múeshтен kishi múeshler tárepte kesilisedi

Usı shıǵarma úlken hám uzaq dańqqa ie boldı. Ásirese, V postulat úlken ilimiy talqınlargá sebep boldı. Eger V postulattaǵı ishki almasınıwshı múeshlerdi α hám β desek (1-súwret), tuwrı sıızıqlar a hám b bolsa, ol halda postulat mazmunına kóre $\alpha + \beta < 180^\circ$ bolsa, a hám b tuwrı sıızıqlar kesilisedi.

Postulatı dálillew jolında oǵan teń kúshli bir qatar pikirler payda boldı. Máselen, anglichan matematigi Yan Pleyfer (1748-1819)diń *parallellik aksiomasi* solarǵa uxsas: tekislikte tuwrıdan tısqarında alınǵan noqattan bul tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin.

Metematik shayır astronom hám filosof Omar Ğiyasiy Abul Fatx ibn Ibrayım Hayyam da bul másele menen shuǵıllanǵan. Hayyam “Evklid kitabınıń kirisiw bólegindegi qıyınshılıqlargá túsindirmeler (sharhlar)” atlı shıǵarmasında V haqqındaǵı postulatqa toqtaladı. Ol Evklidtiń postuladı teorema ekenligin dálillew ushın tómengi ultanındaǵı eki múeshi tuwrı bolǵan tuwrı tórtmúeshlikti qaraǵan (2 – súwret) hám eger onıń tómengi eki múeshi tuwrı bolsa, joqarıdaǵı eki múeshi de tuwrı bolıwı kerek degen juwmaqqa kelgen. Omar Hayyam “Bir tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan eki tuwrı tuwrınıń eki tárepinde de kesilise almaydı – ǵo”, - deydi. Omar Hayyamnıń bul islerinen xabarsız italiyalıq matematik J.Sakkeri (1667 – 1733) de V postulat penen shuǵıllanıp, tuwrı tórtmúeshlikke múrájet qılǵan. Geometriya tiykarlarına bul tuwrı tórtmúeshlik “Hayyam – Sakkeri tórtmúeshi” atı menen kirgen. .

Bul mashqala(problema)nı ullı rus matematigi Nikolay Ivanovich Lobachevskiy (1792 – 1856) hal etti hám naevklid (evklid emes) geometriyasın jarattı. Lobachevskiy birinshi márte Evklidtiń besinshi postuladı geometriyanıń basqa aksiomalarına baylanışlı emesligin dáyliylledi. Bul geometriya Evklid geometriyasınan túkkeley parıq qılar edi. Biraq, ol logikalıq qarama – qarsılıqqa

dus (tuwri) keliwi lazim edi, sebebi – eki geometriyanıń bir waqıtta bar bolıwı múmkin emes edi. Soǵan qaramay, Lobachevskiy jańa nátiyjeler keltirp shıǵara berdi, olar logikalıq qarama – qarsılıqlarǵa ushramadı. Jańa geometriya hám Evklid geometriyasında birinshi tórt topar (gruppa) aksiomalar ústpe – úst túsedi. Bul aksiomalar topar (gruppa)ları hám olardıń nátiyjeleri absolyut geometriya dep atala basladı.



N.I. Lobachevskiy
(1792–1856)

Biraq, naevklid (Lobachevskiy) geometriyası Evklid geometriyasınan anaǵurlım pariǵ qıladı. Máselen, Lobachevskiy geometriyasında úshmúeshlik ishki múeshleriniń qosındısı π (180°) dan kishi, onda uqsas yaki teń bolmaǵan úshmúeshlikler bar emes, berilgen tuwri sıziqtan birdey uzaqlasqan noqatlar kópligi tuwri sıziq emes, bálki iymek sıziq esaplanadı hám taǵı basqalar.

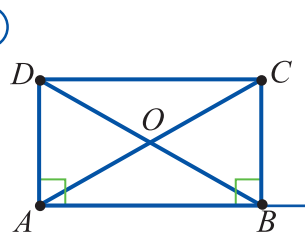
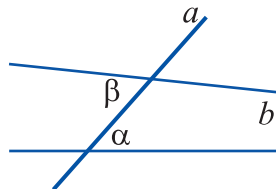
Naevklid geometriyanı jaratıwǵa venger matematigi Yanosh Bolyayi (1802–1860) hám nemis matematigi Karl Fridrix Gauss (1777 – 1855) lar úken úles qosqan. Sonday – aq italiyan matematigi Eujeno Beltrami (1835 – 1900) hám nemis matematigi Bernxard Riman (1826 – 1899) jańa geometriya boyınsha úlken jumıslar qılǵan.

Evklid baslap bergen aksiomatika belgili (málim) mánide nemis matematigi David Gilbert (1862 – 1943) hám rus matematigi Veniamin Fyodorovich Kagan (1859 – 1953) jumıslarında aqırına jetkizildi.



Temaǵa say sorawlar

1. Geometriya aksiomaları sistemasın dawam etken Wvklid haqqında nelerdi bilesiz?
2. Evklidtiń “Negizler” shıǵarması haqqında ayıp berin.
3. Anıqlama ne? Tegislikte qaysı shákıller tiykargı (dáslepki) shákıller retinde anıqlamasız qabıl qılınǵan?
4. Teorema hám aksioma bir – birinen nesi menen pariǵ qıladı?
5. Planimetriya aksiomaların sanań hám túsindirin (sharqlań)
6. Geometriya páni qalay dúzilgen?
7. Evklidtiń 5-postuladı ne haqqında hám onı ne ushın dálillewge uringan?
8. Bul postuladı dálillewge uringan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında ayıp berin.
9. Lobachevskiy jańa geometriyanıń jaratılıwında qanday úles qosqan?



10. Naevklid geometriyasın jaratqan ilimpazlar hám olardıń jumısları haqqında aytıp berıń.

2 GEOMETRIYALIQ MÁSELELER HÁM OLARDI SHÍGARIW USILLARI

Joqarıda aytıp ótkenimizdey, geometriyanıń eń ájayıp qásieti bul aldın úyrenilgen, durıslıǵı dálillengen qásietlerden logikalıq pikirlew, talqılaw júrgiziw arqalı jańa qásietlerdi keltirip shıǵarıw múmkin. Bunday ájayıp imkánıyattan paydalanıp, qalǵan qásietler teoremlar yaki máseleler kórinisinde ańlatılǵan hám aksiomalar hámde usı waqıtqa shekem durıslıǵı dálillengen qásietlerge tiykarlanıp, logikalıq pikirler júrgiziw arqalı dáıyllengen. Sol gezleri matematikalıq yaki geometriyalıq máseleler júzege kelgen.

Matematikalıq máselede nelerdúr (shártler) berilgen boladı. Olardan paydalanıp, nenidir tabıw (esaplaw) yaki dálillew, yaki jasaw talap etiledi. Qoyılǵan talaptı orınlaw máseleleni shıǵarıwdı bildiredi.

Geometriyalıq máseleler qoyılǵan talapqa kóre esaplawǵa, dálillewge, pikirlewge hám jasawǵa say máselelerge bólinedi.

Matematik máseleleni shıǵarıw ushın tek ǵana teoriyanı bilıw jeterli emes. Másele shıǵarıw kónikpesine hám tájiriyesine de ie bolıw talap etiledi. Bunday kónikpege óz nábwetinde ápiwayı máselelerden baslap, barǵan sarı quramalıraq máselelerdi shıǵarıw arqalı erisiledi. Sonday – aq, máselelerdi shıǵarıwdıń túrli usılları da bar bolıp, olardı tek kóp máseleler shıǵarıw arqalı ózlestiriw múmkin. Hár bir usıl belgili bir túrkimge tiyisli máselelerdi shıǵarıw ushın qollanıladı. Qanshe kóp usıllar ózlestirilse, sonsha másele shıǵarıw kónikpeleri shákillenedi.

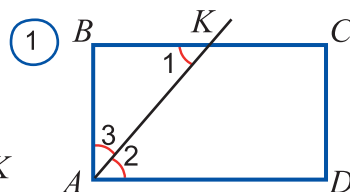
Tómende geometriyalıq máselelerdi shıǵarıwdıń bazı áhmietli usılları ústinde taqtaıp ótemiz.

Másele shıǵarıw usılları dúzilisine kóre, sintetikalıq, analitikalıq, kerisinshe tásewir (paraz) qılıw hám taǵı basqa túrlerge bóinedi. Matematikalıq apparattın qollanıwına kóre bolsa, algebralıq, vektorlı, koordinatalı, maydanlar usılı, uxsaslıq usılı, geometriyalıq almasırıwlar kibi túrlerge bóinedi.

Sintetikalıq usıl mánisinen másele shártinde berilgenlerden paydalanıp, pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shıńjırın payda qılınadı. Pikirler shıńjırı eń aqırǵı bólegi másele talabı menen ústpe – üst túskenge shekem dawam ettiriledi.

1- misal. Tuwrı tórtmúeshlik múeshiniń bissektrisası onıń tárepin 7 hám 9 uzınlıqtaǵı kesindilerge bóledi (1 – súwret). Tuwrı tórtmúeshlik perimetrin tabıń.

Sheshimi: Meyli $ABCD$ – tuwrı tórtmúeshlik, AK



bissektrisa, $K \in BC$, $BK = 7$ sm, $KC = 9$ sm bolsın.

$$1. BC \parallel AD \text{ hám } AK \text{ kesiwshi bolğanı ushın : } \angle 1 = \angle 2. \quad (1)$$

boladı, sebebi bul múeshler ishki almasınıwshı múeshlerdir.

$$2. AK - \text{bissektrisa: } \angle 2 = \angle 3. \quad (2)$$

$$3. \text{Onda (1) hám (2) ge kóre } \angle 1 = \angle 3.$$

4. Ol halda ABK teń qaptallı úshmúeshlik hám $AB = BK$. (3)

5. Bul nátiyjeden paydalanıp, esaplawlardı ámelge asıramız:

$$AB = BK = 7 \text{ sm. } P = 2(AB + BC) = 2(7 + 16) = 46 \text{ (sm). } \square$$

Bul máseleler tayanish máseleler qatarına kiredi, sebebi kóp máseleler tap sonday ideya átirapında qurıladı. Parallelogramm hám trapeciya múeshiniń bissektrisasi bul shákıller tegisliginen teń qaptallı úshmúeshlik kesip aladı. Bunday titykargı (tayanish) faktlerdi hár dayım yadta tutıw kerek. Olar basqa máselelerdi sheship atırğanda júdá qol keledi.

Analitikalıq usul mánisi jaqtan teorema (másele)niń juwmaq bóleginde kelip shıǵıp, aldınnan málım (belgili) tastıyqlardan paydalanıp, pikir júrgiziw arqalı logikalıq pikirler shınjırın payda etedi. Pikirler shınjırınıń eń aqırǵı bólegi másele shártiniń nátiyjesi ekenligin anıqlaǵanga shekem dawam ettiriledi.

2- mısál. Qálegen tórtmúeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammniń ushları bolıwın dálilleń.

Dáliyleniwi: Meyli $ABCD$ – tórtmúeshlik (2 – súwret), $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın.

Tórtmúeshliktiń AC hám BD diagonalların ótkizemiz.

$$1. \triangle ABC \text{ da } KL \text{ orta sızıq: } KL \parallel AC \quad (1);$$

$$2. \triangle ADC \text{ da } PQ \text{ orta sızıq: } AC \parallel PQ \quad (2);$$

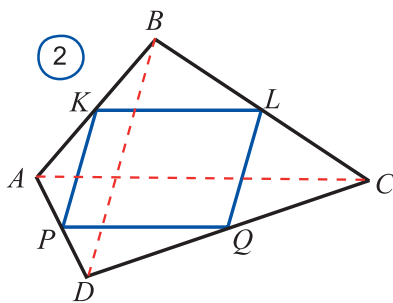
$$3. (1) \text{ hám } (2) \text{ den: } KL \parallel PQ \quad (3);$$

$$4. \text{Joqarıdaǵıǵa uqsas: } KP \parallel LQ \quad (4);$$

$$5. (3) \text{ va } (4) \text{ ten: } KLQP - \text{parallelogramm. } \square$$

Joqarıda kórilgen sintetikalıq hám analitikalıq usıllar *tuwrı usıllar* dep te ataladı. Máselen tuwrı usıllar menen sheship atırğanda, aldın másele mazmunı analiz qılınadı. Analiz nátiyjesine kóre usılı tańlanadı. Sonnan soń, súwret kórinisinde máseleni sheshiw modeli (sızılması) dúziledi hám sızılma ústinde pikir júrgiziledi. Sol tárizde pikir júrgizip, máseleniń shártinen onıń juwmaq bólegine qarap barıla beredi.

Másele shıǵarıwdıń keri usılı da bar. Ol menen kóp márte dus kelgenbiz. Ol **“Kerisinshe kóz aldǵa keltirip dálillew usılı”** dep ataladı. Bul usıldı qollaw algoritmin keltiremiz.



Kerisinshe kóz aldıǵa keltirip dálillew usılın qollaw algoritmi

Teorema (tuwrı tastıyq)	Eger A orınlı bolsa, B orınlı boladı. (A hám B – qandayda pikirler)
Dáliyl:	
Kerisin kóz aldıǵa keltiremiz:	Teorema keltirilgen tastıyqtıń kerisin kóz aldıǵa keltiremiz, yaǵnıy teoremanıń shárti orınlansın da, biraq juwmaq orınlı bolmasın: Eger A orınlı bolsa, B orınlı bolmaydı.
Pikir júrgizemiz:	Tuwrılıǵı aldın dálillengen teorema yaki qabıl qılınǵan aksiomalarǵa súenip (tayanıp) logikalıq pikir júrgizemiz.
Qarama – qarsılıqqa kelemiz:	Tuwrılıǵı aldın dálillengen teorema yaki qabıl qılınǵan aksiomaların birine qarama – qarsı bolǵan tastıyqqa dus kelip qalamız.
Juwmaq shıǵaramız:	Demek, oylawımız nadurıs, yaǵnıy berilgen teorema durıs eken.
Teorema dálilendi	

3- mısál. Eger eki tuwrınıń hár biri úshinshi tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz – ara parallel boladı.

Meyli, a hám b tuwrılar berilgen bolıp, olardıń hár biri c tuwrıǵa parallel bolsın. Teoremanıń kerisin tásewir qılıw usılı menen dálilleymiz.

Dáliylleniwi. Kerisinshesin kóz aldıǵa **(3)** a keltiremiz: a hám b tuwrınıń hár biri úshinshi c tuwrıǵa parallel bolsın da, olar óz – ara parallel bolmasın, yaǵnıy birar A noqat kesiliske (3 – súwretke qarań). Onda A noqattan c tuwrıǵa eki a hám b parallel tuwrı sızıqlar ótpekte. Bul parallellik aksiomasına qarama – qarsı. Qarama – qarsılıq oylawımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. Yaǵnıy a hám b tuwrınıń hár biri únshi c tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz – ara parallel boladı. □



Usı usıl tómendegi logikalıq nızamǵa tiykarlangan: bir – birine qarama – qarsı eki tastıyqtıń tek ǵana birewi shın, ekinshisi bolsa jalǵan boladı, úshinshi jaǵdaydıń bolıwı múmkin emes.

Endi geometriyalıq máselelerdi shıǵarıwdıń basqa usıllarına toqtalamız.

Algebralıq usıl

Geometriyalıq máseleleri algebralıq usıl menen shıǵarıp atırǵanda tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muapıq boladı.

- 1) Máseleńiń mazmunın analiz qılıw hám onıń sızılma modelin qurıw;
- 2) Belgisizdi háripler menen belgilew;
- 3) Másele shártin ańlatıwshı teńleme yaki teńlemeler sistemasın dúziw;

4) Dúzilgen teńleme yaki teńlemeler sistemasın sheshiń;

5) Tabılǵan sheshimdi analiz qılıw;

6) Juwaptı jazıw.

4-misal. Tuwrı múeshli úshmúeshliktiń perimetri 36 sm ge teń. Gipotenuzanıń katetke qatnası 5:3. Úshmúeshliktiń táreplerin tabıń.

Meyli, $\triangle ABC$ berilgen bolıp, onda $\angle C = 90^\circ$, $P = 36$, $AB:AC = 5:3$ bolsın.

Sheshimi: Proporcionallıq koefficientih k menen belgileymiz.

Onda $AB = 5k$, $AC = 3k$.

Pifagor teoremasına kóre: $AB^2 = AC^2 + BC^2$ yaki $25k^2 = 9k^2 + BC^2$.

Bunnan, $BC = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = 4k$;

$P = AB + AC + BC$.

Shártke kóre: $P = 36$, $5k + 3k + 4k = 36$, $k = 3$;

$AB = 5k = 15$ sm, $AC = 3k = 9$ sm, $BC = 4k = 12$ sm.

Juwap: 15 sm, 9 sm, 12 sm. $\square$

Maydanlar usılı

Gey (bazı) bir geometriyalıq máselelerdi shıǵarıwda maydanlardı esaplaw formulalarınan paydalanıw kútilgen nátiyjeni tezde beredi. Bul jaǵdayda talap etilgen belgisiz, máseledegi járdemshi shákıllerdiń maydanların teńlestiriw nátiyjesinde payda qılınǵan teńleme-den tabıladı. Bunı tómendegi mısalda kórsetemiz.

5- misal. Úshmúeshliktiń tárepleri 13 sm, 14 sm hám 15 sm. Uzunlıǵı 14 ke teń tárepke túsirilgen biyiklikti tabıń.

Meyli, $\triangle ABC$ berilgen bolıp, onda $a = 13$ sm, $b = 14$ sm, $c = 15$ sm bolsın.

Sheshimi. $a < b$ hám $b < c$, h_c – biyiklik bolsın.

Geron formulasına kóre: $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$ (sm²).

Basqa formula boyınsha: $S_{\triangle} = \frac{1}{2} b \cdot h_b$; $\frac{1}{2} b \cdot h_b = 84$, $h_b = 12$ (sm).

Juwap: 12 sm. $\square$

Vektorlar usılı

Geometriyalıq máseleni vektorlar usılı menen shıǵarıw ushın tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muapıq boladı.

1) Máseleni vektorlar tiline ótkiziw, yaǵnıy máseledegi bazı ólshemlerdi vektor retinde qarap, olarǵa say vektorlı teńlemeler dúziw;

2) Vektorlardıń belgili qásietlerinen paydalanıp, vektorlı teńlemenilerdiń shákilin almastırıw hám belgisizdi tabıw;

3) Vektorlar tilinen geometriya tiline qaytıw;

4) Juwaptı jazıw.

Vektor usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi sheshiw máqsetke muwapıq boladı:

- tuwrılardıń (kesindilerdiń) parallelligin anıqlaw;
- kesinlerdi berilgen qatnasta bóliw;
- úsh noqattıń bir tuwrıda jatıwın kórsetiw;
- tórtmúeshliktiń parallelogramm (romb, trapeciya, kvadrat, tuwrı tórtmúeshlik) ekenligin kórsetiw.

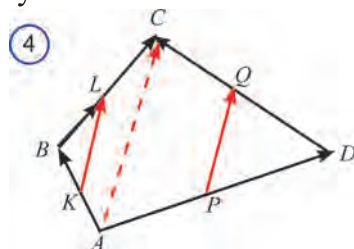
6- misal. Dóñes tórtmúeshliktiń tárepleri ortaların parallelogramm ushları bolıwın dálilleń.

Meyli, ABCD tórtmúeshlik berilgen bolıp, onda $AK = KB$, $BL = LC$, $CQ = QD$, $AP = PD$ bolsın (4 – súwret).

Dáliyleniwi: 1. Berilgen kesindilerdi sáykes $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{KL}$, $\overline{PQ}$, $\overline{BL}$, $\overline{KB}$ vektorlar menen almasrıp, máseleni vektor tilinde ótkizemiz;

2. Vektorlardı qosıwdıń úshmúeshlik qağıydasınan paydalanamız:

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} &= \overline{AC}, & \overline{KB} + \overline{BL} &= \overline{KL}; \\ \overline{KB} &= \frac{1}{2} \overline{AB} \text{ hám } \overline{BL} = \frac{1}{2} \overline{BC} \text{ ekenliginen} \\ \text{paydalanıp, } \overline{KL} &= \overline{KB} + \overline{BL} = \frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{BC} = \\ &= \frac{1}{2} (\overline{AB} + \overline{BC}) = \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ ekenligin tabamız.} \\ \text{Soğan uqsas, } \overline{PQ} &= \frac{1}{2} \overline{AC} \text{ boladı.} \end{aligned}$$



3. $\overline{KL} = \overline{PQ}$, yaǵnıy bul vektorlar birdey baǵıtlanǵan hám uzınlıqları teń. Bul $KLQP$ tórtmúeshlik parallelogramm ekenligin ańlatadı.

Koordinatar usılı

Geometriyalıq máseleni koordinatar usılı menen sheship atırǵanda tómendegi algoritm tiykarında jumıs kóriw máqsetke muwapıq boladı:

- Máseleniń mazmunın analiz qılıw hám onı koordinatar tiline o'tkazıiw;
- Ańlatpalardıń shákilin almasrıw hám mánisin esaplaw;
- Nátiyjeni geometriya tilinde úyretiw;
- Juwaptı jazıw.

Koordinatar usılı menen tómendegi geometriyalıq máselelerdi shıǵarıw máqsetke muwapıq boladı: a) noqatlardıń geometriyalıq ornın tabıw; b) geometriyalıq figuralardıń sıızqlı elementleri arasındaqı baylanıslardı dálillew.

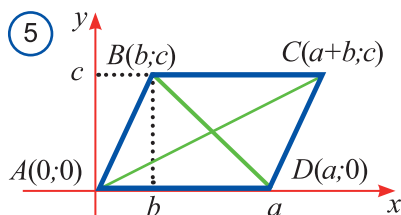
Koordinatar usılı menen máseleni sheship atırǵanda, koordinatar basın durıs tańlaw ahmiyetli. Berilgen figurani koordinatar tegisligine solay jaylastırıw kerek, múmkinshiligi barınsha noqatlardıń koordinatları nolge teń bolsın.

7- misal. Diagonalları teń parallelogrammıń tuwrı tórtmúeshlik bolıwın

dálilleń.

Dáliyleniwi. Koordinatar sistemasın sonday tańlaymız, parallelogrammnıń ushları tómendegi koordinatalarǵa ie bolsın (5 – súwretke qarań):

$A(0; 0)$, $B(b; c)$, $C(a+b; c)$, $D(a; 0)$, bul jerde $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$.



A, B, C, D noqatlar arasındaqı aralıqlardı olardıń koordinataları arqalı ańlatamız:

$$AC = \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2}, \quad BD = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2},$$

$$\text{onda, } \sqrt{(a+b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$

$$\text{yaki } (a+b-0)^2 + (c-0)^2 = (a-b)^2 + (0-c)^2. \text{ Bunnan, } 4ab = 0.$$

Biraq, $a > 0$, onda $b = 0$. Bul bolsa óz náwbetinde $B(b; c)$ noqat Oy kósherinde jatıwın ańlatadı. Sonıń ushın BAD tuwrı múew boladı.

Bunnan $ABCD$ parallelogramm tuwrı tórtmúeshlik ekenligi kelip shıǵadı. □

Geometriyalıq almasıwlar usılı

Geometriyalıq almasıwlar usılına burıw, simmetriyalıq sáwlelendiriw, parallel kóshiriw hám gomotetiya kibi almasıwlarǵa tiykarlangan usıllar kiredi. Geometriyalıq almasıwlar járdeminde máseleler sheshiw processinde berilgen geometriyalıq figuraler menen bir qatarda jańa, qollanılǵan geometriyalıq almasıw járdeminde hasıl qılınǵan shákilder de qaraladı. Jańa shákilderdiń qásietleri anıqlanadı hám berilgen shákilge ótkiziledi. Sonnan soń másele sheshiw jolı tabıladı. Joqarıda keltirilgen barlıq usıllar bir ulıwma at penen geometriyalıq usıllar dep ataladı.

Áhmietli esletpe!

Bul bólimnen orın alǵan materiallar planimetriyanı tákirarlaw ushın berilgen. Tákirarlaw ushın máseleler kereginen artıq berilmekte. Olardıń barlıǵın klassta kóriwdiń imkánı bolmaslıǵı múmkin. Bunnan qattı názer, olardı óz – betinshe sheship shıǵıwdı usınıs etemiz. Bul sizge 10 – klasta geometriyanı úyreniwdi tabıshı dawam ettiriwimizge múmkinshilik jaratadı.



Temaǵa say sorawlar

1. Matematikalıq másele degende neni túsinesiz?
2. Geometriyalıq máseleńiń qanday túrlerin bilesiz?
3. Másele shıǵarıwdıń qanday usılların bilesiz?
4. Geometriyalıq máseleńi sheshiwdiń sintetikalıq, analitikalıq usılları haqqında aytıp beriń.
5. Másele shıǵarıwdıń tuwrı hám keri usılları haqqında neni bilesiz?
6. Kerisinshesin kóz aldına keltirip dálillew usılınıń mánisi nede?
7. Geometriyalıq máseleńi algebralıq usılda sheshiw algoritmin túsintirip beriń.

8. Geometriyalıq mäseleni vektor usılında sheshiw algoritmin túsintirip berin.
9. Vektor usıl menen ádette qanday mäseler sheshiledi?
10. Geometriyalıq mäseleni koordinatalar usılı menen sheshiw algoritmin túsintirip berin.
11. Koordinatalar usılı menen ádette qanday mäseler sheshiledi?
12. Geometriyalıq almasırıwlar usılın túsintirip berin.

3 ÁMELIY SHÍNÍGÍW HÁM QOLLANÍWLAR

1.1. Eki tuwrılardıń kesilisiwinen tórt múesh payda boladı (1 – súwret).

Tómende berilgen kestede hár bir shárt (A – E) ge odan kelip shıǵıwshı juwmaqtı (1 – 5 ti) sáykes qoyın.

- | | |
|--|--|
| A) $\angle 1 = \angle 3$; | 1) $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$; |
| B) $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$; | 2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = 90^\circ$; |
| C) $\angle 1 = \angle 2 + 90^\circ$; | 3) $\angle 1$ hám $\angle 4$ – qońsılas; |
| D) $\angle 2 + \angle 4 = 260^\circ$; | 4) $\angle 1$ hám $\angle 3$ – súyir; |
| E) $\angle 3 = 90^\circ$. | 5) $\angle 2$ hám $\angle 4$ – vertikal. |

A	
B	
C	
D	
E	

1.2. Tóمندegi gey bir múeshlerdiń gradus ólshemleri (1 – 7) berilgen. Olardan qaysı jupları qońsılas bolıwı múmkinligin anıqlań.

- 1) 18° ; 2) 72° ; 3) 128° ; 4) 62° ; 5) 28° ; 6) 108° ; 7) 38° .
 A) 1 hám 2; B) 2 hám 6; C) 3 hám 4; D) 1 hám 7; E) 2 hám 5;

1.3. Eger 2 – súwrette $\angle 1 = \angle 7$ bolsa, durıs tastıyqtı tabıń.

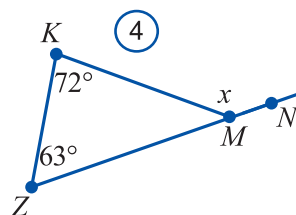
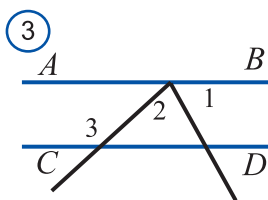
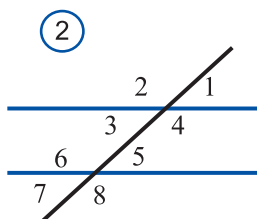
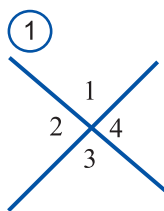
- A) $a \parallel b$; B) $a \perp b$; C) a hám b kesilispeydi;

1.4. Eger 3 – súwrette $CD \parallel AB$, $\angle 1 = \angle 2$ hám $\angle 2 = 72^\circ$ bolsa, $\angle 3 = ?$

- A) 72° ; B) 144° ; C) 108° ; D) 36° ; E) 124° .

1.5. Eger teń qaptallı úshmúeshlik múeshleri 3 : 4 : 3 qatnasta bolsa, onıń ushınıń bissektrisası hám qaptal tárepleri arasındagı múeshti tabıń.

- A) 18° ; B) 36° ; C) 72° ; D) 60° ; E) 30° .



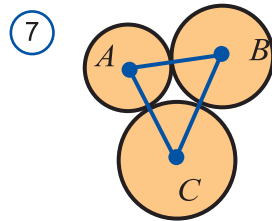
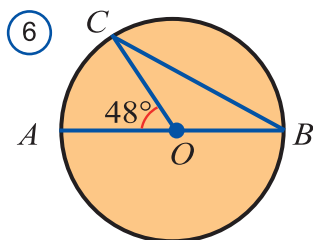
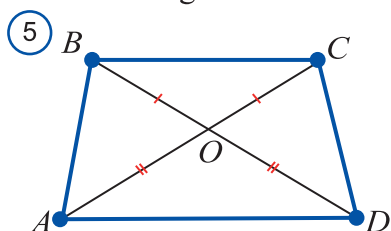
1.6. 4- súwrette kórsetilgen KMZ úshmúeshlik múeshine sırtı bolǵan KMN múeshtiń gradus ólshemin tabıń.

- A) 135° ; B) 108° ; C) 45° ; D) 125° ; E) 117° .

1.7. Durıs teńliklerdi anıqlań (5 – súwret).

- A) $\triangle ABO = \triangle OCD$; B) $BA = CD$; C) $\triangle ABO = \triangle COD$;
D) $\angle AOB = \angle DOC$; E) $\angle BAO = \angle DCO$; F) $\angle BAO = \angle CDO$.

1.8. 6-súwrettegi BOC úshmúeshlik múeshlerin tabín.



- A) $48^\circ, 48^\circ, 84^\circ$; B) $24^\circ, 132^\circ, 24^\circ$; C) $132^\circ, 48^\circ, 48^\circ$; D) $42^\circ, 90^\circ, 48^\circ$; E) $48^\circ, 32^\circ, 20^\circ$.

1.9. Úshmúeshliktiń ushları radiusları 6 sm, 7 sm hám 8 sm bolǵan hám jup-juptı menen urinatúǵın úsh sheńber oraylarında jatırıptı (7 – súwret). Bul úshmúeshliktiń perimetir tabín.

- A) 28 sm; B) 29 sm; C) 27 sm; D) 42 sm; E) 21 sm.

1.10. Kvadrattıń tárepi $20\sqrt{2}$ ge teń. Bul kvadratqa ishley sızılǵan sheńber radiusın tabín.

- A) 20; B) $10\sqrt{2}$; C) 10; D) $5\sqrt{2}$; E) 5.

1.11. Trapecianıń bir ultanı ekinshisinen 8 sm ge uzın, orta sızıǵı bolsa 10 sm ge teń. Trapecianıń kishi ultanın tabín.

- A) 2 sm; B) 4 sm; C) 6 sm; D) 8 sm; E) 10 sm.

1.12. Diagonalları 10 m hám 36 m bolǵan rombtıń maydanın tabín.

- A) 90 m^2 ; B) 92 m^2 ; C) 180 m^2 ; D) 184 m^2 ; E) 36 m^2 .

1.13. 8-súwrettegi m hám n tuwrılar óz – ara parallel bolsa, a hám b tuwrılar arasıdaǵı múeshti tabín.

- A) 50° ; B) 80° ; C) 100° ; D) 65° ; E) 115° .

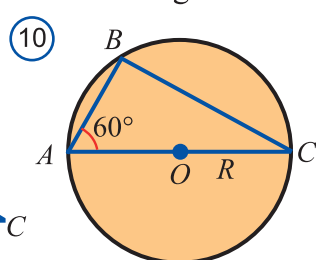
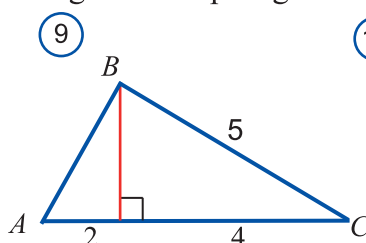
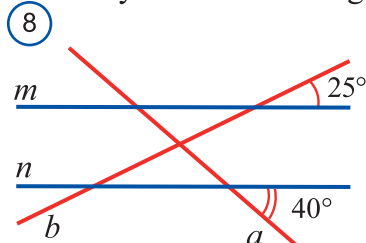
1.14. 9-súwrettegi úshmúeshlik maydanın tabín.

- A) 6; B) 9; C) 12; D) 24; E) 30.

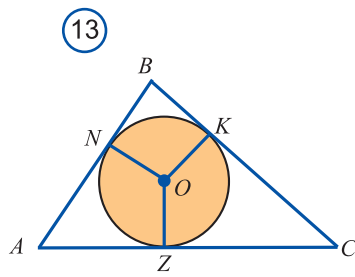
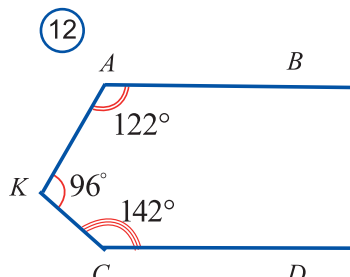
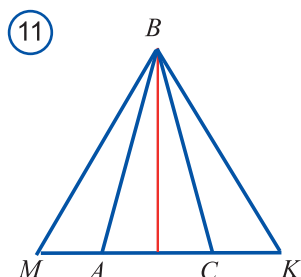
1.15. 10-súwrettegi R radiuslı sheńberge ishley sızılǵan ABC úshmúeshliktiń BC tárepın tabín.

- A) R ; B) $R\sqrt{2}/2$; C) $R\sqrt{2}$; D) $R\sqrt{3}$; E) $R\sqrt{3}/2$.

1.16. Maydanı $9\pi \text{ sm}^2$ bolǵan dóńgelekti orap turǵan sheńber uzunlıǵın tabín.



- A) 3π sm; B) 9π sm; C) 12π sm; D) 18π sm; E) 6π sm.
- 1.17. Tárepi 6sm ge teń bolǵan kvadratqa ishley sızılǵan dóńgelek maydanın tabıń.
A) 9π sm²; B) 144π sm²; C) 36π sm²; D) 72π sm²; E) 18π sm².
- 1.18. Kvadratqa ishley sızılǵan sheńberdiń radiusı 5 sm. Kvadrat diagonalın tabıń.
A) $5\sqrt{2}/2$; B) $5\sqrt{2}$; C) $5\sqrt{2}/4$; D) $10\sqrt{2}$; E) $20\sqrt{3}$.
- 1.19. Ishki múeshler qosındısı 1600° bolǵan durıs kópmúeshliktiń tárepleri sanın tabıń.
A) 12; B) 14; C) 16; D) 18; E) 20.
- 1.20. Diagonalları 24 sm hám 18 sm bolǵan rombınıń perimetrin tabıń.
A) 120 sm; B) 60 sm; C) 84 sm; D) 108 sm; E) 144 sm.
- 1.21. Parallelogrammnıń perimetri 48 dm bolıp, bir tárepi ekinshisinen 8 dm ge uzın. Parallelogrammnıń kishi tárepın tabıń.
A) 8 dm; B) 16 dm; C) 6 dm; D) 12 dm; E) 10 dm.
- 1.22. 11-súwrettegi ABC teń qaptalı úshmúeshlik tısqarısındaǵı eki teń ABM hám CBK múeshler qurıldı. Bul múeshler tárepleri AC tárepti, sáykes túrde M hám K noqatlarda kesip ótti. MBC hám KBA úshmúeshlikler teńligin dálilleń.
- 1.23. 12-súwrette kórsetilgen AB hám CD tuwrılardıń óz – ara jaylasıwınanıqlań. Juwabınızdı tiykarlań.
- 1.24. 13-súwrettegi ABC úshmúeshlikke sheńber ishley sızılǵan. Sheńberdiń M hám Z urınıw noqatları úshmúeshliktiń AB hám AC táreplerin ayırması sáykes túrde 3 sm hám 4 sm bolǵan kesindilerge ajratadı ($AN > NB$, $AZ > ZC$). Eger úshmúeshliktiń perimetri 28 sm bolsa, onıń táreplerin tabıń.
- 1.25. Teń tárepli úshmúeshlikke radiusı $3\sqrt{3}$ bolǵan sheńber ishley sızılǵan. Ishley sızılǵan sheńber radiusın tabıń.
- 1.26. Ultanındaǵı múeshi 30° bolǵan, teń qaptalı trapeciyaǵa sheńber sırtlay sızılǵan. Trapecianıń biyikligi 7 sm ge teń bolsa, onıń orta sızıǵın tabıń.
- 1.27. Ultanındaǵı múeshi 150° bolǵan, teń qaptalı trapeciya sheńberge sırtlay sızılǵan. Trapecianıń orta sızıǵı $16\sqrt{3}$ ke teń bolsa, onıń biyikligin tabıń.



- 1.28.** Ultani 16 sm hám bul ultanğa túsirilgen biyikligi 15 sm bolğan teń qaptallı úshmúeshliktiń qaptal tárepini tabıń.
- 1.29.** ABC úshmúeshliktiń AO biyikligi onıń BC tárepini BO hám OC kesindilerge ajratadı. $AB = 10\sqrt{2}$ sm, $AC = 26$ sm hám $B = 45^\circ$, OC kesindiler uzunlıqlarını tabıń.
- 1.30.** Rombınıń tarepi 10 sm, diagonallarınan biri 12 sm. Rombıǵa ishley sizilgan sheńber radiusin tabıń.
- 1.31.** Radiusı 15 sm bolğan sheńberde onıń orayınan 12 sm aralıqta bolğan xorda ótkizilgen. Xorda uzunlıǵın tabıń.

II BÓLIM

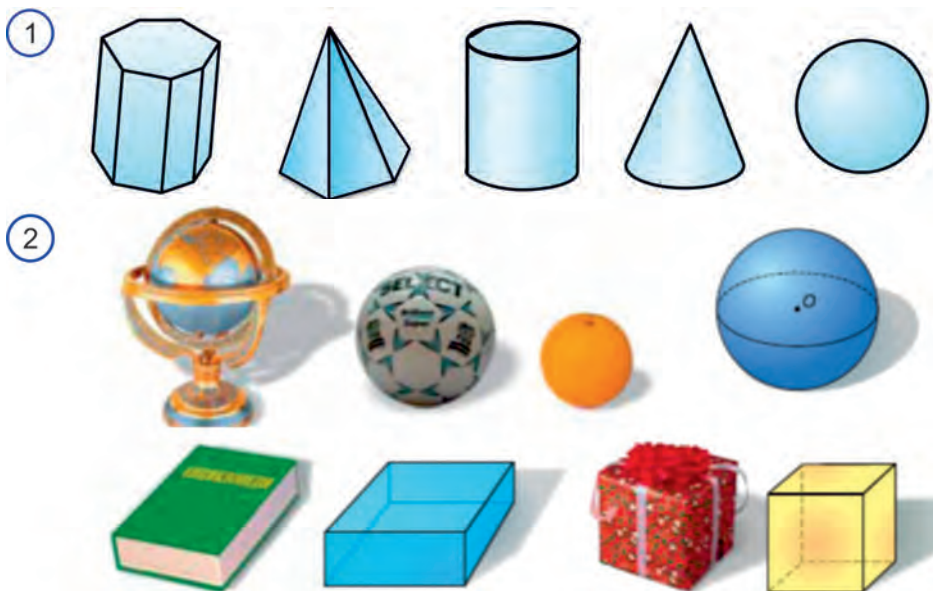


STEREOMETRIYAĖ KIRIW

4

KEŇISLIKTEGI GEOMETRIYALIQ FIGURALAR KÓPJAQLILAR

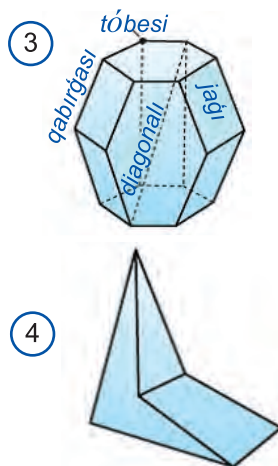
Geometriyalıq shákıller tegislikte tolıq jatırġan yamasa jatırmaġanlıġa qarap, tegis (jalpaq) hám keŇisliktegi shákıllerge ajratıladı. Aldıngı klasslarda geometriyalı sabaqlarında tiykarınan tegis(jalpaq) geometriyalıq shákıllerdiŇ qásiyetlerin úyrendik. 9 – klass aqırında bolsa, geypara keŇisliktegi shákıller: prizma, piramida, cilindr, konus hám shardıŇ (1 – súwret) qásiyetlerine qarap shıqqan edik. GeometriyanıŇ planimetriya bólimi tegis (jalpaq) geometriyalıq shákıllerdi, *stereometriya* bólimi bolsa, keŇisliktegi geometriyalıq shákıllerdiŇ (yamasa denelerdiŇ) qásiyetlerin úyrenedi. Stereometriya sózi greksheden alıŇan bolıp, “stereos” – keŇislik, “metreo” – ólsheymen degen mánini ańlatadı.



2- sūwrette átiraptaǵı geypara zatlar keńisliktegi denelerge mısál retinde olar haqqında tásewir beredi. Átirapımızdaǵı barlıq predmetrler úsh ólshemli bolıp, olardıń kórinisleri keńisliktegi qaysıdur geometriyalıq denegе uqsap ketedi.

9- klass aqırında bunday keńisliktegi deneler menen tanısqansız. Stereometriya kursın sistemalı tūrde úyreniwdi baslaymız. Aldın geybir keńisliktegi deneler elementleri haqqındaǵı maǵlıwmatlardı qısqasha esletip ótiwdi lazım dep taptıq.

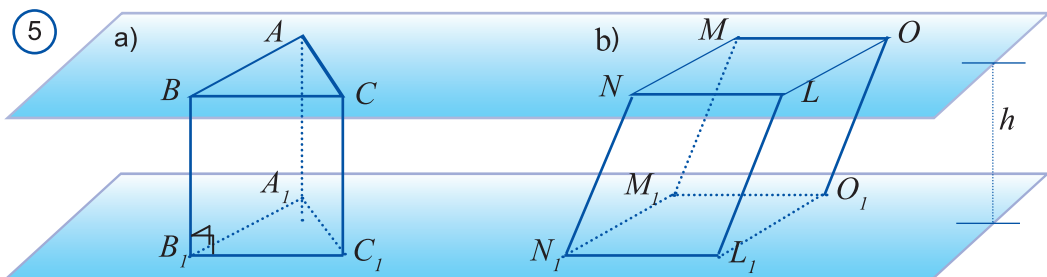
Kópjaqlı dep tegis (jalpaq) kópmüyeshlikler menen shegaralanǵan denegе ayıladi. Jalpaq kópmüyeshlikler bul **kópjaqlıń jaqları**, kópmüyeshliklerdiń ushları **kópjaqlıń ushları**, tárepleri qabırǵaları bolsa, **kópjaqlıń qabırǵaları** dep ataladı. Bir jaqqa tiyisli bolmaǵan ushlardıń tutastırıwshı kesindi **kópjaqlıń diagonalı** dep ataladı (3 – sūwret).



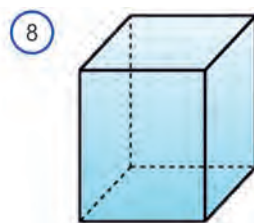
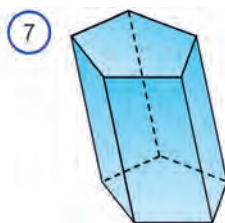
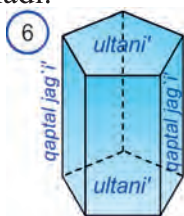
Kópjaqlıń shegarası onıń beti (**sırtı**) dep ataladı. Kópjaqlıń sırtı keńislikte eki bólekke ajratadı. Olardan sheksiz bólegi **kópjaqlıń sırtqı oblastı**, shekli bólegi bolsa, **kópjaqlıń ishki bólegi** dep ataladı.

Kópjaqlı qálegen jaǵı jatırǵan tegisliktiń bir tárepinde jatsa, bunday kópjaqlıǵa **dónes kópjaqlı** delinedi. Máselen, kub – dónes kópjaqlı esaplanadı. 4 – sūwrette bolsa, dónes bolmaǵan kópjaqlı sūwretlengen. Kelejekte eń ápiwayı dónes kópjaqlılar: prizma hám piramidalardı úyrenemiz.

Prizma dep eki jaǵı teń kópmüyeshliklerden, qalǵan jaqları bolsa, parallelogrammlardan ibarat bolǵan kópjaqlıǵa ayıladi. (5 – sūwret). Teń jaqlar prizmanıń **ultanları**, parallelogrammlar bolsa onıń **qaptal jaqları** dep ataladı (6 – sūwret). Ultanıń tárepleri sanına qarap prizmalar **úshmüyeshli**, **tórtmüyeshli** hám taǵı basqa **n – müyeshli prizmalar** dep júrgiziledi. 5. a – sūwrette úshmüyeshli, $ABCA_1B_1C_1$ prizma, 5.b – sūwrette bolsa, **tórtmüyeshli** $MNLOM_1N_1L_1O_1$ prizma sūwretlengen.

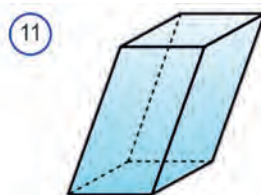
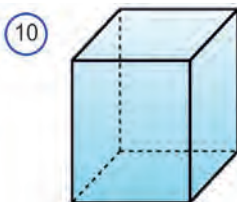
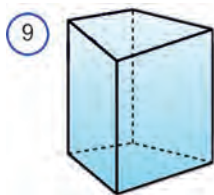


Prizma qaptal jaqlari ultani'ga perpendikulyar yamasa perpendikulyar emesligine qarap tuwrı prizma (6 - sūwret) yamasa qıya prizma (7 - sūwret) dep ataladı.

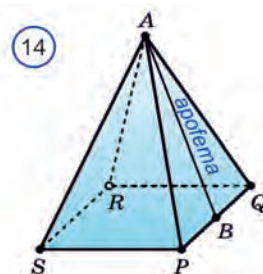
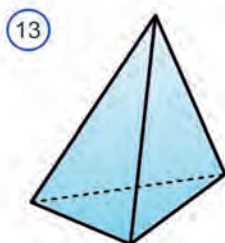
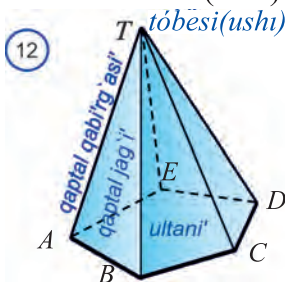


Ultani duris kópmüyeshlikten ibarat tuwrı prizma *duris prizma* dep ataladı (8 - sūwret). Ultani parallelogramnan ibarat prizma *parallelepiped* dep ataladı (9 - sūwret). Parallelepipedler de prizma kibi tuwrı hám qıya bolıwı mümkin. Ultani tuwrı tórtmüeshlikten ibarat tuwrı parallelepiped *tuwrı müyeshli parallelepiped* dep ataladı (8,10,11 – sūwret). Parallelepipedler de prizma siyaqlı tuwrı hám qıya bolıwı mumkin. Ultani tuwrı to'rtmüeshliklerden ibarat tuwrı parallelepiped *tuwrı müyeshli parallelepiped* dep ataladı. Tuwrı müyeshli parallelepipedtiń barlıq jaqları tuwrı tórtmüeshliklerden ibarat boladı. Tuwrı müeshli parallelepipedtiń bir ushınan shıǵıwshı úsh qabırǵası onıń *ólshemleri* dep ataladı.

Ólshemleri teń bolǵan tuwrı müyeshli parallelepiped *kub* dep ataladı. Kubtiń barlıq jaqları kvadratlardan ibarat boladı.



Piramida dep bir jaǵı kópmüyeshlikten, qalǵan jaqları bolsa bir tóbege (ushqa) iye úshmüeshliklerden ibarat kópjaqlıǵa ayıladı. Kópmüyeshlik piramidaniń *ultani*, úshmüyeshlikler bolsa onıń *qaptal jaqları* dep ataladı. 12 – sūwrette *TABCDE* besmüyeshli piramida sūwretlengen. *ABCDE* besmüyeshli piramidaniń ultani, *ATB*, *BTC*, *CTD*, *DTE* hám *ETA* úshmüyeshlikler onıń qaptal jaqları, *T* bolsa onıń tóbesi (ushi).



Ultanının tárepleri sanına qarap piramidalar *üşmüyeshli*, *tórtmüyeshli* hám tağı basqa *n – müyeshli piramidalar* dep júrgiziledi. Sonday – aq, üshmüyeshli piramida *tetraedr* dep te ataladı.

13 – súwrette üshmüyeshli, 14 – súwrette bolsa, tórtmüyeshli piramida súwretlengen.

Piramidanın tóbesinen ultan tegisligine túsirilgan perpendikulyar, onın biyikligi dep ataladı. Pirmamidanın ultanı durıs kópmüyeshlik hám biyikliginiń bir ushı ultanın orayı menen üstpe – üst tússe, onda ol *durıs piramida* dep ataladı.

Durıs piramidanın qaptal jađınıń, onın tóbesinen júrgizilgen biyikligi, piramidanın *apofeması* dep ataladı.

14 – súwrette APQRS *tórtmüyeshli durıs piramida* súwretlengen. Ondağı AB kesindi piramidanın *apofemaların*ń biri esaplanadı.

Teorema 1.1. *Durıs piramidanın a) qaptal jaqları; b) qaptal qabırğaları; c) apofemaları óz – ara teń.*

Dáliylleniwi. Meyli, $QA_1A_2...A_n$ durıs piramida, O bolsa piramidanın ultanının orayı bolsın (15 – súwret).

a) $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ kesindiler durıs kópmüyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber radiusınan ibarat bolğanı ushın óz – ara teń boladı. Tuwrı müyeshli $QOA_1, QOA_2, \dots, QOA_n$ üshmüyeshliklerde eki katetler óz – ara teń bolğanı ushın olar teń boladı. Onda olardıń gipotenuzaları da teń boladı: $QA_1 = QA_2 = \dots = QA_n$.

b) $QA_1A_2 \dots A_n$ durıs piramidanın qaptal qabırğaları óz – ara teń bolğanı ushın onıń qaptal jaqları teń qaptallı üshmüyeshliklerden ibarat boladı. Bul üshmüyeshliklerdiń ultanları durıs kópmüyeshliktiń tárepi bolğanlıđı ushın óz – ara teń boladı. Demek, durıs piramidanın qaptal jaqları üsh tárepleri boyınsha óz – ara teń.

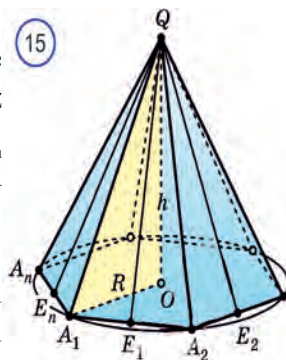
c) Durıs piramidanın qaptal jaqları teń bolğanı ushın, olardıń Q ushınan túsirilgen biyiklikleri de óz – ara teń boladı.

Demek, durıs piramidanın apofemaları da óz – ara teń. $\square$

Teorema 1.2. *Durıs piramidanın qaptal beti onıń ultanının yarım perimetri hám apofemasınıń kóbeymesine teń.*

Dáliylleniwi. Meyli, $QA_1A_2...A_n$ durıs piramida bolsın (15 – súwret). Piramidanın qaptal betinin maydanı onıń qaptal jaqları maydanları qosındısına teń. Onıń qaptal jaqları bolsa óz – ara teń bolğan teń qaptallı üshmüyeshlikten ibarat. O'z gezeginde (návbetinde) bul üshmüyeshliklerdiń biyiklikleri de óz – ara teń apofemalardan ibarat:

$$QE_1 = QE_2 = \dots = QE_n.$$



$$\begin{aligned} \text{Bulardan } S &= S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + \dots + S_{A_nQA_1} = \\ &= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot QE_2 + \dots + \frac{1}{2} A_nA_1 \cdot QE_n = \\ &= \frac{1}{2} QE_1 (A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1) = p \cdot a, \end{aligned}$$

Bul jerde p – piramida ultaninin yarimperiometri, a – piramida apofeması. $\square$

? Tema boyinsha sorawlar

1. Qanday geometriyalıq figuralar a) tegis; b) keńisliktegi dep ataladı?
2. Qanday dene kópjaqlı dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama berıń.
3. Qanday dene prizma dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama berıń.
4. Qanday prizma türlerin bilesiz?
5. Tuwrı müyeshli parallelepipedke anıqlama berıń.
6. Qanday dene piramida dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama berıń.
7. Qanday piramida türlerin bilesiz?
8. Durıs piramida qásiyetlerin aytıń?

5 AYLANIW DENELERI: CILINDR, KONUS HÁM SHAR

Keńislik figuralarınıń jáne áhmiyetli klasslarınan biri – bul aylanıw deneleridir. Olarǵa cilindr, konus hám shar kiredi.

Tuwrı tórtmüyeshlikti bir tárepi átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denegе *cilindr* dep aytıladı (16 – 18 – súwretler).

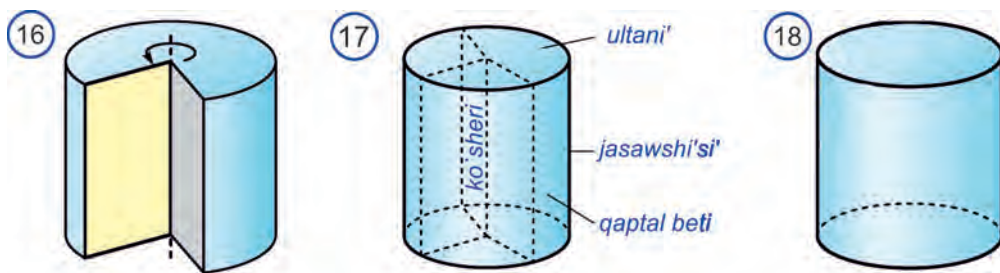
Bunday aylandırıwda tuwrı tórtmüyeshliktiń bir tárepi qozǵalıssız qaladı.

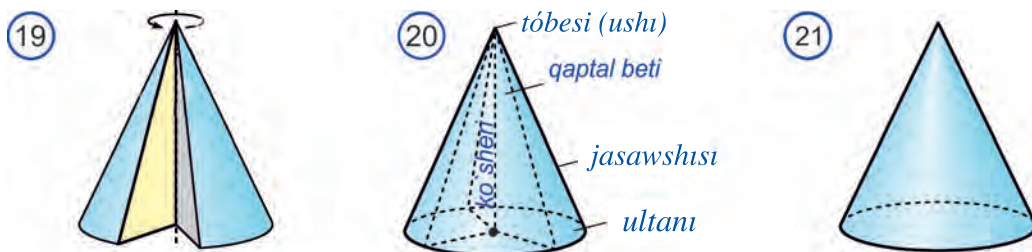
Onı *cilindrdiń kósheri* dep ataymız (17 – súwret).

Kósherge qarama – qarsı jatırǵan tárep aylanıwdan payda bolǵan bet (sırt) *cilindrdiń qaptal beti* dep, táreptiń ózi bolsa *cilindrdiń jasawshısı* dep júrgiziledi.

Tuwrı tórtmüyeshliktiń qalǵan tárepleriniń hár biri bul aylanıwda dóńgelek kórinisindegi betti payda qıladı. Bul dóńgelekler *cilindrdiń ultanları* dep ataladı.

Tuwrı müyeshli úshmüyeshlikti bir kateti átirapında aylandırıwdan payda bolǵan denegе *konus* dep aytıladı (19 – 21 – súwretler). Bul katetti bolsa *konustiń kósheri* dep ataymız.

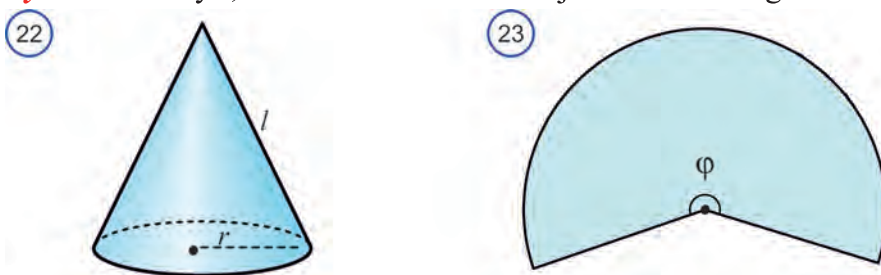




Bul aylantırıwda basqa katet payda qılğan dóńgelek konustıń ultanı, gipotenuza payda qılğan bet bolsa konustıń qaptal beti dep, gipotenuzanıń ózi bolsa konustıń jasawshısı dep júrgiziledi. Sonday – aq, bul aylanıwda qozǵalmastan qalǵan úshmüeshlik ushı konustıń ushı (tóbesi) delinedi (20 – súwret).

1.3. Teorema *Konustıń qaptal betiniń maydanı π , ultanı radiusı hám jasawshısının kóbeymelerine teń, yaǵnıy $S = \pi \cdot r \cdot l$.*

Dáliylleniwi. Meyli, ultanınıń radiusı r hám jasawshısı l bolǵan konus



berilgen bolsın (22 – súwret). Konus qaptal betin tegislikke jayamız. Nátiyjede, radiusı l ge teń bolǵan dóńgelekli sektorga iye bolamız (23 – súwret).

Bul sektordıń oraylıq müyeshi φ di tabamız (21 – súwret). Bul oraylıq müyesh, konus ultanı sheńber uzunlıǵı - $2\pi r$ ge teń bolǵan sektordıń sheńber doǵasına tirelgen. Radiusı l bolǵan dóńgelekliń uzunlıǵı $2\pi l$ ge teń bolıp, ol 360° lı oraylıq müyeshke tirelgen. Nátiyjede proporciyaǵa iye bolamız:

φ° lı oraylıq müyesh - $2\pi r$ ge teń doǵa;

360° lı oraylıq müyesh - $2\pi l$ ge teń doǵa.

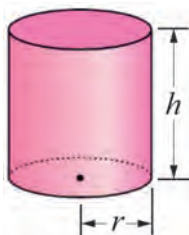
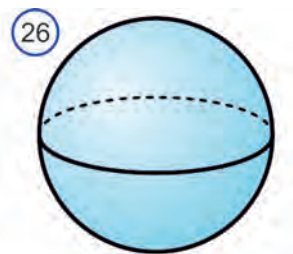
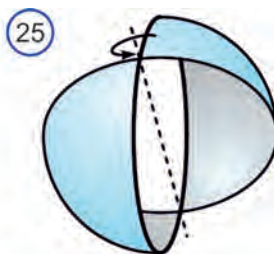
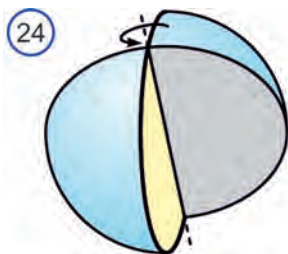
Onnan $\varphi = 360^\circ / (2\pi l) \cdot 2\pi r = 360^\circ \pi r / l$.

Endi radiusı l ge teń bolǵan, φ müyeshli S sektor maydanın tabamız:

$$S = \pi l^2 / 360^\circ \cdot \varphi^\circ = \pi l^2 / 360^\circ \cdot 360^\circ \cdot r / l = \pi \cdot r \cdot l.$$

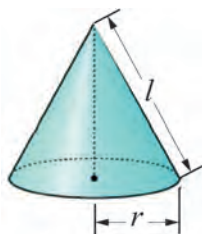
Dóńgelekliń óz diametri átirapında aylanıwınan payda bolǵan denegе *shar* dep aytiladı (24 – súwret). Bul aylandıırıwda sheńber payda qılǵan bet *sfera* dep ataladı 25 – súwrette *shar* súwretlengen.

Aylanıw denelerdiń qaptal hám tolıq betiniń maydanı formuları:



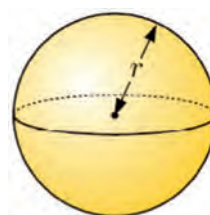
Cilindr

$$\begin{aligned} S_{qapt.} &= 2 \pi r h \\ S_{tolıq.} &= 2 S_{ultan.} + S_{qapt.} \\ &= 2 \pi r^2 + 2 \pi r h \end{aligned}$$



Konus

$$\begin{aligned} S_{qapt.} &= \pi r l \\ S_{tolıq.} &= S_{ultan.} + S_{qapt.} \\ &= \pi r^2 + \pi r l \end{aligned}$$

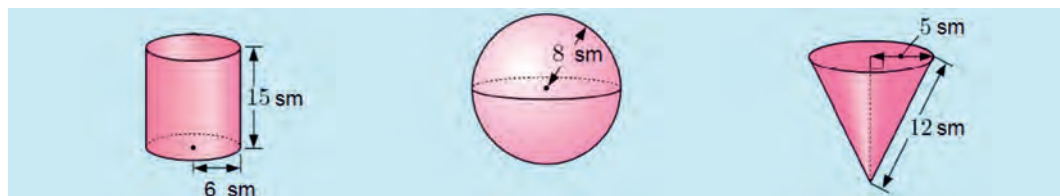


Shar

$$S = 4 \pi r^2$$



Mısal: Tómen degi denelerdiń qaptal betiniń maydanın tabıń.



$$\begin{aligned} S_{qapt.} &= 2 \pi r h = 2 \cdot 3,14 \cdot 6 \cdot 15 = \\ &= 565,5 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 4 \pi r^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = \\ &= 804,2 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{tolıq.} &= \pi r l + \pi r^2 = \\ &= 3,14 \cdot 5 \cdot 12 + 3,14 \cdot 5^2 = \\ &= 267 \text{ (cm}^2\text{)}. \end{aligned}$$

? Tema boyınsha sorawlar

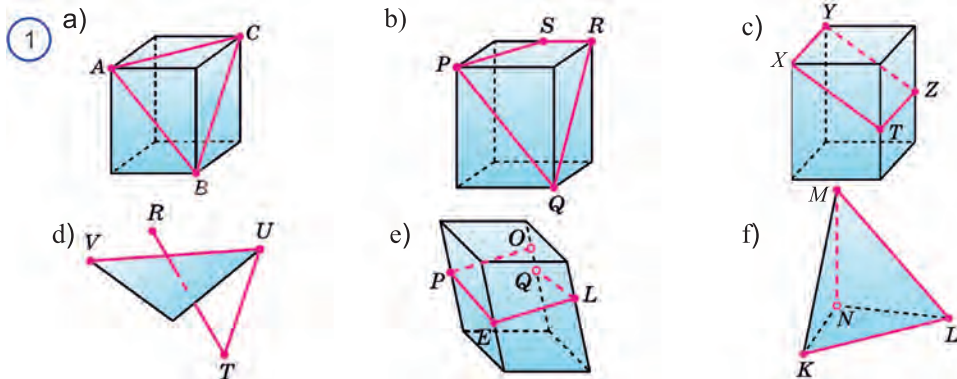
1. Aylanıw denelerine mısal keltiriń.
2. Qanday dene cilindr dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
3. Qanday dene konus dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.
4. Qanday dene shar dep ataladı? Onıń elementlerine anıqlama beriń.

6

ÁMELIY SHINIĞIW HÁM QOLLANİLILWLARI

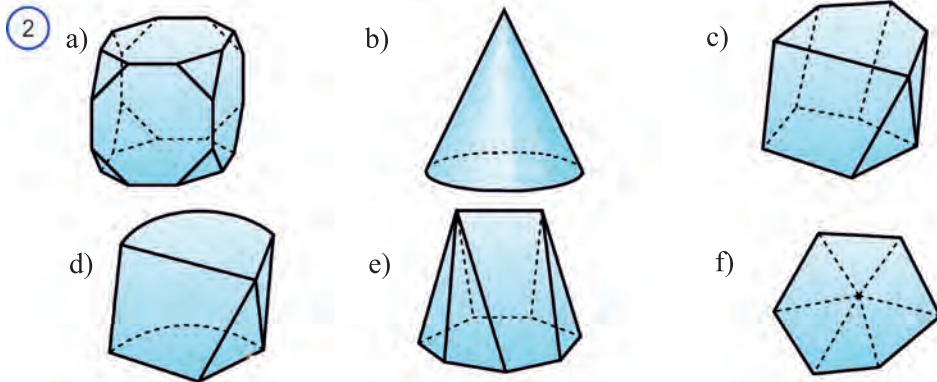
2.1. Tuwrı prizmanın qaptal jaqları tuwrı müyesh ekenligin dâliylleñ.

2.2. Tuwrı prizmanın qaptal betiniñ maydanı ultanınıñ perimetri hám qaptal qabırğasınıñ kóbeymesine teñ ekenligin dâliylleñ.



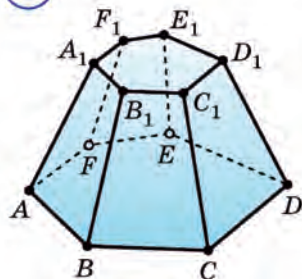
2.3. 1 – sūwrette qanday keñisliktegi sınıq sızıq sūwretlengen?

2.4. 2 – sūwrettegi denelerdiñ qaysıları kópjaqlı boladı?



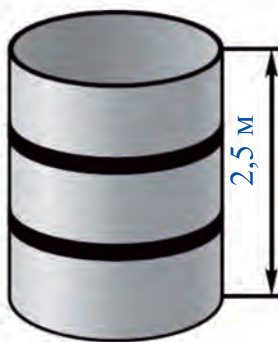
2.5. 3 – sūwrette $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ kópjaqlı sūwretlengen. Ondağı a) CD qabırğa ulıwma bolğan jaqlardı; b) DD_1 qabırğa ulıwma bolğan jaqlardı; c) E tóbesi (ushı) ulıwma bolğan jaqlardı; d) C_1 tóbesi ulıwma bolğan jaqlardı; e) A tóbesi (ushı) ulıwma bolğan qabırğalardı; f) F_1 ulıwma bolğan qabırğalardı aytıñ.

2.6. Tuwrı parallelepipedtiñ ultanı rombtan ibarat. Rombınıñ tárepi 8 m, diagonalları bolsa 10 m hám 24 m ge teñ. Parallelepipedtiñ tolıq betiniñ maydanın tabıñ.



- 2.7. AB hám AK tuwrı sıyıqlar neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı mǘmkin?
- 2.8. Durıs üshmüyeshli prizma ultanınıń tárepi 6 sm, qaptal qabırǵası bolsa 11 sm ge teń. Prizmanıń tolıq betiniń maydanın tabıń.
- 2.9. Durıs n – müyeshli prizma ultanınıń tárepi a , qaptal qabırǵası h qa teń. Eger a) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$; b) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$; c) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$; d) $n = 5$, $a = 16$, $h = 25$ bolsa, prizmanıń qaptal beti hám tolıq beti maydanların tabıń.
- 2.10. Durıs üshmüyeshli piramida apofeması 15 ke, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırwshı kesindi uzınlıǵı 12 ge teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám ultanınıń táreplerin; b) piramida qaptal betiniń maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanın tabıń.
- 2.11. Durıs tórtmüyeshli piramida ultanı 12 sm ge, piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırwshı kesindi uzınlıǵı 16 sm ge teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) piramida qaptal betin; c) piramida tolıq betiniń maydanın tabıń.
- 2.12*. $REFGH$ piramida ultanı tárepleri 10 sm hám 18 sm bolǵan hám maydanı 90 sm^2 ge teń bolǵan $EFHG$ parallelogrammnan ibarat. Piramida tóbesi R di ultan diagonalları kesilisiw noqatı O menen tutastırwshı kesindi uzınlıǵı 6 sm ge teń. a) piramida qaptal qabırǵasın; b) piramida qaptal betiniń maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanların tabıń.
- 2.13*. Piramida ultanı tárepleri 8 hám 10 bolǵan hám kishi diagonalı 6 ǵa teń bolǵan parallelogrammnan ibarat. Piramida tóbesin ultan diagonalları kesilisen noqatı menen tutastırwshı kesindi uzınlıǵı 4 ke teń. a) piramida qaptal qabırǵaların; b) piramida qaptal betiniń maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanın tabıń.
- 2.14*. Durıs altımüyeshli piramida ultanınıń tárepi 10 sm ge teń. Piramida tóbesin ultan orayı menen tutastırwshı kesindi uzınlıǵı $\sqrt{69}$ ǵa teń. a) piramida qaptal qabırǵası hám apofemasın; b) piramida qaptal betiniń maydanın; c) piramida tolıq betiniń maydanların tabıń.
- 2.15. Durıs altımüyeshli piramida qaptal betiniń maydanı 150 m^2 ge, qaptal qabırǵası bolsa 10 m ge teń. Piramida ultanınıń maydanın tabıń.
- 2.16. Cilindr qaptal betiniń maydanı ultanı sheńberi uzınlıǵınıń cilindr jasawshısına kóbeymesine teń ekenligin dáliyllen.

4



- 2.17. Cilindr ultanınıń radiusı hám jasawshısına kóre onıń qaptal betiniń maydanın tabıń. a) 7 sm hám 12 sm; b) 12 sm hám 7 sm; c) 1 m hám 12 m; d) 0,7 m hám 1,2 m.
- 2.18. Cilindr ultanınıń maydanı $300 \pi \text{ sm}^2$, jasawshısı 6 sm bolsa, cilindr ultanınıń maydanın tabıń.
- 2.19. Cilindr qaptal betiniń maydanı $90 \pi \text{ sm}^2$, jasawshısı 5 sm bolsa, cilindr tolıq betiniń

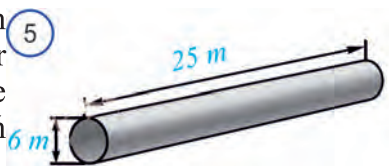
maydanın tabırń.

2.20. Cilindr ultanırnń diametri 1 m, jasawshısı bolsa ultan sheńberi uzınlıǵına teń. Cilindr qaptal betinń maydanın tabırń.

2.21. Cilindrńń jasawshısı onń radiusınan 12 sm ge uzın. Cilindr tolıq betinń maydanı bolsa $128\pi \text{ sm}^2$. Cilindr ultanırnń radiusı hám jasawshısın tabırń.

2.22. 4 – súwrette cilindr kóriniside baktń biyikligi 2,5 m, ultanırnń diametri 1,2 m hám boyaw qalınlıǵı 0,1 mm bolsa, bakti boyaw ushın qansha boyaw (kraska) kerek boladı?

2.23. 5 – súwrette uzınlıǵı 25 m hám diametri 6 m bolǵan trubanı tayarlawda neshe bólek qańıltır kerek boladı? Qañıltır bóleklerin bir – birine jalǵawda truba qaptal betinń 2,5% ke teń qańıltır isletiliwin esapqa alń.



2.24. Konus ultanırnń radiusı 12 mm, konustń tóbesin (ushın) ultanırnń orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 35 mm ge teń, hámde ol ultan tegisligine perpendikulyar. Konustń qaptal betinń maydanın tabırń.

2.25. Konus ultanırnń diametri 32sm, konus tóbesin ultan orayı menen tutastırıwshı kesindi uzınlıǵı 63 sm ge teń, hámde ol ultan tegisligine perpendikulyar. Konus qaptal sırtın tabırń.

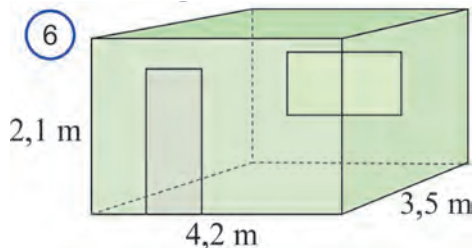
2.26*. Konustń jasawshısı l ge teń bolıp, ol ultan tegisligi menen α müyesh payda etedi. Eger a) $l = 10 \text{ sm}$, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 24 \text{ dm}$, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 5 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$ bolsa, konus ultanırnń maydanın tabırń.

2.27*. Konustń jasawshısı l ge teń bolıp, ol ultanırnń radiusı menen α müyesh payda etedi. Eger a) $l = 18 \text{ sm}$, $\alpha = 30^\circ$; b) $l = 20 \text{ dm}$, $\alpha = 45^\circ$; c) $l = 2,4 \text{ m}$, $\alpha = 60^\circ$ bolsa, konustń tolıq betinń maydanın tabırń.

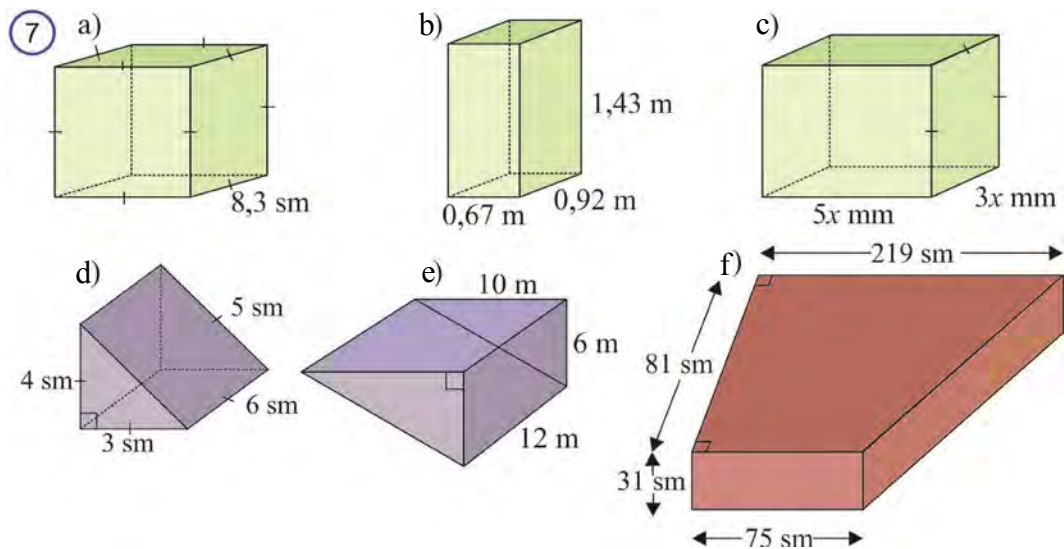
2.28*. Konus ultanırnń radiusı hám jasawshısı sáykes türde a) 11 sm hám 8 sm; b) 8 mm hám 11 mm; c) 3 m hám 18 m; d) 2,7 m hám 1,2 m ge teń bolsa, konus qaptal betinń maydanın tabırń.

2.29. 6 – súwrette kórsetilgen bólmeni (xananı) ońlaw (remontlaw) kerek. Bólmede ólshemleri 8 m hám 2,2 m bolǵan esik hám ólshemleri 183 sm hám 91 sm bolǵan dereze bar. Esiktiń eki tárepi de boyalıwı lazım. Kestede eki túrli boyawdń bahaları berilgen. Bul maǵlıwmatlardan paydalanıp, ünemli (tejemli) ońlaw ushın qansha pul (qarjı) kerekligin esaplań.

Boyaw türi	Kólemi	Boyalatuǵın maydan	Bahası
Diywal ushın	4 l	16 m^2	32450 s.
	2 l	8 m^2	20800 s.
esik ushın	2 l	10 m^2	23600 s.
	1 l	5 m^2	15400 s.

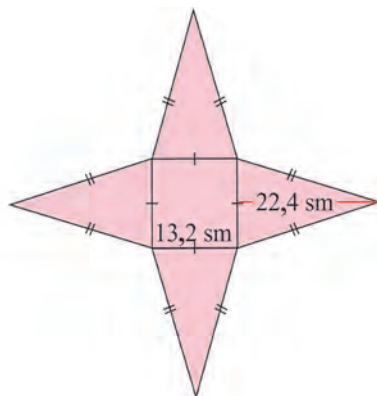
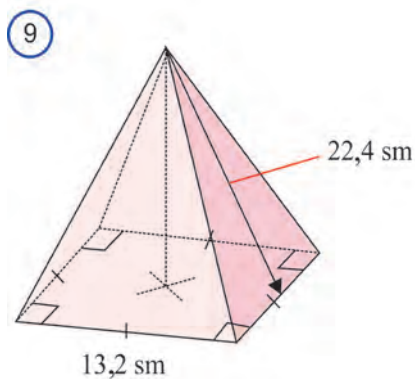
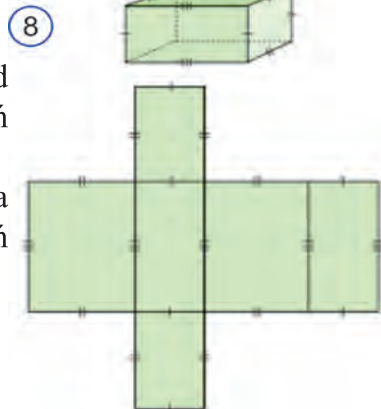


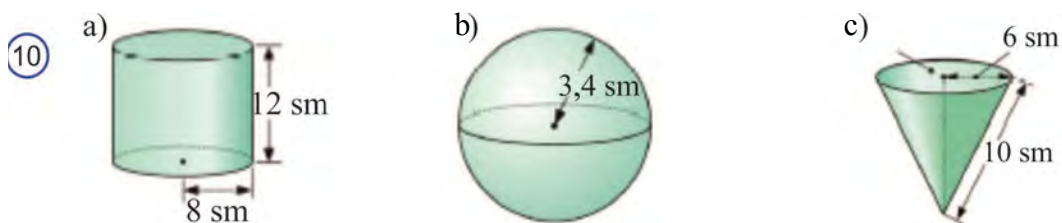
2.30. 7 – sūwrettegi maǵlıwmatlardan (berilgenlerden) paydalanıp, kópjaqlılırdın tolıq betiniń maydanın tabıń.



2.31. 8 – sūwrette tuwrı mūyeshli parallelepiped jayılasına kóre onıń tolıq betiniń maydanınıń formulasın tabıń (dūziń).

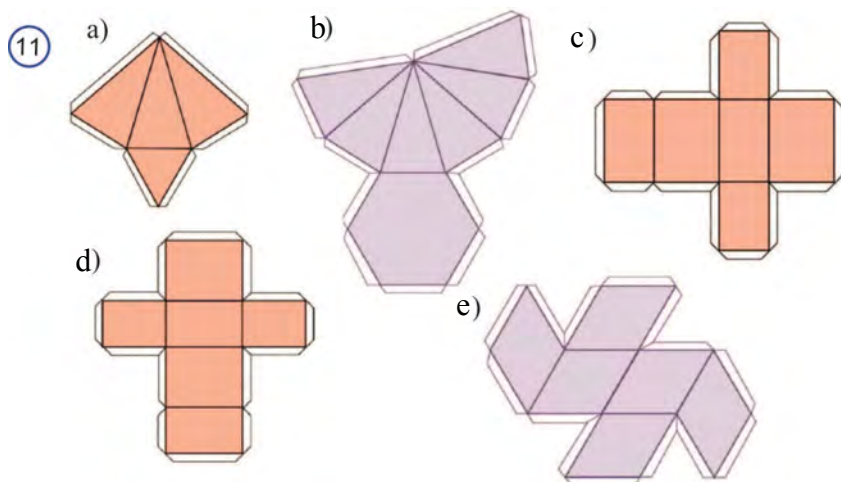
2.32. 9 – sūwrette tórtmūyeshli durıs piramida jayılasına kóre onıń tolıq beti maydanınıń formulasın tabıń (dūziń)



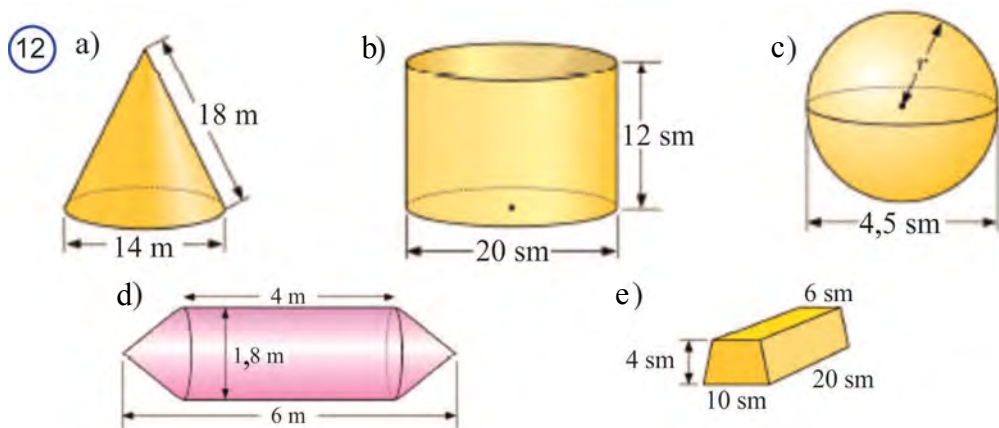


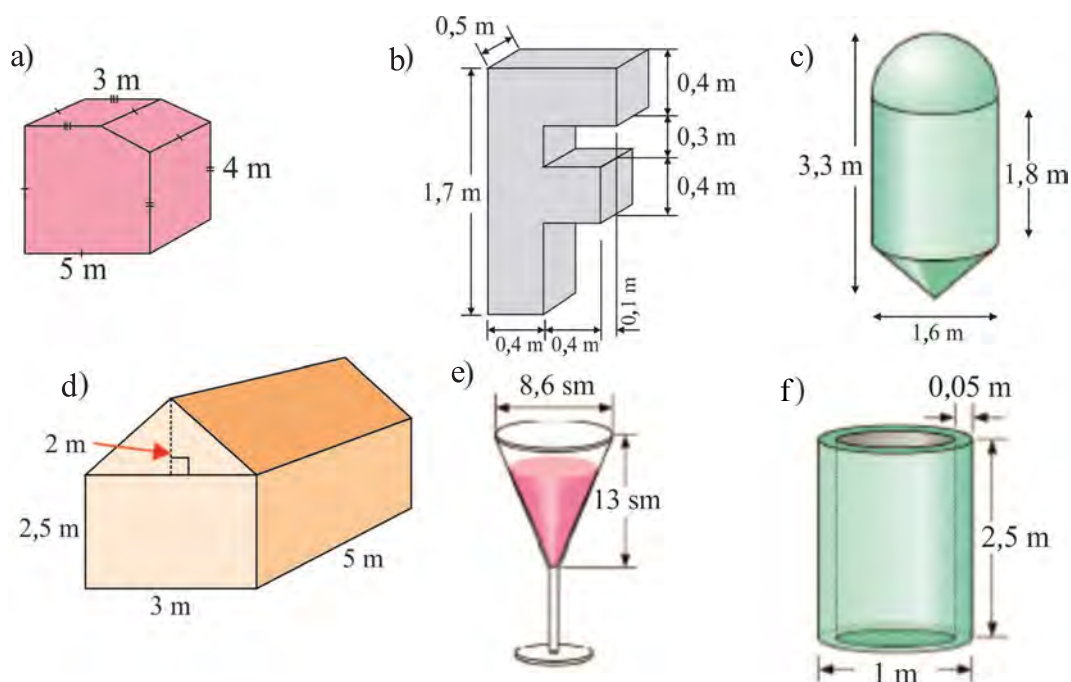
2.33. 10 – сўwrette aylanıw deneleriniń tolıq betin tabıń.

2.34. Keńisliktegi denelerdi jaqsıraq tásewir qılıw ushın olardıń modellerinen paydalanǵan maqul. Keńisliktegi denelerdiń modelin olardıń jayılasınan paydalanıp jasaw mǘmkin (11 – sўwret). Kórip turǵanımyzday, keńislik deneleriniń jayılası tegis geometriyalıq shákilderden ibarat. Tómenдеgi jayılmalardan paydalanıp, tuwrı mǘyeshli parallelepiped, kub hám piramidalar modelin jasań.



2.35. 12 – sўwrette kórsetilgen denelerdi kólemin hám tolıq betiniń maydanların tabıń:





Geometriyalıq süykimlilik

Ótmishte qurılğan áyemgi arxitektura esteliklerin qurıwda ata – babalarımız úlken geometriyalıq bilim hám máртебеge iye bolğan. Bunı bir ǵana Samarqand qalasındaǵı Registan maydanında qurılğan tariyxıy esteliklerden de bilip alıw mümkün (1 – súwret).

Xiva qalasındaǵı Ishanqala súwretinde (2 – súwret) qanday geometriyalıq dene (shákil) kórip tursız?



Táj – Máhál – dunyaniń jeti káramatınıń biri (3 – sűwret). Hindistanniń Agra qalasında Babiriy Shax – Jáhan tárepinen qurılǵan áyyemgi estelik. Onı qūrǵan ustalar geometriyadan tereń (shuqır) bilimge iye bolǵanlıqları belgili.



Sidney qalasındaǵı opera teatri (4 – sűwret) – Avstraliyada qurılǵan zamanagóy arxitekturalıq úlisi esaplanadı. Óziniń ájayıp geometriyalıq kórinisi menen dıqqatqa sazawar.

Sulıw (Gózzal) geometriyalıq tásewir iyesi, iraqlıq belgili arxitektor hayal Zaha Hadidtiń proekti tiykarında Qıtay paytaxtı Pekin qalasında qád kótergen “Galaxy Soho” dem alıw kompleksiniń ájayıp kórisinen ház etpewdiń (lazzet almawdiń) ilaji joq (5 – sűwret).



Mámleketimiz paytaxtında qád kóterip atırǵan “Tashkent city” kompleksiniń proektin kórip, hayran qalmawdiń ilaji joq. Bunday ájayıp gózzallıqlardı jaratıwda injener qurıwshılardıǵa qanshalıq geometriyalıq bilimler kerek bolǵanın kóz aldıda keltiriw mǘmkin (6 – sűwret).



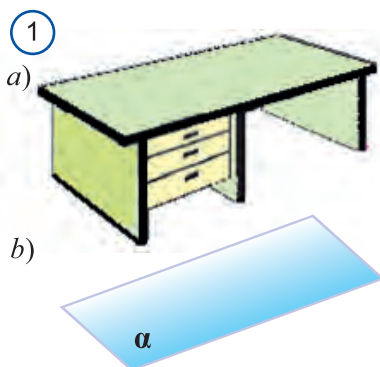
III BÓLIM



KEÑISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLER



KEÑISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLER



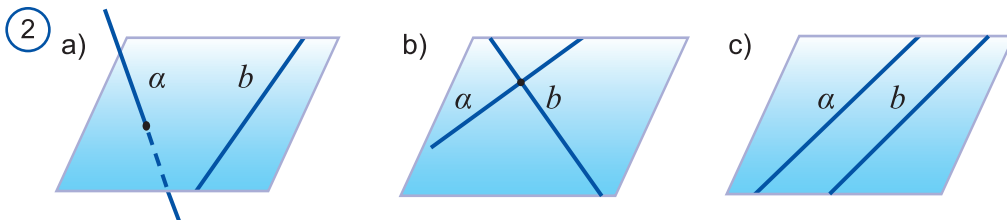
Keñislikte tiykarǵı geometriyalıq figuralar: noqat, tuwrı hám tegislik. Tegislikni stol ústi kibi tegis bet dep kóz aldıǵa keltiremiz (1.a – súwret). Tegislik te tuwrı sıyaqlı sheksizdir. Súwrette tegislikniń tek ǵana bir bólegin ǵana (ádette parallelogramm kórinisinde) súwretleymiz (1.a.súwret). Biraq, onı hámme tárepke sheksiz dawam etken dep kóz aldıǵa keltiremiz hám sızılmaǵa parallelogramm ko'rinishinde súwretleymiz (1.b – súwret).

Tegisliklerdi $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ grek háripleri menen belgileyemiz.

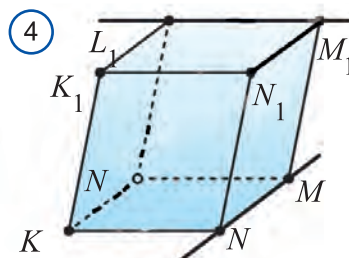
Tegislikte eki tuwrı bir tegislikte jatıwı yamasa jatpawı da múmkin (2 – súwret). Keñislikte bir tegislikte jatpaytuǵın eki tuwrıǵa *ayqasıwshı tuwrılar* delinedi (2.a-súwret).

Bir tegislikte jatırǵan hám tek ǵana bir ulıwma noqatqa iye bolǵan tuwrılar *kesilisiwshı tuwrılar* dep ataladı (2.b-súwret).

Bir tegislikte jatırǵan hám óz-ara kesilispeytuǵın tuwrılar bolsa *parallel tuwrılar* dep ataladı (2.c-súwret).

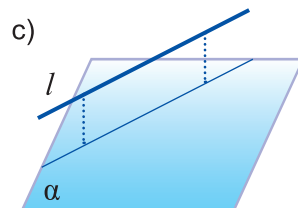
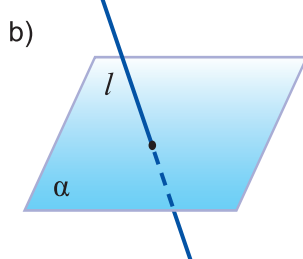
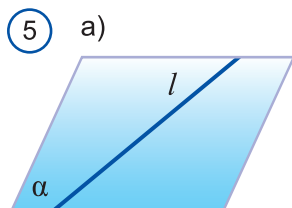


Ayqasıwshı tuwrılarga biri kópirden, ekinshisi kópir astınan ótiwshi jollardı mısıl retinde keltiriw múmkin (3 – súwret). Sonday-aq, 4-súwrettegi parallelepipedtiń MN hám L_1M_1 qabırǵaları jatırǵan tuwrılar da ayqasıwshı boladı.

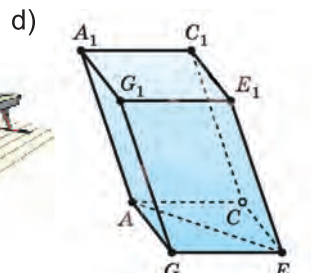
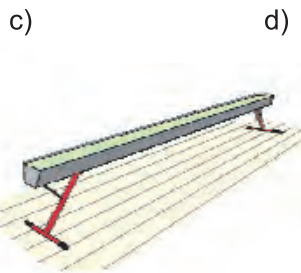
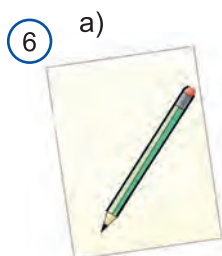


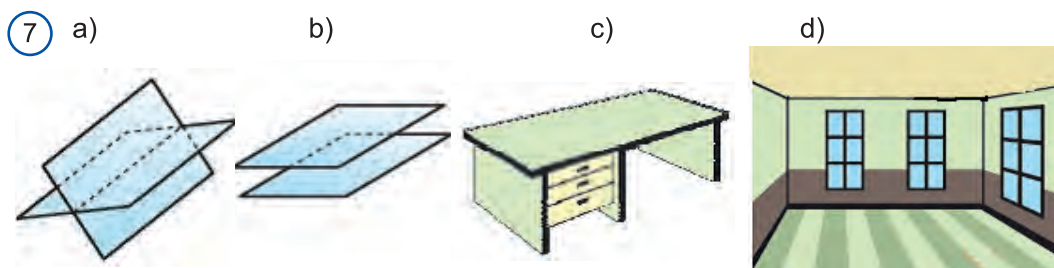
Keńislikte tuwrı hám tegislik óz-ara qalay jaylasıwı múmkin?

Tuwrı tegislikte jatıwı (5.a – súwret), onı kesip ótiwı (5.b – súwret) yamasa kesip ótpewı, yaǵnıy ulıwma noqatqa iye bolmawı (5.c-súwret) múmkin. Aqırǵı jaǵdayda *tuwrı tegislikke parallel* dep ataladı.



Stol ústinde jatırǵan qálem – tegislikte jatırǵan tuwrı haqqında (6.a-súwret), móljelge qadalǵan oq (6.b-súwret) – tegislikti kesip ótiwshi tuwrı (sızıq) haqqında hámde polda turǵan gimnastikalıq aǵash – tegislikke parallel tuwrı (sızıq) haqqında (6.c-súwret) túsiniq beredi.





Sunday-aq, 6.d-súwrette parallelepipedtiń $AGEC$ ultanınıń diagonalı AE jatırǵan tuwrı ultan tegisliginde jatadı, AG G_1A_1 jaq jatırǵan tegislikti kesip ótedi hámde $A_1G_1E_1C_1$ joqarı ultan tegisligine parallel boladı.

Endi keńislikte tegisliklerdiń o'z-ara jaylasıwına aydınlıq kirgizeylik.

Keńislikte tegislikler birár tuwrı boylap kesilisedi (7.a-súwret) yamasa ulıwma noqatqa iye bolmaslıǵı múmkin (7.b-súwret). Sodan kelip shıǵıp, bul tegislikler sáykes túrde *kesilisiwshi* yamasa *parallel tegislikler* dep ataladı.

7.c-súwrette stoldıń ústi beti hám qaptal jaǵı kesilisiwshi tegislikler haqqında, bólmeniń polı hám potologı bolsa (7.d-súwret) parallel tegisliklerge misal boladı.

Sunday-aq, 4-súwrette parallelepipedtiń qarama-qarsı bolmaǵan qaptal jaqları – kesilisiwshi tegislikler haqqında, tómengi hám ústingi ultanları hámde qarama – qarsı jaqları bolsa parallel tegislikler haqqında túsiniq beredi.

Parallel belgisi – “//” tek ǵana parallel tuwrılardı emes, al tegislikke parallel tuwrılar hám parallel tegisliklerdi belgilewde de paydalanıladı:

$$a // b, a // \alpha \text{ hám } \alpha // \beta.$$

Planimetriyadaǵı kibi, stereometriyada da bazı geometriyalıq figuralardıń qásiyetleri dálilleniwsiz qabıl qılınadı. Keńislikte tegisliklerdiń tómendegi qásiyetlerin dálilsiz, S grupp aksiomaları retinde qabıl qılamız:

S₁

Eger úsh noqat bir tuwrı sıziqta jatpasa, ol jaǵdayda olar arqalı tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.

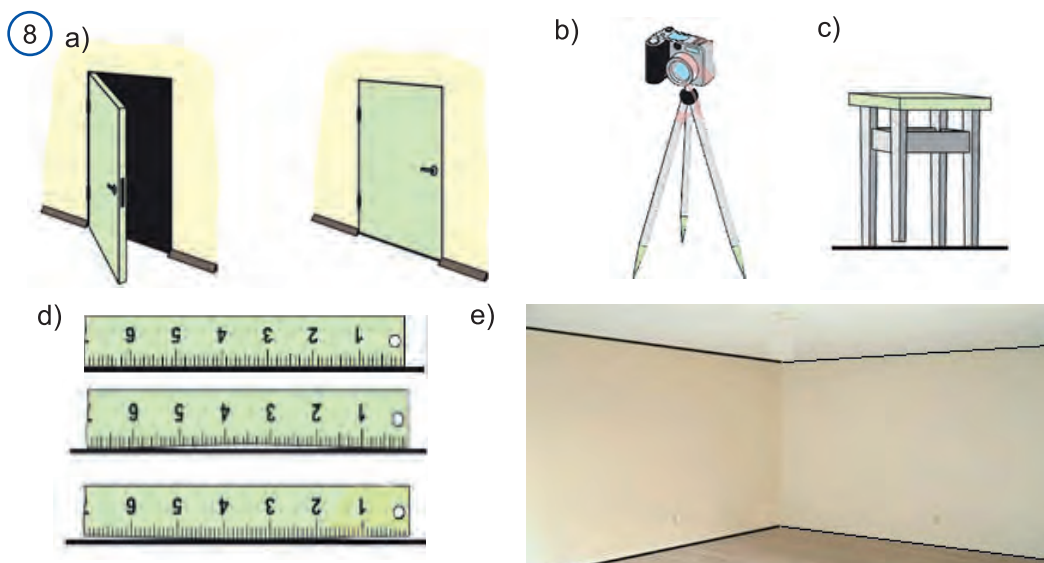
S₂

Eger tuwrı sıziqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, ol jaǵdayda onıń barlıq noqatlardı usı tegislikte jatadı.

S₃

Eger eki tegislik ulıwma noqatqa iye bolsa, ol jaǵdayda bul tegislikler usı noqattan ótiwshi ulıwma tuwrıǵa da iye boladı.

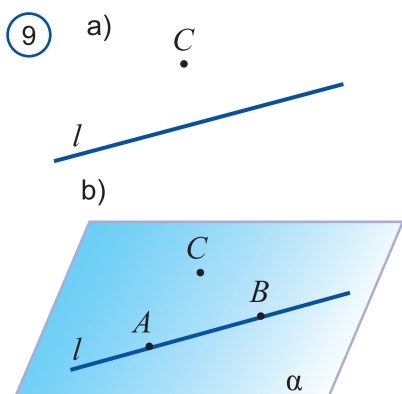
Aktivlestiriwshi shıńǵıw. Tómendegi 8-súwretlerdegi jaǵdaylardı túsintiriwde qaysı aksiomalarǵa súyeniw múmkin?



Planimetriyada kiritilgan aksiomalar menen birgelikte bul úsh aksiomalar stereometriyanıń tiykarın quraydı. Sonı esletiw kerek, planimetriyada biz qarap atırǵan figuralar jaylasatuǵın bir tegislikke iye edik. Stereometriyada bolsa bunday tegislikler sheksiz kóp bolıp, olardıń barlıǵında planimetriya aksiomaları hám planimetriyada dálillengen barlıq qásiyetler orınlı boladı, dep qaraladı. Sonday-aq, stereometriya kursında planimetriya aksiomalarına stereometriya názerinde qarawǵa tuwra keledi.

2.1- Teorema. *Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.*

Dáliylleniwi. l – berilgen tuwrı, C bolsa onda jatpaytuǵın noqat bolsın (9.a-súwret).



Aldın teoremanıń juwmaqlaw bóleginde ayılǵan tegisliktiń bar ekenligin kórsetemiz. l – tuwrı A hám B noqatlardı alamız. Shártke kóre A , B hám C noqatlar bir tuwrıda jatpaydı. Onda S_1 aksiomaǵa kóre, A , B hám C noqatlar arqalı α tegislikti ótkiziw múmkin (9.b-súwret). S_2 aksiomaǵa kóre bolsa, α tegislik l tuwrıdan ótedi.

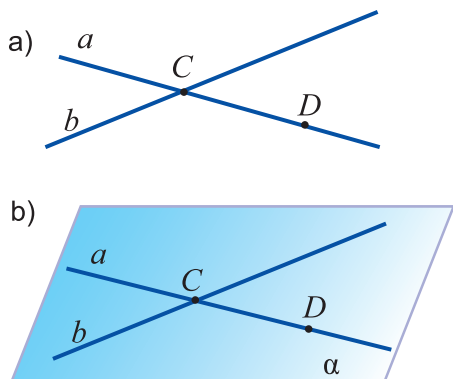
Demek, α – izlengen tegislik eken.

Endi bul tegisliktiń jalǵız (tek ǵana birew) ekenligin kórsetemiz.

Kerisinsheini kóz aldığa keltiremiz: l – berilgen tuwrı hám onda jatpağan C noqattan jáne bir, β tegislik ótkiziw múmkin bolsın. Onda β tegislik te A , B hám C noqatlardan ótedi. Biraq, S_2 aksiomağa kóre úsh noqattan tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin. Qarama – qarsılıq. Demek, oylawımız nadurıs. Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqat arqalı bir hám de tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin. $\square$

2.2- Teorema. *Berilgen kesilisiwshi eki tuwrı arqalı jalǵız tegislik ótkiziw múmkin.*

10



Dáliylleniwi. Meyli berilgen a hám tuwrılar C noqatta kesilissın (10.a- súwret).

a tuwrıda C noqattan pariqlı jáne bir D noqattı alamız. Ol jaǵdayda, dálillengen l - teoremağa kóre, b tuwrı hám onda jatpaytuǵın D noqat arqalı jalǵız α tegislik ótedi (10.b- súwret). Bul tegislik a tuwrınıń C hám D noqatlarınan ótedi. Onda S_2 aksiomağa kóre, α tegislik a tuwrıdan da ótedi.

Demek, α tegislik berilgen kesilisiwshi

eki tuwrı arqalı ótedi.

Bul tegisliktiń jalǵızlıǵın óz betińizshe tiykarlań. $\square$



Temaǵa say sorawlar

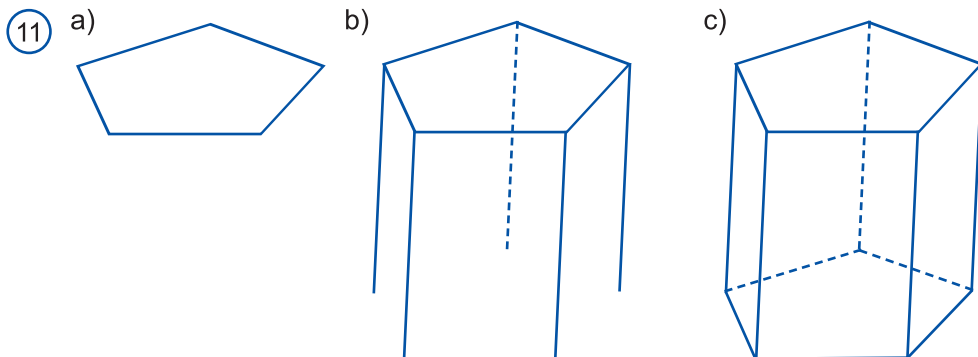
1. Keńislikte tiykarǵı geometriyalıq figuranlardı aytıń.
2. S gruppası aksiomaların aytıń.
3. Tegislikte jatiwshı qanday tuwrılar: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
4. Qanday tuwrılar ayqasıwshı dep ataladı? Misallar keltiriń.
5. Keńislikte eki tuwrı qalay jaylasıwı múmkin?
6. Qanday tuwrılar: a) tegislikte jatiwshı; b) tegislikke parallel dep ataladı?
7. Keńislikte tuwrı hám tegislik qalay jaylasıwı múmkin?
8. Keńislikte qanday tegislikler: a) kesilisiwshi; b) parallel dep ataladı?
9. Keńislikte eki tegislik qalay jaylasıwı múmkin?
10. Keńislikte tuwrı hám tegisliklerdiń qásiyetlerin ańlatıwshı aksiomalardı aytıń.
11. Úsh noqattan ótiwshı tegislik qásiyetin aytıń.

8

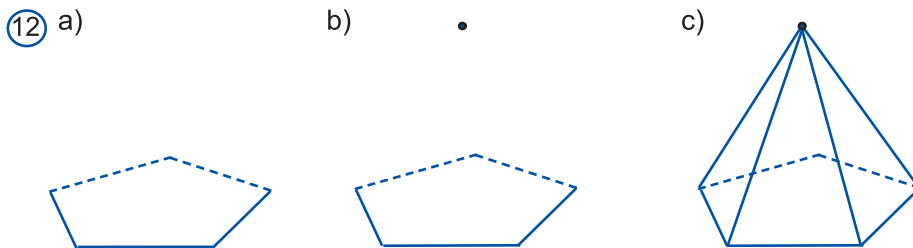
KÓPJAQLÍLAR HÁM OLARDÍN ÁPIWAYÍ KESIMLERIN JASAW

Geometriyalıq máselelerdi sheshiwde másele shartine sáykes sızılmanı sızıw júdá áhmiyetli esaplanadı. Geyde tuwrı sızılğan sızılma – máseleniń “yarım sheshimi” menen teńlestiriledi. Stereometriyada máseleniń sızılmasın durıs sızıw óte áhmiyetli, juwapkerli hám geyde bolsa quramalı jumıs esaplanadı. Sebebi, stereometriyalıq figuralar (shákiller) úsh ólshemli bolıp, olardı tegislikte, dápter betlerinde súwretlew kerek boladı. Qáte (Nadurıs) sızılğan sızılma qáte sheshimge yaki bası berk kóshege baslaydı.

Prizmanı súwretlew tómendegi tártipte alıp barıladı (11 – súwret). Aldın kópmúeshlik kórinisindegi ultanlarınan biri sızıladı. Soń, onıń hár bir ushınan ózara parallel hám teń kesindiler, yaǵnıy prizmanıń jasawshıları sızıladı. Kesindiniń aqırları sáykes túrde tutastırılıp shıǵıladı. Bunda ekinshi ultan payda boladı. Sızılmada prizmanıń kórinbeytuǵın qabırǵaları shtrix – punktir sızıqlar menen sızıladı.

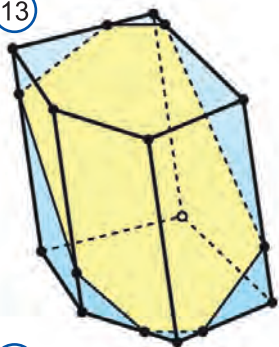


Piramidanı súwretlew de soǵan uqsas tártipte alıp barıladı (12 – súwret). Aldın kópmúeshlik kórinisindegi ultan sızıladı. Soń, piramida tóbesi (ushı) belgilenip, bul noqat ultanınıń hár bir tóbesi menen tutastırılıp shıǵıladı. Sızılmada piramidanıń kórinbeytuǵın qabırǵaları punktirler menen sızıladı.

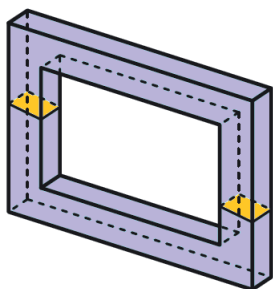


Keńisliktegi geometriyalıq figuralardıń óz-ara jaylasıwın durıs tásewir qılǵanda ǵana, onıń sızılmasın durıs sızıw múmkin boladı. Keńisliktegi figuralardıń (shákilderdiń) biri kópjaqlı, ekinshisi bolsa tegislik bolǵanda, túrli kesimlerdi súwretlewge tuwrı keledi. Tómendegi kópjaqlılardıń kesimlerin jasaw menen shuǵıllanamız.

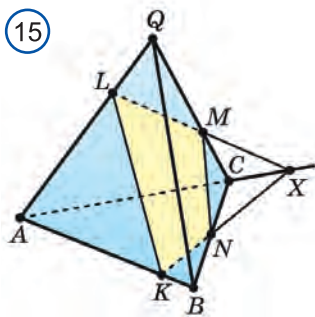
13



14



15



Meyli, kópjaqlını birar tegislik kesip ótken bolsın. *Kópjaqlınıń kesimi* dep kópjaqlını kesiwshi tegislikke tiyisli noqatlarınan ibarat geometriyalıq figuraǵa (shákilge) aytıladı.

Kesiwshi tegislik kópjaqlı' betiniń kesindileri boyı'nsha kesip ótedi, kópjaqlı'ni'ń kesimi bolsa bir yamasa bir neshe kópmú yeshliklerden ibarat boladı'. 13 – súwrette besmúyeshli prizmani'ń jetimúyeshlikten ibarat kesimi súwretlengen. 14 – súwrettegi ramani' tegislik penen keskende payda bolǵan kesimi – yeki tórtmúyeshlikten ibarat.

Kópmúeshliktiń kesimin súwretlew ushın onıń jaqları kesiwshi tegislik penen ulıwma noqatların anıqlaw jeterli.



1- másele. $QABC$ úshmúyeshli piramidaniń AB , AQ hám CQ qabırǵaları sáykes túrde K , L hám M noqatlarda kesip ótiwshi α tegislik penen keskende payda bolǵan kesimdi jasaymız (15 – súwret).

Jasaw (soǵıw, salıw). Kesiwshi α tegislik piramidaniń AQB jaǵı menen eki K hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesiwshi tegislik bul jaqtı KL kesindi boyınsha kesip ótedi.

Tap soǵan usaǵan, α tegislik piramidaniń AQC jaǵı menen eki M hám L ulıwma noqatlarǵa iye. Onda kesiwshi tegislik bul jaqtı ML kesindi boyınsha kesip ótedi.

Kesiwshi α tegislik piramidaniń ABC jaǵı menen bir K ulıwma noqatqa iye. Bul tegisliktiń BC qabırǵanı kesip ótetuǵın noqatın tabamız.

Bul tegislikke tiyisli LM hám AC tuwrılardı dawam ettirip, olardıń kesilisiw noqatı X ti tabamız. X noqat AQC hám ABC tegisliklerde de jatadı. Kesiwshi α tegislik piramidaniń ABC jaǵı menen eki K hám X ulıwma noqatlarǵa iye. Onda

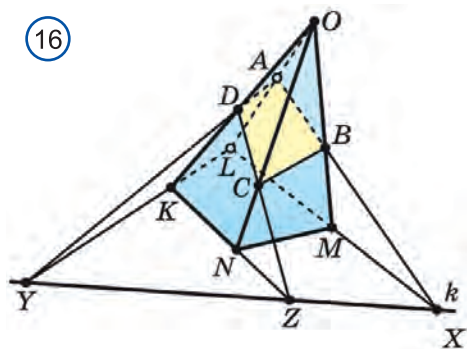
kesilisiwshi tegislik bul jaqtı KX kesindi boyınsha kesip ótedi.

KX tuwrı hám BC jaqtıń kesilisiw noqatı N hám α tegislikte jatadı. Demek, α tegislik ABC jaqtı KN kesindi boyınsha, BQC jaqtı bolsa MN kesindi boyınsha kesip ótedi.

$KLMN$ tórtmúyeshlik α tegisliktiń piramida menen kesilisiwinen ibarat boladı. KL hám KN kesindiler α tegisliktiń ABQ hám ABC jaqlardağı *izleri dep ataladı.*

2- másele. $OKLMN$ piramidaniń OL qabırǵasınıń A noqatı hám piramidaniń $KLMN$ ultanı tegisliginde jatiwshı k tuwrıdan ótiwshı b tegislik penen keskende payda bolatuǵın kesindi jasaymız. (16 – súwret).

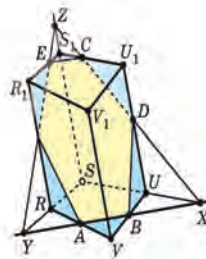
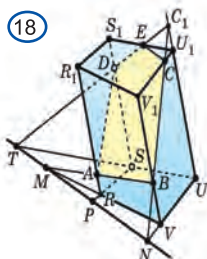
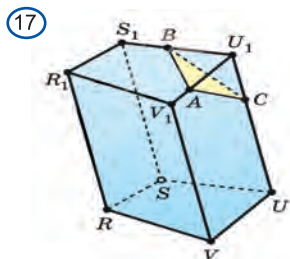
Jasaw (soǵıw, salıw). LM hám k tuwrılar kesilisetuǵın noqattı tabamız. Bul noqat k tuwrıda jatqanlıǵı ushın b tegislikke tiyisli. Sonday – aq, bul noqat LM tuwrıda jatqanı ushın LOM jaqqa da tiyisli. A noqat bul eki tegisliktiń hár birine de tiyisli. Sonıń ushın, b tegislik LOM tegislikti AX tuwrı boyınsha, LOM jaqtı bolsa AB kesindi boyınsha kesip ótedi. Bul jerde B noqat AX hám OM tuwrı sıziqlardıń kesilisiw noqatı.



Tap usınday, β tegisliktiń OLK jaqtı kesip ótetuǵın Y hám D noqatlardı hám AD kesindini anıqlaymız. Soń, Z hám C noqatlar hám DC hám BC kesindilerdi anıqlaymız. Nátiyjede, payda bolǵan $ABCD$ tórtmúeshlik izlenip atırǵan kesindiden ibarat boladı.

Tap soǵan usaǵan, α tegislik piramidaniń AQC jaǵı menen eki M hám L ulıwma noqatlardı iye. Onda kesiwshı tegislik bul jaqtı ML kesindi boyınsha kesip ótedi.

3- másele. A , B hám C tórtmúeshli prizmanıń túrli jaqlarındağı noqatları.



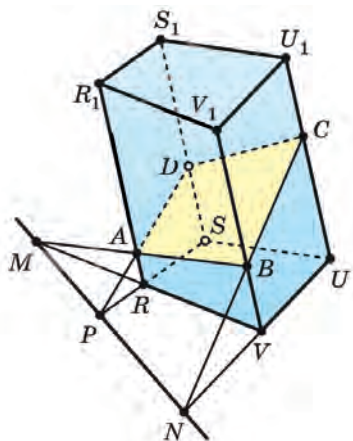
Prizmanıń ABC tegislik penen kesimin tabamız. (17 – súwret).

Izlenip atırǵan kesim A , B hám C noqatlardıń tórtmúeshli prizmanıń qaysı

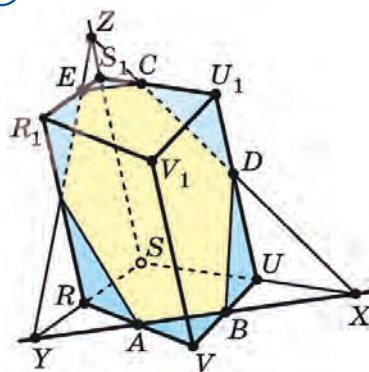
jaqlarında hám qanday jatırǵanlıǵına baylanıslı boladı. 17 – súwrette A , B hám C noqatlardıń bir tóbeden shıǵıwshı jaqlarda jatırǵan eń ápiwayı halı súwretlengen.

18 – súwrette kórsetilgen jaǵdayda kesimdi jasaw quramalıraq esaplanadı. Qalǵan jaǵdaylardagı kesindiler tómendegi 19 – hám 20 – súwretlerde berilgen. Kórip turǵanıımızday, kesim úshmúyeshlik, tórtmúyeshlik, besmúyeshlik hám altımúyeshliklerden ibarat bolmaқта. Bul kesimlerdi jasalıwın óz – betińizshe analiz qılıń.

19



20



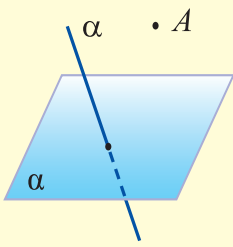
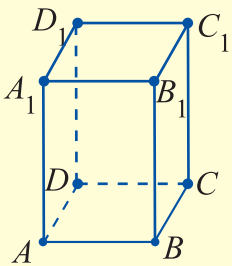
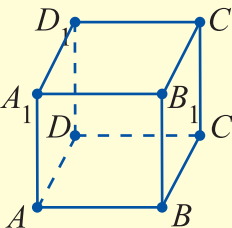
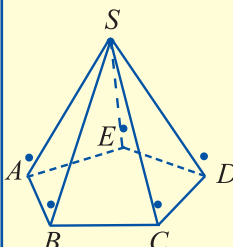
Temaǵa say sorawlar

1. Kópjaqlınıń kesimi dep nege ayıladı?
2. Kópjaqlınıń kesimi qanday figura bolıwı múmkin?
3. Bir tegisliktiń ekinshi tegisliktegi izi dep nege ayıladı?
4. Tórtmúyeshli kópjaqlınıń kesimi neler bolıwı múmkin?

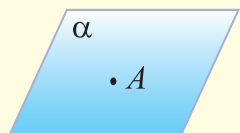
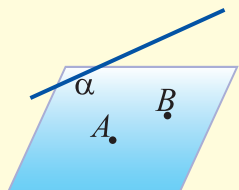
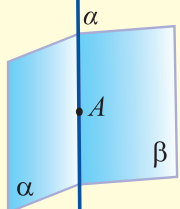


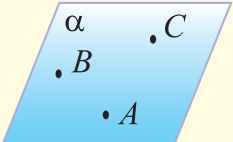
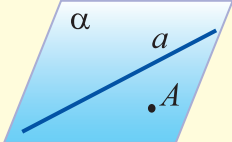
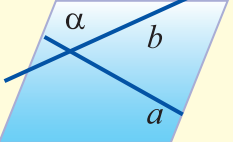
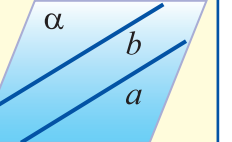
ÁMELIY SHINÍGÍWLAR HÁM QOLLANÍLÍWLAR

3.0. Tóمندegi 3 – bólim boyınsha súyenish teoriyalıq maǵlıwmatlardı tákírarlań. Olar sizge ótilgenlerdi ulıwmalastırıw hám ámeliy shinıǵıwlardı orınlawǵa járdem beredi.

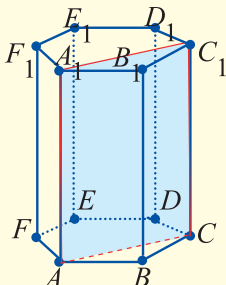
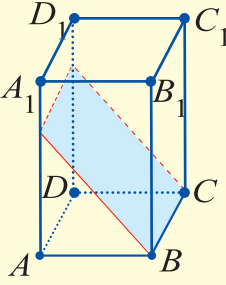
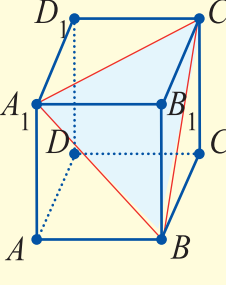
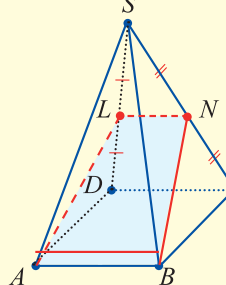
Tiykargı figuralar	Kópjaqlar		
	Tuwrı múeshli parallelepiped	Kub	Piramida
 A noqat, α tuwrı, a tegislik	 Ultanları – tuwrı tórtmúeshlikler, qaptal jaqları – tuwrı tórtmúeshlikler	 Ultanları – kvadratlar, qaptal jaqları – kvadratlar	 Ultanı – kópmúeshlik, qaptal jaqları úshmúeshlik

Stereometriya aksiomalari va ulardan kelib chiqadigan natijalar

 Tegislikte oǵan tiyisli bolǵan hám tiyisli bolmaǵan noqatlar bar	 Eger tuwrı sıziqtıń eki noqatı bir tegislikte jatsa, ol jaǵdayda onıń barlı noqatları usı tegislikte jatadı.	 Eger eki tegislik ulıwma noqatqa ie bolsa, ol jaǵdayda olar usı noqattan ótiwshi ulıwma tuwrı sıziqqa da ie boladı.
---	---	---

 B i r t u w r i d a jatpaytug'in ush noqat arqali	 Tuwrı sıziq hám onda jatpaytug'in noqat arqalı	 Kesilisiwshi eki tuwrı arqalı	 Parallel eki tuwrı sıziq arqalı
... bir hám tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin			

a) Kestede geybir kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri berilgen. Olardı tereń úyrenip bul kesindiler qalay hasıl (payda) boladı.

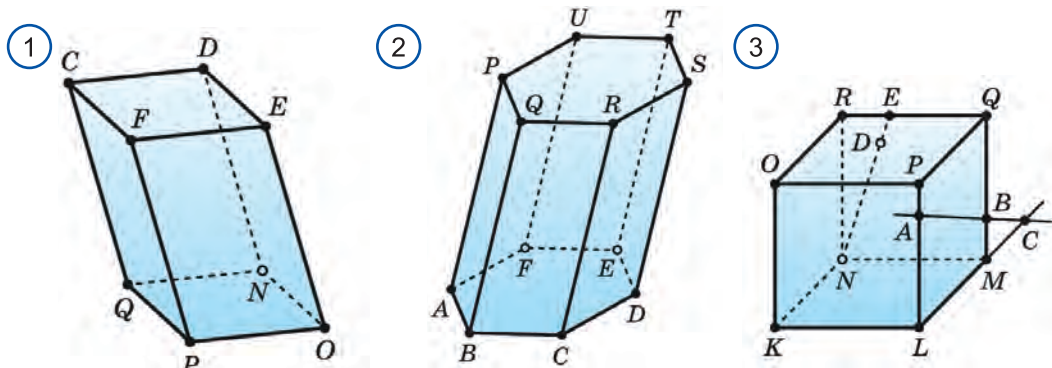
Kópjaqlılardıń ápiwayı kesimleri			
Kópmúeshli prizma	Tuwrı múeshli parallelepiped	Kub	Piramida
 $ACC_1 - A, C,$ C_1 noqatlardan ótiwshi, kesiwshi tegislik $ACC_1CA_1 -$ kesim.	 $CBK - K$ noqat hám CB tuw- rıdan ótiwshi, kesiwshi tegislie ótiwshi, kesiwshi tegislik, $CBKM$ - kesim.	 $A_1BC_1 - BC_1$ BA_1 túwrı sıziq- lardan ótiwshi, kesiwshi tegislik, ACC_1CA_1	 $ABN - AB$ hám LN parallel tuwrılardan ótiwshi, kesiwshi tegislik, ibarat $ABNL -$ kesindi.

b) Kesteniń shep útinidegi tegisliktegi, óń ústinide bolsa keńsiliktegi geometriyalıq figuralardıń (shákıllerdiń) bir birine uxsas geypara qásietlerine uqsas gey bir qásietlerin keltirilgen. Olardı kóz aldınıızǵa keltiriń hám

qanday uqsashliqa ie ekenligin aniqlań. Jáne tegislik hám keńisliktegi qanday uqsashlardı keltiriw múmkin?

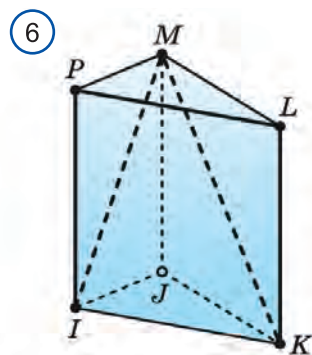
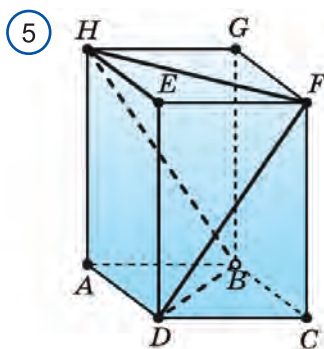
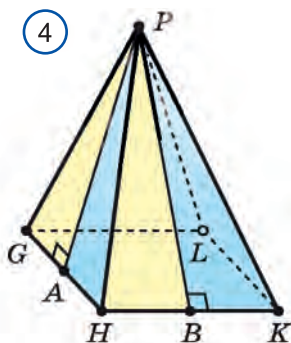
Tegislikte	Keńislikte
Eger tuwrılar ulıwma noqatqa ie bolsa, olar sol noqatta kesilisedi	Eger tegislikler ulıwma tuwrıǵa ie bolsa, olar sol tuwrı boyınsha kesilisedi
Tegisliktiń birar noqatınan sheksiz kóp tuwrı ótkiziw múmkin	Keńisliktiń birar tuwrısınan sheksiz kóp tegislik ótkiziw múmkin
Tuwrıda jatpaytuǵın noqat arqalı berilgen tuwrıǵa parallel bir hám de tek ǵana bir tuwrı ótkiziw múmkin.	Tegislikte jatpaytuǵın tuwrı arqalı berilgen tegislikke parallel bir hám de tek ǵana bir tegislik ótkiziw múmkin.
Bir tuwrı sızıqqa parallel tuwrı sızıqlar óz – ara paralleldir.	Bir tegislikke parallel tegislikler óz – ara paralleldir.

- 3.1.** Keńislikte a) eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa ie bolıwı múmkin?
- 3.2.** Keńislikte a) eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik jalǵaız (tek ǵana bir) ulıwma noqatqa ie bolıwı múmkin be?
- 3.3.** 1 – súwrette *NOPQDEFC* parallelepiped súwretlengen. a) *CD* tuwrı menen kesilisiwshi tuwrılardı; b) *BF* tuwrı menen kesiliwshi tuwrılardı; c) *CD* tuwrıǵa parallel tuwrı sızıqlardı; d) *FP* tuwrıǵa parallel tuwrı sızıqlardı; e) *CD* tuwrı menen ayqasıwshi sızıqlardı; f) *FP* tuwrı menen ayqasıwshi tuwrılardı kórsetiń (aytıń).
- 3.4.** 2 – súwrette ultanı altımúeshlik bolǵan *ABCDEFPPQRSTU* parallelepiped súwretlengen. a) *ABC* tegislik penen kesilisiwshi tuwrılardı; b) *UTF* tegislik penen kesilisiwshi tuwrılardı; c) *PTR* tegislikte jatiwshi tuwrılardı; d) *CDR* tegislikke tiyisli tuwrılardı; e) *FEC* tegislikke parallel tuwrılardı; f) *AQB* tegislikke parallel tuwrılardı kórsetip (aytıp) beriń.
- 3.5.** 1 – súwrettegi *NOPQDERC* parallelepipedte:
- CQ* tuwrı menen kesilisiwshi tegisliklerdi;
 - OP* tuwrı menen kesilisiwshi tegisliklerdi;
 - NO* tuwrı jatiǵan tegisliklerdi;
 - DN* tuwrı tiyisli bolǵan tegisliklerdi;
 - CF* tuwrıǵa parallel tegisliklerdi;
 - EO* tuwrıǵa parallel tegisliklerdi kórsetip (aytıp) beriń.

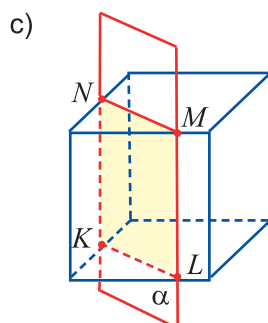
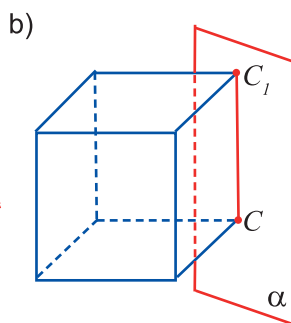
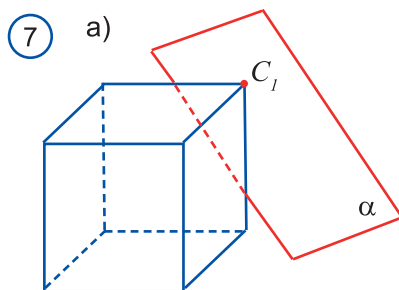


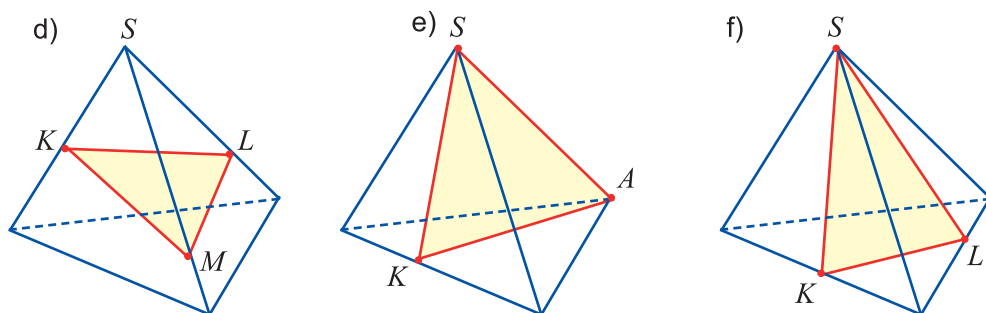
- 3.6.** 2 – súwrette ultanı bolğan ABCDEFPQRSTU parallelepiped súwretlengen. a) UQR tegislik penen kesilisiwshi tegisliklerdi; b) FT tuwrı menen kesilisiwshi tegisliklerdi; c) ACE tegislikke parallel tegisliklerdi; d) ETS tegislikke parallel tegisliklerdi kórsetip (aytıp) berıń.
- 3.7.** 3 – súwretten paydalanıp, a) LMQ hám NME tegisliklerde jatıwshı noqatlardı; b) NR tuwrı jatırğan tegisliklerdi; c) BC tuwrınıń KLN tegislik penen kesilisiw noqatların; d) PL hám ND tuwrılardıń OPR tegislik penen kesilisiw noqatların; e) KON hám KLM tegislikler kesilisetuǵın tuwrını; f) PDQ hám MNK tegislikler kesilisetuǵın tuwrını; g) BQ hám MC tuwrılardıń kesilisiw noqatın kórsetiń (aytıń).
- 3.8.** Bir tuwrıda jatıwshı úsh noqattan tegislik ótkiziw múmkinligin dálilleń. Bunday tegislikler sanı qansha (neshew)?
- 3.9.** A, B, C hám D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. AB hám CD tuwrılardıń kesilispeytuǵınlıǵın dálilleń.
- 3.10.** Berilgen eki tuwrınıń kesilisen noqatınan bul tuwrılar menen bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrı ótkiziw múmkin be? Juwabınızdı tiykarlań.
- 3.11.** A, B, C noqatlar eki túrli tegisliktiń hár birinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tuwrı sizıta jatıwın dálilleń.
- 3.12.** Tuwrı arqalı eki túrli tegislik ótiwin dálileń.
- 3.13.** a hám b tuwrılar bir tegislikte jatpaydı. a hám b tuwrılarga parallel c tuwrı ótkiziw múmkin be?
- 3.14.** Eger tegislik eki parallel tuwrıdan birin kesip ótse, ol ekinshisin de kesip ótiwin dálilleń.
- 3.15.** Eki ayqasıwshı tuwrılardan qálegen biri arqalı ekinshisine parallel tegislie ótkiziw múmkinligin dálilleń.
- 3.16.** ABC úshmúeshlik berilgen. AB tuwrıǵa parallel tegislik bul úshmúeshliktiń AC tárepini A_1 nuqtada, BC tárepti B_1 noqatta kesip ótedi. A_1B_1 kesindiniń

uzinligin tabin. Bunda: a) $AB = 15$ sm, $AA_1 : AC = 2 : 3$; b) $AB = 8$ sm, $AA_1 : AC = 5 : 3$; c) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4 : 5$; d) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C_1 = c$.



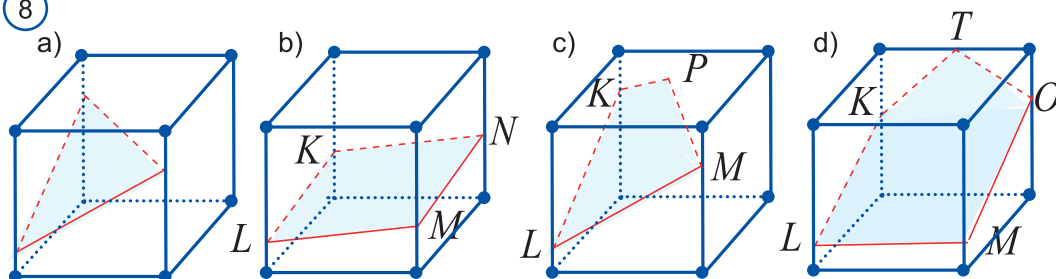
- 3.17. 4-súwrette tórtmúeshli duris piramida berilgen. PA hám PB – piramida PGH hám PHK jaqlarının biyiklikleri bolsa, $\triangle PGA = \triangle PHB$ ekenligin dälilleñ.
- 3.18. $ABCDHGFE$ tuwrı múeshli parallelepeditin (5 – súwret) qaptal qabırğası 8 sm ge, ultanı tárepi 6 sm ge teñ kvadrattan ibarat. Keńislikte $HFDBH$ sınıq sızıqtın uzınlıgın tabıñ.
- 3.19. $IJKPML$ úshmúeshli tuwrı prizmanın (6 – súwret) ultanı qabırğası hám qaptal qabırğası uzınlıqları 2:3 qatnasta. Eger $IPLKMI$ keńislikte sınıq sızıqtın uzınlıgı 16+4 13 ke teñ bolsa, prizma qaptal sırtının maydanın tabıñ.
- 3.20. Ultanı kvadrat bolğan tuwrı múeshli parallelepeditin qaptal sırtı 12 sm² qa teñ. Ultanının diagonalı $\sqrt{2}$ bolsa, qaptal jağının diagonalın tabıñ.
- 3.21. 7- súwrette keltirilgen jağdaylarda keńislik figuralarının qanday kesimi súwretlengenligin túsintiriñ.
- 3.22. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubtın AD hám CD qabırğası M hám N noqatlar berilgen. Kubtı MNB_1 tegislik penen keskende payda bolatuğın kesimdi jasañ.
- 3.23. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubtı sızın hám AB , BC hám BB_1 qabırğaları ortaları bolğan M , N hám L noqatlardı belgileñ. a) kubtı MNL tegislik penen keskende payda





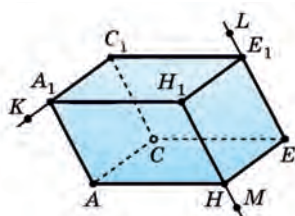
- bolatugin kesimdi jasan; b) MNL ushmueshliktin duris ekenligin dalillen; c) kubtin qabirgası 1 sm bolsa, MNL ushmueshlik maydanın tabın.
- 3.24.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tuwrımueshli parallelepipedtin qabirgası $AB = 6$ sm, $AD = 6$ sm, hám $AA_1 = 8$ sm. Parallelepipedtin $BC_1 D$ tegislik penen kesimi teń qaptallı ekenligin dalillen hám bul ushmueshlik biyikligin tabın.
- 3.25.** $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ prizmanı sızın. Prizmanın AD , AA_1 hám DD_1 qabirgaları ortaları bolgan M , N hám L noqatlardan otıwshi tegislik penen kesimin jasan.
- 3.26.** Kubtı tegislik penen keskende kesimde 8 – súwrette kórsetilgen qaysı jaǵdaylar bolıwı múmkin? Qaysıları bolıwı múmkin emes?

8

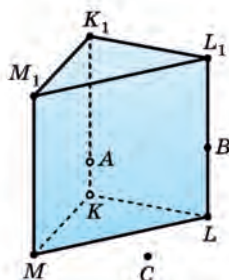


- 3.27.** 9- súwrette berilgen maǵlıwmatlar tiykarında a) K , L hám M ; b) A , B hám C ; c) A , B hám C noqatlardan otıwshi keńislik figuralarının tiyisli kesimlerin jasan.
- 3.28.** $MPQTM_1 P_1 Q_1 T_1$ prizmanın MM_1 , $M_1 P_1$ hám $M_1 T_1$ qabirgalar jatırğan A , B hám C noqatlar alınğan (10 – súwret). Prizmanın ABC tegislik penen kesimin jasan.
- 3.29.** Berilgen maǵlıwmatlar tiykarında 11 – súwrette U , V hám W , 12 – úwrette A hám B noqatlardan otıwshi keńislik figuralarının tiyisli kesimlerin jasan.

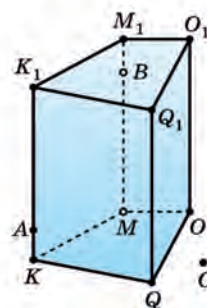
9) a)



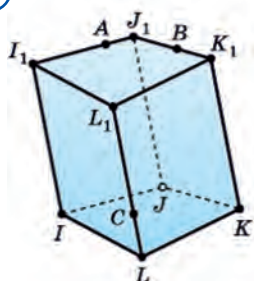
b)



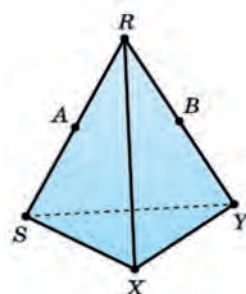
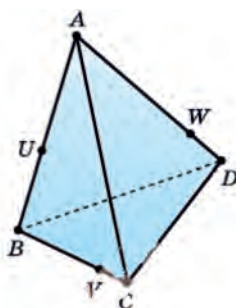
c)



10)



12)



Qollanılar hám ámeliy kompetenciylardı qáilplestiriv

1. Ne sebepten qanday da bir imárat ushın ura (shuqırlıq) qazıwdan aldın belgilew isleri tereń tartılğan jip járdeminde orınlanadı?

Juwap: eki tegislik kesilispesi tuwrıdan ibarat boladı.

2. Gerbish quyıw procesinde qálıpke ılay salınıp, tegis ağash bólegi qálıp ústinde júrgizilip, ılaydıń artıqsha bólegi sıyıırıp alıp tasladı. Bunda ne sebepten gerbishtiń sırtı tegis shıǵadı?

3. Jasalğan stuldıń ayaqları bir tegislikte jatqanlıǵın tekseriw ushın ustalar stuldıń qarama – qarsı ayaqlarına jip tartıp tekseredi. Bul usıldı qollap kórin hám ol nege tiykarlanganlıǵın kórsetiń.

Juwap: eki kesilisiwshi sıızıq jalǵız (tek ǵana bir) tegislikti anıqlaydı.

4. Bir bólek ağash taxtanı jarǵı (pıshqı) menen jarıp atırıp, usta jarılğan betiniń tegis shıǵıwına qalay erisiledi?

Juwap: ağash taxtanıń eki qońsı jaqlarına AB hám AC kesindilerdi sıızadı hám jarǵını múmkinshiligi barınsha usı kesindilerden ótiletuǵın qılıp jarıwdı orınlaydı. Nátiyjede, eki kesilisiwshi tuwrılardan ótiwshi tegislik jalǵız (tek ǵana birew) bolǵanlıǵı ushın jarılğan bet tegis shıǵadı

5. Fotoapparattı ornatiw ushın móljellengen tirepberdi ne ushın úsh ayaqlı

qılıp jasaladı?

Juwap: bir tuwrı sızıqtı jatpağan úsh noqattan tek gána bir tegislik ótedi.

6. Usta islew berilgen taxta sırtınıń tegisligin qalay tekseredi. Bul usıl nege tiykarlangan?

Juwap: eger tuwrı sızıqtıń eki noqatı tegislikte jatsa, onıń ózi de pútinliginshe usı tegislikte jatadı.

7. Ne sebepten úsh dóńgelekli (ayaqlı) motocikl eki dóńgelekligе qarağanda ádewir turǵınırar boladı?

Juwap: bir tuwrıda jatpaytuǵın úsh noqattan tek gána bir tegislik ótedi.

8. Ne sebepten ashıq esikler topsada óz halınsha háreketke keledi? Ne sebepten bul jabıq esikler menen sadır bolmaydı?

Juwap: tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqattan tek gána bir tegislik ótkiziw múmkin.

9. Kesimi – tárepi 7 dm bolǵan kvadrattan ibarat, biyikligi 4 m bolǵan, 18 ústinlerdi qúrwıw ushın qansha gerbish kerek boladı? (Gerbishtıń ólshemleri: 1:1,5:3 dm. Qurıw járayanında 5% gerbish taslandığa ketedi).

Juwap: 8200 dana.

Juwaplar hám kórsetpeler

1.23. $AB \parallel CD$. **1.24.** $7\frac{2}{3}$ sm, $8\frac{2}{3}$ sm. **1.25.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ sm. **1.26.** 14 sm. **1.27.** $8\sqrt{3}$ sm. **1.28.** 17 sm. **1.29.** 24 sm. **1.30.** 4,8 sm. **1.31.** 18 sm.

2.6. 256 m^2 . **2.8.** $(11+\sqrt{3}) \text{ sm}^2$. **2.9.** a) 150; 12,5 $(12+\sqrt{3})$; b) 1200; 1400; c) 3456; 108 $(32+9\sqrt{3})$; d) 2000; $2000+640 \text{ tg } 54^\circ$. **2.10.** a) $6\sqrt{13}$ sm; $18\sqrt{3}$ sm; b) $405\sqrt{3} \text{ sm}^2$; c) $648\sqrt{3} \text{ sm}^2$. **2.11.** a) $2\sqrt{82}$ sm; $2\sqrt{73}$ sm; b) $48\sqrt{73} \text{ sm}^2$; c) $144+48\sqrt{73} \text{ sm}^2$. **2.12.** a) $\sqrt{142}-45\sqrt{3}$ m; $\sqrt{142}+45\sqrt{3}$ m; b) 192 m^2 ; c) 282 m^2 ; **2.13.** a) 5 m; $\sqrt{89}$ m; b) $8(5+\sqrt{34}) \text{ m}^2$; c) $8(11+\sqrt{34}) \text{ m}^2$. **2.14.** a) 13 sm; 12 sm; b) 360 sm^2 ; c) $30(12+5\sqrt{3}) \text{ sm}^2$. **2.15.** $150(2\sqrt{3}-3) \text{ sm}^2$. **2.17.** a) $168\pi \text{ sm}^2$; b) $168\pi \text{ sm}^2$; c) $2,4\pi \text{ m}^2$; d) $1,68\pi \text{ m}^2$. **2.18.** $625\pi \text{ sm}^2$. **2.19.** $252\pi \text{ m}^2$. **2.20.** $\pi^2 \text{ m}^2$. **2.21.** 4 sm; 16 sm. **2.22.** 2,11 l. **2.23.** $4,83 \text{ m}^2$. **2.24.** 37 mm. **2.25.** $1040\pi \text{ sm}^2$. **2.26.** a) $75\pi \text{ sm}^2$; b) $288\pi \text{ dm}^2$; c) $6,25\pi \text{ m}^2$. **2.28.** a) $88\pi \text{ sm}^2$; b) $88\pi \text{ sm}^2$; c) $540\pi \text{ dm}^2$; d) $3,24\pi \text{ m}^2$;

3.18. $\sqrt{10}$ sm. **3.19.** $4(5+3\sqrt{2})$ sm. **3.20.** 72 dm^2 . **3.23.** $\frac{\sqrt{3}}{8} \text{ m}^2$.

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılğan hám qosımsha úyreniwge usınıs etilip atırğan oqıw - metodikalıq ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A. A'zamov, B. Haydarov. "Matematika sayyorasi". Toshkent. «O'qituvchi», 1993.
2. Y. Saitov «Matematika va matematiklar haqida». Toshkent. «O'qituvchi», 1992.
3. Yosh matematik qomusiy lug'ati. Toshkent. «O'zbekiston ensiklopediyasi», 1991.
4. S.I. Afonina Matematika va go'zallik, Toshkent, «O'qituvchi», 1986.
5. R.K. Otajonov Geometrik yasash metodlari, Toshkent, «O'qituvchi», 1982.
6. X. Norjigitov, Ch. Mirzaev Stereometrik masalalarni echish. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma.-Toshkent, 2004 y.
7. I. Israilov, Z. Pashaev Geometriya. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. II qism. Toshkent, «O'qituvchi», 2005 y.
8. A.B. Погорелов "Геометрия 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2009.
9. С. Атанасян "Геометрия 10–11 классы", учебник, Москва. "Просвещение", 2002.
10. Я.И. Перельман Қизиқарли геометрия, Тошкент. "Ўқитувчи", 1981.
11. Б. А. Кордемский Математическая смекалка. Москва. «Наука», 1991.
12. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
13. И.М. Смирнова, В.А. Смирнов Геометрия. 10–11 класс. учебник, Москва, 2008
14. О.Я. Билянина и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
15. А.Д. Александров "Геометрия – 10–11", учебник, Москва. "Просвещение", 2013.
16. С. Daniel Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
17. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publications, Australia, 2010.
18. Jennie M. Bennett, «Pre-Algebra» Holt, Rinehart and Winston, New York, 2004
19. <http://www.uzedu.uz> – Xalıq bilimlendiriw ministrliğiniń xabar bilimlendiriw portalı.
20. <http://www.eduportal.uz> – Multimediya orayı xabar bilimlendiriw portalı.
21. <http://www.school.edu.ru> – Uhwma bilimlendiriw portalı(rus tilinde).
22. <http://www.mathc.chat.ru> – Matematik kaleydoskop (rus tilinde).
23. <http://www.problems.ru> – Matematikadan máseleler izlew sisteması (rus tilinde).
24. <http://matholymp.zn.uz> – Ózbekstanda hám dunyada matematik olimpiadalar.
25. <http://www.pdmi.ras.ru/~olymp> – Matematikadan olimpiada máseleleri (rus tilinde).
26. <http://www.ixl.com> – Aralıqtan turıp oqıtıw saytı (ingliz tilinde).
27. <http://mathkang.ru> – “Kenguru” xalıqaralıq matematikalıq tan'law saytı (rus tilinde).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA VA ANALIZ ASOSLARI
GEOMETRIYA
I QISM

Orta bilimlendiriw mákemeleriniń 10-klass hám orta arnawlı,
kásıp-óner úyretiw mákemeleri ushın sabaqlıq
1- basılıwı

Redaktor:	K.Sagidullaev
Awdargan:	K.Sagidullaev
Texn. redaktor:	K. Madiarov
Kompyuterde teriwshi:	F. Quدراتillaev

Baspaxana litsenziyası AI № 296. 22.05.2017
Basiwğa ruqsat etildi 21.11.2017. Bishimi 70×100^{1/16}
«TimesNewRoman» garniturası.
Kólemi: Baspa tab. 9,0. Esap b.t. 9,0
Tirajı: 10 444 dana
Original-maket «Extremum-press» JSHJ da
tayyalandı. 100053, Tashkent q.
Boğishamol kóshesi, 3. Tel: 234-44-05
O‘zbekistan Baspasóz hám xabar agentliginiń «O‘qituvchi»
Baspa-poligrafiya dóretiwshilik úyinde basıldı.
100206, Tashkent qalası. Yunusabad rayoni,
Jańa qala kóshesi, 1- úy.
Buyırtpa № 259-17