

MATEMATIKA



ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ GEOMETRIYA II BÓLIM

Orta bilimlendiriw mákemeleriniń 10-klass hám orta arnawlı
kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri oqıwshıları ushın sabaqlıq

1-basilımı

Ózbekistan Respublikası Xalıq bilimlendiriw ministrıligi tastıyıqlağan

TASHKENT

2017

UOK 51(075.3)

KBK 22.1

M 54

Algebra hám analiz tiykarları bóliminiń avtorları:

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov.

Geometriya bóliminiń avtorı:

B.Q. Haydarov

Pikir bildiriwshiler:

B.Q. Beshimov – Mirza Uluǵbek atındaǵı Ózbekistan Milliy Universiteti “Geometriya hám topologiya” kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleriniń doktorı.

M.D. Pardayeva – Ózbekistan Respublikası Bilimlendiriw orayı direktorınıń orınbasarı.

D.E. Davletov – Nızamıy atındaǵı TMPU “Matematikanı oqıtıw metodikası” kafedrası baslıǵı, fizika-matematika ilimleriniń kandidadı.

Ǵ.M. Rahimov – TIAXMII qasındaǵı akademiyalıq licey oqıtıwshısı, fizika-matematika ilimleriniń kandidadı, docent.

A.A. Akmalov – Tashkent qalası XBKQTQAI prorektorı, pedagogika ilimleriniń kandidadı, docent.

Sabaqlıqtıń “Algebra hám analiz tiykarları” bóliminde qollanılǵan belgiler hám olardıń talqını:



– máseleni sheshiw (dálillew) baslandı



– máseleni sheshiw (dálillew) tamamlandı



– baqlaw jumıslar hám test (sinaw) shınıǵıwları



– soraw hám tapsırmalar



– tiykarǵı maǵlıwmat



– quramalıq shınıǵıwlar

Respublika máqsetli kitap qorı qarjıları esabınan basıp shıǵarıldı.

ISBN 978-9943-48-595-2

© Barlıq huqıqlar qorǵalǵan.

© JSHJ “EXTREMUM PRESS”, 2017.



III BAP

ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEŇLEMELER

47-49

QATNASLAR HÁM SÁWLELENDIRIWLER. FUNKCIYA

Tómendegi kesteде Nyu York qalasınıń aeroportında avtomashinalar turar ornında waqıtqa qarap tóleniwi lazım bolǵan qarjı muǵdarları keltirilgen:

Tólenetuǵın qarjınıń mánisi waqıt dawamlılıǵına tikkeley baylanıslı.

Waqıt (t)	Mánisi
0 – 1 saat	\$5,00
1 – 2 saat	\$9,00
2 – 3 saat	\$11,00
3 – 6 saat	\$13,00
6 – 9 saat	\$18,00
9 – 12 saat	\$22,00
12 – 24 saat	\$28,00

Bul kestege qarap tómendegi sorawlarǵa juwap bereyik:

Avtomashinanıń anıq (dál) bir saat turıwı ushın qansha pul sarıplanadı?

5 AQSh dolları ma, 9 AQSh dolları ma yamasa 11 AQSh dolları ma?

Qolaysız jaǵdayǵa túspew hám mashqalanı anıqlastırıw ushın biz

kesteдеги máǵluwmatlardı grafikalıq kórinisine keltiremiz. Kesteдеги “2 – 3 saat” jazıw “2 saattan artıq biraq 3 saattan artıq emes waqıt”, yaǵnıy $2 < t \leq 3$ aralıq dep túsiniledi. Ol jaǵdayda tómendegi kesteni payda etemiz:

Waqıt (t)	Mánisi
$0 < t \leq 1$ saat	\$5,00
$1 < t \leq 2$ saat	\$9,00
$2 < t \leq 3$ saat	\$11,00
$3 < t \leq 6$ saat	\$13,00
$6 < t \leq 9$ saat	\$18,00
$9 < t \leq 12$ saat	\$22,00
$12 < t \leq 24$ saat	\$28,00

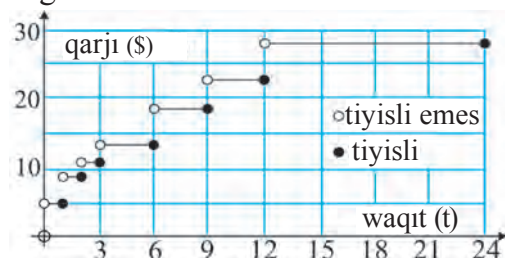
Matematika tilinde usı keste eki ózgeriwshi (*waqıt* hám *tólenetuǵın pul muǵdarı*) arasındaqı **qatnasqa** misal bola aladı.

Qatnas tártiplengen juplıqlar kópligi retinde talqılanıwı múmkin, máselen

$\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$.

Avtomashinalar turar ornında $0 < t \leq 24$ aralıқтаǵı t waqıtqa qarap tóleniwi lazım bolǵan qarjı ózgeriwi tómendegideki kesteде keltirilgen:

degishe súwretlenedi:



Gorizontál kósherdegí ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópłigi *anıqlanıw oblastı* delinedi.

Máselen, $\{t | 0 < t \leq 24\}$ kópłik joqarıdaǵı *waqıt* hám tólenetuǵın *qarjı muǵdarı* arasındadıǵı qatnastıń, $\{-2, 1, 4\}$

kópłik bolsa $\{(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)\}$ qatnastıń anıqlanıw oblastları boladı.

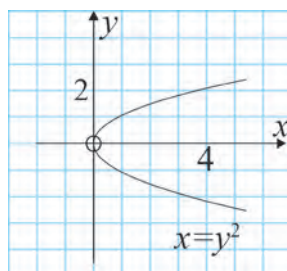
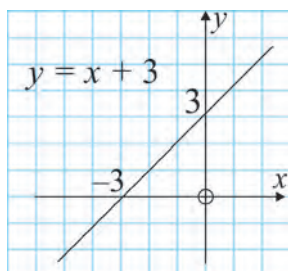
Vertikal kósherdegí ózgeriwshiniń qabıl qılatuǵın mánisler kópłigi qatnastıń *mánisler kópłigi* delinedi.

Máselen, $\{5, 9, 11, 13, 18, 22, 28\}$ kópłik joqarıdaǵı *waqıt* hám tólenetuǵın *qarjı muǵdarı* arasındadıǵı qatnastıń, $\{3, 5, 6\}$ kópłik bolsa $(1, 5), (-2, 3), (4, 3), (1, 6)$ qatnastıń mánisler kópłikleri boladı.

Endi qatnasqa anıǵıraq anıqlama bereyik. Dekart koordinatalar tegisliginde berilgen noqatlar kópłigi **qatnas** delinedi. Kóbinese qatnas x, y **ózgeriwshiler** qatnasqan teńleme kórinisinde beriledi.

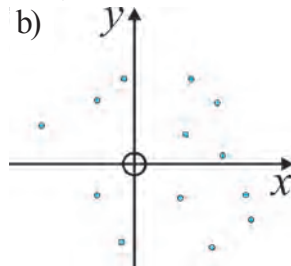
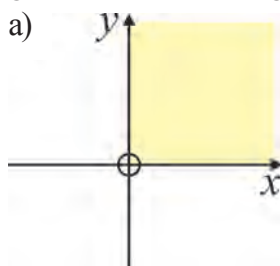
Máselen, $y = x + 3$, $x = y^2$ teńlemelerdiń hár biri qatnastı anıqlaydı.

Bul teńlemelerdiń hár biri Dekart koordinatalar tegisliginde noqatlar kópłigin payda etedi.



Ayırım qatnaslardı teńlemeler járdeminde jazıp bolmaydı.

Máselen, $x > 0$, $y > 0$ shártti qanaatlandıratuǵın (x, y) noqatlar kópłigi (koordinatalar tegisliginiń birinshi sheregi, *a-súwret*)



yamasa b -súwrettegi noqatlar kópligin teńlemeler járdeminde jazıp bolmaydı.

Eger qatnasta birinshi koordinatası teń bolğan eki túrli noqat bar bolmasa, bul qatnas **sáwlelendiriw** yamasa **funkciya** delinedi.

Demek, funkciya – qatnastıń arnawlı túri eken.

Berilgen qatnas funkciya ekenligin tekseriwdiń eki usılın keltiremiz.

Algebralıq usıl

Bul usıl qatnas teńleme járdeminde berilgen jaǵdaylarda qollanıladı. Bunda berilgen teńlemege x hám y tiń qálegen mánisin qoyǵanda x tiń hár bir mánisi ushın y tiń tek ǵana bir mánisi payda bolsa, bunday qatnas funkciya boladı.

Máselen, $y=3x-2$ teńlemege x tiń qálegen mánisin qoysaq, y tiń tek ǵana bir mánisi payda boladı. Demek, bul teńleme járdeminde anıqlanǵan qatnas funkciya boladı.

Sonıń menen birge $x=y^2$ teńleme menen anıqlanǵan qatnas funkciya bolmaydı, sebebi, máselen, $x=4$ mánisin qoysaq, eki $y=\pm 2$ mánis payda boladı.

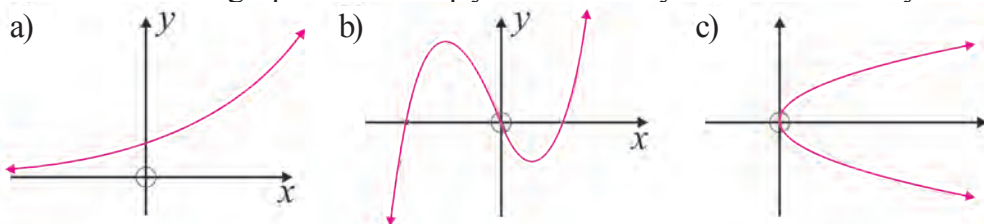
Grafikalıq usıl

Qatnas Dekart koordinatalar sistemasında kóplik kórinisinde berilgen bolsın. Eger biz barlıq múmkin bolğan vertikal tuwrılardı sızsaq, bul tuwrılardan qálegeniniń berilgen qatnas penen kesilisiw noqatları sanı birewden artpasa, ol jaǵdayda bul qatnas funkciya boladı. Kerisinshe, eger qandayda bir vertikal tuwrınıń berilgen qatnas penen kesilisiw noqatları sanı birewden kóp bolsa, ol jaǵdayda qatnas funkciya bolmaydı.

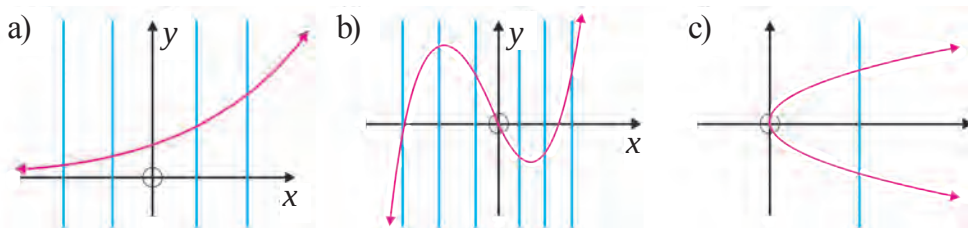
Bunda biz tómendegilerge shártli ráwishte kelisemiz:

- Eger sızıqta kishkene aq reńdegi dóńgelekshe belgilengen bolsa, $(-\bigcirc-)$, bunday noqat sızıqqa tiyisli emes.
- Eger sızıqta kishkene qara reńdegi dóńgelekshe belgilengen bolsa, $(-\bullet-)$, bul noqat sızıqqa tiyisli.
- $\longrightarrow$ kórinistegi (strelka) kósher sızıq sol baǵıtta sheksiz dawam ettiriliwi múmkinligin bildiredi.

1- misal. Tómendegi qatnaslardan qaysı biri funkciya bolıwın teksereyik:



△ Vertikal tuwrılardı sızıp, sonday juwmaqqa kelemiz:



a) hám b) qatnaslardan (grafiklerden) hár biri funkciya boladı (sebebi qálegen vertikal tuwrı onıń menen eń kóbi bir noqatta kesilisedi), c) qatnas (grafik) bolsa funkciya emes, sebebi onı eki noqatta kesiwshi vertikal tuwrı tabıladı. ▲

Esaplaw úskenesi tómendegi algoritm boyınsha islesin:

1- qádem. Qandayda bir san kirgizilmekte.

2- qádam. Kirgizilgen san 2 ge kóbeytilmekte.

3- qádem. Nátiyjege 3 qosılmaqta.

Máselen, úskenege 4 sanı kirgizilse, nátiyjege $4 \cdot 2 + 3 = 11$ sanı payda boladı.

Tap usınday úskenege (-4) sanı kirgizilse, nátiyjege $2 \cdot (-4) + 3 = -5$ sanı payda boladı.

Ulıwma jaǵdayda, úskenege x sanı kirgizilse, nátiyjege tek ǵana bir $2x + 3$ sanı payda boladı.

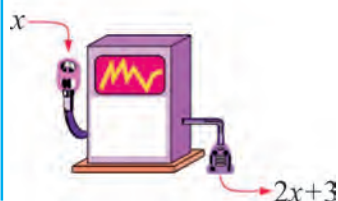
Úskenege qandayda bir x san kirgizilse, nátiyjege tek ǵana bir $2x + 3$ mánis payda bolıwı kórinip tur.

Demek, usı úskene isleytuǵın algoritm funkciyanı anıqlaydı.

Bul jaǵday $f: x \mapsto 2x + 3$, $f(x) = 2x + 3$ yamasa $y = 2x + 3$ kóriniside jazıladı.

Eger $f(x) = 2x + 3$ bolsa, onıń -4 sanına sáykes mánisi $f(-4) = 2(-4) + 3 = -5$ kóriniside tabıladı.

Ulıwma jaǵdayda, $f(x)$ – funkciyanıń berilgen x



sandaǵı mánisi dep aytıladı hám usı qatnas $y = f(x)$ kóriniside jazıladı.

2- misal. Eger $f: x \mapsto 2x^2 - 3x$ bolsa: a) $f(5)$; b) $f(-4)$ mánislerdi tabıń.

▲ $f(x) = 2x^2 - 3x$ qatnasqa $x = 5$ hám $x = -4$ sanlardı qoyıp, olarǵa sáykes mánislerdi tabamız: a) $f(5) = 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 = 2 \cdot 25 - 15 = 35$;

b) $f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4) = 2 \cdot 16 + 12 = 44$. ▲

3- misal. Eger $f(x) = 5 - x - x^2$ bolsa: a) $f(-x)$; b) $f(x+2)$ mánislerin tabıń hám nátiyjejerdi ápiwayılastırıń.

▲ $f(x) = 5 - x - x^2$ funkciyaǵa x ornına $-x$ hám $x+2$ mánislerdi qoyıp, olarǵa sáykes mánislerdi tabamız:

a) $f(-x) = 5 - (-x) - (-x)^2 = 5 + x - x^2$;

b) $f(x+2)=5-(x+2)-(x+2)^2=5-x-2-(x^2+4x+4)=3-x-x^2-4x-4=-x^2-5x-1$. ▲

Soraw hám tapsırmalar



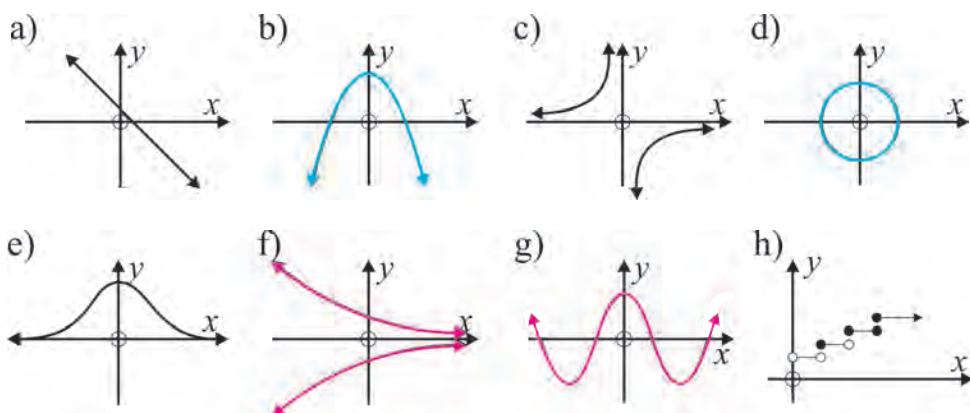
1. Qatnasqa mısallar keltiriń.
2. Sávlelendiriw yamasa funkciyaǵa anıqlama beriń.
3. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın túsindiriń.
4. Funkciyanıń mánisler oblastın túsindiriń.

Shıńwlar

73. Tómenдеgi qatnaslardan qaysıları funkciya boladı:

- | | |
|--|---|
| a) $\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6)\};$ | d) $\{(7, 6), (5, 6), (3, 6), (-4, 6)\};$ |
| b) $\{(1, 3), (3, 2), (1, 7), (-1, 4)\};$ | e) $\{(0, 0), (1, 0), (3, 0), (5, 0)\};$ |
| c) $\{(2, -1), (2, 0), (2, 3), (2, 11)\};$ | f) $\{(0, 0), (0, -2), (0, 2), (0, 4)\};$ |

74. Tómenдеgi qatnaslardan qaysıları funkciya boladı?



75. Dekart koordinatalar tegisliginde berilgen hár qanday tuwrı funkciya bola ma? Juwabıńızdı tiykarlań.

76. $x^2+y^2=9$ teńleme járdeminde berilgen qatnas funkciya bola ma?

77. Eger $f: x \mapsto 3x+2$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

- A) $f(0);$ B) $f(2);$ C) $f(-1);$ D) $f(-5);$ E) $f\left(-\frac{1}{3}\right).$

78. Eger $f: x \mapsto 3x-x^2+2$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

- A) $f(0);$ B) $f(3);$ C) $f(-3);$ D) $f(-7);$ E) $f\left(\frac{2}{3}\right).$

79. Eger $g: x \mapsto x - \frac{4}{x}$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń:

A) $g(1)$; B) $g(4)$; C) $g(-1)$; D) $g(-4)$; E) $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

80. Eger $f(x)=7-3x$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń hám nátiyjeni múmkin bolsa ápiwayılastırıń.

a) $f(a)$; b) $f(-a)$; c) $f(a+3)$; d) $f(b-1)$; e) $f(x+2)$; f) $f(x+h)$.

81. Eger $F(x)=2x^2+3x-1$ bolsa, tómendegi mánislerdi tabıń hám nátiyjeni ápiwayılastırıń.

a) $F(x+4)$; b) $F(2-x)$; c) $F(-x)$; d) $F(x^2)$; e) $F(x^2-1)$; f) $F(x+h)$.

82. $G(x)=\frac{2x+3}{x-4}$ funkciya ushın:

a) I $G(2)$ II $G(0)$ III $G\left(-\frac{1}{2}\right)$ lardı tabıń;

b) Qanday x larda $G(x)$ tın mánisi bolmaydı?

c) $G(x+2)$ ni tabıń hám ápiwayılastırıń;

d) x tiń $G(x)=-3$ bolatuǵın mánisin tabıń.

83. Funkciya f háribi menen belgilengen bolsın. f hám $f(x)$ belgilerdiń mánisleri arasında qanday parıq bar?

84. Góneriw nátiyjesinde nusqa kóbeytiw úskenesiniń t jıldan keyingi bahası $V(t)=9650-860t$ nızamı boyınsha ózgeredi.

a) $V(4)$ ti tabıń hám onıń mánisin túsindirıń;

b) $V(t)=5780$ bolǵanda t nı tabıń. Jáǵdaydı túsindirıń;

c) Úskene qaysı bahada satıp alıńǵan?

85. Bir koordinatalar tegisliginde $f(2)=1$, $f(5)=3$ bolatuǵın úsh túrli funkciya grafiklerin sızıń.

86. $f(2)=1$ hám $f(-3)=11$ bolatuǵın $f(x)=ax+b$ sızıqlı funkciyanı tabıń.

87. $f(x)=ax+\frac{b}{x}$, $f(1)=1$, $f(2)=5$ bolsa, a , b larnı tabıń.

88. $T(0)=-4$, $T(1)=-2$, $T(2)=6$ bolatuǵın $T(x)=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciyanı tabıń.

89. $f(x)=2^x$ bolsa, $f(a)f(b)=f(a+b)$ teńlikti dálilleń.

ELEMENTAR FUNKCIYALARDIŇ MONOTONLIǒI, EŇ ÚLKEN HÁM EŇ KISHI MÁNISLERI HAQÓINDA TÚSINIK

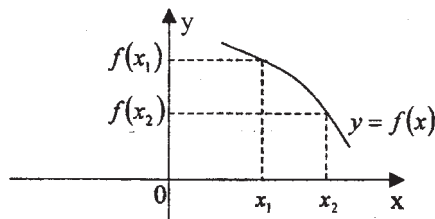
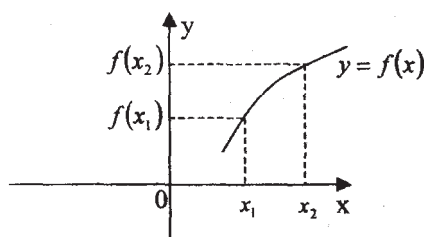
50-51

Funkciyanıń monotonlıǵı

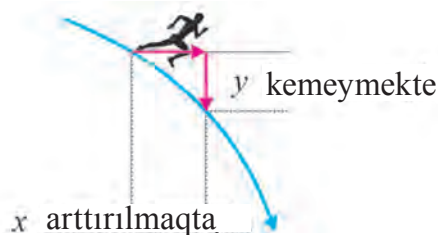
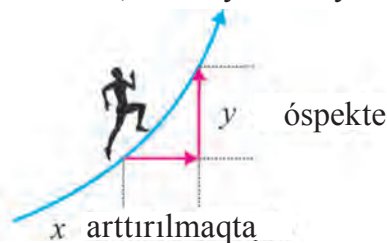
Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlandırıwshı barlıq $x_1, x_2 \in I$ ushın $f(x_1) < f(x_2)$ teń-

sizlik orinli bolsa, I aralıqta $y=f(x)$ funkciya *ósiwshi* delinedi.

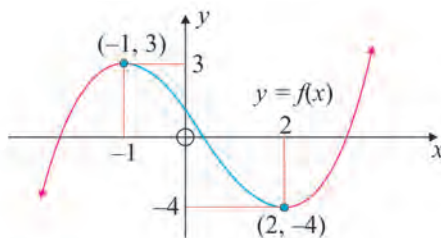
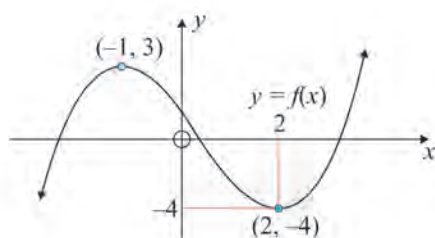
Eger $x_1 < x_2$ teńsizlikti qanaatlardıwshı barlıq barlıq $x_1, x_2 \in I$ ushın $f(x_2) < f(x_1)$ teńsizlik orinli bolsa, I aralıqta $y=f(x)$ funkciya *kemeyiwshi* delinedi.



Eger funkciya *ósiwshi* bolsa, grafik boylap shepten ońǵa “háreket” qılsaq, ordinatalar artadı; funkciya *kemeyiwshi* bolsa, ordinatalar kemeyedi.



1- misal. Funkciyanıń ósiw hám kemeyiw aralıqların tabıń:



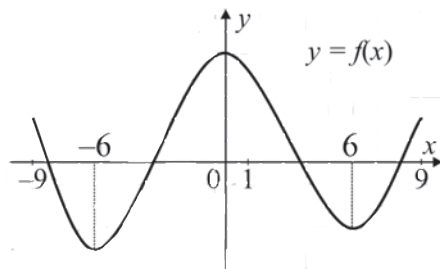
△ Eger funkciya *ósiwshi* bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar ósedi (grafikte qızıl reńde ajratılǵan). Demek funkciya $x \leq -1$ hám $x \geq 2$ aralıqlarda ósedi. Juwaptı $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ kórinisinde de jazıwǵa boladı.

Tap sonday, eger funkciya *kemeyiwshi* bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsaq, ordinatalar kemeyedi (grafikte kók reńde ajratılǵan). Demek, funkciya $-1 \leq x \leq 2$ aralıqlarda kemeyedi. ▲

2- misal. Funkciya qaysi aralıqlarda ósedi?

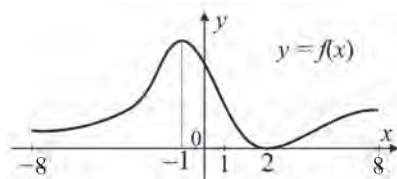
△ Bul funksiya $[-9; 9]$ aralıqta berilgen.

Eger funksiya ósiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsa, ordinatalar úlkeyedi (ósedi). Demek, funksiya $[-6; 0]$ hám $[6; 9]$ aralıqlarda ósedi. juwaptı $[-6; 0] \cup [6; 9]$ kórinisinde de jazıwǵa boladı. ▲



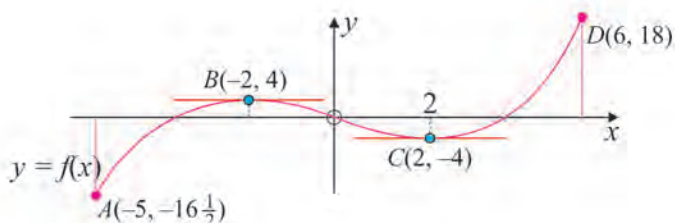
3- misal. Funkciya qaysi aralıqlarda kemeyedi?

△ Eger funksiya kemeyiwshi bolsa, grafik boylap shepten ońǵa háreket qılsa, ordinatalar kishireyedi. Demek funksiya $[-1; 2]$ aralıqta kemeyedi. ▲



Funkciyanıń eń úlken hám eń kishi mánisleri haqqında túsiniq beremiz.

$-5 \leq x \leq 6$ aralıqta anıqlanǵan funksiya grafigin qarayıq.



A noqattıń ordinatası basqa noqatlar ordinatalarınan kishi bolǵanı sebepli usı noqat **global minimum** noqatı delinedi. Funkciyanıń oǵan sáykes bolǵan mánisi **funksiyanıń eń kishi mánisi** delinedi. Biziń misalımızda funksiyanıń eń kishi mánisi $-16,5$ ke teń.

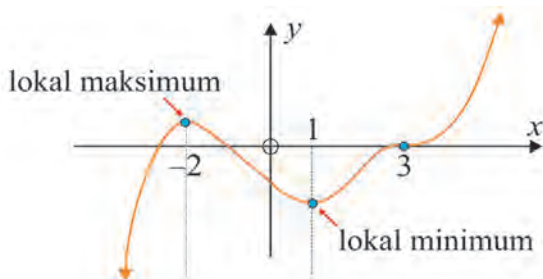
Tap sonday, D noqattıń ordinatası basqa noqatlar ordinatalarınan úlken bolǵanı sebepli usı noqat **global maksimum** noqatı delinedi. Funkciyanıń oǵan sáykes bolǵan mánisi **funksiyanıń eń úlken mánisi** delinedi. Biziń misalımızda funksiyanıń eń úlken mánisi 18 ge teń.

Endi B noqatqa itibar bereyik. Grafiktiń oǵan jaqın bolǵan noqatları kópłigi kóriniske iye. Bunday qásiyetke iye bolǵan noqat **lokal maksimum** noqatı delinedi.

Tap sonday, grafiktiń C noqatqa jaqın bolǵan noqatları kópłigi

kóriniske iye. Bunday qásiyetke iye bolǵan noqat **lokal minimum** noqatı delinedi.

Tek ǵana lokal minimum hám lokal maksimumǵa iye bolǵan funkciyaǵa mısál keltireyik:



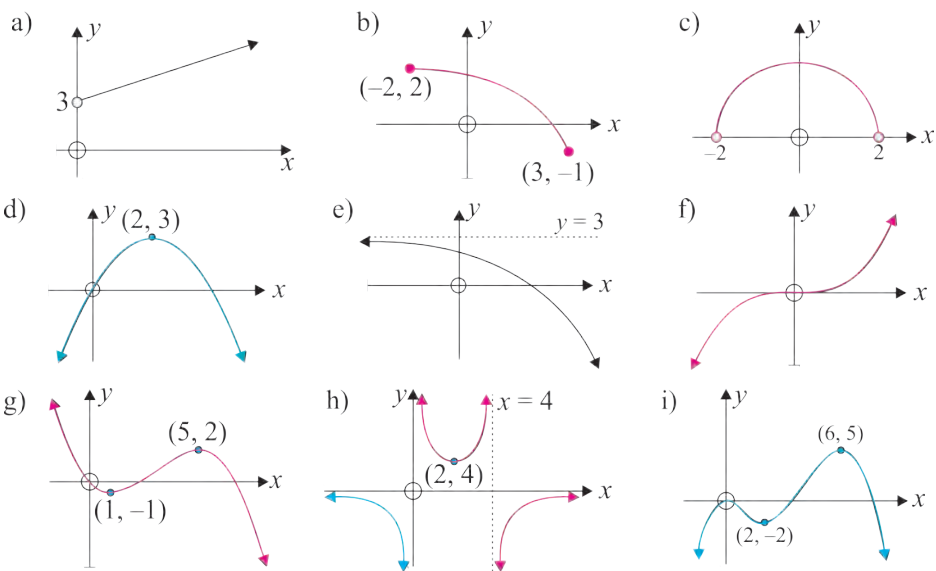
Soraw hám tapsırmalar



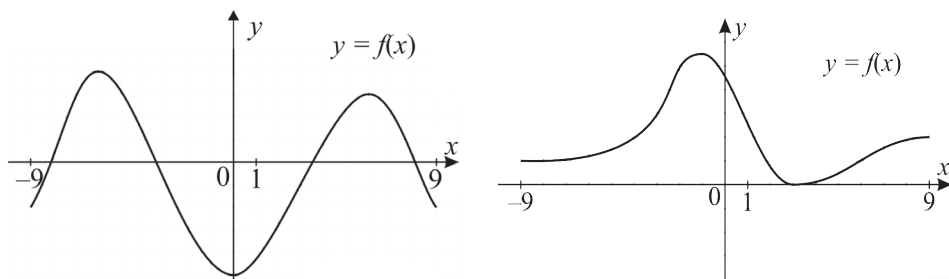
1. Aralıqta ósiwshi funkciyaǵa anıqlama berıń.
2. Aralıqta kemeyiwshi funkciyaǵa anıqlama berıń .
3. Sızılmaǵa qarap funkciyanıń ósiwi qalay anıqlanadı?
4. Sızılmaǵa qarap funkciyanıń kemeyiwi qalay anıqlanadı?

Shınıǵıwlar

90. Grafigi berilgen funkciya ushın: **I)** ósiw; **II)** kemeyiw aralıqlardı tabıń. Eger múmkin bolsa, olardıń lokal maksimumın hám minimumın, eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:



91. $[-9; 9]$ aralıqta berilgen funkciya qaysı aralıqlarda ósedı? Qaysı aralıqlarda kemeyedi? Onıń lokal maksimumın hám minimumın, eń úlken hám eń kishi mánislerin tabıń:



52-54

СІЗІҚЛІ ХАМ КВАДРАТЛІ MODELLER

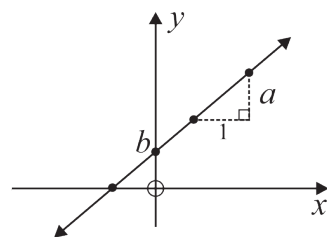
Сızıқлї функцїя

$f(x) = ax + b$ kórinisindegi funkciya sızıqlı delinedi, bul jerde x, y – ózgeriw-shiler, a, b – berilgen sanlar, $a \neq 0$.

Sızıqlı funkciya grafıgı koordinata tegisliginde tuwrı bolıp, bunda a san múyesh koefficienti delinedi.

Tómende biz sızıqlı funkciyanıń qollanılıwların keltiremiz.

1- misal. Tennis kortın ijáraǵa alıw bahası $C(h) = 5h + 8$ (AQSh dolları) formula menen anıqlanǵan, bul jerde h – ijára waqtı (saatda). 4 saat hám 10 saat ushın ijáraǵa qansha qarjı sarıplanadı?



△ $C(h) = 5h + 8$ formuladan paydalanıp, $C(4) = 5 \cdot 4 + 8 = 20 + 8 = 28$ hám $C(10) = 5 \cdot 10 + 8 = 50 + 8 = 58$ ekenligin tabamız. Demek, 4 saatqa 28 AQSh dolları, 10 saatqa bolsa 58 AQSh dolları qarjı sarıplanadı. ▲

2- misal. Nyu Yorkda taksi passajir alıw ushın toqtawǵa 3 AQSh dolları hám 30 cent, hár kilometrge bolsa 1 AQSh dolları hám 75 cent aladı.

a) Kesteni dápterinińge kóshirip alıń hám onı toltırıń:

d – aralıq (km)	0	2	4	6	8	10
C – qarjı (\$)						

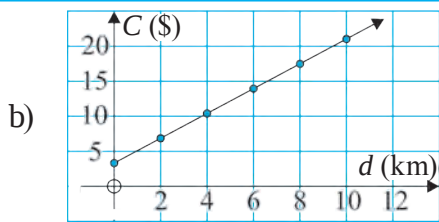
b) C hám d arasındagı baylanıstı grafikalıq kórinisinde ańlatıń;

c) $C(d)$ funkciyanıń algebralıq kórinisiniń–formulasın jazıń;

d) 9,4 km júriw ushın qansha qarjı sarıplanadı?

△ a) 3,3 AQSh dollarına izbe-iz $2 \cdot 1,75 = 3,5$ AQSh dolların qosıp, keteklerdi toltıramız:

d – aralıq (km)	0	2	4	6	8	10
C – qarjı (\$)	3,30	6,80	10,30	13,80	17,30	20,80



Bul – sızıqlı funksiya.

c) Múyeshlik (qıyalıq) koefficientin tabamız:

$$a = \frac{20,80 - 17,30}{10 - 8} = 1,75.$$

Demek, $C(d) = 1,75d + 3,3$.

d) $C(9,4) = 1,75 \cdot 9,4 + 3,3 = 19,75$.

Demek, 19,75 AQSh dollari sarıpladı. ▲

Kvadrathq funksiya

$y = ax^2 + bx + c$ kórinisindagi funksiya kvadrathq funksiya delinedi, bul jerde x , y – ózgeriwshiler, a , b , c – berilgen sanlar, $a \neq 0$.

$y = 2x^2 + 4x - 5$ funksiyanıń a) $x = 0$; b) $x = 3$ noqatlardaǵı mánisin tabayıq.

a) $x = 0$ bolsın. Ol jaǵdayda $y = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = 0 + 0 - 5 = -5$.

b) $x = 3$ bolsın. Ol jaǵdayda $y = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 18 + 12 - 5 = 25$.

3- misal. Tas atılǵanda t sekunda onıń jerge salıstırǵandaǵı biyikligi $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$ funksiya járdeminde anıqlanadı.

a) $t = 3$ bolǵanda tas jerden qansha biyiklikte boladı?

b) Tas qanday biyiklikten turıp atıldı?

c) Qaysı waqıtta tastıń biyikligi 27 m boladı?

▲ a) $h(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 2 = -45 + 90 + 2 = 47$. Demek, atılǵan tas $t = 3$ sekundan keyin 47 m biyiklikte boladı.

b) tas $t = 0$ bolǵanda atılǵanı ushın, $h(0) = -5 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 + 2 = 2$. Demek, tas 2 metr biyiklikten atılǵan.

c) Tas jerden 27 m biyiklikte bolsa, $h(t) = 27$ boladı, yaǵnıy $-5t^2 + 30t + 2 = 27$. Bul teńlemenı sheshemiz: $-5t^2 + 30t - 25 = 0$, $t^2 - 6t + 5 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 5$. Demek, tas 27 m biyiklikte 1 sekundan soń (joqarıǵa kóterilip atırǵanda) hám 5 sekundan keyin (tómenge túsip atırǵanda) boladı. ▲

Kvadrathq funksiya grafigi

$f(x) = x^2$ funksiyanı qarayıq. Onıń geypara noqatlardaǵı mánisleri kestegin dúzemiz:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Usı kestedegi (x, y) noqatlardı koordinata tegisligine qoyıp, olardı tegis sızıq penen tutastırıp, usı grafikti payda etemiz:

Payda bolgan sızıq **parabola** dep ataladı. Parabola shaqaları joqarıǵa baǵıtlangan bolıp, ol ordinata kósherine salıstırǵanda simmetriyalı bolgan iymek sızıqtan ibarat ekenligi kórinip tur.

$(0, 0)$ noqat $y = x^2$ **parabolanın ushi (tóbesi)** delinedi.

4-misal. $y = x^2 - 2x - 5$ kvadratlıq funkciya grafigin sızın.

△ Funkciyanın bir noqatıǵı, máselen $x = -3$ noqatındaǵı mánisin tabayıq:

$$f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 5 = 9 + 6 - 5 = 10.$$

Funkciyanın bir neshe noqatıǵı mánisin tavıp, kesteni dúzemiz:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2

(x, y) noqatlardı koordinata tegisligine qoyıp, olardı tegis sızıq penen tutastırıp, berilgen kvadrat funkciya grafigin payda etemiz:

Payda bolgan grafik te parabola kórinisinde. Onın shaqaları bolsa joqarıǵa baǵıtlangan. ▲

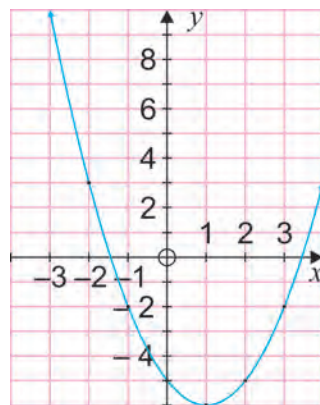
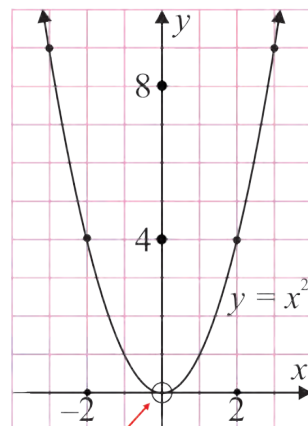
Qálegen $y = ax^2 + bx + c$ parabolanın ordinatalar kósheri – Oy kósheri menen kesilisiw noqatın tabamız: $x = 0, y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 + 0 + c = c$.

Demek, parabola $(0, c)$ noqatta ordinatalar kósheri menen kesilisedi.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolanın abscissalar kósheri menen kesilisiw noqatların tabıw ushın $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat teńlemenin sheshimlerin tabıw jeterli.

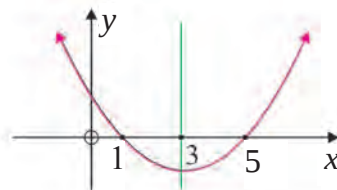
Máselen, $y = x^2 - 2x - 15$ parabolanın abscissalar kósheri menen kesilisiw noqatların tabamız. $x^2 - 2x - 15 = 0$ dep, bul kvadrat teńlemenin sheshemiz. Onın sheshimleri $x = -3$ hám $x = 5$ boladı. Demek, $y = x^2 - 2x - 15$ parabola abscissalar kósheri menen $(-3, 0)$, $(5, 0)$ noqatlarda kesilisedi. $y = ax^2 + bx + c$ parabola ushın $x = h$ kórinisindegi vertikal tuwrı onın *simmetriya* kósheri boladı.

Eger $y = ax^2 + bx + c$ parabola abscissalar kósheri menen kesilisse, h san parabolanın Ox kósheri menen kesilisiw noqatları abscissalarınin orta arifmetigine teń boladı.



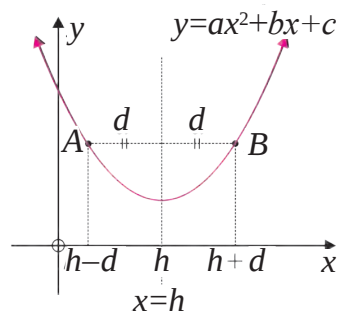
5- misal. Súwrettegi parabolaniń simmetriya kósherin tabıń.

△ Eger parabola abscissalar kósheri menen (1, 0) hám (5, 0) noqatlarda kesilisse, $x = \frac{5+1}{2} = 3$ - simmetriya kósheri boladı. ▲



Eger $y = ax^2 + bx + c$ parabola abscissalar kósheri menen kesilispese, h sandı basqa usılda da tabıwǵa boladı.

Abscissaları $h-d$ hám $h+d$ bolǵan A, B noqatlar birdey ordinatalarǵa iye, yaǵnıy $f(h-d) = f(h+d)$ ekenligi kórinip turıptı, demek, A hám B noqatlar $x = h$ kósherge salıstırǵanda simmetriyalıq noqatlar esaplanadı.



Bul shártten paydalanıp tómendegi teńlikten h tı tabamız:

$$a(h-d)^2 + b(h-d) + c = a(h+d)^2 + b(h+d) + c \text{ yamasa}$$

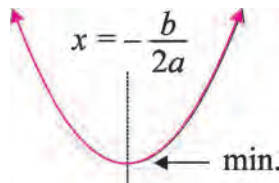
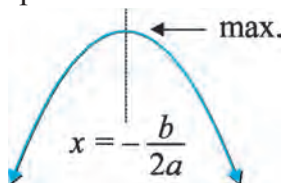
$$a(h^2 - 2hd + d^2) + bh - bd = a(h^2 + 2hd + d^2) + bh + bd \text{ yamasa } -4ahd = 2bd, \text{ bunnan } h = \frac{-b}{2a}. \text{ Demek, simmetriya kósheri } x = \frac{-b}{2a} \text{ eken.}$$

Juwmaq. $y = ax^2 + bx + c$ parabolaniń simmetriyalıq kósheri $x = \frac{-b}{2a}$ boladı. Parabolaniń óz-ózine simmetriyalı bolǵan noqatı parabolaniń ushı (tóbesi) delinedi.

$$\text{Parabola ushınıń (tóbesiniń) koordinataları } x = \frac{-b}{2a}, y = y\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}.$$

Parabola kósheri $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ noqattan Oy kósherine parallel bolıp ótedi.

$a < 0$ bolǵanda parabola kórinisi  kibi bolıp, onıń ushı (tóbesi) $y = ax^2 + bx + c$ kvadrat funkciyanıń maksimum noqatı, $a > 0$ bolǵanda parabola kórinisi  kibi bolıp, onıń ushı (tóbesi) kvadrat funkciyanıń minimum noqatı bolatúǵını kórinip tur.



6- misal. $y=3x^2+4x-5$ parabolaniń simmetriya kósherin tabıń.

△ $y=3x^2+4x-5$ ushın $a=3$, $b=4$.

Demek, $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 3} = -\frac{2}{3}$, yaǵnıy $x = -\frac{2}{3}$ – simmetriya kósheri. ▲

7- misal. $f(x)=x^2+6x+4$ parabolaniń ushın (tóbesin) tabıń.

△ $a=1$, $b=6$. $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \cdot 1} = -3$.

Demek, parabola ushınıń (tóbesiniń) abscissası $x=-3$, ordinatası bolsa: $y=f(-3)=(-3)^2+6(-3)+4=9-18+4=-5$.

Sonıń ushın, parabola ushı (tóbesi) $(-3, -5)$ koordinatalarǵa iye. ▲

8-misal. Sportshı toptı joqarıǵa attı, bunda toptıń t sekundtan keyingi biyikligi $H(t)=30t-5t^2$ metr boldı, $t \geq 0$.

a) Neshe sekundta top eń joqarı noqatqa jetedi?

b) Eń joqarǵı noqat jerden qansha biyiklikte boladı?

c) Top neshe sekundtan keyin jerge túsedı?

△ a) $H(t)=30t-5t^2$ ushın $a=-5 < 0$. Sonıń ushın bul parabola tómendegishe kóriniste boladı:  $t = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \cdot (-5)} = 3$ sekundta maksimumǵa erisiledi.

Yaǵnıy eń joqarı noqatqa top 3 sekundta kóteriledi.

b) Maksimal biyiklikti tabamız:

$H(3)=30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 90 - 45 = 45$, yaǵnıy eń joqarı noqat jerden 45 metr biyiklikte boladı.

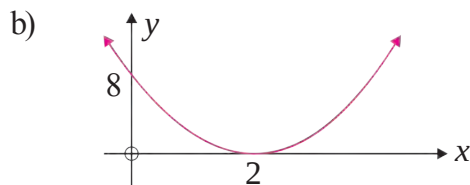
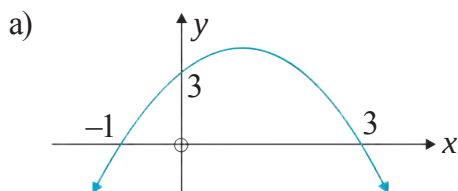
c) $H(t)=0$ bolsa, top jerge túsedı. Usı teńlemenı sheshemiz:

$30t-5t^2=0$, $5t^2-30t=0$, $5t(t-6)=0$. Bunnan $t_1=0$ yamasa $t_2=6$.

Demek, 6 sekundtan keyin top jerge túsedı. ▲

Tómende biz parabola kórinisine qarap kvadrat funkciya formulasın tabıw bo-yınsha mısallar keltiremiz.

9-misal. Berilgen parabolalarǵa qarap kvadrat funkciya formulasın jazıń:



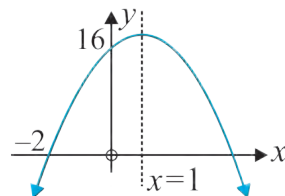
△ a) Parabola shaqaları tómenge qaraǵan, ol abscissalar kósheri menen -1 hám 3 noqatlarda kesilisedi. Sonıń ushın $y=a(x+1)(x-3)$, $a < 0$. $x=0$ de $y=3$ shártten $a=-1$ di tabamız.

Demek, kvadrat funkciya $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$ formula menen ańlatıladı.

b) Parabola shaqalari joqariga qarağan, ol abscissalar kósherine $x=2$ noqatta urinadı. Sonıń ushın $y=a(x-2)^2$, $a>0$. $x=0$ de $y=8$ shártten $a=2$ ni tabamız. Demek, kvadrat funkciya $y=2(x-2)^2$ formula menen beriledi. ▲

10- misal. Berilgen parabolağa qarap kvadrat funkciya formulasın jazıń.

△ $x=1$ – simmetriya kósheri bolğanı sebepli, abscissalar kósheri menen ekinshi kesilisiw noqatı $x=4$ boladı. Demek, $y=a(x+2)(x-4)$. Bunnan $x=0$, $y=16$. Sonıń ushın $16=a(0+2)(0-4)$. Bul jerden $a=-2$ yamasa $y=-2(x+2) \cdot (x-4)=-2x^2+4x+16$. ▲



Soraw hám tapsırmalar.



1. Sızıqlı funkciya degen ne?
2. Sızıqlı funkciyanıń múyesh koefficiyenti degen ne?
3. Kvadrat funkciya degen ne?
4. Kvadrat funkciyanıń ushı (tóbesi) qalay tabıladı?
5. Qashan kvadrat funkciya maksimumğa iye boladı?
6. Qashan kvadrat funkciya minimumğa iye boladı?

Shınıǵırlar

- 92.** Góneriwi nátiyjesinde avtomashina bahası t jıldan keyin $V(t)=25000-3000t$ evro nızamı menen ózgeredi.
- a) $V(0)$ mánisin tabıń. Bul mánisti túsindirıń;
 - b) $V(3)$ mánisin tabıń. Bul mánisti túsindirıń;
 - c) $V(t)=10000$ mániske neshe jıldan keyin erisiledi?
- 93.** AQShta elektr montajshı shaqırılğanı ushın \$60 hám hár bir saat ushın \$45 xizmet haqı aladı.
- a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolğanda sáykes kesteni dúziń. C xizmet haqınıń t waqıtqa qalay baylanıslı ekenligin grafik kórinisinde ańlatıń.
 - b) $C(t)$ funkciyanıń formulasın (algebralıq kórinisin) jazıń.
 - c) $6\frac{1}{2}$ saat waqıt ushın qansha qarjı tólenedi?
- 94.** Cisterna 265 l suw menen toltırılğan. Onnan hár bir minutta 11 l suw alınbaqta.
- a) $t=0, 1, 2, 3, 4, 5$ bolğanda aǵıp shıǵıp atırğan suwdıń V l kólemi t (minut) waqıtqa qanday baylanıslı ekenligin ańlatıwshı keste dúziń.
 - b) $V(t)$ baylanıstı grafik kórinisinde ańlatıń;

- c) $V(t)$ funkciyanıń formulasın (algebralıq kórinisin) jazıń.
 d) 15 minuttan keyin cisternada qansha suw qaladı?
 e) Cisterna qansha waqıttan keyin bosaydı?

95. Tómendegilerden qaysı biri kvadrat funkciya boladı?

- a) $y=2x^2-4x+10$; c) $y=-2x^2$; e) $3y+2x^2-7=0$;
 b) $y=15x-8$; d) $y=\frac{1}{3}x^2+6$; f) $y=15x^3+2x-16$?

96. (x, y) juplıq kórsetilgen $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciya menen ańlatılğan qatnasta bola ma?

- | | | | |
|---------------------|------------------------|-------------------------|----------------------|
| a) $f(x)=6x^2-10$, | $(0, 4)$; | d) $y=-7x^2+9x+11$, | $(-1, -6)$; |
| b) $y=2x^2-5x-3$, | $(4, 9)$; | e) $f(x)=3x^2-11x+20$, | $(2, -10)$; |
| c) $y=-4x^2+6x$, | $(-\frac{1}{2}, -4)$; | f) $f(x)=-3x^2+x+6$, | $(\frac{1}{3}, 4)$? |

97. $y=ax^2+bx+c$ kvadrat funkciya ushın y tiń berilgen mánisine sáykes bolğan x tiń mánisin tabıń:

- | | | | |
|--------------------|---------|-------------------|----------|
| a) $y=x^2+6x+10$, | $y=1$; | c) $y=x^2-5x+1$, | $y=-3$; |
| b) $y=x^2+5x+8$, | $y=2$; | d) $y=3x^2$, | $y=-3$. |

98. Materiallıq dene 80 m/s tezlikte biyiklikke atılğan. Onıń t sekunda jerge salıstırılǵandaǵı biyikligi $h(t)=80t-5t^2$ funkciya járdeminde anıqlanadı.

- a) 1 sekund, 3 sekund, 4 sekundtan keyin deneniń biyikligin tabıń;
 b) qaysı waqıtta deneniń biyikligi: 140 m; 0 metr boladı? Juwaplarǵa sáykes jaǵdaylardı túsindirıń.

99. Tovar islep shıǵarıwshı is bilmennin tabısı tómendegi formula menen esaplanadı:

$$P(x)=-\frac{1}{2}x^2+36x-40 \text{ (mın sum), bul jerde } x - \text{ tovarlardın sanı.}$$

- a) 0 dana tovar, 20 dana tovar islep shıǵarılǵanda is bilermen qanday tabısqa iye boladı? b) 270 mın sum tabıs alıw ushın is bilermen neshe dana tovar islep shıǵarıwı kerek?

100. Funkciyalardıń $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ mánislerge sáykes mánislerin tabıń. Nátiyjelerdi keste kórinisinde berıń hám grafiklerin sızıń:

- | | | |
|-------------------|------------------------|-------------------|
| a) $y=x^2+2x-2$; | d) $f(x)=-x^2+x+2$; | g) $y=x^2-5x+6$; |
| b) $y=x^2-3$; | e) $y=x^2-4x+4$; | h) $y=x^2+x+1$; |
| c) $y=x^2-2x$; | f) $(x)=-2x^2+3x+10$; | i) $y=-x^2+x-1$? |

Bul grafikler qanday kóriniste boladı?

101. Параболалардин ординаталар кóшерин менен кесилиш ноқатин таби́н:

- | | | |
|--------------------------|------------------------------|------------------------------|
| a) $y = x^2 + 2x + 3$; | d) $f(x) = 3x^2 - 10x + 1$; | g) $y = 8 - x - 2x^2$; |
| b) $y = 2x^2 + 5x - 1$; | e) $y = 3x^2 + 5$; | h) $f(x) = 2x^2 - x^2 - 5$; |
| c) $y = -x^2 - 3x - 4$; | f) $y = 4x^2 - x$; | i) $y = 6x^2 + 2 - 5x$ |

102. Функциалар графиклери ординаталар кóшерин менен қандай ноқатларда кесилиседи:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $y = (x+1)(x+3)$; | d) $y = (2x+5)(3-x)$; | g) $y = (x-1)(x-6)$; |
| b) $y = (x-2)(x+3)$; | e) $y = x(x-4)$; | h) $y = -(x+2)(x+4)$; |
| c) $y = (x-7)^2$; | f) $y = -(x+4)(x-5)$; | i) $y = -(x-3)(x-4)$? |

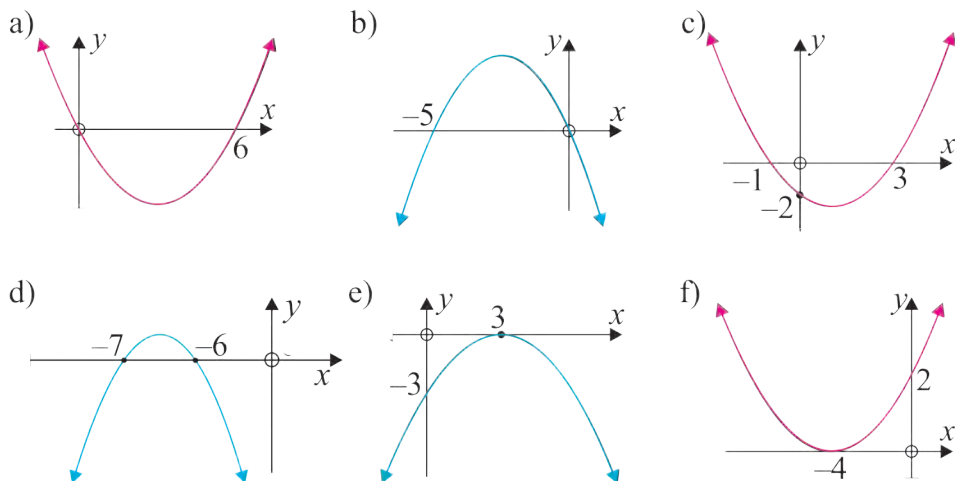
103. Параболалардин абсциссалар кóшерин менен кесилиш ноқатларин таби́н:

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $y = x^2 - x - 6$; | d) $y = 3x - x^2$; | g) $y = -x^2 - 4x + 21$; | j) $y = -2x^2 + x - 5$; |
| b) $y = x^2 - 16$; | e) $y = x^2 - 12x + 36$; | h) $y = 2x^2 - 20x + 50$; | k) $y = -6x^2 + x + 5$; |
| c) $y = x^2 + 5$; | f) $y = x^2 + x - 7$; | i) $y = 2x^2 - 7x - 15$; | l) $y = 3x^2 + x - 1$. |

104. Параболалардин координаталар кóшерин менен кесилиш ноқатларин таби́н:

- | | | | |
|------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| a) $y = x^2 + x - 2$; | d) $y = x^2 + x + 4$; | g) $y = -x^2 - 7x$; | j) $y = -x^2 + 2x - 9$; |
| b) $y = (x+3)^2$; | e) $y = 3x^2 - 3x - 36$; | h) $y = -2x^2 + 3x + 7$; | k) $y = 4x^2 - 4x - 3$; |
| c) $y = (x+5)(x-2)$; | f) $y = -x^2 - 8x - 16$; | i) $y = 2x^2 - 18$; | l) $y = 6x^2 - 11x - 10$. |

105. Параболанин симметриа кóшерин таби́н:



106. Параболанин симметриа кóшерин таби́н:

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) $y = (x-2)(x-6)$; | d) $y = (x-3)(x-8)$; |
| b) $y = x(x+4)$; | e) $y = 2(x-5)^2$; |
| c) $y = -(x+3)(x-5)$; | f) $y = 3(x+2)^2$. |

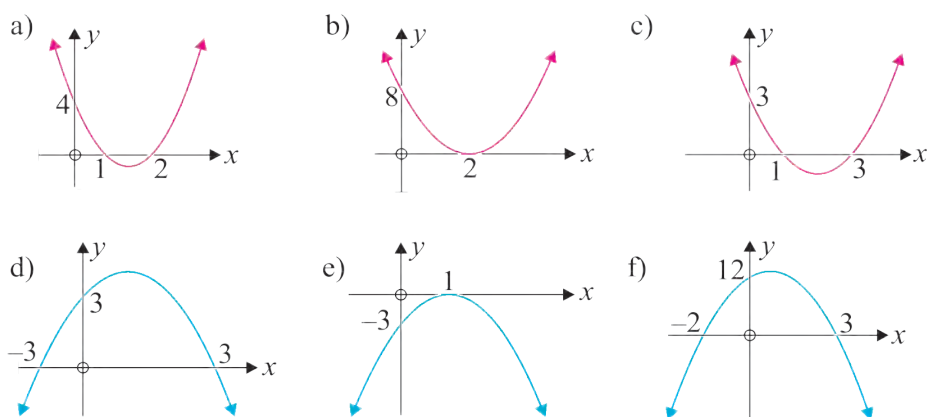
107. Parabolaniń simmetriya kósherin tabıń:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = x^2 + 6x + 2$; | f) $y = -5x^2 + 7x$; |
| b) $y = x^2 - 8x - 1$; | g) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; |
| c) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$; | h) $y = 10x - 3x^2$; |
| d) $y = -x^2 + 3x - 7$; | i) $y = \frac{1}{8}x^2 + x - 1$. |
| e) $y = 2x^2 - 5$; | |

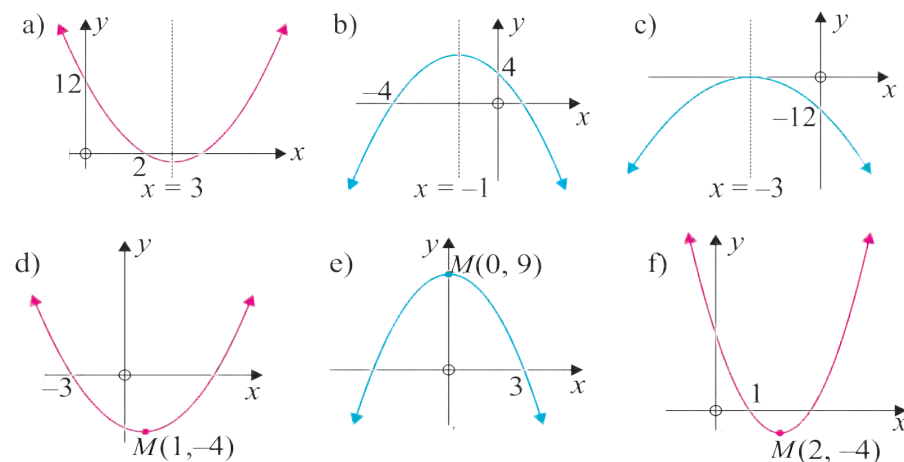
108. Parabola ushınıń (tóbesiniń) koordinataların tabıń:

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = x^2 - 4x + 7$; | f) $y = -3x^2 + 6x - 4$; |
| b) $y = x^2 + 2x + 5$; | g) $y = x^2 - x - 1$; |
| c) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$; | h) $y = -2x^2 + 3x - 2$; |
| d) $y = x^2 + 3$; | i) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x - 2$. |
| e) $f(x) = 2x^2 + 12x$; | |

109. Parabolaǵa qarap, oǵan sáykes kvadrat funkciya formulasın jazıń:



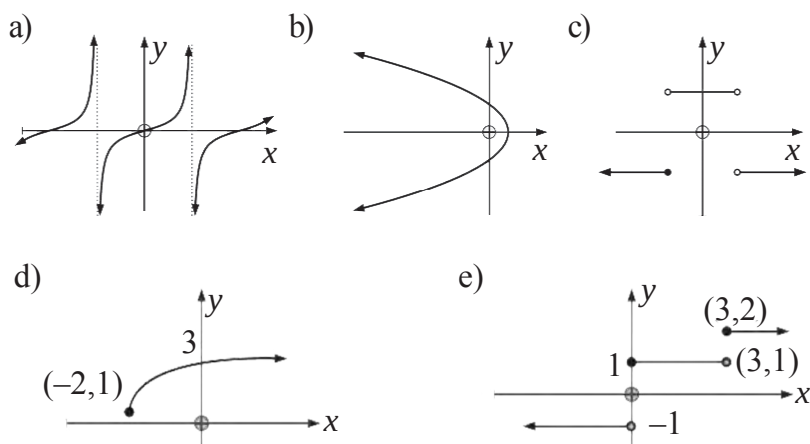
110. Parabolaǵa qarap, kvadrat funkciya formulasın jazıń:



- 111.** Dániyar teñizge dúrdi alıw ushın súngidi. Onıń t sekunddan keyingi súngiw tereńligi $H(t) = -4t^2 + 4t + 3$ metr boldı, $t \geq 0$.
- dúrler qanday tereńlikte jaylasqan?
 - Dániyar dúrdi alıw ushın qansha waqıt sarıplaydı?
 - Dániyar qanday biyiklikten suwǵa súngidi?
- 112.** Jasmina kóylek tigiw ushın buyırtpa aldı. Ol bir kúnde x dana kóylek tikse, ol $P(x) = -x^2 + 20x$ AQSh dolları muǵdarında tabıs aladı.
- Eń úlken tabıs alıw ushın ol qansha kóylek tigiwi kerek?
 - Eń úlken tabıs neshe dollarǵa teń?

Baqlaw jumısı úlgisi

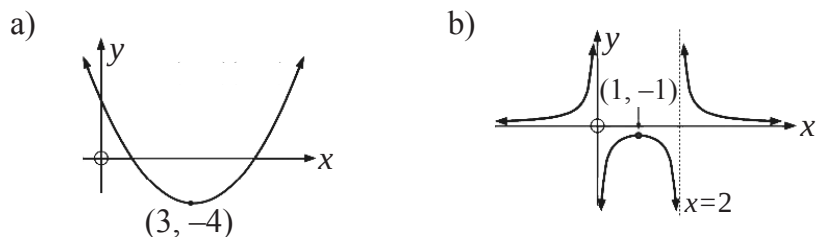
- 1.** Tóمندegi qatnaslardan qaysıları funksiýalar esaplanadı?



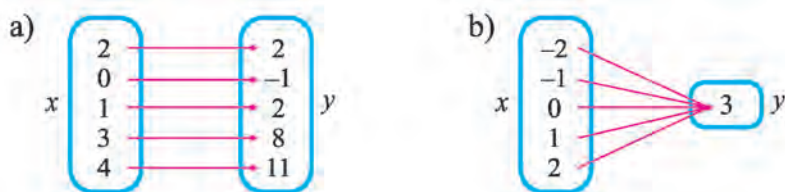
- 2.** Tóمندegi tártiplengen juplıqlar kópliklerinen qaysıları sáwlelendiriw boladı? Juwabınızdı tiykarlań.

- $\{(1, 2), (-1, 2), (0, 5), (2, -7)\}$;
- $\{(0, 1), (1, 3), (2, 5), (0, 7)\}$;
- $\{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$.

- 3.** Grafik kóriniside berilgen funksiýalardıń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin tabıń:



4. Tóمندegi diagramma $y=f(x)$ sáwlelendiriwdi bermekte.



1) $y=f(x)$ sáwlelendiriwdiń anıqlanıw oblastın hám mánisler kópligin jazıń.

2) $y=f(x)$ sáwlelendiriw tegisliktegi koordinatalar sistemasında qalay súwretlenedi?

3) $y=f(x)$ ushın anıq ańlatpanı jazıń.

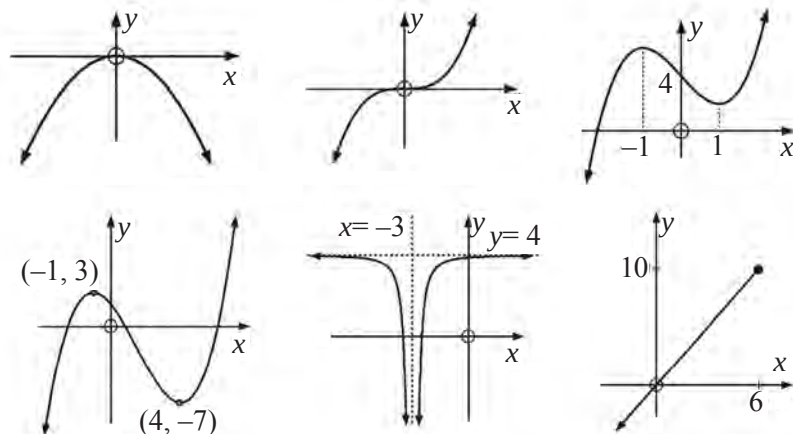
5. $f(x)=2x-x^2$ funkciya ushın:

a) $f(2)$; b) $f(-3)$; c) $f(-\frac{1}{2})$ mánislerin tabıń.

6. $g(x)=x^2-3x$ funkciya ushın a) $g(x+1)$; b) $g(x^2-2)$ ańlatpalardı tabıń hám ápiwayılastırıń.



7. Grafik kórinisinde berilgen funkciyalardıń kemeyiw hám ósiw aralıqların tabıń:



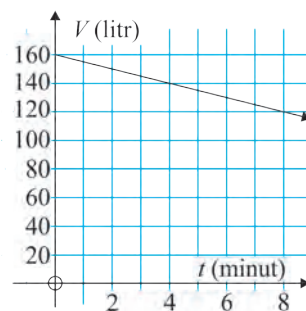
8. a) $f(x)=2x+1$; b) $f(x)=-3x+2$;
c) $f(x)=x^2$; d) $f(x)=-x^3$ funkciyalar ushın:

1) funkciyalardıń kósherler menen kesilisiw noqtaların tabıń;

2) lokal maksimum, lokal minimum noqtaları koordinataların tabıń;

3) funkciyalar grafigin shamalap sıziń.

9. Tóمندegi grafikte minutlarda ańlatılǵan t waqıtta cisternadan shıǵıp atırǵan neft óniminiń V kólemi súwretlengen.



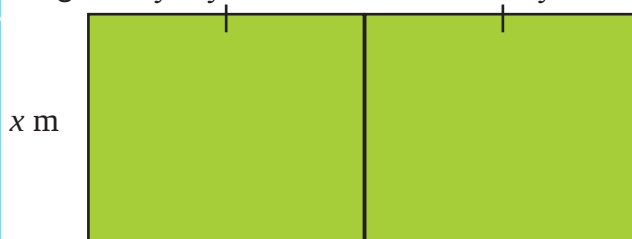
- 1) Shıǵıp atırǵan neft óniminiń kólemi menen waqıt arasındagı baylanıs formulasın tabıń.
- 2) 15 minutta qansha neft shıǵadı?
- 3) 50 litr neft neshe minutta shıǵadı?
- 4) Cisterna qansha waqıttan soń bosaydı?

10. Tas teńiz qáddinen (betinen) 60 metr biyiklikten joqarıǵa ılaqtırılǵan. t sekunddan soń tastıń teńiz qáddine salıstırǵandagı biyikligi $H(t) = -5t^2 + 20t + 60$ metrge teń bolsa:

- 1) Neshe sekundtan soń tastıń biyikligi eń úlken boladı?
- 2) Tastıń teńiz qáddine salıstırǵandagı biyikligi qanshaǵa teń?
- 3) Neshe sekundtan soń tas suwǵa túsedi?

Fermer súwrette kórsetilgen eki birdey maydangá iye bolǵan biyday atızın 2000 metr diywal menen qorshadı.

11.



- 1) Atızlardıń ulıwma maydanı x arqalı qalay ańlatıladı?
- 2) Eki atızdıń ulıwma maydanı eń kóbi menen neshe kvadrat metrge teń bolıwı múmkin? Bul atızlardıń ólshemlerin anıqlań.

55

DÁWIRLI PROCESLER HÁM OLARDÍ BAQLAW

Dáwirli procesler tábiyatta hám texnikada keń tarqalǵan. Olarǵa mısallar keltireyik:

- jıl máwsimleri boyınsha hawa rayınıń ózgeriwi;
- aylardagı ortasha temperaturanıń ózgeriwi;
- kún hám túnniń dawamlılıǵı;
- teńiz jaǵası janındagı suw tereńligi;
- haywanlar sanı;

- quyash aktivliginiń ózgeriwı;
- Mexanika, elektrotexnikadaǵı dáwirli terbelisler.

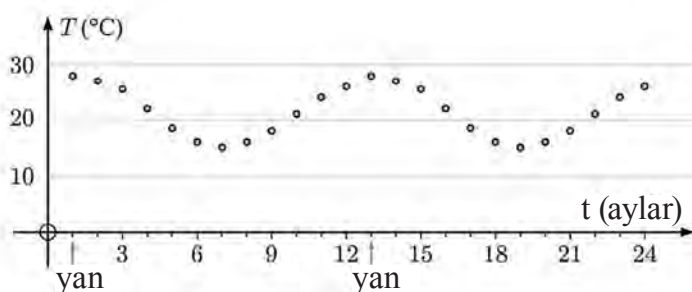
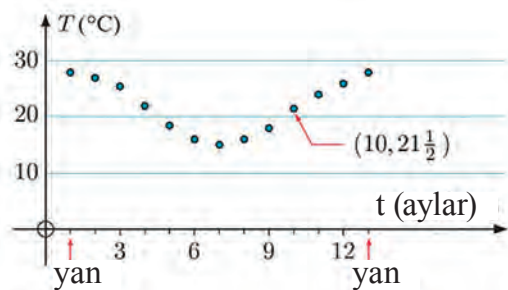
Bul proceslerde anıq waqıt aralıqlarında tákirarlanıp turatuǵın jaǵdaylar baqlanadı. Olar jaǵdayǵa qarap **dáwirli**, **terbeletuǵın** yamasa **ciklli** delinedi.

Máselen, Qubla Afrikadaǵı Keyptaun qalasında aylıq maksimal temperatura-nıń ózgeriwın ańlatıwshı kesteni qarayıq:

Ay	Yan	Fev	Mar	Apr	May	Iyun	Iyul	Avg	Sen	Okt	Noy	Dek
Temp (0°C)	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Bul maǵlıwmatlardı grafikalıq kórinisinde ańlatayıq. Buniń ushın ordinatalar kósheri temperaturanı, abscissalar kósheri bolsa aydıń tártiplik sanın (Máselen, fevral ushın $t=2$) bildirsın. Grafikte yanvar ayında ortasha 28°C temperatura bolıwı baqlanbaqta. Bunday mánistiń hár jıldıń yanvarında, yaǵnıy hár 12 ayda tákirarlanıwın kútiw tabıyıp.

Basqa aylar ushın da ortasha temperatura ózgeriwın shamalap kórsetiwshi grafikti sıızıp, onı keyingi jılǵa da dawam ettirsek boladı:



Eger $y=f(t)$ funkciya t ayda ortasha temperaturanı ańlatsa, $f(0)=f(12)=f(24)=\dots$, $f(1)=f(13)=f(25)=\dots$ hám t.b. kibi nızamı, ulıwma jaǵdayda, qálegen t ushın $f(t+12)$ bolıwı baqlanbaqta.

Bunda tákirarlanıw baqlanatuǵın 12 ay múddetti **dáwir** dep aytamız.

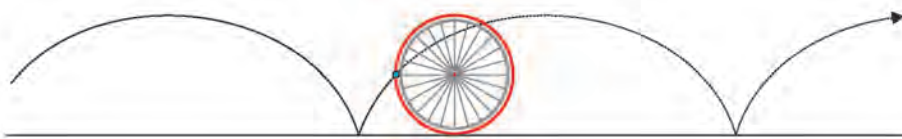
X kóplikte anıqlanğan $f(x)$ funkciya ushın qálegen x ta $f(x+T)=f(x)$ teńlik-ti qanaatlandıratuǵın $T>0$ bar bolsa, $f(x)$ funkciya *dáwirli* delinedi, bunda $x+T \in X$.

Eger $f(x+T)=f(x)$ bolsa, ol jaǵdayda $f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\dots$ ekenligi belgili.

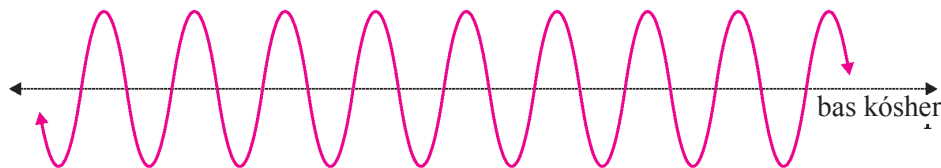
Bunday $T>0$ sanlardıń eń kishi mánisin *funkciyanıń dáwiri* dep ataymız.

Dóngelek tuwrı boylap aylanıp háreket qılsa, ondaǵı anıq bir belgilengen noqat *cikloida* dep atalǵan iymek sıızıq boyınsha dáwirli háreket qıladı.

Sikloida $y=f(x)$ kórinisindegi teńlemege iye emes ekenligin aytıp ótiwimiz orınlı.

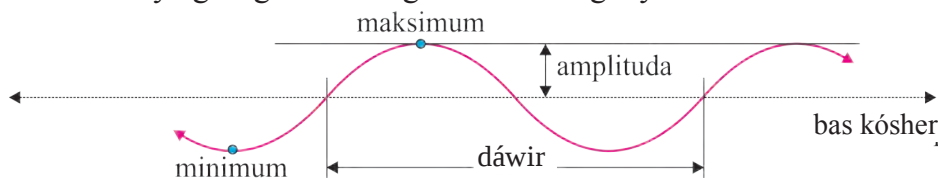


Dáwirli funkciyalar grafikleri tómendegi kóriniske iye:



Bas kósher teńlemesi tómendegishe tabıladı: $y = \frac{\max + \min}{2}$, bunda $\max$ – funkciyanıń eń úlken, $\min$ bolsa eń kishi mánisi.

Dáwirli funkciya grafigi tómendegishe bóleklerge iye:



Amplituda funkciyanıń maksimumı menen kósher (yamasa kósher menen minimum) arasındaqı aralıq bolıp, ol tómendegishe tabıladı:

$$\text{amplituda} = \frac{\max - \min}{2}.$$

Soraw hám tapsırmalar

1. Dáwirli proceske mısıl keltiriń.
2. Funkciyanıń dáwirine anıqlama beriń.
3. Dáwirli funkciyanıń amplitudası qalay esaplanadı?
4. Sikloidanıń ne ekenligin túsindiriń.
5. Qashan kvadrat funkciya maksimumǵa (minimumǵa) iye?



Shinigiwlar

113. Hár bir jaǵday ushın maǵlıwmatlardı grafik kóriniside súwretleń hám olardıń dáwirli-dáwirli emesligi haqqında juwmaq shıǵarıń:

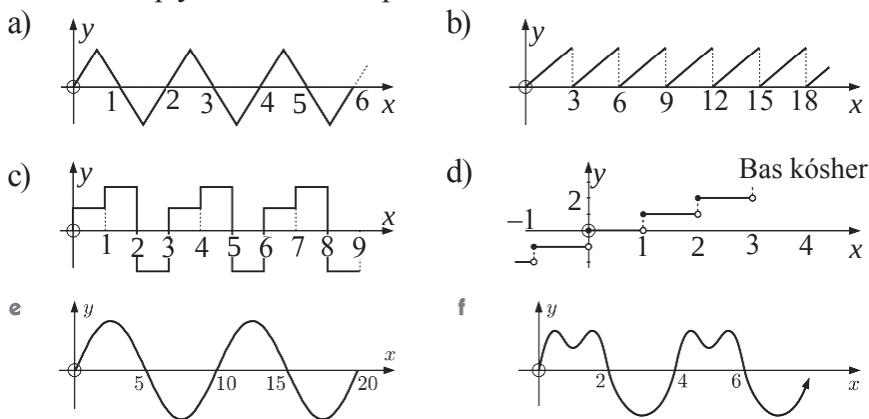
a)	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	y	0	1	1,4	1	0	-1	-1,4	-1	0	1	1,4	1	0
b)	x	0	1	2	3	4								
	y	4	1	0	1	4								
c)	x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5					
	y	0	1,9	3,5	4,5	4,7	4,3	3,4	2,4					
d)	x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12		
	y	0	4,7	3,4	1,7	2,1	5,2	8,9	10,9	10,2	8,4	10,4		

114. Tómenдеgi kesteda dóńgelek tuwrı boylap aylanıp qozǵalsa, onda belgilengen noqattıń qozǵalısn ańlatıwshı muǵdarlar keltirilgen:

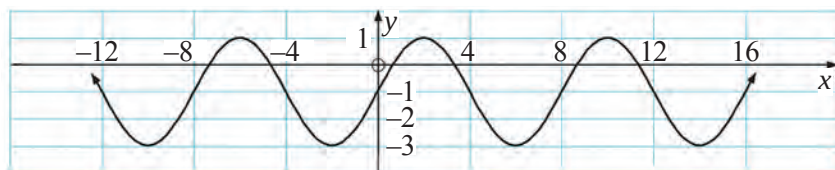
Aralıq (sm)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
Biyiklik (sm)	0	6	23	42	57	64	59	43	23	7	1
Aralıq (sm)	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	
Biyiklik (sm)	5	27	40	55	63	60	44	24	9	3	

- a) Biyiklikniń aralıqqa baylanıslı ekenligin grafik kóriniside ańlatıń.
b) Bul process dáwirli me? Eger dáwirli bolsa, kósher teńlemesin, funksiyanıń maksimumın, dáwirin, amplitudasın tabıń.

115. Grafiklerden qaysı biri dáwirli procesti ańlatadı?



16.



Berilgen dáwirli funkciya ushın:

- amplitudani tabıń;
- dáwirdi tabıń;
- birinshi maksimum noqatın tabıń;
- eki maksimum noqat arasındagı aralıqtı anıqlań;
- bas kósherdıń teńlemesin dúziń.

56-58

$y=\sin x$, $y=\cos x$ FUNKCIYALAR HÁM OLAR JÁRDEMINDE MODELLESTIRIW

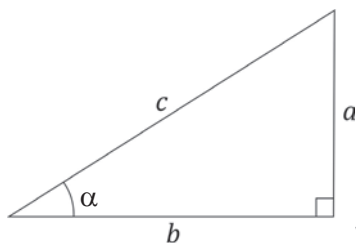
Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte a , b – katetler, c – gipotenuza bolsın. α dep a katetke qarama-qarsı múyeshti belgileyimiz (1-súwretke qarań).

Geometriya kursında α múyeshtiń sinusi hám kosinusi tómendegi teńlikler járdeminde kirgiziledi:

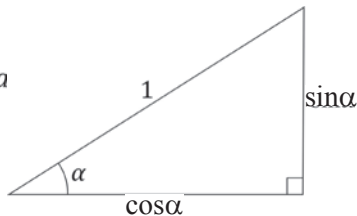
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Gipotenuzanı 1 dep alsaq, 1-súwret 2-súwrettegi kórinisti aladı.

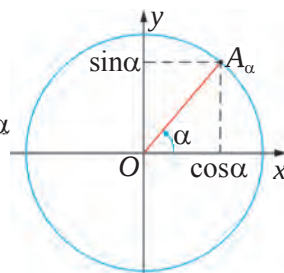
Tegislikte koordinatalar sistemasın kirgizip, onda *radiusı 1 ge teń sheńberdi* – *birlik sheńberdi* qaraymız hám usı sheńberde α múyeshke sáykes bolğan noqattı belgileyimiz (3-súwret).



1-súwret.



2-súwret.

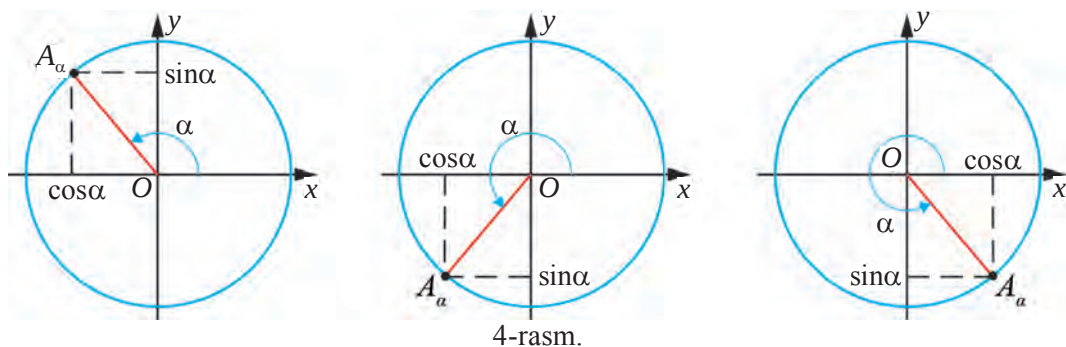


3-súwret.

α múyeshtiń sinusi dep $(1;0)$ noqattıń koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolğan A_α noqattıń ordinatasına aytıladı ($\sin \alpha$ kibi belgilenedi).

Tap sonday, α múyeshtiń kosinusi dep $(1;0)$ noqattı koordinatalar bası átirapında α múyeshke burıw nátiyjesinde payda bolğan A_α noqattıń abscissasına aytıladı ($\cos \alpha$ kibi belgilenedi).

α múyeshke sáykes noqat basqa shereklerde jatsa, tómendegi kibi kórinislerge iye bolamız (4-súwret):



Pifagor teoremasi boynsha, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ – *tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik orınlı*, bunda $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$. Trigonometriyada qaralatuǵın múyeshler (doǵalar) graduslarda yamasa radianlarda ólsheniwi múmkin.

α oraylıq múyeshke sáykes doǵa uzınlıǵınıń sol doǵa radiusına qatnası usı múyeshtiń radian ólshemi delinedi.

Graduslarda berilgen α múyeshtiń radian ólshemi $\frac{\pi}{180^\circ}\alpha$ ǵa teń.

Ko'p ushırasatuǵın múyeshlerdiń radian ólshemleri kestesin keltiremiz:

Gradus	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Ayırım α múyeshler sinusi hám kosinusi mánislerin tabayıq.

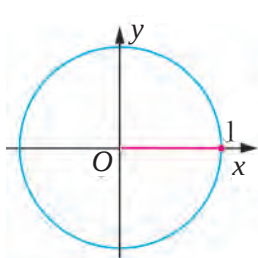
1. $\alpha = 0^\circ$ bolsın (5-súwret). Bul jaǵdayǵa sáykes noqattıń abscissası 1 ge, ordinatası bolsa 0 ge teń, demek, $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$.

2. $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$ bolsın (6-súwret). Tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte 30° lı múyesh qarsısındaǵı katet gipotenuzanıń yarımına teń bolǵanı ushın, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

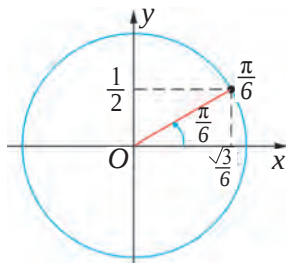
boladı. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylik boynsha $\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$ bolsın (7-súwret). Bul jaǵdayda teń qaptallı tuwrı múyeshli úshmúyeshlik payda boladı.

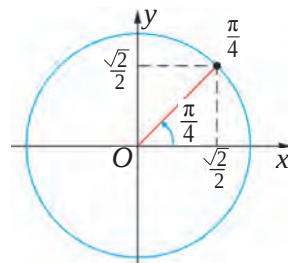
Bunday úshmúyeshlikte α múyeshtiń sinusi hám kosinusi óz ara teń. Olardı x deyik. Tiykarǵı trigonometriyalıq birdeylikten $x^2 + x^2 = 1$, yaǵnıy $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ boladı. Demek, $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



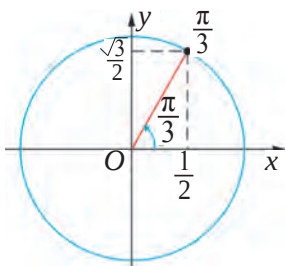
5-súwret.



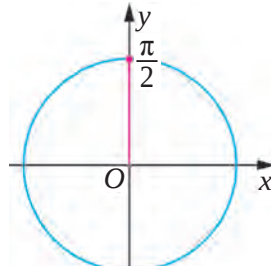
6-súwret.



7-súwret.



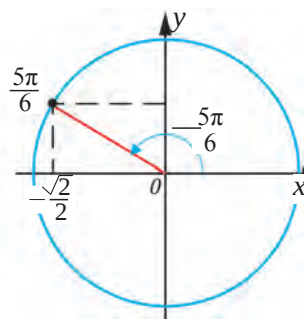
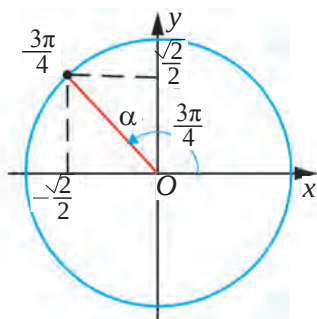
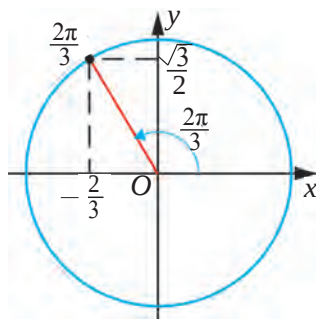
8-súwret.



9-súwret.

4. $\alpha = \pi/3 = 60^\circ$ bolsin (8-súwret). Bul jaǵdayda tap $\alpha = \frac{\pi}{6}$ jaǵdayǵa uqsas aytım júrgizip, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ teńliklerge iye bolamız.

5. $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$ bolsin (9-súwret). Bul jaǵdayǵa sáykes noqattın abscissası 0 ge, ordinatası bolsa 1 ge teń. Demek, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.



10-súwret.

6. $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ bolǵan jaǵdaylardı qarayıq. (10-súwret). $\frac{2\pi}{3}$ noqat ushın $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$. Ol jaǵdayda, bul noqat $\frac{\pi}{3}$ noqatqa Oy kósherine

salıstırğanda simmetriyalı. Demek, $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{3\pi}{4}$ noqat ushın $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$. Ol jağdayda, bul noqat $\frac{\pi}{4}$ noqatqa Oy kóshetine

salıstırğanda simmetriyalı. Demek, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{5\pi}{6}$ noqat ushın $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$. Ol jağdayda, bul noqat $\frac{\pi}{6}$ noqatqa Oy kóshetine

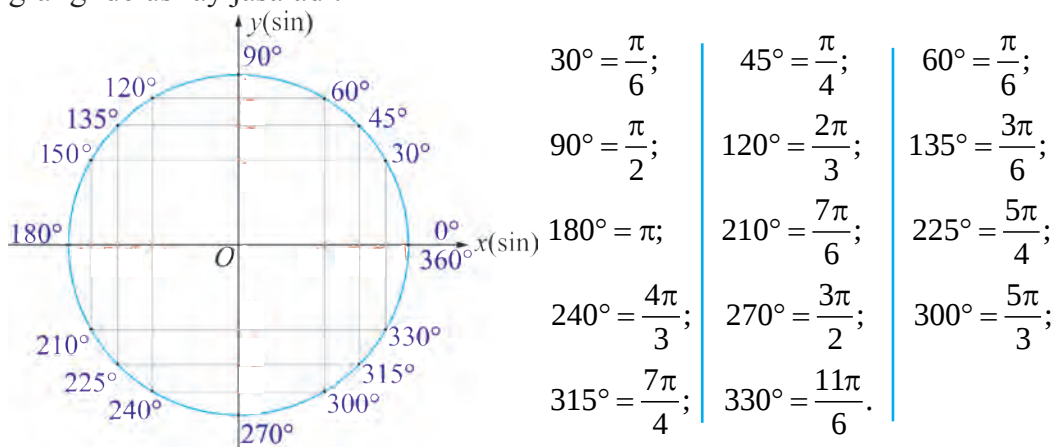
salıstırğanda simmetriyalı. Demek, $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

7. $\alpha = \pi = 180^\circ$ jağdayda $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$ ekenin dálillew hám sáykes súwret sızıwdı oqıwshıǵa usınıs etemiz.

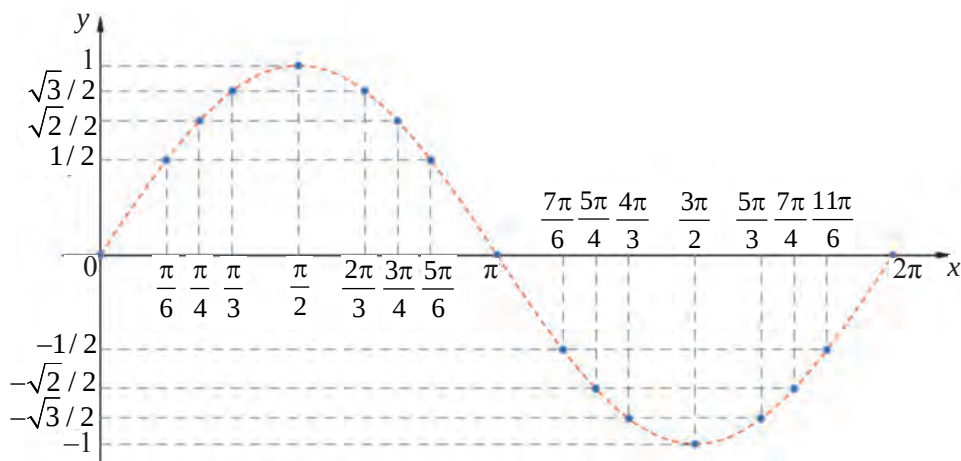
Joqarıda biz $[0; \pi]$ aralıqta ayırım múyeshler ushın sinus hám kosinus mánisler-in anıqladıq. Bul múyeshlerdiń hár birine π di qosıp $[\pi; 2\pi]$ aralıqtaǵı múyesh-ler ushın da sinus hám kosinus mánislerin anıqlaw múmkin.

Nátıyjelerdi *trigonometriyalıq sheńber* dep atalǵan 11-súwrette anlatamız:

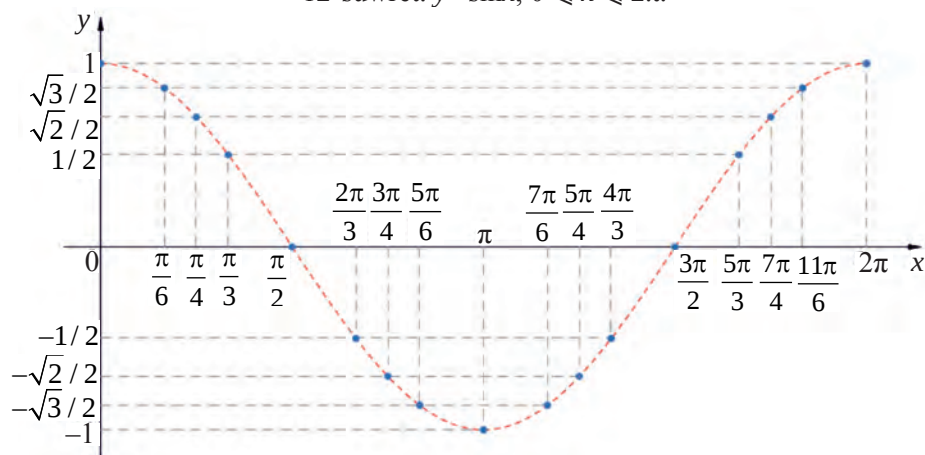
Joqarıdaǵı mánislerden paydalanıp $y = \sin x$, $y = \cos x$ funkciyalar grafiklerin sızıw múmkin. Bunıń ushın abscissalar kósherinde α múyeshtiń mánislerin, al ordinatalar kósherinde sinustıń sáykes mánislerin alıp, payda bolǵan noqatlardı belgileybiz. Soń belgilengen noqatlardı tegis sızıq penen tutastırıp, $[0; 2\pi]$ ara-lıqtaǵı $y = \sin x$ (12-súwret) funkciya grafigin payda etemiz. $y = \cos x$ (13-súwret) grafigi de usılay jasaladı.



11-súwret. Trigonometriyalıq sheńber. Sinus hám kosinustıń ayırım mánisleri.

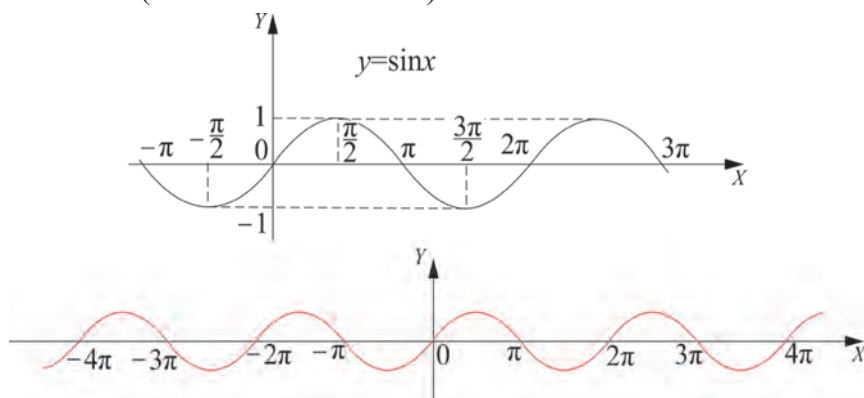


12-súwret. $y = \sin x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

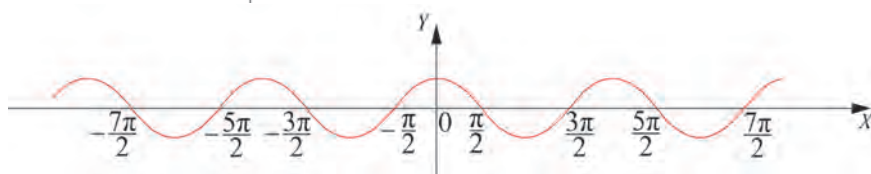
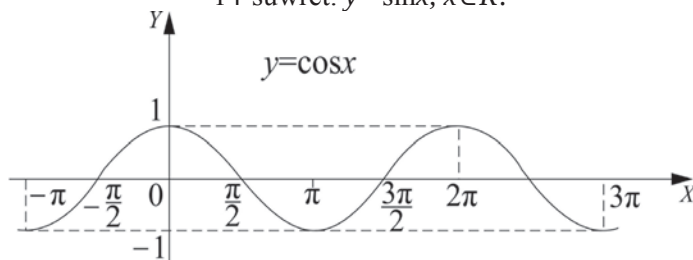


13-súwret. $y = \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$.

Bul grafiklerdi dáwirli dawam ettirip, $y = \sin x, y = \cos x$ funkciyalardıń grafiklerin payda etemiz (14 hám 15-súwretler).



14-súwret. $y = \sin x$, $x \in R$.



15-súwret. $y = \cos x$, $x \in R$.

Grafiklardi oqip sonday juwmaqqa kelemiz: $y = \sin x$ ($y = \cos x$) funkciyaníń dáwiri 2π ge, amplitudası 1 ge, eń úlken mánisi 1 ge, eń kishi mánisi bolsa -1 ge teń.

Qollanıwırlarda keń ushırasatuǵın $y = a \sin x$ hám $y = \sin bx$, $b \neq 0$ funkciyalar haqqında geypara aytımlardı keltiremiz.

$y = a \sin x$ funkciyaníń amplitudası $|a|$ ǵa teń. Onıń grafıǵı $y = \sin x$ funkciya grafıǵın $|a| > 1$ bolǵanda ordinata kósheri boyınsha sozıw, $|a| < 1$ bolǵanda bolsa qısıw nátiyjesinde payda boladı. $y = \sin bx$ funkciyanıń dáwiri $\frac{360^\circ}{|b|}$ ge teń. Bul

funkciyanıń grafıǵı $y = \sin x$ funkciya grafıǵınen $0 < |b| < 1$ bolǵanda abscissa kósheri boyınsha sozıw, $|b| > 1$ bolǵanda qısıw nátiyjesinde payda boladı.

$y = \sin x + c$ kórinisindegi funkciya grafıǵı $y = \sin x$ funkciya grafıǵın c birlikke parallel kóshiriw nátiyjesinde payda boladı hám bunda $y = \sin x + c$ funkciyanıń bas kósheri $y = c$ teńlemege iye.

Joqarıdaǵılardı inábatqa alıp, $y = a \sin bx + c$ kórinisindegi funkciya grafıǵın payda qılıw múmkin.

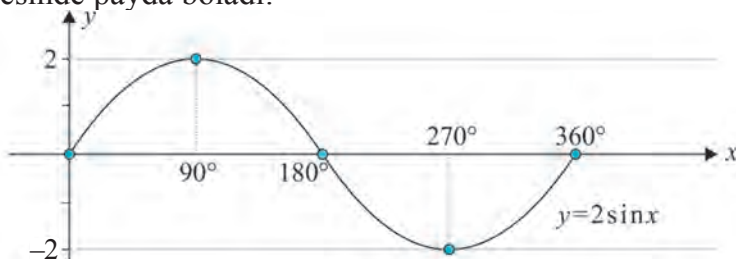
Máselen, $y = 2 \sin 3x + 1$ funkciyanı qarayıq.

Bul funkciya grafıǵı $y = \sin x$ funkciya grafıǵınen tómendegishe payda boladı:

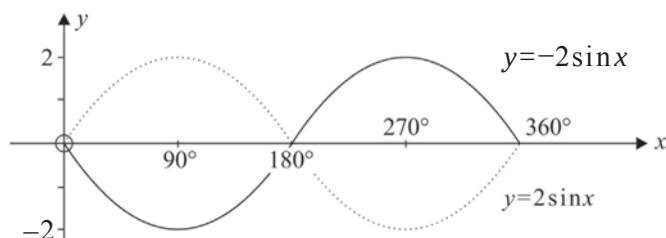
1. Amplitudanı ekige kóbeytip $y = 2 \sin x$ ti payda etemiz
 2. Dáwirdi úshke bólip, $y = 2 \sin 3x$ ti payda etemiz
 3. Berilgen 1 birlikke parallel kóshiremiz. $y = 2 \sin 3x + 1$ funkciyanıń bas kósheri $y = 1$ teńlemege iye.
 4. Nátiyjede $y = 2 \sin 3x + 1$ funkciya grafıǵın payda etemiz.
- Soǵan uqsas aytımlardı $y = \cos x$ funkciya haqqında da keltiriwge boladı.

1- misal. $y = 2\sin x$, $y = -2\sin x$, $y = \sin 2x$ funkciyalar grafiklerin sızın, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

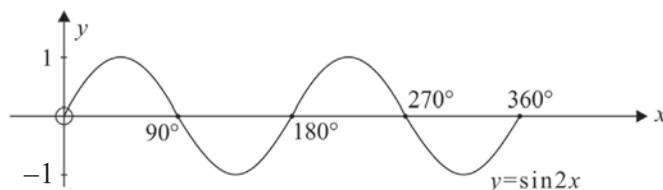
△ Dáslep $y = 2\sin x$ funkciya grafigin sızamız. Bul funkciyanın amplitudası 2 ge teń hám onıń grafigi $y = \sin x$ funkciya grafiginiń ordinatalar kósheri boyınsha sozıw nátiyjesinde payda boladı:



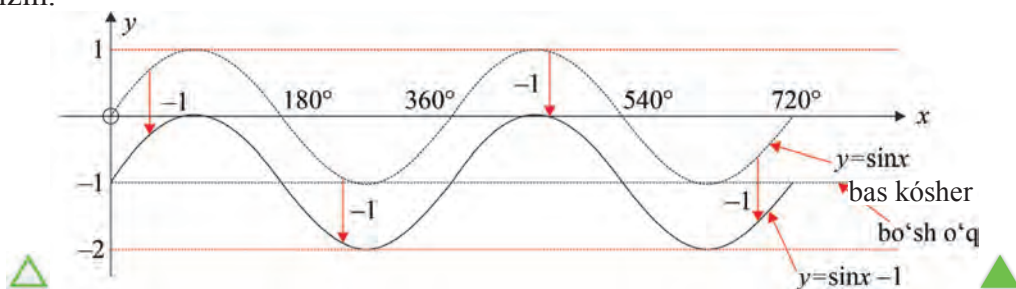
$y = -2\sin x$ funkciya grafigi $y = 2\sin x$ funkciya grafigine absissa kósherine salıstırǵanda simmetriyalı. Bunnan paydalanıp, $y = -2\sin x$ funkciya grafigin sızamız.



$y = \sin 2x$ funkciyanın dáwiri $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$. Bul funkciya grafigi tómendegishe boladı:

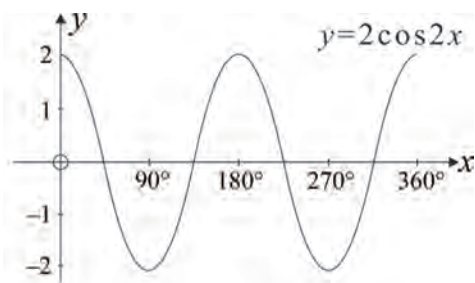


2- misal. $0^\circ \leq x \leq 720^\circ$ bolǵanda $y = \sin x$ hám $y = \sin x - 1$ funkciyalar grafiklerin sızın.



3- misal. $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ kesindide $y = 2\cos 2x$ funkciya grafigin sızayıq.

$\triangle a = 2$. Demek, funkciya amplitudası $|2| = 2$ boladı, $b = 2$ bolğanı ushın funkciyanıń dáviri bolsa $\frac{360^\circ}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ boladı. Bunnan usı grafikke iye bolamız:



Soraw hám tapsırmalar



1. Birlik dóńgelekte múyesh sinusına anıqlama beriń.
2. Birlik dóńgelekte múyesh kosinusına anıqlama beriń.
3. 30° li múyesh ushın sinus hám kosinustı esaplań.
4. $y = \sin x$ funkciya grafigin sızıń.
5. $y = \cos x$ funkciya grafigin sızıń.

Shıǵıwlar

117. Grafiklerdi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ kesindide sızıń:

- a) $y = 3\sin x$; b) $y = -3\sin x$; c) $y = \frac{3}{2}\sin x$; d) $y = -\frac{3}{2}\sin x$.

118. Grafiklerdi $0^\circ \leq x \leq 540^\circ$ kesindide sızıń:

- a) $y = \sin 3x$; b) $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$; c) $y = \sin(-2x)$; d) $y = -\sin\frac{x}{3}$.

119. Funkciyanıń dávirin anıqlań:

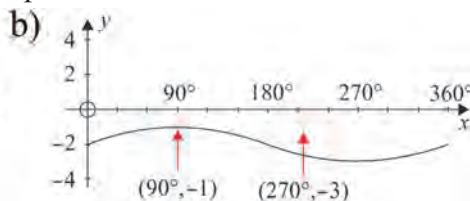
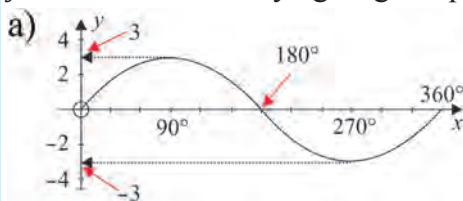
- a) $y = \sin 4x$; b) $y = \sin(-4x)$; c) $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$; d) $y = \sin(0,6x)$.

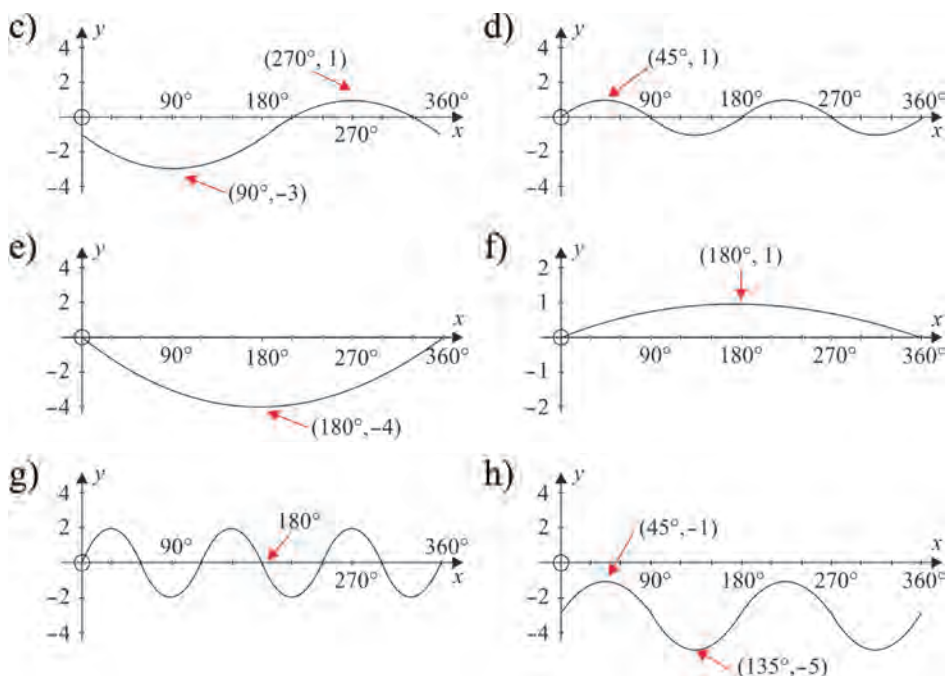
120. Eger $y = \sin bx$, $b > 0$ ushın funkciyanıń dáviri

- a) 900° ; b) 120° ; c) 2160° ; d) 720°

qa teń bolsa, b nı tabıń.

121. $y = a\sin bx + c$ funkciya grafigine qarap a , b , c sanlardı tabıń:

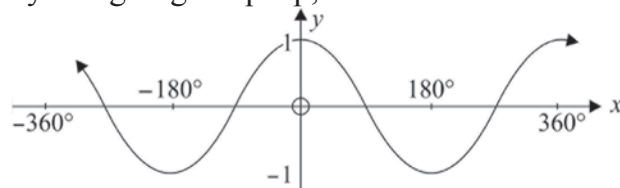




122. Grafiklardi $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ kesindide sızın:

- a) $y = \sin x + 1$; b) $y = \sin x - 2$; c) $y = 1 - \sin x$;
 d) $y = 2\sin x - 1$; e) $y = \sin 3x + 1$; f) $y = 1 - \sin 2x$.

123. $y = \cos x$ funkciyanın grafigine qarap,



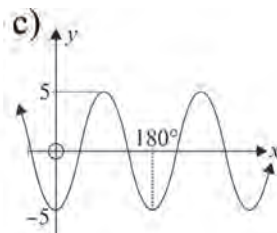
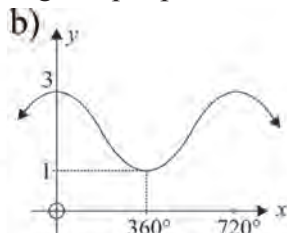
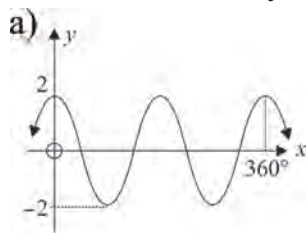
- a) $y = \cos x + 2$; b) $y = \cos x - 1$; c) $y = \frac{2}{3} \cos x$;
 d) $y = \frac{3}{2} \cos x$; e) $y = -\cos x$; f) $y = \cos 2x$;
 g) $y = \cos(\frac{x}{2})$; h) $y = 3\cos 2x$ funkciyalar grafiklerin sızın.

124 Funkciyanın dáwirin anıqlań:

- a) $y = \cos 3x$; b) $y = \cos(\frac{x}{3})$; c) $y = \cos(\frac{x}{2})$; d) $y = \cos 4x$.

125. $y = a \cos bx + c$ funkciya berilgen bolsın. a , b , c sanlardın geometriyalıq mánisin anıqlań.

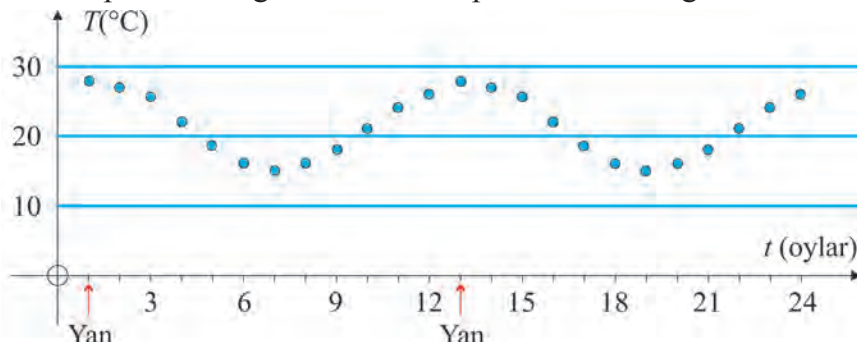
126. $y = a \cos bx + c$ funkciya grafigine qarap a , b , c sanlardi tabiñ.



4- misal. Tómente Qubla Afrikadağı Keyptaun qalasında hawa rayınıñ aylıq maksimal temperaturasınıñ ózgeriwin ańlatıwshı keste berilgen:

Ay	Yan	Fev	Mar	Apr	May	Iyun	Iyul	Avg	Sen	Okt	Noy	Dek
$T(^{\circ}\text{C})$	28	27	$25\frac{1}{2}$	22	$18\frac{1}{2}$	16	15	16	18	$21\frac{1}{2}$	24	26

Maksimal temperatura ózgeriwin shamalap súwretlewshı grafikti keltiremiz:



Meyli, bul procestiñ modeli $T = a \cos bt + c$ kórinisinde bolsın dep, parametrlar a , b , c lardı tabamız. Dáwir 12 ay bolğanı ushın

$$\frac{360^{\circ}}{|b|} = 12, \text{ yaǵnıy } b = \frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}.$$

Amplitudanı esaplaymız: $\frac{\max - \min}{2} \approx \frac{28 - 15}{2} = 6,5$. Bunnan $a \approx 6,5$.

Bas kósher maksimal hám minimal mánisler tuwrıları ortasında bolğanı ushın $c \approx \frac{28 + 15}{2} \approx 21,5$.

Demek, maksimal aylıq temperatura waqıt ótiwi menen ózgeriwiniñ matematikalıq modeli $T \approx 6,5 \cos 30t + 21,5$ funkciyası boladı.

Shınıǵıwlar

127. Antarktidadağı Polyus bazasında 30 jıl dawamında ortasha temperatura tóمندegishe bolğanlıǵı belgili:.

Aydin tartaip-lik sani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatura (°C)	0	-4	-10	-15	-16	-17	-18	-19	-17	-13	-6	-1

O'rtasha temperatura o'zgeriwini matematikalik modelin duzin

128. Teniz jagasinda teniz suwini koteriliwi ham qaytiw procesi baqlangan-da to'mendegiler aniqlandi: 1) suw tereñligini eñ ulken ham eñ kishi manisleri arasindağı pariğ 14 metr; 2) suw tereñligi eñ ulken manislerge ortasha har 12,4 saatta erisedi. Suw tereñligini waqitqa salıstırğandağı o'zgeriwini matematikalik modelin duzin ham onı grafikaliğ kórinisinde ańlatın.

129. Velosiped dongeleginde sarı reñli nur qaytarğısh ornatılğan. Velosiped tunde tegis jol boylap hareketlengende ol videoğa túsirip alındı. Videoğa túsiriwdin tiykarında nur qaytarğıstın jolğa salıstırğandağı biyikligi waqıt ótiwi menen qalay o'zgergeni aniqlanıp, to'mendegi keste toltırıldı:

Waqıt (t)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Biyiklik (H, sm)	19	17	38	62	68	50	24	15	31

a) Sinus funkciyasınan paydalanıp, processtin matematikalik modelin duzin;

b) processtin grafikaliğ kórinisin keltirin;

t (aylar)

c) dongelektiñ radiusın tabın;

d) velosiped qanday tezlikte hareketlenbekte?

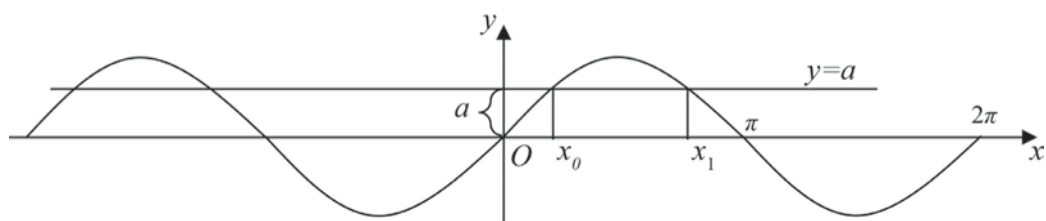
59-61 EÑ ÁPIWAYÍ TRIGONOMETRIYALÍQ TEÑLEMELER

sin x=a teñleme

$-1 \leq \sin x \leq 1$ ekenliginen, $\sin x = a$ teñleme $|a| > 1$ bolğanda sheshimge iye emes. $-1 \leq a \leq 1$ aralıqta teñlemenin sheshimin tabıw ushın to'mendegi aniqlamani kirgizemiz.

$a \in [-1; 1]$ sannin **arcsinusi** dep sinusı a ga teñ bolğan $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sang aytıldı: Eger $\sin x = a$ ham $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ bolsa, $\arcsin a = x$.

Teñlemenin sheshiw ushın 16-súwrettegi $y = \sin x$ funkciya grafiginen paydalanamiz.



16-súwret.

$a \in [-1; 1]$ bolganda $y = a$ funkciya $[0; 2\pi]$ aralıqta $y = \sin x$ funkciya grafigin abscissaları x_0 hám $x_1 = \pi - x_0$ bolgan noqatlarda kesiwin grafikten kóriwge boladı. Bul eki noqattı bir formula arqalı jazıw múmkin:

$$x = (-1)^n \arcsin a, \text{ bul jerde } n = 0, 1.$$

$y = \sin x$ funkciyanıń dáwiriliginen paydalanıp, teńlemenı sheshiw ushın usı formulanı payda etemiz:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

1-misal. Esaplań: 1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$.

△ Anıqlama boyınsha $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$, $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hám $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolganı ushın $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Tap sonday, $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$ boladı. ▲

2-misal. Teńlemenı sheshiń: $\sin x = \frac{1}{2}$.

△ (1) Formula boyınsha teńlemenıń sheshimi

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ boladı. } \blacktriangle$$

3-misal. Teńlemenı sheshiń: $\sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ $y = \sin x$ funkciya taq bolganı ushın $\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ boladı.

(1) formulanı qollap, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ teńlikti pay-

da etemiz. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$ bolganı ushın $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k$ yoki $x = \frac{\pi}{6} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sheshimlerdi alamız. ▲

$\sin x = a$ тенлеменин дара жагдайлardaǵı sheshimlerin keltiremiz:

$a=1$ bolǵanda $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $a=-1$ bolǵanda $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

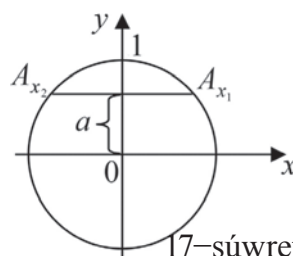
$a=0$ bolǵanda $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4-misal. Tenlemeni sheshiń: $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = 0$.

△ $a=0$ bolǵanlıqtan $-\frac{\pi}{10} + \frac{x}{2} = \pi k, \frac{x}{2} = \pi k + \frac{\pi}{10}$, yaǵnıy $x = \frac{\pi}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

sheshimlerdi tabamız. ▲

$\sin x = a$ tenlemeni sheshiwdi birlik dóńgelekte túsindiriw ańsat. $\sin x$ tiń anıqlaması boyınsha, onıń mánisi birlik dóńgelekтегі A_x noqattıń ordinatası boladı. $|a| < 1$ bolǵanda bunday noqatlar ekew, yaǵnıy A_{x_1} hám A_{x_2} . $a = \pm 1$ bolǵanda bolsa birew (17-súwret).



17-súwret.

cos x = a tenleme

$-1 \leq \cos x \leq 1$ bolǵanı ushın $\cos x = a$ tenleme $|a| > 1$ bolǵanda sheshimge iye emes. $-1 \leq a \leq 1$ aralıqta tenlemeni sheshiw ushın usı anıqlamanı kirgizemiz.

$a \in [-1; 1]$ sannıń **arkkosinusi** dep kosinusi a ga ten bolǵan $x \in [0; \pi]$ sanǵa aytıladı: Eger $\cos x = a$ hám $x \in [0; \pi]$ bolsa, $\arccos a = x$.

Anıqlamaǵa kóre, $[0; \pi]$ aralıqta $\cos x = a$ tenleme bir $x = \arccos a$ korenge iye. $y = \cos x$ funkciya jup bolǵanlıǵı ushın $[-\pi; 0]$ aralıqta da bir $x = -\arccos a$ sheshimge iye. Funkciyanıń dáwiri 2π . Ol jaǵdayda $\cos x = a$ tenlemeni sheshiw ushın $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ (2) formulanı payda etemiz.

5-misal. Esaplań: 1) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

△ Anıqlama boyınsha, $-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1, \frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$ hám $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bolǵanı ushın

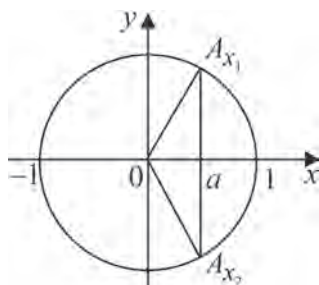
$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ boladı. Tap sonday, $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ boladı. ▲

6-misal. Tenlemeni sheshiń: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

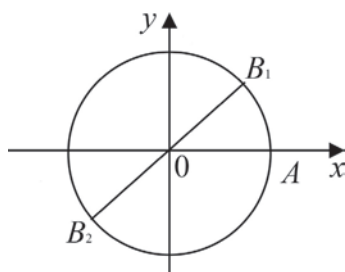
△ (2) formula boyınsha tenlemeniń sheshimi $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, biraq

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Demek, sheshim usi kóriniside boladı: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ ▲



18-súwret.



19-súwret.

$\cos x = a$ teńleme sheshiliwin birlik dóńgelekte túsindiremiz (18-súwret). $\cos x$ funkciyanıń anıqlaması boyınsha onıń mánisi birlik dóńgelekтегі A_x noqattıń abscissası boladı. $|a| < 1$ bolǵanda bunday noqatlar ekew, yaǵnıy A_{x_1} hám A_{x_2} ; $a = 1$ hám $a = -1$ bolǵanda bunday noqat birew.

$\cos x = a$ teńlemenıń dara jaǵdaylardaǵı sheshimlerin keltiremiz:

$a = 1$ bolǵanda $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $a = -1$ bolǵanda $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$a = 0$ bolǵanda $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7- misal. Teńlemenı sheshiń: $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

▲ $\cos x = 0$ teńlemenıń sheshimi formulasınan $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ nı payda etemiz.

Bunnan, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. ▲

$\operatorname{tg} x = a$ teńleme

Bul teńlemenı sheshiw ushın tómendegi anıqlamanı kirgizemiz. $a \in \mathbb{R}$ sannıń **arktangensi** dep, tangensi a sanǵa teń bolǵan $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ sanǵa ayıladı: Eger $\operatorname{tg} x = a$ hám $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ bolsa, $\operatorname{arctg} a = x$.

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ bolǵanı ushın $\operatorname{tg} x$ birlik dóńgelekтегі $B(x; y)$ noqat ordinasasınıń abscissasına qatnasına teń (19-súwret), yaǵnıy bul noqat $\frac{y}{x} = a$ tuwrı menen birlik dóńgelekтеń kesilisiw noqatı esaplanadı. 19-súwret boyınsha bunday noqatlar ekew: B_1 hám B_2 noqatlar. Sonıń ushın teńlemenıń sheshimi tómendegishe boladı:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. (3)$$

8- misal. Esaplañ: 1) $\arctg 1$; 2) $\arctg(-\sqrt{3})$.

△ 1) $\tg \frac{\pi}{4} = 1$ hám $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bolğanı ushın $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$;

2) $\tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ hám $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bolğanı ushın $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. ▲

9- misal. Teñlemeni sheshiñ: $\tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

△ (3) boyınsha, teñlemeniñ sheshimleri tómendegishe boladı:

$$x - \frac{\pi}{6} = \arctg(-\sqrt{3}) + \pi n. \quad \arctg(-\sqrt{3}) = -\arctg(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \quad \text{bolğanı ushın}$$

teñlemeniñ sheshimleri $x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, yamasa $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ▲

Eñ ápiwayı trigonometriyalıq teñlemeler ushın kesteni keltiremiz:

Teñleme	Sheshimler	Geybir qásiyetler
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.	$\arcsin(-a) = -\arcsin a, a \leq 1$.
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, a \leq 1$.
$\tg x = a$	$x = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.	$\arctg(-a) = -\arctg a, a \in \mathbb{R}$.

Úshinshi ústinde keltirilgen qásiyetler teris sanlar arksinusları (arkkosinusları, arktangensleri) mánislerin oñ sanlar arksinusları mánisleri arqalı tabıw imkánıyatın

beredi. Máselen, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6},$$

$$\arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}.$$

10- misal. Teñlemeni sheshiñ: $\cos\left(10x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$.

△ $10x + \frac{\pi}{8} = z$ belgilew kirgizip, $\cos z = \frac{1}{2}$ teñlemeni payda etemiz. Bunnan

(2) formula boyınsha $z = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, yaǵnıy $10x + \frac{\pi}{8} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ yamasa

$$x = \frac{1}{10} \left(-\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \right), k \in \mathbb{Z}. \quad \text{▲}$$

$\sin x = \sin a, \cos x = \cos b, \tg x = \tg c$ kórinisindegi teñlemeler

Bunday teńlemelerdiń sheshimi, sáykes ráwishte, tómendegishe boladı: $x = (-1)^k a + \pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; $x = \pm b + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = c + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. (4)

11- misal. Teńlemenı sheshiń: $\cos(3x - 40^\circ) = \cos(2x + 60^\circ)$.

△ (4) formula boyınsha, $3x - 40^\circ = \pm(2x + 60^\circ) + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$ teńlemenı payda etemiz. Bunnan belgisiz x tabıladı:

$$3x - 40^\circ = 2x + 60^\circ + 360^\circ n \Leftrightarrow x = 100^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - 40^\circ = -2x - 60^\circ + 360^\circ n, 5x = -20^\circ + 360^\circ n \Leftrightarrow x = -4^\circ + 72^\circ n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangle$$

12- misal. Teńlemenı sheshiń: $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.

△ $\sin x = z$ belgilew kirgizip, $z^2 + 3z + 2 = 0$ kvadrat teńlemege kelemiz. Bul teńlemenı sheship $z_1 = -2$, $z_2 = -1$ ler tabıladı. Belgilewge kóre $\sin z = -2$ hám $\sin x = -1$ teńlemelerdi payda etemiz. $\sin z = -2$ sheshimge iye emes. $\sin x = -1$ teńleme $x = 270^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ sheshimge iye. Demek, teńlemenıń sheshimi $x = 270^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$ boladı. ▲

Soraw hám tapsırmalar



1. $\sin x = a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısalda túsindiriń.
2. $\cos x = a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısal keltiriń.
3. $\operatorname{tg} x = a$ teńleme qalay sheshiledi? Mısal járdeminde túsindiriń.
4. $\arcsin a$ sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.
5. $\arccos a$ sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.
6. $\operatorname{arctg} a$ sanına anıqlama beriń. Mısalda túsindiriń.

Shınıǵıwlar

130. Esaplań (130–141):

1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin \frac{1}{2}$; 4) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

131.

1) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arcsin 1$; 4) $\arcsin (-1)$.

132.

1) $\arccos 0$; 2) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos (-1)$.

133.

1) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos \frac{1}{2}$; 3) $\arccos 1$; 4) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

134.

1) $\operatorname{arctg} 1$; 2) $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 3) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $3\operatorname{arctg} (-\sqrt{3})$.

135. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; 3) $\operatorname{arctg}(-1)$; 4) $7 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

136. 1) $\arcsin 1 + \arcsin(-1)$; 2) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \arcsin \frac{1}{2}$.

137. 1) $4 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

138. 1) $2 \arccos 1 + 3 \arccos 0$; 2) $6 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

139. 1) $2 \arccos(-1) - 3 \arccos 0$; 2) $2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

140. 1) $3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 3 \arccos \frac{1}{2}$; 2) $3 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2 \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

141. 1) $2 \operatorname{arctg} 1 + 3 \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $5 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3 \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Айлатпалар мánиске ийе ямаса ийе эмеслигин аниқлаñ (142–143):

142. 1) $\arccos(\sqrt{8}-3)$; 2) $\arcsin(2-\sqrt{15})$; 3) $\arccos(3-\sqrt{18})$.

143. 1) $\operatorname{tg}(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$; 2) $\arcsin(\sqrt{6}-2)$; 3) $\operatorname{tg}(3 \arccos \frac{1}{2})$.

Тéһлемени шешиñ (144–161):

144. 1) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

145. 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = 1$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

146. 1) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos 2x = -1$; 4) $\cos 3x = 1$.

147. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = -1$; 3) $\cos 5x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x = -1$.

148. 1) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} x = 1$; 3) $\operatorname{tg} 9x = -1$; 4) $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

- 149.** 1) $\operatorname{tg} x = 0$; 2) $\operatorname{tg} x = 2$; 3) $\operatorname{tg} 6x = -3$; 4) $\operatorname{tg} 5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 150.** 1) $2\cos x + 1 = 0$; 2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 3) $2\cos x + \sqrt{2} = 0$;
- 151.** 1) $2\sin x + 1 = 0$; 2) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; 3) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;
- 152.** 1) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 153.** 1) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 3) $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.
- 154.** 1) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = -1$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}\right) = 1$; 3) $2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$.
- 155.** 1) $2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$; 2) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$; 3) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
- 156.** 1) $(2\sin x + \sqrt{2})(\sin 4x + 1) = 0$; 2) $(2 - \cos x)(1 + 3\cos x) = 0$.
- 157.** 1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 2) $4\cos^2 x - 8\cos x - 3 = 0$;
4) $2\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$; 3) $2\cos^2 x - \cos x - 6 = 0$;
- 158.** 1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 2) $4\cos^2 x - 8\cos x - 3 = 0$;
4) $2\sin^2 x - \sin x - 6 = 0$; 3) $2\cos^2 x - \cos x - 6 = 0$;
- 159.** 1) $2\cos^2 x - \sin x + 1 = 0$; 2) $\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0$;
4) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$; 3) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}$;
- 160.** 1) $\cos x = \cos 2x$; 2) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$; 3) $\sin 7x = \sin 3x$; 4) $\cos 4x = \cos 5x$
- 161.** 1) $\sin 4x = \sin x$; 2) $\sin 2x = \cos 3x$; 3) $\operatorname{tg} 10x = \operatorname{tg} 8x$; 4) $\sin 5x = \sin 7x$

62-64

ЁЎ ЁПИВАЙЎ ТРИГОНОМЕТРИЯЛИҚ ТЕЎСИЗЛИКЛЕР

$a_1 < \sin x < b_1$, $a_2 < \cos x < b_2$, $a_3 < \operatorname{tg} x < b_3$ k r n s ndeg  te ns zlikler       piway  trigonometriyal q te ns zlikler delinedi. Bul jerde a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , a_3 , b_3   berilgen haq y q  sanlar. Bunday te ns zliklerdi sheshiwde birlik d  ngelekten, funksiya grafiginen paydalan w qolay.

1- misal. $\sin x \leq 0,5$ teńsizlikti $[0, 2\pi]$ kesindide sheshiń.

△ Birlik dóńgelekti qaraymız. Bul dóńgelekte ordinataları 0,5 ke teń hám onnan kishi noqatlar-
dı tabamız. 20-súwretten, BDA doǵanıń barlıq
noqatları joqarıdaǵı shártti qanaatlandırıwı bel-
gili. Sonıń ushın x sanlardıń $\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$

kópligi teńsizliktiń sheshimi boladı. *juwap:* $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ ▲

2- misal. $\cos x > \frac{1}{2}$ teńsizlikti $[0, 2\pi]$ kesindide sheshiń.

△ Birlik dóńgelekte abscissaları $\frac{1}{2}$ ge teń
hám onnan úlken noqatlardı tabamız. ACB
doǵanıń barlıq noqatları joqarıdaǵı shártti
qanaatlandırıwı 21-súwretten ko‘rinip tur.
Sonıń ushın x lardıń $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ kópligi
teńsizliktiń sheshimi boladı.

juwap: $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ ▲

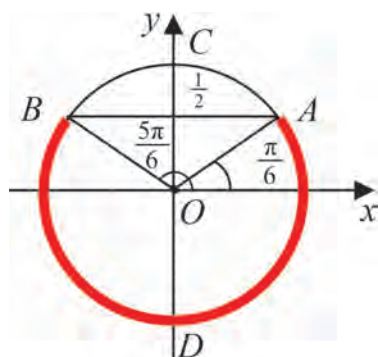
3- misal. $\operatorname{tg} x \leq 1$ teńsizlikti $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralıqta sheshiń.

△ Birlik dóńgelektiń B noqatınan Oy kósherine parallel AB tuwrı ótkizemiz
(22-súwret).

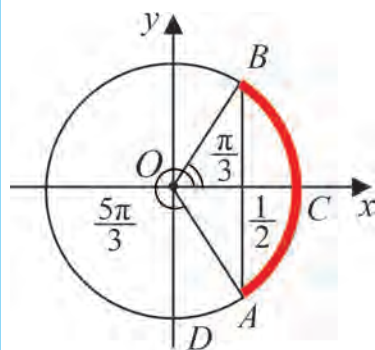
Onda A noqattı sonday tańlaymız,
bunda $OB=AB$ bolsın. $\triangle AOB$ teń
qaptallı hám tuwrı múyeshli. OA gi-
potenuzanıń sheńber menen kesilisiw
noqatı D bolsın.

DBC doǵanıń barlıq noqatları beril-
gen teńsizlikti qanaatlandırıwı súw-
retten kórinip tur.

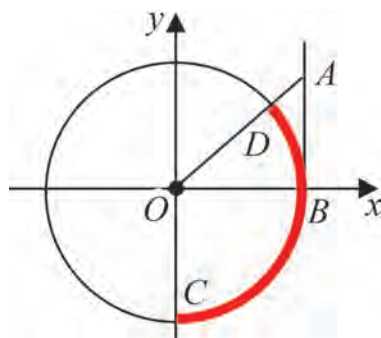
juwap: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ ▲



20-súwret.



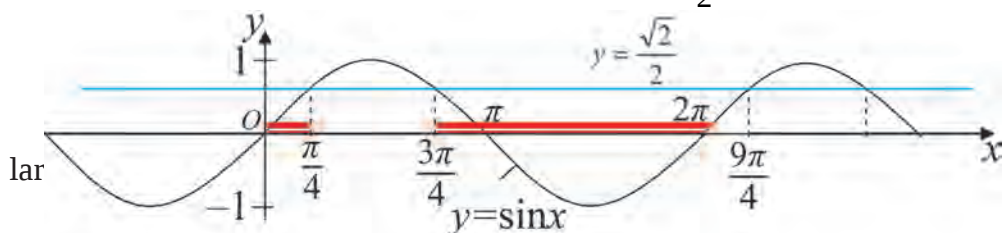
21-súwret.



22-súwret.

4- misal. Теңsizlikti sheshiń: $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ Bir koordinatalar sistemasına $y = \sin x$ hám $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (23-súwret) funkciya-



23-súwret.

grafiklerin sızıp, $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ teńlemenin $[0; 2\pi]$ kesindidegi sheshimin tabamız. $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ teńsizliktiń $[0; 2\pi]$ kesindidegi sheshimi $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ hám $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$ aralıqlar bolıwı súwretten kórinedi. Funkciyanıń dáwiriliginen x tiń $\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ kópligi teńsizliktiń sheshimi boladı. ▲

5-misal. Теңsizlikti sheshiń: $-2\cos x \geq 1$. Sáykes súwret sızıń.

△ Aldın $y = \cos x$ hám $y = -\frac{1}{2}$ funkciyalar grafigin bir koordinatalar sistemasına sızamız. Onnan $\cos x = -\frac{1}{2}$ teńlemenin $[0; 2\pi]$ kesindidegi sheshimleri $\frac{2\pi}{3}$ va $\frac{4\pi}{3}$ ekenin anıqlaymız. Demek, teńsizliktiń sheshimleri $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ kesindilerden ibarat eken. ▲

6- misal. Теңsizlikti sheshiń: $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

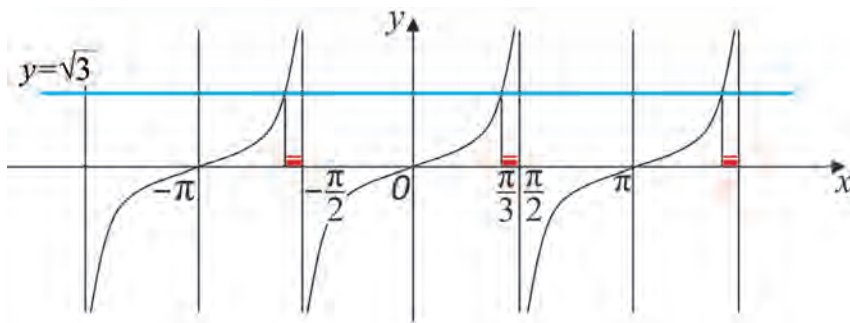
△ $y = \operatorname{tg} x$ hám $y = \sqrt{3}$ funkciyalar grafigin bir koordinatalar sistemasına sızamız (24-súwret). $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ teńlemenin $[0; \pi]$ kesindidegi sheshimin tabamız.

Bul teńlemenin sheshimi $x = \frac{\pi}{3}$. Sonıń ushın teńsizliktiń $[0; \pi]$ kesindidegi

sheshimleri kópligi $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ aralıq esaplanadı. $y = \operatorname{tg} x$ funkciyanıń dáwiri π

ekenligin paydalanip, teńsizliktiń barlıq sheshimlerin tabamız:

$$\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}. \blacktriangle$$



24-súwret.

Soraw hám tapsırmalar



$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x > -1$ teńsizlikler qalay sheshiledi?

Shıńǵırlar

162. Teńsizlikti berilgen aralıqta sheshiń:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$; | 2) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; |
| 3) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; | 4) $\cos x > \frac{1}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; |
| 5) $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; 0]$; | 6) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; |
| 7) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; | 8) $\cos 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. |

163. Teńsizlikti sheshiń (**163–169**):

- | | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|
| 1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$; | 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; | 3) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$; | 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. |
|---------------------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|

- 164.** 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x > -1$; 3) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

165. 1) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

166. 1) $2 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \leq \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{2} \sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) \geq 1$; 3) $2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}) > \sqrt{3}$.

167. 1) $\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $2 \sin 2x \cos 2x \geq \frac{1}{2}$.

168. 1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos 3x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin 2x \sin \frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

169. 1) $\cos(\frac{x}{2} + 1) \geq \frac{1}{2}$; 2) $\sin(\frac{x}{4} - 2) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos(1 - \frac{x}{3}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Баqlaw jumisi úlgisi

Teñlemelerdi sheshiñ (1–4):

1. $\sin 3x = 0$.

2. $4 \cos 6x = -2\sqrt{3}$.

3. $5 \cdot \operatorname{tg} 4x = 3$.

4. $5 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - 1 = 0$.



Teñsizliklerdi $x \in [0; \pi]$ aralıqta sheshiñ (5–6):

5. $\sin x > \frac{1}{2}$.

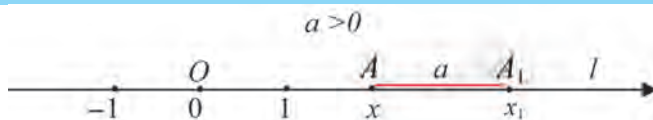
6. $\operatorname{tg} x \leq -1$.

68

ГРАФИКЛЕРДИ АЛМАСТІРІВ

Їлїтїв

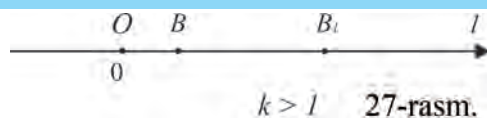
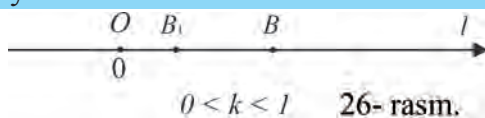
l san kósheri hám O noqat ondağı esap bası bolsın (25-súwret). l diñ hár bir noqatı a birlik ĵılїtılsın. Eger $a > 0$ bolsa, ĵılїtıw óñ bağıtta (kósher bağıtında) boladı. Eger $a < 0$ bolsa, ĵılїtıw qarama-qarsı bağıtta orınlanadı, $a = 0$ de noqatlar óz ornınan ĵılїmaydı. Eger x koordinatalı $A = A(x)$ noqat a birlikke ĵılїtılganda $A_1(x_1)$ noqatqa ótken bolsa, A_1 noqattıñ koordinatası $x_1 = x + a$ formula boyınsha anıqlanadı. A noqat A_1 noqattıñ proobrazı, A_1 bolsa A niñ obrazı delinedi.



25-súwret.

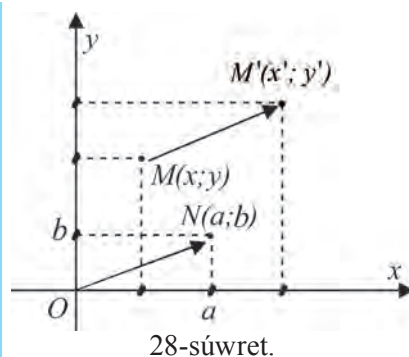
Soziw

l san kósherinde $B(x)$ noqat O koordinata basınan k márte uzaqlastırıp (yamaşa O ға jaqınlastırıp), $B_1(x)$ noqatqa ótkizilgen bolsın. B_1 noqattıń koordinatası $x_1=kx$ formula boyınsha esaplanadı. Eger $k>0$ bolsa, B_1 hám B noqatlar O noqattıń bir tárepinde; eger $k<0$ de B_1 hám B noqatlar O niń túrli tárepinde jaylasadı. Eger $|k|<1$ bolsa, (26-súwret) $x=OB$ kesindi k márte qısqaradı; eger $|k|>1$ bolsa, (27-súwret) OB kesindi k márte sozıladı, $k=1$ de B hám B_1 noqatlar ústpe-úst túsedı, $k=-1$ de olar O noqatqa salıstırǵanda simmetriyalı jaylasadı.



Parallel kóshiriw

Parallel kóshiriwde xOy koordinata tegisligindeki barlıq noqatlar birdey baǵıtta birdey aralıqqa kóshedi (28-súwret). $O(0; 0)$ koordinata bası $N(a; b)$ noqatqa kóshirilgen bolsa, $M(x; y)$ noqat $M'(x'; y')$ ge kóshedi. $M'(x'; y')$ noqattıń koordinataları ushın tómendegi formula orınlı: $x'=x+a$, $y'=y+b$.



Funkciya grafigin almasıw

Joqarıdaǵı almasıwlar (jılıtıw, soziw, parallel kóshiriw) $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=f(x-a)+b$, $y=m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ (bunda a, b, m, k – turaqlı sanlar hám $m \neq 0$, $k \neq 0$) funkciyalar grafigin sızıw múmkinshiligin beredi.

Máselen, $y=f(x-a)+b$ funkciya grafigin $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde sızıw ushın $y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatı a birlik ońǵa jılıtıladı hám b birlik joqarıǵa kóteriledi, yaǵnıy $(a; b)$ vektor boyınsha parallel kóshiriledi.

$y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=m \cdot f\left(\frac{x}{k}\right)$ funkciya grafigin sızıw ushın

$y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatınıń abscissası Ox boylap k márte qısıladı ($k>0$ bolsa – ońǵa, $k<0$ bolsa – shepke) hám ordinatası Oy kósher boylap m birlik sozıladı ($m>0$ bolsa – joqarıǵa, $m<0$ bolsa – tómengge).

1- misal. $y=3x$ funkciya grafigi járdeminde $y=3(x-1)+4$ funkciya grafigin sızıń. $\triangle$
 $y=3(x-1)+4$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=3x$ funkciya grafigi (1; 4) vektor boyınsha parallel kóshiriledi. $\triangle$

2- misal. $y=-2x+4$ funkciya grafigi járdeminde $y=-2(x+3)+5$ funkciya grafigin sızıń.

$\triangle$ $y=-2(x+3)+5$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=-2x+4$ funkciya grafigi (3; 1) vektor boyınsha parallel kóshiriledi. $\triangle$

3- misal. $y=x^2$ parabola grafiginen paydalanıp $y=2-(x+3)^2$ funkciya grafigin sızıń.

$\triangle$ $y=2-(x+3)^2$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=x^2$ funkciya grafigi aldın 3 birlik shepke jılıtıladı hám Ox kósherine salıstırğanda simmetriyalı kóshiriledi. Soń payda bolğan grafik Oy kósheri boyınsha 2 birlik joqarıǵa kóteriledi. $\triangle$

4- misal. $y=\sin x$ funkciya grafigi járdeminde $y=\sin 2x$ funkciya grafigin sızıń. $\triangle$
 $y=\sin 2x$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=\sin x$ funkciya grafiginiń hár bir noqatınıń abscissası Ox kósheri boylap eki márte ońǵa qısıladı. $\triangle$

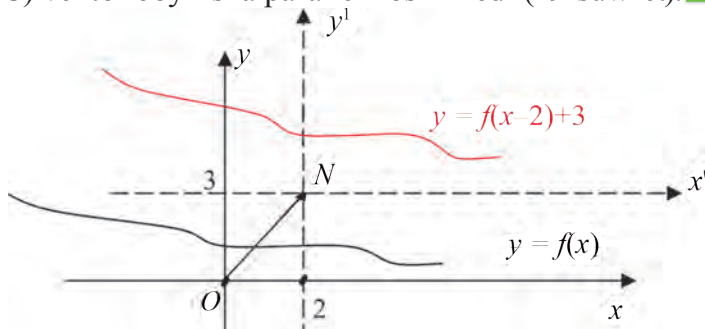
5- misal. $y=\cos x$ funkciya grafigi járdeminde $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ funkciya grafigin sızıń.

$\triangle$ $y=-2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ yamasa $y=-2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)$ funkciya grafigin sızıw

ushın aldın $y=\cos x$ funkciya grafigi ońǵa $\frac{\pi}{8}$ ge jılıtıladı, keyin abscissası ońǵa eki márte qısıladı, ordinatası eki márte joqarıǵa sozıladı. Payda bolğan grafik Ox kósherine salıstırğanda simmetriyalı kóshiriledi. $\triangle$

6- misal. $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde $y=f(x-2)+3$, funkciya grafigin sızıń.

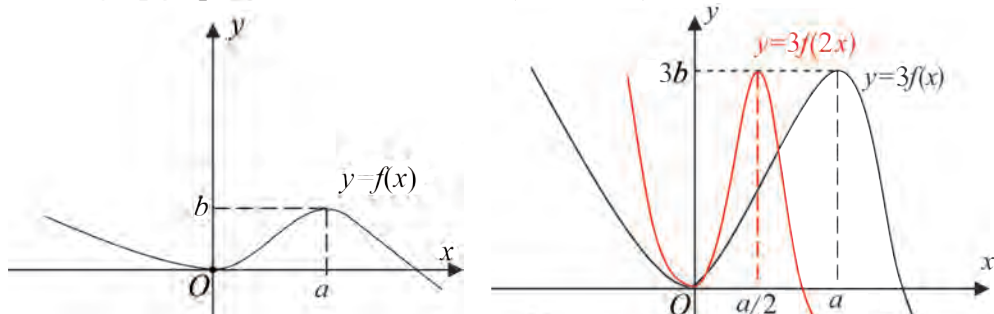
$\triangle$ $y=f(x-2)+3$ funkciya grafigin sızıw ushın $y=f(x)$ funkciya grafiginiń hár bir noqatı (2; 3) vektor boyınsha parallel kóshiriledi (29-súwret). $\triangle$



29-súwret.

7- misal. $y=f(x)$ funkciya grafigi járdeminde (30-súwret) $y=3f(2x)$ funkciya grafigin sızıń ($m=3$, $k=\frac{1}{2}$ bolǵan jaǵday).

△ $y=f(x)$ funkciya grafigi Ox kósher boylap ońǵa 2 márte qısıladı hám Oy kósher boylap joqarıǵa 3 márte sozıladı (31-súwret). ▲



Soraw hám tapsırmalar



1. Jılıtıw degen ne? Sozıw-she? Parallel kóshiriw-she? Mısallar keltiriń.
4. $y=\sin x$ funkciya grafigi járdeminde $y=-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ funkciya grafigin sızıń.

Shınıǵıwlar

170. $y=f(x)=x^2-2x+3$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

- 1) $y=f(x)+1$;
- 2) $y=3f(x)$;
- 3) $y=3f(x)-2$;
- 4) $y=f(x-1)+1$;
- 5) $y=2f(x+1)+1$;
- 6) $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$;
- 7) $y=\frac{1}{2}f(2x)$;
- 8) $y=f(2x)-3$;
- 9) $y=2f(2x)-5$.

171. $y=f(x)=x^2-5x+6$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

- 1) $y=f(x-1)$;
- 2) $y=f\left(\frac{x}{3}\right)$;
- 3) $y=f(2x)$;
- 4) $y=3f\left(\frac{x}{3}\right)+1$;
- 5) $y=-f(x)$;
- 6) $y=2f(x)-3$;
- 7) $y=-f(-x)$;
- 8) $y=2f(x+1)+5$.

172. $y = \cos x$ funkciya grafigi járdeminde kórsetilgen funkciyalar grafigin sızıń:

$$\begin{array}{l} 1) y = \cos x - 1; \\ 3) y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) y = 2 \cos x + 1; \\ 4) y = 3 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right). \end{array}$$

69-70

PARAMETRLI KÓRINISTE BERILGEN ÁPIWAYÍ FUNKCIYALARDÍŇ GRAFIKLARI

Materiallıq noqattıń (x, y) koordinatları t parametrge baylanıslı bolsın: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. t qanday da bir T aralıqta ózgergende $(\varphi(t), \psi(t))$ noqatlar kópligi qanday boladı? Bul kóplikti *parametrli kóriniste berilgen funkciyanıń grafigi* dep ataymız.

1- misal. Materiallıq noqattıń koordinataları parametrli kóriniste $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 5t + 8 \end{cases}$ berilgen. Bul materiallıq noqat háreketi dawamında sızǵan sızıqtı (materiallıq noqat trayektoriyasını) tabıń.

▲ Teńlemelerden t parametrdi tabamız: $t = \frac{x-1}{3}$ hám $t = \frac{y-8}{5}$.

Payda bolǵan ańlatpalardan $\frac{x-1}{3} = \frac{y-8}{5}$ teńlemege kelemiz. Bunnan $5x - 5 = 3y - 24$ yamasa $5x - 3y + 19 = 0$. Bul tuwrınıń teńlemesi.

Demek, izlengen funkciya $3y = 5x + 19$ yamasa $y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$ eken.

juwap: $y = \frac{5}{3}x + \frac{19}{3}$. ▲

2- misal. $\begin{cases} x = 3 + 5 \sin t, \\ y = -7 + 5 \cos t \end{cases}$ parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıq boladı?

▲ Berilgen teńliklerden $\sin t = \frac{x-3}{5}$, $\cos t = \frac{y+7}{5}$ ekenin tabamız.

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ birdeylikten paydalanıp, $\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{y+7}{5}\right)^2 = 1$ teńlemege kelemiz. Bunnan $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25$. Bul teńleme orayı $(3; -7)$ hám radiusı $r = 5$ bolǵan sheńber teńlemesi boladı. ▲

3- misal. Materiallıq noqat koordinataları $x = 7t^2 + 1$, hám $y = 3t$ nızamı menen

özgerse, x hám y arasındagı baylanıstı anıqlań, $t \geq 0$.

△ Berilgen nızamlardan t nı tabamız: $t = \sqrt{\frac{x-1}{7}}$, $t = \frac{y}{3}$. Bul ańlatpalardan

$\frac{y}{3} = \sqrt{\frac{x-1}{7}}$ teńlemege kelemiz. Bunnan $y = 3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ funkciyanı tabamız. De-

mek, izlengen funkciya $y = 3\sqrt{\frac{x-1}{7}}$ eken. ▲

4-misal. $\begin{cases} x = 4 \sin t, \\ y = 3 \cos t \end{cases}$ parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sıziq boladı, bul jerde $0 \leq t \leq 2\pi$?

△ Berilgen teńliklerden $\sin t = \frac{x}{4}$ hám $\cos t = \frac{y}{3}$ ekenin tabamız. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

birdeylikten paydalanıp, $(\frac{x}{4})^2 + (\frac{y}{3})^2 = 1$, yamasa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ teńlemenı payda etemiz. Bul teńleme menen berilgen noqatlar kópligi orayı koordinata basında hám yarım kósherleri $a=4$, $b=3$ bolgan *ellips* dep ataladı. ▲



Soraw hám tapsırmalar

Parametrli kóriniste berilgen funkciyalarga misallar keltiriń.

Shınıǵıwlar

173. Materiallıq noqattıń koordinataları parametrli kóriniste berilgen. Bul materiallıq noqat hárketi dawamında sızgan sıziqtıń (materiallıq noqat trayektoriyasınıń) formulasın tabıń. Sáykes súwret sıziń:

$$1) \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 4t + 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 6t + 4, \\ y = 9t + 3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 4t + 9, \\ y = 7t + 18; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 12t + 11, \\ y = 15t + 18. \end{cases}$$

174. Materiallıq noqat koordinataları parametrli kóriniste berilgen. x hám y koordinatalar arasındagı baylanıstı anıqlań:

$$1) \begin{cases} x = 17t^2 + 1, \\ y = 13t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 27t^2 + 21, \\ y = 23t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 37t^2 + 31, \\ y = 33t; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 47t^2 + 41, \\ y = 43t. \end{cases}$$

175. Parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sıziqtan ibarat? Sáykes súwretti sıziń:

$$1) \begin{cases} x = 7 \sin t, \\ y = 7 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 5 \sin t, \\ y = 5 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x = 9 \sin t, \\ y = 9 \cos t, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

176. Parametrli kóriniste berilgen funkciya grafigi qanday sızıqtan ibarat? Sáykes súwretti sızın:

$$1) \begin{cases} x = 6 \sin t + 3, \\ y = 6 \cos t + 7, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 3 \sin t, \\ y = 3 \cos t - 1, \\ 0 \leq t \leq 2\pi; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2 \sin t - 3, \\ y = 2 \cos t + 7, \\ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$



71

KÓRSETKISHLI FUNKSIYA HÁM ONÍN GRAFIGI

Dáreje hám onín qásiyetleri

Haqıyqiy san kórsetkishli dáreje tómendegi qásiyetlerge iye ($a > 0$, $a \neq 1$):

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 2) $a^x : a^y = a^{x-y}$; 3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
- 4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
- 6) Eger $0 < a < b$ hám $x > 0$ bolsa, $a^x < b^x$; 7) Eger $0 < a < b$ hám $x < 0$ bolsa, $a^x > b^x$;
- 8) Eger $x < y$ hám $a > 1$ bolsa, $a^x < a^y$; 9) Eger $x < y$ hám $0 < a < 1$ bolsa, $a^x > a^y$ boladı.

1- misal. Salıstırın: $2^{-\sqrt{3}}$ hám $3^{-\sqrt{3}}$.

△ 7-qásiyet boyınsha $0 < 2 < 3$ hám $-\sqrt{3} < 0$ bolğanı ushın $2^{-\sqrt{3}} > 3^{-\sqrt{3}}$. ▲

2- misal. Salıstırın: $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2}$ hám $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$.

△ 9-qásiyet boyınsha $0,2 < 0,3$ hám $0 < \frac{1}{2} < 1$ bolğanı ushın $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{0,3}$. ▲

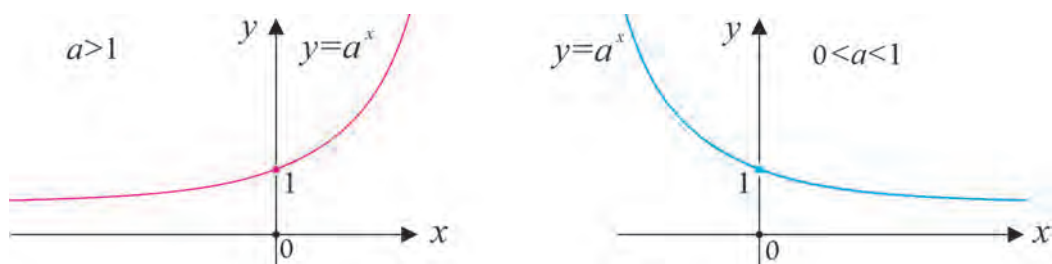
Kórsetkishli funkciya hám onín qásiyetleri

$f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ kórinisindegi funkciya *kórsetkishli funkciya* delinedi.

Bunday funkciya tómendegi qásiyetlerge iye:

- 1) anıqlanıw oblastı $(-\infty; +\infty)$ aralıqtan ibarat;
- 2) mánisler oblastı $(0; +\infty)$ aralıqtan ibarat;
- 3) barlıq a ($a > 0$, $a \neq 1$) ushın $a^0 = 1$;
- 4) $a > 1$ bolsa, funkciya ósiwshi;
- 5) $0 < a < 1$ bolsa, funkciya kemeyiwshi boladı.

Tómendegi súwretlerde $f(x) = a^x$ funkciyanın grafikleri keltirilgen.



Soraw hám tapsırmalar



1. Haqıyqıy san kórsetkishli dárejeniń qásiyetlerin aytnı. Mısallar keltiriń.

2. Kórsetkishli funkciyanıń qásiyetlerin aytnı.

Shınıǵıwlar

177. Esaplań:

$$1) \left((\sqrt{3})^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}; \quad 2) 9^{\sqrt{3}} : 3^{2\sqrt{3}} \quad 3) \left(2^{\frac{3}{4}} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad 4) 4^{6\sqrt{2}-1} \cdot 16^{1-3\sqrt{2}}.$$

178. Salıstırıń (178–179):

$$1) 2^{-\sqrt{3}} \text{ va } 1; \quad 2) 4^{-\sqrt{6}} \text{ va } \left(\frac{1}{2} \right)^4; \quad 3) \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{5}} \text{ va } 1.$$

179.

$$1) -3^{\sqrt{2}} \text{ va } 1; \quad 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{-\sqrt{2}} \text{ va } \left(\frac{1}{3} \right)^{-\sqrt{2}}; \quad 3) \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{2}} \text{ va } \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}}.$$

180. Funkciyalardıń ósiwshi yamasa kemeyiwshi ekenin anıqlań (180–182):

$$1) y = 4^x; \quad 2) y = -3^x; \quad 3) y = 5^x - 2; \quad 4) y = -\left(\frac{1}{2} \right)^x + 1.$$

181.

$$1) y = \sqrt{3}^x; \quad 2) y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^x; \quad 3) y = \left(\frac{\pi}{3} \right)^x; \quad 4) y = (\sqrt{3} - 1)^x.$$

182.

$$1) y = (\sqrt{3} - 1)^{-x}; \quad 2) y = (\sqrt{10} - 2)^x; \quad 3) y = (\pi - \sqrt{2})^x - 3.$$

72-74

TIKKELEY SHESHILETUǴÍN KÓRSETKISHLI TEŇSIZLIKLER

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ kórinisindegi teńsizlik

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ teńsizlik kórsetkishli teńsizlikke mısál bola aladı. Bul teńsizlik $a > 1$ bolǵanda $f(x) > g(x)$ teńsizlikke, $0 < a < 1$ bolǵanda bolsa $f(x) < g(x)$ teńsizlikke teń kúshli.

1-mısál. Teńsizlikti sheshiń: $3^{x+5} > 3^{2-5x}$.

△ $a = 3 > 1$ bolǵanı ushın berilgen teńsizlik $x + 5 > 2 - 5x$ teńsizlikke teńkúshli.

Bunnan $6x > -3$ yamasa $x > -0,5$ ekenin tabamiz. Demek, teńsizliktiń sheshimi $(-0,5; \infty)$ aralıqtan ibarat. *juwap:* $x \in (-0,5; \infty)$. ▲

2- misal. Teńsizlikti sheshiń: $2 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x < 63$.

▲ 3^x ti qawsırmadan sırtına shıgaramız: $3^x(2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1) < 63$. Ápiwaylastırıp, $3^x < 9$ teńsizlikti payda etemiz. Bunnan $x < 2$. *juwap:* $x \in (-\infty; 2)$. ▲

3- misal. Teńsizlikti sheshiń: $8^{5x^2-46} \geq 8^{2(x^2+1)}$.

▲ $a=8>1$ bolǵanı ushın teńsizlik $5x^2 - 46 \geq 2(x^2 + 1)$ teńsizlikke teńkúshli. Usı teńsizlikti sheshemiz: $3x^2 \geq 48$, bunnan $x^2 \geq 16$. Demek, berilgen teńsizliktiń sheshimi $x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ boladı. ▲

$a^x < b$ teńsizliktiń ($a > 0$, $a \neq 1$) $b < 0$ bolǵanda sheshimi joq hám $a^x > b$ teńsizliktiń $b < 0$ bolǵanda sheshimi $(-\infty; +\infty)$ aralıqtan ibarat ekenligi belgili.

4- misal. Teńsizlikti sheshiń: $4^x + 2^x - 6 \geq 0$.

▲ $2^x = t$ almasıw kirgizemiz, nátiyjede $t^2 + t - 6 \geq 0$ kvadrat teńsizlik payda boladı. Bunnan $t \leq -3$, $t \geq 2$ ekenin tabamız hám $2^x \geq 2$ hám de $2^x \leq -3$ teńsizliklerge kelemiz. 1- teńsizlikten $x \geq 1$ sheshim tabıladı, 2- teńsizliktiń bolsa sheshimi joq. Demek berilgen teńsizliktiń sheshimi $[1; +\infty)$ aralıqtan ibarat.

juwap: $x \in [1; +\infty)$. ▲



Soraw hám tapsırmalar

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ teńsizlik haqqında maǵlıwmat beriń. Mısal keltiriń.

Shimǵıwlar

183. Teńsizlikti sheshiń (183–184):

- | | | | |
|---|----------------------------|--|------------------------------|
| 1) $4^{3x+5} \leq 4^{3-5x}$; | 2) $7^{4x+5} < 7^{9-5x}$; | 3) $6^{x+5} > 6^{3x}$; | 4) $8^{x+5} \leq 8^{2-5x}$; |
| 5) $11^x < 11^{2+5x}$; | 6) $2^{x-5} > 2^{25x}$; | 7) $2 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x+1} - 5 \cdot 2^x \leq -6$; | |
| 8) $3 \cdot 5^{x+3} - 5^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+1} < 68$; | | 9) $2 \cdot 4^{x+2} + 4^{x+1} - 5 \cdot 4^x \leq 31$; | |
| 10) $2 \cdot 7^{x+2} - 2 \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^x < 10$. | | 11) $13^{x^2+46} \leq 13^{x^2+25x}$; | |
| 12) $3^{x^2-4x} < 3^{2(x^2-15)}$; | | 13) $7^{2x^2-4} \leq 7^{3(x^2-x)}$. | |

184.

- | | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| 1) $9^x + 3^x - 6 \leq 84$; | 2) $25^x + 5^x - 30 > 0$; |
| 3) $5 \cdot 4^x + 2^x - 6 \leq 0$; | 4) $9^x + 3^x - 12 > 0$; |

Baqlaw jumısı úlgisi

1. $\begin{cases} x = 7 \sin 5t \\ y = 7 \cos 5t \end{cases}$ kórinisindegi funkciya grafigin sızıń.



2. $y = 11^{x+7}$ funkciyanıń qásiyetlerin jazıń.
Teńsizliklerdi sheshiń (3–5):

3. $6^{x^2-7x-1} < 6^7$.

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{17x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{54-x}$.

5. $0,7^{-3x} \leq 1$.

LOGARIFM HAQQÍDA TÚSINIK. LOGARIFMLIK FUNKCIYA. EŇ ÁPIWAYÍ LOGARIFMLIK TEŇLEME HÁM TEŇSIZLIKLER

75-78

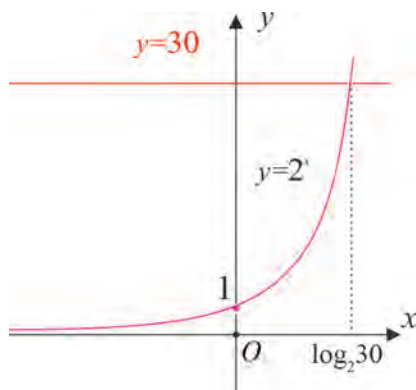
Logarifm haqqında túsiniq

$2^x=32$ teŇlemenin koreni $x=5$, biraq $2^x=30$ teŇlemenin koreni qalay tabıladı? Bunday teŇlemelerdi sheshiw ushin sannin logarifmi túsiniqi kirgiziledi. $2^x=30$ teŇleme tek ğana bir korenge iye. Onı 32-súwretten kóriw múmkin.

Bul koren 30 sanınin 2 tiykar boyınsha logarifmi delinedi hám $\log_2 30$ kibi belgilenedi. Demek, $2^x=30$ teŇlemenin koreni $x=\log_2 30$ san boladı.

Usı anıqlamanı kirgizemiz:

b oŇ sannin a tiykar boyınsha logarifmi dep, b sandı payda qılıw ushin tiykar a nı kóteri w kerek bolĝan dáreje kórsetkishine aytiladı hám $\log_a b$ kibi belgilenedi. Tiykar $a>0$ hám $a\neq 1$ shártti qanaatlandırıwı kerek.



32-súwret.

Máselen, $\log_3 9=2$, sebebi $9=3^2$. Sonday-aq, $\log_2 \frac{1}{8} = -3$; $\log_5 5=1$; $\log_7 1=0$.

1- misal. EsaplaŇ: $\log_3 81$.

△ $3^4=81$ bolĝanı ushin logarifmniŇ anıqlaması boyınsha $\log_3 81=4$. ▲

LogarifmniŇ qásiyetleri

- tiykarĝı logarifmlik birdeylik: Eger $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ bolsa, $a^{\log_a b} = b$ teŇlik orınlı boladı;
- Eger $a>0$, $a\neq 1$ bolsa, $\log_a 1=0$; $\log_a a=1$;
- Eger $a>0$, $a\neq 1$ hám $x>0$, $y>0$ bolsa, $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;
- Eger $a>0$, $a\neq 1$ hám $x>0$, $y>0$ bolsa, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
- Eger $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ bolsa $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$;
- jaŇa tiykarĝa (bir tiykardan basqa tiykarĝa) ótiw formulası: Eger $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $b>0$, $b\neq 1$ bolsa, $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$;
- Eger $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ bolsa, $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

$\log_{10} x = \lg x$ hám $\log_e x = \ln x$ kibi belgilew qabıl qılınĝan. ($e=2,718281\dots$).

Bunda $\lg x$ – x tiŇ onlıq logarifmi, $\ln x$ bolsa x tiŇ natural logarifmi delinedi.

$f(x)=\log_a x$ funkeiya (bul jerde x – argument, $a>0$, $a\neq 1$) a – tiykarli logarifmlik

funkciya delinedi.

Logarifmlik funkciyanın qásiyetleri:

- anıqlanıw oblastı $(0; +\infty)$ aralıq;
- mánisler oblastı $R=(-\infty; +\infty)$;
- noli: $x=1$, yaǵnıy $\log_a 1=0$.
- $a>1$ bolsa, logarifmlik funkciya $(0; +\infty)$ aralıqta ósiwshi;
- $0<a<1$ bolsa, logarifmlik funkciya $(0; +\infty)$ aralıqta kemeyiwshi.

2- misal. Salıstırıń: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ hám 0 .

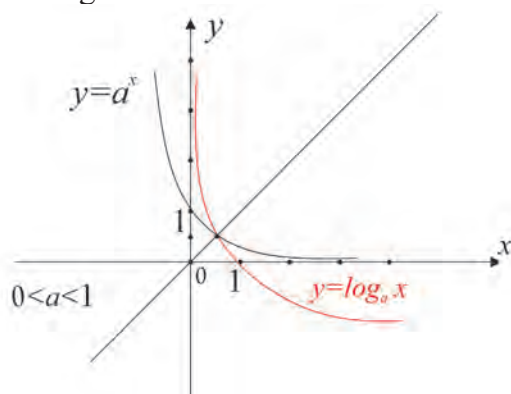
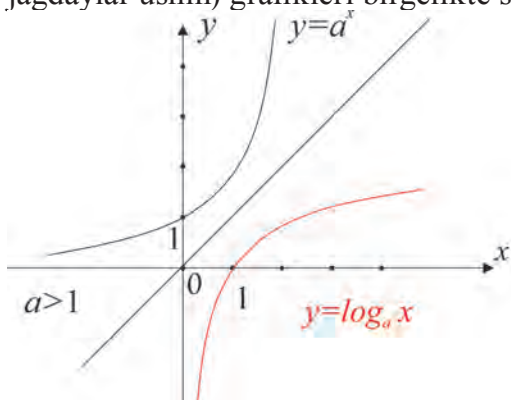
△ $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$, tiykar $a=\frac{1}{2}$, yaǵnıy funkciya kemeyiwshi $0<\frac{1}{2}<1$ hám

$0<\frac{1}{3}<1$ bolǵanlıqtan $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} 1$ boladı. Demek, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$ eken. ▲

3- misal. Funkciyanın anıqlanıw oblastın tabıń: $f(x) = \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$.

△ Bul logarifmlik funkciyanın anıqlanıw oblastı x tiń $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1} > 0$ teńsizlik-ti qanaatlandırıwshı barlıq mánisleri kópliginen ibarat. Bul teńsizlikti sheship, funkciyanın anıqlanıw oblastı $x \in (1; 2) \cup (3; +\infty)$ ekenin tabamız. ▲

33 hám 34-súwretlerde $y=a^x$ hám $y=\log_a x$ funkciyalardıń ($a>1$ hám $0<a<1$ jaǵdaylar ushın) grafikleri birgelikte súwretlengen.



4- misal. Salıstırıń: $\log_3 2 + \log_3 8$ hám $\log_3 (2+8)$.

△ Logarifmniń qásiyetlerinen paydalanamız:

$\log_3 2 + \log_3 8 = \log_3 (2 \cdot 8) = \log_3 16$ $\log_3 (2+8) = \log_3 10$. Logarifmniń tiykarı $3>1$ bolǵanı ushın $\log_3 16 > \log_3 10$.

Bunnan: $\log_3 2 + \log_3 8 > \log_3 (2+8)$. ▲

5- misal. Esaplañ: $A = 4^{\log_8 125} + 27^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \log_3 4}$.

△ Logarifmniñ qásiyetlerinen paydalanamız: $\frac{1}{2} \log_3 4 = \log_3 2$;

$$\log_8 125 = \frac{\log_2 125}{\log_2 8} = \frac{3 \log_2 5}{3} = \log_2 5; \quad 4^{\log_8 125} = 4^{\log_2 5} = 2^{2 \log_2 5} = 2^{\log_2 25} = 25.$$

$$\text{Sonday-aq, } 27^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \log_3 4} = 27^{\frac{1}{3} - \log_3 2} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\log_3 2} =$$

$$= 3 \cdot 3^{-3 \log_3 2} = 3 \cdot 3^{\log_3 \frac{1}{8}} = 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}. \text{ Demek, } A = 25 + \frac{3}{8} = 25 \frac{3}{8}. \quad \blacktriangle$$

6- misal. Esaplañ: $\frac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8}$.

△ Logarifmniñ qásiyetlerinen paydalanamız:

$$\lg 54 + \lg \frac{1}{2} = \lg(54 \cdot \frac{1}{2}) = \lg 27 = \lg 3^3 = 3 \lg 3,$$

$$\lg 72 - \lg 8 = \lg \frac{72}{8} = \lg 9 = \lg 3^2 = 2 \lg 3.$$

$$\text{Ol jaǵdayda: } \frac{\lg 54 + \lg \frac{1}{2}}{\lg 72 - \lg 8} = \frac{3 \lg 3}{2 \lg 3} = \frac{3}{2}. \text{ juwap: } \frac{3}{2}. \quad \blacktriangle$$

Ен ápiwayı logarifmlik teñleme

$\log_a x = b$ kórinisindegi teñlemenı ($a > 0$, $a \neq 1$, b – haqıyqıy san) eñ ápiwayı logarifmlik teñleme dew múmkin. Teñlemenıñ tek ǵana bir sheshimi: $x = a^b$.

7- misal. Teñlemenı sheshiñ: $\log_3 x = \frac{1}{2}$.

△ Logarifm anıqlaması boyınsha, sheshim $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. juwap: $x = \sqrt{3}$. ▲

8- misal. Teñlemenı sheshiñ: $\log_x 16 = 2$.

△ Logarifmniñ anıqlaması boyınsha, $x^2 = 16$ hám $x > 0$, $x \neq 1$ Demek, teñlemenıñ sheshimi $x = 4$ eken. juwap: $x = 4$. ▲

9- misal. Teñlemenı sheshiñ: $\log_2 (x^2 - 5x + 10) = 4$.

△ Logarifmniñ anıqlaması boyınsha, $x^2 - 5x + 10 = 2^4$ teñlemenı payda etemiz.

Kvadrat teñlemenı sheship $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ korenlerdi tabamız. Demek, teñlemenıñ sheshimi $\{-1; 6\}$ eken. juwap: $x = -1$, $x = 6$. ▲

10- misal. Teñlemenı sheshiñ: $\lg(2x - 3) = \lg(x - 1)$.

△ Logarifmniñ anıqlaması boyınsha, $2x - 3 > 0$, $x > 1$ bolıwı kerek. Teñlemenıñ anıqlanıw oblastı $x > \frac{3}{2}$ aralıqtan ibarat. Logarifmniñ qásiyeti boyınsha,

$2x-3=x-1$ teńlemege kelemiz, bunnan $x=2$. Bul koren bolsa anıqlanıw oblastına tiyisli. *juwap: $x=2$.* ▲

11- misal. Teńlemenı sheshiń: $\log_x(x+2)=2$.

△ Teńlemenıń anıqlanıw oblastın tabamız: $x+2>0$ $x>0$, $x\neq 1$, yaǵnıy teńleme $(0,1) \cup (1; \infty)$ kóplikte anıqlanǵan. Logarifmniń anıqlaması boyınsha, $x+2=x^2$ teńlemenı payda etemiz. Bul kvadrat teńlemenı sheship $x_1=-1$, $x_2=2$ korenlerdi tabamız. Bul korenlerden tek ǵana $x=2$ anıqlanıw oblastına tiyisli. Sonıń ushın ham ol berilgen teńlemenıń sheshimi boladı. *juwap: $x=2$.* ▲

12-misal. Teńlemenı sheshiń: $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 6 = 0$.

△ $t=\log_3 x$ belgilew kirgizip, $t^2-5t+6=0$ kvadrat teńlemenı payda etemiz.

Onı sheship $t=2$ hám $t=3$ korenlerdi tabamız. Tabılǵan korenlerdi $t=\log_3 x$ ke qoyıp, $\log_3 x=2$ hám $\log_3 x=3$ teńliklerdi alamız. Bul teńlemelerdiń sheshimleri, sáykes túrde (ráwishte), 9 hám 27 boladı. *juwap: $x=9$, $x=27$.* ▲

Еń ápiwayı logarifmlik teńsizlik

$\log_a x > b$ kórinisindegi teńsizlikti ($a>0$, $a\neq 1$, b – haqıyqıy san) eń ápiwayı logarifmlik teńsizlik dew múmkin.

13- misal. Teńsizlikti sheshiń: $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > -3$.

△ $3-x>0$ bolıwı kerek, $-3=\log_{\frac{1}{2}} 8$ bolǵanlıqtan $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) > \log_{\frac{1}{2}} 8$. Tiykar

$a=\frac{1}{2}<1$ bolǵanı ushın logarifmlik funkciya kemeyiwshi, demek, $3-x<8$ hám $0<3-x<8$. Bunnan $-3<-x<5$ yamasa $-5<x<3$ teńsizliklerge kelemiz.

juwap: $x\in(-5; 3)$. ▲

14- misal. Teńsizlikti sheshiń: $\lg(x+1) < \lg(2x-3)$.

△ Logarifmlik funkciyanıń qásiyetlerinen tómendegi teńsizlikler sistemasın alamız:

$$\begin{cases} x+1 < 2x-3, \\ x+1 > 0, \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \quad \text{yaki} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x > -1, \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bul sistemaniń sheshimi $(4; +\infty)$ aralıqtan ibarat. *juwap: $x\in(4; +\infty)$.* ▲

15- misal. Teńsizlikti sheshiń: $\log_{\frac{1}{2}} x - 9 \leq 0$.

△ Logarifmlik funkciya anıqlaması boyınsha, $x>0$ bolıwı kerek. $t=\log_{\frac{1}{2}} x$ belgini kirgizemiz. Ol jaǵdayda $t^2-9\leq 0$ teńsizlikti payda etemiz. Bunı sheship

$-3 \leq t \leq 3$, ya'niy $-3 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$ te'nsizliklarga kelemiz. $-3 = \log_{\frac{1}{2}} 8$; $3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$ bol'ganliqtan $\log_{\frac{1}{2}} 8 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$. Tiykar $a = \frac{1}{2} < 1$ bol'gani ushın $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ funkciya kemeyiwshi, demek, $\frac{1}{8} \leq x \leq 8$ bolıwı kerek. *juwap*: $x \in [\frac{1}{8}; 8]$. ▲

Soraw hám tapsırmalar



1. Logarifmge anıqlama beriń. Mısal keltiriń.
 2. Logarifmniń qásiyetlerin aytıń. Mısalda túsindiriń.
 3. Logarifmlik funkciyalardıń qásiyetlerin aytıp beriń.
 4. Eń ápiwayı logarifmlik teńleme degen ne hám ol qalay sheshiledi?
 5. Eń ápiwayı logarifmlik teńsizlik degen ne hám ol qalay sheshiledi?
- Mısal keltiriń.

Shıńǵıwlar

185. Esaplań:

1) $\log_5 125$; | 2) $\log_{\frac{1}{3}} 9$; | 3) $\log_5 0,04$; | 4) $\log_{0,1} 1000$; | 5) $\log_3 \frac{1}{27}$.

186. Salıstırıń:

1) $\log_2 3$ hám $\log_2 5$; | 2) $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ hám $\log_5 4$; | 3) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ hám $\log_{\frac{1}{2}} 5$;
4) $\log_2 3$ hám 1; | 5) $\log_3 2 + \log_3 5$ hám $\log_3 (2 + 5)$; | 6) $\log_7 \frac{1}{2}$ hám 0.

187. Esaplań:

1) $1,5^{\log_{1,5} 2}$; | 2) $e^{\ln 5}$; | 3) $2^{3 \log_2 5}$; | 4) $3^{2 + \log_3 5}$; | 5) $7^{-2 \log_7 6}$;
6) $3^{3 - \log_3 54}$; | 7) $\log_6 2 + \log_6 18$; | 8) $\lg 25 + \lg 4$; | 9) $\log_3 \frac{5}{9} + \log_3 \frac{1}{5}$;
10) $\frac{\lg 2 + \lg 162}{2 \lg 3 + \lg 2}$; | 11) $\log_4 7 - \log_4 \frac{7}{16}$; | 12) $\frac{\ln 64}{\ln 4}$.

188. Funkciyalardıń anıqlanıw oblastın tabıń:

1) $y = \log_3 (2x - 5)$; | 2) $y = \log_7 (x^2 - 2x - 3)$; | 3) $y = \log_5 (4 - x^2)$.
4) $y = \log_2 (x^2 - 2x + 1)$; | 5) $y = \log_{\sqrt{2}} (3 - x)$; | 6) $y = \log_2 \frac{x-1}{x+2}$.

189. Funkciyanıń grafigini sızıń:

1) $y = \log_2 x$; | 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; | 3) $y = \log_4 (x - 1)$; | 4) $y = -\log_3 x$.

190. Teńlemini sheshiń:

- 1) $\log_2 x = -5$; 2) $\log_{\sqrt{3}} x = 0$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 4) $\log_x 128 = 7$;
 5) $\log_9 x = \frac{1}{2}$; 6) $\log_{\sqrt{x}} 27 = 3$; 7) $\log_3 x = 5$;
 8) $\log_2 (x-5) = \log_2 (4x+1)$; 9) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$; 10) $\log_5 (3-2x) = \log_{\frac{1}{5}} x$;
 11) $\log_{\frac{1}{3}} (3x-6) = -2$; 12) $\log_2 (x+1) + \log_2 (8-x) = 3$; 13) $\log_x 5 = 2$;
 14) $\lg(x^2 + x - 10) - \lg(x-3) = 1$; 15) $\log_7^2 x - \log_7 x = 2$;
 16) $5^{4-x} = 6$; 17) $\log_x 3 + \log_3 x = 2$; 18) $5^{x^2} = 6$; 19) $5^{x^2} = \frac{1}{2}$;
 20) $\lg(x^2 - 6x + 19) = 1$; 21) $\log_5 (5^x - 4) = 1 - x$; 22) $\lg(x^2 - 21) = 2$.

191. Teńsizlikti sheshiń:

- 1) $\log_8 x > 2$; 2) $\log_3^2 x - 3 > 2 \cdot \log_3 x$; 3) $\log_8 x < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{2}} x > 1$;
 5) $\lg(3-2x) > 1$; 6) $2^{x+1} < 3$; 7) $\log_3 (2x-4) < \log_3 (x+1)$; 8) $2^{|x+1|} > 3$.

79-81

KÓRSETKISHLI HÁM LOGARIFMLIK FUNKCIYALAR JÁRDEMINDE MODELLESTIRIW

1-misal. Bakteriya belgili waqıttan (bir neshe saat yamasa minutlardan) soń ekige bólinedi hám bakteriyalar sanı eki ese artadı. Náwbettegi waqıttan soń usı eki bakteriya da ekige bólinedi hám populyaciya muǵdarı (bakteriyalardıń ulıwma sanı) jáne eki ese artadı; endi, bakteriyalar sanı tórt dana boldı. Bul kóbeyiw procesi qolay shárayatlarda (populyaciya ushın zárúrli resurslar: orın, jemtik, suw, energiya hám taǵı basqalar bar bolǵanda) dawam ete beredi.

Meyli, dáslep 10 million dana bakteriya bar ekenligi, bunday bakteriyalar bir saattan soń ekige bóliniwi belgili bolsın. Tómenдеgi кесте $t = 1, 2, 3, 4$ saat ótkende b populyaciya muǵdarı qalay ózgeriwin ańlatadı:

t (saat)	0	1	2	3	4
b_t (million)	10	20	40	80	160

Usı menen birge, barlıq bakteriyalar da hár saatta bir waqıtta sinxron túrde (ráwishte) ekige bólinbeytuǵını belgili. Bunday jaǵdayda t pútin san bolmaǵanda (Máselen, $t = 1\frac{1}{2}$ saat) bakteriyalar populyaciyası muǵdarın tabıw máselesi tur.

a) $b_1, b_2, \dots$ izbe-izlik qanday izbe-izlik?

b) Tegisliktegi tuwrı müyeshli koordinatalar sistemasında keste boyınsha sáykes noqatlardı belgilep, soń payda bolǵan noqatlardı tegis sıziq penen tutastırıń.

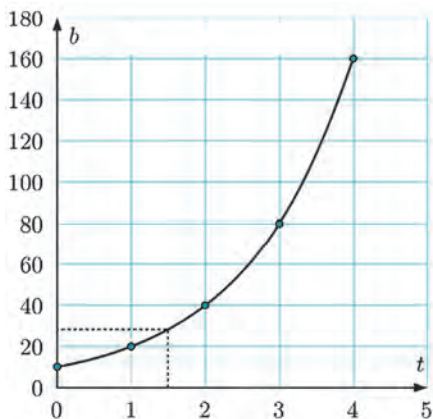
c) $t = 1\frac{1}{2}$ saat ótkennen keyin bakteriyalar populyaciyası qanday boladı?

d) Bakteriyalar populyaciyasınıń qálegen t waqıtqa salıstırǵandaǵı ózgeriw qanday funkciya járdeminde modellestiriwge boladı?

△ Kesteniń 2-qatardaǵı $b_1, b_2, \dots$ sanlar izbezizligi bólimi 2 ge teń bolǵan geometriyalıq progressiya ekenligi belgili. Onıń ulıwma kórinisi tómendegishe boladı: $b_t = 20 \cdot 2^{t-1}$, bul jerde $t = 1, 2, 3, 4$.

Tegisliktegi koordinatalar sistemasında keste boyınsha sáykes noqatlardı belgilep, soń payda bolǵan noqatlardı tegis sıziq penen tutastırayıq:

$t = 1\frac{1}{2}$ saat ótkende bakteriyalar populyaciyası shamań menen 28 million ekenligin kórsek boladı.



Payda bolǵan iymek sıziq kórinisi kórsetkishli funkciya grafigine uqsaslıǵı kórinip tur. Bul funkciyani $b(t)$ dep belgilep, (bul jerde $t \geq 0$), $b(t) = 20 \cdot 2^{t-1} = 10 \cdot 2^t$ kórinisinde jaza alamız. ▲

Ulıwma jaǵdayda, $b(t) = b_0 a^t$ nızamı menen ózgeretuǵın muǵdar (bul jerde $b_0 > 0$, $a > 1$, $t \geq 0$) *eksponencial ósiwshi* muǵdar delinedi.

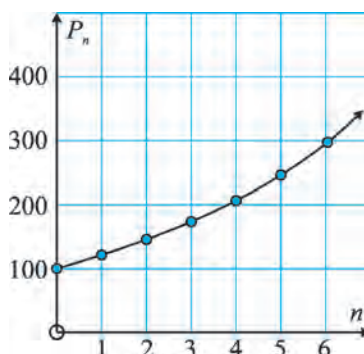
Tómendegi juwmaqqa iye bolamız:

Eger populyaciyaniń muǵdarlıq ósiwi onıń dáslepki sanına proporcional bolsa, bunday populyaciya eksponencial kóbeyedi.

“Eksponencial ósiw” ibarası ádette qanday da tez, toqtawsız ósiw procesin ańlatadı. Máselen, janzatlar populyaciyası, qandayda bir mámleket xalqınıń tez ósiwin baspasózde solay táriypleydi.

2-misal. Epidemiologiya xizmetiniń maǵlıwmatı boyınsha, tıshqanlar populyaciyası muǵdarı qolay shárayatlarda hár háptede 20% artadı eken. Dáslep 100 dana tıshqan bolsa, olardıń populyaciyası muǵdarı qanday nızam menen ósiwin tabıń.

△ Eger P_n dep n hápte dawamındaǵı populyaciya muǵdarın belgilesek, tómendegilerge iye bolamız: $P_0 = 100$ (dáslepki muǵdar), $P_1 = P_0 \cdot 1,2 = 100 \cdot 1,2$, $P_2 = P_1 \cdot 1,2 = 100 \cdot (1,2)^2$, $P_3 = P_2 \cdot 1,2 = 100 \cdot (1,2)^3$,



hám t.b. n háptede populyaciya muǵdarı

$$P_n = 100 \cdot (1,2)^n \text{ boladı.} \blacktriangle$$

Kalkulyatordan paydalanıp, sáykes mánislerdi esaplasaq, tómendegi grafikke iye bolamız:

6 háptede populyaciya muǵdarı 3 márte artıwı kórinip tur.

3-misal. Entomolog ilimpaz shegirtke populyaciasınıń awıl xojalıǵı atızlarına zıyan jetkiziwin úyrengende zıyan kórgen jer maydanlar $A_n = 1000 \cdot 2^{0,2n}$ (gektar) nızamı menen ózgeriwin anıqladı, bul jerde n hápteler sanı.

a) Dáslep qanday maydanǵa zıyan jetkizilgen?

b) **I)** 5; **II)** 10 háptede qanday maydanǵa zıyan jetkiziledi?

c) Kalkulyatordan paydalanıp, 12 háptede qanday maydanǵa zıyan jetkiziliwin tabıń.

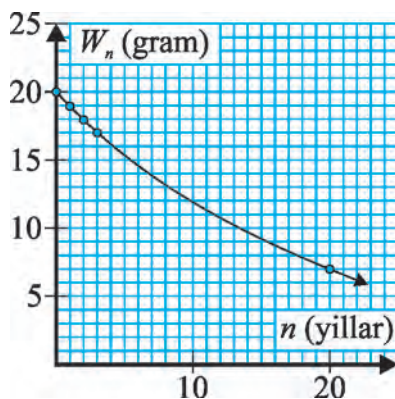
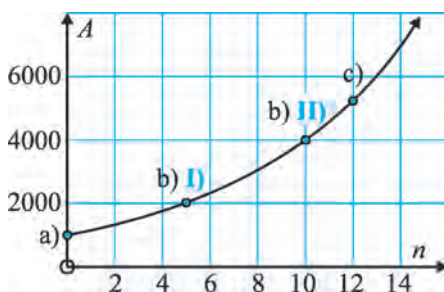
d) Zıyan kórgen maydan menen hápteler sanı arasındaqı baylanıs nızamınıń grafigin sızıń.

△ a) $A_0 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 0} = 1000$ (gektar). Demek, dáslep 1000 ga maydanǵa zıyan jetkizilgen.

b) **I)** $A_5 = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 5} = 2000$ zıyan kórgen maydan 2000 (ga) ǵa teń.

II) $A_{10} = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 10} = 4000$ zıyan kórgen maydan 4000 (ga) ǵa teń.

c) $A_{12} = 1000 \cdot 2^{0,2 \cdot 12} = 1000 \cdot 2^{2,4} \approx 5280$ zıyan kórgen maydan shama menen 5280 gektarǵa teń. $\blacktriangle$



4-misal. Radioaktiv jimiriliw nátiyjesinde massası 20 gramm bolǵan radioaktiv zat hár jılı 5% ke kemeyedi. W_n dep zattıń n jıldaqı massasını belgilesek,

$$W_0 = 20 \text{ g};$$

$$W_1 = W_0 \cdot 0,95 = 20 \cdot 0,95 \text{ g};$$

$$W_2 = W_1 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^2 \text{ g};$$

$$W_3 = W_2 \cdot 0,95 = 20 \cdot (0,95)^3 \text{ g};$$

$$W_{20} = 20 \cdot (0,95)^{20} \approx 7,2 \text{ g};$$

$$W_{100} = 20 \cdot (0,95)^{100} \approx 0,1 \text{ g}$$

teńliklerge iye bolamız.

Bunnan $W_n = 20 \cdot (0,95)^n$.

$b(t) = b_0 a^t$ nızamı menen ózgeretuǵın muǵdar (bul jerde $b_0 > 0$, $0 < a < 1$, $t \geq 0$) eksponencial kemeyiwshi muǵdar delinedi.

5-misal. Paydalanılǵan dári insan denesine áste-sekin sińip, onıń t saattan soń

qalip atirgan muğdarı (dozası) $D(t)=120 \cdot (0,9)^t$ (mg) nızamı menen ózgeredi.

a) $t=0, 4, 12, 24$ saat bolğanda $D(t)$ ni tabıń.

b) Dáslep insan denesine qanday doza kirgizilgen?

c) a) dağı mağlıwmatlardan paydalanıp, $D(t)$ grafigin súwretleń, bul jerde $t \geq 0$.

d) Grafikten paydalanıp, 25 mg muğdardağı dári insan denesinde qansha waqıt qalıwın bahalań.

△ a) $D(t)=120 \cdot (0,9)^t$ mg

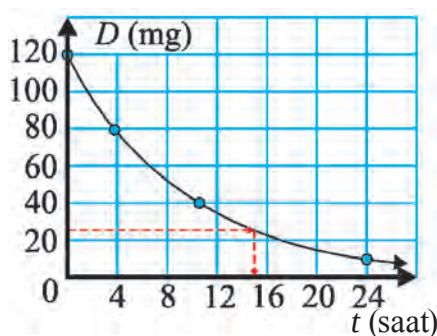
$$D(0)=120 \cdot (0,9)^0=120 \text{ mg};$$

$$D(12)=120 \cdot (0,9)^{12} \approx 33,9 \text{ mg};$$

$$D(4)=120 \cdot (0,9)^4 \approx 78,7 \text{ mg};$$

$$D(24)=120 \cdot (0,9)^{24} \approx 9,57 \text{ mg};$$

b) $D(0)=120$ bolğanı ushın, dáslep 120 (mg) dári kirgizilgen.



c) Usı grafikten paydalanıp, insan denesine kirgizilgen 120mg dáriniń shama menen 15 saattan soń 25 mg qalıwın anıqlaymız. **▲**

6-misal. Radioaktiv jemiriliw nátiyjesinde radioaktiv zat massası

$W_t = W_0 \cdot 2^{-0,001t}$ (g) nızamı boyınsha ózgeredi, bul jerde t jıllar.

a) Dáslep zat qanday massağa iye bolğan?

b) 200 jıldan soń zattıń neshe procenti qaladı?

$t=0$ bolğanda $W_t = W_0 \cdot 2^0 = W_0$ boladı. Demek, zattıń dáslepki massası W_0 eken. $t=200$ bolğanda $W_{200} = W_0 \cdot 2^{-0,001 \cdot 200} = W_0 \cdot 2^{-0,2} \approx W_0 \cdot 0,8706$. Demek, 200 jıldan soń zattıń shama menen 87,1 procenti qaladı. **▲**

7-misal. Teńiz qáddinen (betinen) h km biyiklikke kóterilgenimizde, atmosfera basımı $p = 76 \cdot 2,7^{-\frac{h}{8}}$ (sm sinap bağanası) nızamı menen ózgeredi eken. 5,6 km biyiklikte atmosfera basımı qanday boladı?

8-misal. Teńiz qáddinen (betinen) biyiklik $h = \frac{8000}{0,4343} \lg \frac{p_0}{p}$ formula menen esaplanadı, bul jerde $p_0=760$ mm sinap bağanası – teńiz qáddindegi atmosfera basımı, p bolsa h (m) biyikliktegi atmosfera basımı. Alpinistler tawğa kóterilgende basım 304 mm sinap bağanası bolğanın anıqladı. Alpinistler qanday biyiklikke kóterildi?

$$h = \frac{8000}{0,4343} \lg \frac{760}{304} \approx 7330,2 \text{ m}.$$

9-misal. Radioaktiv zat massası waqıt ótiwi menen $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ nızamı boyınsha kemeyedi, bul jerde m_0 – dáslepki waqıttağı massa, m bolsa t waqıttağı massa, T – radioaktiv jemiriliw tezligin anlatıwshı koefficient (yarım jemiriliw dáwiri). Zattıń házirgi kúnde saqlanıp qalğan m massasın bilsek, neshe jılда massa m_0 den m ge shekem kemeygenin taba alamız:

$$t = -T \log_2 \left(\frac{m(t)}{m_0} \right).$$

Bunday qatnas tariyxii izertlewlerde de qollaniliwin aytiw orinli.

10- misal. Tabiiy til sozligindegi sozler sani waqit otiwi menen $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ nizami menen kemeyiwi baqlangan, bul jerde N_0 – daslepki waqittagi sozler sani, $N(t) - t$ (min jillar) waqittagi saqlanip qalgan sozler sani, λ – tilindegi sozlerdin saqlanip qaliwin anlatiwshi koefficient.

Hazirgi kunde saqlanip qalgan sozler $N(t)$ muğdarin bilsek, neshe jilda sozler kólemi N_0 den $N(t)$ ge shekem kemeygenin taba alamiz:

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left(\frac{N(t)}{N_0} \right).$$

11- másele. Daslep qala turğınları a adam bolip, turğınlar sani hár jılı 10 % ke artsa, turğınlardın x jildan keyin qansha bolıwın anıqlawshi formulani tabiń.

△ Quramalı procent formulası boyınsha, qala turğınları sani x jildan soń $y = a \cdot \left(\frac{100+10}{100} \right)^x = a \cdot (1,1)^x$ boladı: Demek, $y = a \cdot (1,1)^x$ formula járdeminde a berilgende x jildan soń turğınlar sani qansha bolıwın anıqlaw múmkin boladı. $a = 1000000$ hám jillar sani x boyınsha turğınlar sanın anıqlawshi kesteni keltiremiz:

x	y	x	y
1	1 100 000	11	2 853 117
2	1 210 000	12	3 138 428
3	1 331 000	13	3 452 271
4	1 464 100	14	3 797 498
5	1 610 510	15	4 177 248
6	1 771 561	16	4 594 973
7	1 948 717	17	5 054 470
8	2 143 589	18	5 559 917
9	2 357 948	19	6 115 909
10	2 593 742	20	6 727 500

Keste boyınsha turğınlar sani 5 jildan soń 1 610 510 adam; 10 jildan soń 2 593 742 adam; al 20 jildan soń 6 727 500 adam boladı eken. ▲

12-másele. Daslep qala turğınları a adam bolip, turğınlar sani hár jılı 2% ke kemeyse, turğınlardın x jildan keyin qansha bolıwın anıqlawshi formulani tabiń.

△ Quramalı procent formulası boyınsha, qala turğınları sani x jildan soń

$$y = a \cdot \left(\frac{100-2}{100} \right)^x = a \cdot 0,98^x \text{ boladı. Demek, } y = a \cdot 0,98^x \text{ formula járdeminde } a$$

berilgende x jıldan soń turǵınlar sanın anıqlaw múmkin. $a = 2000000$ hám jıllar sanı x boyınsha turǵınlar sanın anıqlawshı kesteni keltiremiz:

Keste boyınsha turǵınlar sanı 5 jıldan soń 1 807 842 adam; 10 jıldan soń 1 634 146 adam; al 20 jıldan soń 1 335 216 adam boladı eken. ▲

x	y	x	y
1	1 960 000	11	1 601 463
2	1 920 800	12	1 569 433
3	1 882 384	13	1 538 045
4	1 844 736	14	1 507 284
5	1 807 842	15	1 477 138
6	1 771 685	16	1 447 595
7	1 736 251	17	1 418 644
8	1 701 526	18	1 390 271
9	1 667 496	19	1 362 465
10	1 634 146	20	1 335 216

13- másele. Qala turǵınları dáslep a adam edi. Eger turǵınlar sanı hár jılı 10% ke artsa, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın hám neshe jıldan keyin k ese artıwın anıqlawshı formulanı tabıń.

▲ $y = a \cdot 1,1^x$ hám másele shártinen $y = k \cdot a$ ekenin esapqa alıp $k = 1,1^x$ yamasa $x = \log_{1,1} k$ formula tabılıwı, málim. Tómende turǵınlar sanı k ese artıwı ushın kerekli jıllar sanın anıqlawshı keste keltirilgen:

k	y	k	y	k	y
1	0	6	19	11	25
2	7	7	20	12	26
3	12	8	22	13	27
4	15	9	23	14	28
5	17	10	24	15	28

Kesteden, turǵınlar sanı 2 ese artıwı ushın 7 jıl;

5 ese artıwı ushın 17 jıl;

10 ese artıwı ushın 24 jıl kerek ekenligi, málim. ▲

14- másele. Qala turǵınları hár jılı 2 % ke kemeyse hám de turǵınlardıń dáslepki sanı a adam bolsa, turǵınlardıń x jıldan keyin qansha bolıwın hám neshe jıldan keyin k ese kemeyiwın anıqlawshı formulanı tabıń.

▲ $y = a \cdot 0,98^x$ hám másele shártinen $y = \frac{a}{k}$ bolıwın inabatqa alıp $1/k = 0,98^x$

yamasa $x = \log_{0,98}(1/k)$ formula tabılıwı, málim. Tómente turǵınlar sanı k ese kemeyiwi ushın kerekli jıllar sanın anıqlawshı keste keltirilgen:

k	$1/k$	x	k	$1/k$	x
1	1	0	11	0,090909	119
2	0,5	34	12	0,083333	123
3	0,333333	54	13	0,076923	127
4	0,25	69	14	0,071429	131
5	0,2	80	15	0,066667	134
6	0,166667	89	16	0,0625	137
7	0,142857	96	17	0,058824	140
8	0,125	103	18	0,055556	143
9	0,111111	109	19	0,052632	146
10	0,1	114	20	0,05	148

Kesteden, turǵınlar sanı: 2 ese kemeyiwi ushın 34 jıl;

5 ese kemeyiwi ushın 80 jıl;

10 ese kemeyiwi ushın 114 jıl kerek ekenligi, málim. ▲

15-másele. 1935-jılı amerikalı seysmolog Ch. Rixter jer silkiniwlerdi úyreniw ushın 1 – 9,5 ballıq magnitudalar shkalasın usınıs qılǵan. Bunda jer silkiniw waqtında júzege keliwshi seysmologiyalıq tolqın energiyası *intensivlik* dep atalıwshı muǵdar arqalı bahalanadı. Rixter shkalasında *intensivligi I bolǵan jer silkiniwdiń R magnitudası* $R = \lg I$ formula járdeminde tabıladı eken.

1966-jılı Tashkentte 5,2 magnitudalı, al 2010-jılı Gaitida 7 magnitudalı jer silkiniw bolǵan. Usı jer silkiniwlerdi intensivligi boyınsha salıstırayıq.

△ Gaiti jer silkiniwi: $7 = \lg I_1$, bunnan $I_1 = 10^7 = 10\,000\,000$;

Tashkent jer silkiniwi: $5,2 = \lg I_2$, bunnan $I_2 = 10^{5,2} \approx 158\,489,3$;

Bunnan $\frac{I_1}{I_2} \approx 63,1$. Demek, Gaitide Tashkenttegige salıstırǵanda shama menen

63 ese kúshlirek jer silkiniw bolǵan. ▲



Soraw hám tapsırmalar

1. Kórsetkishli modelge misal keltiriń.
2. Logarifmli modelge misal keltiriń.

Shınıǵıwlar

- 192.** Jerge qaralmasa, t kúnnen soń jabayı otlar maydanı $A(t) = 3 \cdot 2^{0,1t}$ (kv. m) bolǵan jer maydanın qaplap, paydalı ósimliklerge zıyan jetkizedi.
- a) Dáslep qansha maydangá zıyan jetkizilgen?
 - b) **I)** 2; **II)** 10; **III)** 30 kúnde qanday maydangá zıyan jetkiziledi?
 - c) a), b) da alıńǵan maǵlıwmatlardan paydalanıp, zıyan kórgen maydan-

nín kúnler sanına baylanıs nızamı grafigin sızın.

- 193.** Aral boyı ekologiyalıq sistemasın tiklew máqsetinde kem ushırasatúgın haywanlar populyaciyasın kóbeytiw proektinde ekologlar 25 juplıq haywanlardı kóbeyttirmekshi. Izertlewler boyınsha, berilgen shárayatlarda bul haywanlar populyaciyası muǵdarı $P_n = P_0 \cdot 1,23^n$ nızamı menen ózgeredi, bul jerde $P_n - n$ jıldaǵı haywanlar sanı.

a) P_0 sanı neni bildiredi?

b) **I)** 2; **II)** 5; **III)** 10 jılda qanday populyaciyaǵa iye bolamız?

c) a), b) da alınǵan maǵlıwmatlardan paydalanıp, populyaciya muǵdarınıń jıllar sanına baylanıs nızamınıń grafigin sızın.

- 194.** Ximiyalıq reakciya tezligi $V_t = V_0 \cdot 2^{0,05t}$ nızamı menen ózgeredi eken, bul jerde $t(^{\circ}\text{C})$ – temperatura.

a) 0°C ; b) 20°C temperaturada reakciya tezligi qanday boladı?

c) 20°C temperaturadaǵı reakciya tezligi 0°C temperaturadaǵı reakciya tezligine salıstırǵanda neshe procent artadı?

d) $\left(\frac{V_{50} - V_{20}}{V_{20}} \right) \cdot 100\%$ mánisin esaplań hám mánisin túsindirín.

- 195.** 2017- jılı Alyaska yarım atawı janındaǵı atawǵa ayıwların 6 dana juplıǵı qoyıp jiberildi. Dáslep atawda ayıwlar joq edi. Ayıwlar populyaciyası $B_t = B_0 \cdot 2^{0,18t}$ nızamı (bul jerde t - jıllar) menen ózgerse, esaplaw qurallarınan paydalanıp, tómendegilerge juwap berín:

a) B_0 sanı neni bildiredi? Ol neshege teń?

b) 2037-jılда qanday populyaciyaǵa iye bolamız?

c) 2037-jılǵı ayıwlar sanı 2027-jılдаǵı ayıwlar sanına salıstırǵanda neshe procent artadı?

- 196.** Radioaktiv jemiriliw nátiyjesinde radioaktiv zat massası $W(t) = 250 \cdot (0,998)^t$ (g) nızamı boyınsha ózgeredi, bul jerde t – jıllar.

a) Dáslep zat qanday massaǵa iye bolǵan?

b) **I)** 400; **II)** 800; **III)** 1200 jılда zattın neshe gramı qaladı?

c) Joqarıdaǵı maǵlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nın grafigin súwretleń.

d) Grafikten paydalanıp, zat qashan 125 mg muǵdarda qalıwın bahalań.

- 197.** Qaynap turǵan suw suwıtılǵanda onıń T temperaturası $T(t) = 100 \cdot 2^{-0,02t}$ $^{\circ}\text{C}$ nızamı menen ózgeredi, bul jerde t - minutlar.

a) Dáslep qanday temperatura bolǵan?

b) **I)** 15; **II)** 20 minuttan keyin temperatura neshege teń boladı?

c) Joqarıdaǵı maǵlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nın grafigin súwretleń.

d) Grafikten paydalanıp, 78 minuttan keyin temperatura neshege teń bolıwın bahalań.

- 198.** Elektr shınjırındağı tok kúshi $I_t = 0,6 \cdot 2^{-5t}$ (A) nızamı menen ózgeredi, bul jerde t – sekundlar.
 a) Dáslep qanday tok kúshi bolğan?
 b) **I)** 0,1; **II)** 0,5; **III)** 1 sekundtan keyin tok kúshi neshege teń boladı?
 c) Joqarıdağı maǵlıwmatlardan paydalanıp, $W(t)$ nıń grafigin súwretleń.
- 199.** Teńizde d metr tereńlikke salıstırǵanda jaqtılıq $L(d) = L_0 \cdot (0,9954)^d$ (kandela) nızamı menen ózgeredi.
 a) Teńiz túbinde qanday jaqtılıq bolğan?
 b) 1000 metr tereńliktegi jaqtılıq neshe procentke kemeyedi?
- 200.** 8 bakteriya populyaciyası 2 saattan soń 100 danaǵa shekem ósti. Usı sharayatlarda qashan populyaciya 500 ge jetedi?
- 201.** Mobil baylanıs kompaniyası maǵlıwmatları boyınsha, kompaniya mobil baylanısınan paydalanıwshılar sanı $N(t) = 100000e^{0,09t}$ formula járdeminde ańlatıladı eken, bul jerde t – aylar. Házirgi kúnde 3 mln paydalanıwshılar bar ekenligi belgili bolsa, kompaniya qashan jumıs baslaǵan?
- 202.** Awqat mikrotolqınlı pechten alıńanda, ol $T(t) = 80e^{-0,12t}$ nızamına tiykarlanıp suwıydı, bul jerde t – minutlar. Házir bólme temperaturası 22°C bolsa, neshe minuttan soń awqat usı temperaturaǵa shekem suwıydı?
- 203.** Súniy joldas biyikligi t (jıllar) waqıt ótiwi menen $H(t) = 30000e^{-0,2t}$ nızamı menen ózgeredi.
 a) 2 jıldan soń biyiklik qanday bolıwın esaplań.
 b) Joldas 320 km biyiklikte bolsa, ol atmosferanıń joqarı qatlamlarında janıp ketedi. Usı payıtqa shekem qansha waqıt ótedi?

III BAP USHÍN SHÍNÍǴIWLAR

- 204.** Teńlemelerdi sheshiń (**204–205**):
 a) $x^4 - 1 = 0$; b) $5x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$; c) $3x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 5 = 0$.
- 205.** a) $(x-3)(x+14)(x-15) = 0$; b) $(4x+11)(3x-5) = 0$;
 c) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$; d) $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.
- 206.** Teńsizliklerdi sheshiń (**206–208**):
 a) $(2-x)(3x+1)(2x-3) > 0$; b) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4 > 0$.
- 207.** a) $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0$; b) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2-x-x) \leq 0$.
- 208.** a) $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + x - 1} < 0$; b) $\frac{3x-2}{2x-3} < 3$; c) $\frac{7x-4}{x+2} \geq 1$; d) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$.
- 209.** Teńlemeler sistemasın sheshiń:
 a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 113, \\ xy = 56; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 84, \\ x^3 + y^3 = 91; \end{cases}$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + 9xy + 2y^2 = 12, \\ 2x^2 + 3xy - 4y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 2, \\ x^2 + xy + y^2 = 3. \end{cases}$$

210. Teńsizlikler sistemasın sheshiń (210–211):

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - 7\frac{3}{21}, \\ \frac{7x}{3} - \frac{11(x+1)}{6} > \frac{3x-1}{3} - \frac{13-x}{2}; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x, \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3}. \end{cases}$$

211.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x, \\ x^2 \geq x; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - 16 \leq 0, \\ -x^2 + 16 \geq 0; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0, \\ \frac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0. \end{cases}$$

212. Irratsional teńlemeni sheshiń:

$$\text{a) } \sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2};$$

$$\text{b) } \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = \sqrt{3x};$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1} > 0; \quad \text{d) } \sqrt{x-2} - \sqrt{x-3} > -\sqrt{x-5}.$$

213. Sanlardı salıstırıń (213–215):

$$\text{a) } 4, 2^{-\sqrt{2}} \text{ hám } 1; \quad \text{b) } 0, 2^{\frac{3}{5}} \text{ hám } 0, 2^{-\frac{3}{5}}; \quad \text{c) } (0, 4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ hám } 1.$$

214.

$$\text{a) } 4^{0,5} \text{ hám } 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}; \quad \text{b) } \sqrt{3}^{0,2} \text{ hám } 3^{0,2}; \quad \text{c) } 2^{\frac{3}{4}} \text{ hám } 8^{\frac{4}{9}}.$$

215.

$$\text{a) } 2^{-\sqrt{3}} \text{ hám } 2^{-\sqrt{5}}; \quad \text{b) } 7^{-0,3} \text{ hám } 7^{\frac{1}{3}}; \quad \text{c) } \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}} \text{ hám } 3^{-\sqrt{3}}.$$

216. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

$$\text{a) } y = 5^{\sqrt{x^2-1}}; \quad \text{b) } y = \frac{1}{3^x+1}; \quad \text{c) } y = \frac{1}{3^{x^2-9}}; \quad \text{d) } y = 3^{\frac{1}{2-x}}.$$

217. Funkciyanıń mánisler oblastın tabıń:

$$\text{a) } y = 2^{-|x|}; \quad \text{b) } y = 3 + 4^{x+1}; \quad \text{c) } y = -6^x; \quad \text{d) } y = 5^{|x|} + 1.$$

218. Teńlemelerdi sheshiń (218–219):

$$\text{a) } 8^x = 2^{\frac{1}{5}}; \quad \text{b) } 121^x - 7 \cdot 11^x = 5 \cdot 11^x - 11; \quad \text{c) } 0,5^{x^2+x-3,5} = 2\sqrt{2}.$$

219.

$$\text{a) } 6^{2x} - 5^{2x-1} = 6^{2x-1} + 5^{2x}; \quad \text{b) } 4^{x+3} + 4^x = 130; \quad \text{c) } 125^x + 20^x = 2^{3x+1}.$$

220. Teńlemeler sistemasın sheshiń:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x + y = 5, \\ 5^{y-x^2} = 0,2; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 3^{x-1} = 2^y, \\ 0,1^{2x-y} = 0,01; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 5^{x-y} = 25, \\ 3^{x+y} = 27. \end{cases} \end{array}$$

221. Teńsizlikti sheshiń:

$$\text{a) } 4^x \leq 3^x; \quad \text{b) } 16^x - 7 \cdot 4^x - 8 < 0; \quad \text{c) } 4^x \cdot 5^{1-x} < \frac{25}{4}; \quad \text{d) } 6^{\frac{x-3}{x+8}} \geq 1.$$

222. Sanlardı salıstırıń:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_3 2 \text{ hám } 2; & \text{b) } \log_3 5 \text{ hám } 2 \cdot \log_3 2; & \text{c) } \log_2 5 \text{ hám } \log_5 2 \\ \text{e) } \log_{0,2} 5 \text{ hám } \log_{0,2} 6; & \text{d) } \log_4 3 \text{ hám } \log_3 4; & \text{f) } \lg 18,8 \text{ hám } \lg 6\pi. \end{array}$$

223. Funkciyanıń anıqlanıw oblastın tabıń:

$$\text{a) } y = \log_2(2x+7); \quad \text{b) } y = \log_{\frac{1}{3}}(4-x^2); \quad \text{c) } y = \log_5(-8x); \quad \text{d) } y = \lg \frac{x-3}{x+8}.$$

224. Teńlemelerdi sheshiń:

$$\text{a) } \lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2; \quad \text{b) } \log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{x+3} = 2.$$

225. Teńlemeler sistemasın sheshiń (225–226):

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 5^{x-y} = 1, \\ 2^{\log_2(x+y)} = 6; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ \lg x - \lg y = 6; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} \log_{17}(3^x + 2^y) = 1, \\ 3^{x+1} - 4 \cdot 2^y = -5; \end{cases} \end{array}$$

226.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ 5^x \cdot 2^y = 250; \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} \log_2 x + 5^{\log_5 y} = 4, \\ x^y = 16; \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 81, \\ 3^x - 3^y = 24. \end{cases} \end{array}$$

227. Teńsizlikti sheshiń:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_3(x^2 + x + 1) \geq 1; & \text{b) } \log_2(x^2 + x - 6) - \log_2(x + 3) \leq 1; \\ \text{c) } \lg^2 x < \lg x^5 - 6; & \text{d) } \log_3(4^x - 5 \cdot 2^x + 13) > 2; & \text{e) } 5^{x+7} > 2. \end{array}$$

228. Funkciya grafigin sızıń:

$$\text{a) } y = 1,5 \sin(2x-1); \quad \text{b) } y = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{3}); \quad \text{c) } y = \log_3(1-x).$$

229. Salıstırıń:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \arcsin(-\frac{1}{2}) \text{ hám } \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}; & \text{b) } \arccos \frac{1}{2} \text{ hám } \arctg(-1); \\ \text{c) } \arctg \sqrt{3} \text{ hám } \arctg 1; & \text{d) } \arccos(-\frac{1}{2}) \text{ hám } \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}). \end{array}$$

230. Esaplań:

$$\text{a) } 2 \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arctg(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2};$$

b) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1;$

231. Теңлемени sheshiń (231–233):

a) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0;$ b) $3\sin^2 x + 7\cos^2 x - 3 = 0;$ c) $4\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0.$

232. a) $3\sin^2 x + 7\sin x - 10 = 0;$ b) $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0;$ c) $\sin 6x = \sin 3x.$

233. a) $\cos 7x = \cos 2x;$ b) $\operatorname{tg} 8x = \operatorname{tg} 11x.$

234. Теңsizlikti sheshiń (234–235):

a) $\sin x > -\frac{1}{2};$ b) $\cos 2x \leq \frac{1}{2};$ c) $\operatorname{tg} 3x \geq 1;$ d) $\sin 2x \leq \frac{1}{2}.$

235. a) $\sin 4x \leq \frac{1}{2};$ b) $\cos 10x \geq 0;$ c) $\operatorname{tg} 9x \leq \sqrt{3};$ d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0.$

Baqlaw test tapsirmalari

1. Теңлемени sheshiń: $\sin 6x = 0.$

A) $x = \frac{\pi}{6}n, n \in \mathbb{Z};$

B) $x = \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z};$

C) $x = \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z};$

D) $x = \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}.$

2. Теңлемени sheshiń: $\cos 2x = 0.$

A) $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

B) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$

C) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z};$

D) $x = \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}.$



3. Теңлемени sheshiń: $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}.$

A) $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$

B) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$

C) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z};$

D) $x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$

4. Теңsizlikti sheshiń: $\sin 2x > 3.$

A) $x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$ B) $\emptyset;$ C) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ D) $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

5. Теңsizlikti sheshiń: $\cos 2x < 3.$

A) $(-\infty; +\infty);$ B) $\emptyset;$ C) $(-\infty; 0);$ D) $(0; +\infty).$

- 6.** Aniqlanuv oblastin tabii: $y=12^x$.
 A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(-\infty; 0)$; D) $\emptyset$.
- 7.** Aniqlanuv oblastin tabii: $y=\log_2(3-x)$.
 A) $(3; +\infty)$; B) $[3; +\infty)$; C) $(-\infty; 3)$; D) $(-\infty; 3]$.
- 8.** Esaplan: $\arcsin \frac{1}{2}$.
 A) $\frac{\pi}{2}$; B) π ; C) $\frac{\pi}{4}$; D) $\frac{\pi}{6}$.
- 9.** Esaplan: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.
- 10.** Esaplan: $\arctg 1$.
 A) $\frac{\pi}{3}$; B) $\frac{\pi}{2}$; C) $\frac{\pi}{6}$; D) $\frac{\pi}{4}$.

IV BAP



KOMPLEKS SANLAR

86-87

KOMPLEKS SANLAR HÁM OLAR ÚSTINDE ÁMELLER. KOMPLEKS SANDÍ SÚWRETLEW

Kompleks sanlar

Kompleks sanlar haqqında bilimlendiriw ilim hám pándе, dara jaǵdayda, matematikada bólek orın tutadı. Tez rawajlanıp atırǵan bul oblast texnikada, sonday-aq, óndiristiń kóplep salalarında júdá keń qollanıwǵa iye. Usı sanlar haqqında ayırım maǵlıwmatlardı keltiremiz. Dara jaǵdaydaǵı bir mısaldan baslayıq.

$x^2+4=0$ teńlemenı sheshiw procesinde $x_1=2\sqrt{-1}$ hám $x_2=-2\sqrt{-1}$ “sanlar” payda boladı. Haqıyqıy sanlar arasında bolsa bunday “sanlar” joq. Sonday jaǵdaydan qutılıw ushın $\sqrt{-1}$ ge *san* dep qaraw zárurlıǵı payda boladı.

Bul jańa san hech qanday real muǵdardıń ólshemin, yamasa onıń ózgeriwın ańlatpaydı. Usı sebepli $\sqrt{-1}$ di **jorımal** (qıyalıy, haqıyqatta bar bolmaǵan) **birlik** dep ataw hám arnawlı belgilew qabul qılınǵan: $\sqrt{-1}=i$. Jorımal birlik ushın $i^2=-1$ teńlik orınlı boladı.

$a+bi$ kórinisindegi ańlatpanı qaraymız. Bul jerde a hám b lar qálegen haqıyqıy sanlar, i bolsa jorımal birlik.

$a+bi$ ańlatpa haqıyqıy san a hám jorımal san bi lar “kompleksi”nen ibarat bolǵanı ushın onı kompleks san dep ataw qabıl qılınǵan.

$a+bi$ ańlatpa algebralıq kórinistegi kompleks san dep ataladı.

$a+bi$ di “algebralıq kórinistegi kompleks san” dewdiń ornına qısqaalıq ushın “kompleks san” dep ataymız. Kompleks sanlardı bir hárip penen belgilew qolay. Máselen, $a+bi$ di z penen belgileyik. $z=a+bi$ kompleks sannıń haqıyqıy bólegi a nı $\text{Re}(z)$ (fransuzcha réelle – haqıyqıy) kibi, jorımal bólegi b nı bolsa $\text{Im}(z)$ (fransuzcha *imaginaire* – jorımal) kibi belgilew qabıl qılınǵan: $a=\text{Re}(z)$, $b=\text{Im}(z)$.

Eger $z=a+bi$ kompleks san ushın $b=0$ bolsa, haqıyqıy san $z=a$ payda boladı. Demek, haqıyqıy sanlar kópligi R barlıq **kompleks sanlar kópligi** C niń úles kópligi boladı: $R \subset C$. úles kópligi

1- misal. $z_1=1+2i$, $z_2=2-i$, $z_3=2,1$, $z_4=2i$, $z_5=0$ kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bóleklerin tabıń.

 Kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bólekleriniń anıqlamaları boyınsha tabamız:

$$\operatorname{Re}(z_1)=1; \operatorname{Re}(z_2)=2; \operatorname{Re}(z_3)=2,1; \operatorname{Re}(z_4)=0; \operatorname{Re}(z_5)=0;$$

$$\operatorname{Im}(z_1)=2; \operatorname{Im}(z_2)=-1; \operatorname{Im}(z_3)=0; \operatorname{Im}(z_4)=2; \operatorname{Im}(z_5)=0. \quad \text{▲}$$

Kompleks sanlar ushın “<”, “>” qatnasları anıqlanbağan, lekin teń kompleks sanlar túsinigi kirgiziledi.

Eki kompleks sannıń haqıyqıy hám jorımal bólekleri, sáykes túrde, teń bolsa, bunday kompleks sanlar óz ara teń dep ataladı.

Máselen, $z_1=1,5+\frac{4}{5}i$ hám $z_2=\frac{3}{2}+0,8i$ sanları ushın $\operatorname{Re}(z_1)=\operatorname{Re}(z_2)=1,5$; $\operatorname{Im}(z_1)=\operatorname{Im}(z_2)=0,8$. Demek, $z_1=z_2$.

Bir-birinen tek ǵana jorımal bólekleriniń belgisi menen parıqlanatuǵın eki kompleks san óz ara túyinles kompleks sanlar delinedi. $z=a+bi$ kompleks sanǵa túyinles kompleks san $\bar{z}=a-bi$ kórinisinde jazıladı.

Máselen, $6+7i$ hám $6-7i$ ler túyinles kompleks sanlar esaplanadı: $\overline{6+7i}=6-7i$. Usı kibi $\bar{\bar{z}}$ sanına túyinles san $\bar{\bar{z}}=z$ boladı. Máselen, $\overline{\overline{6+7i}}=\overline{6-7i}=6+7i$. a haqıyqıy sanǵa túyinles san a nıń ózine teń: $\bar{a}=\overline{a+0 \cdot i}=a-0 \cdot i=a$. Biraq, bi jorımal sanǵa túyinles san $\bar{bi}=-bi$ boladı. Sebebi $\bar{bi}=\overline{0+bi}=0-bi=-bi$.

Kompleks sanlar ústinde arifmetikalıq ámeller

Kompleks sanlar ústinde arifmetikalıq ámeller tómendegishe anıqlanadı:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \quad (1)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i; \quad (2)$$

$$(a+bi) \cdot (c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i; \quad (3)$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \quad (4)$$

(1) hám (2) teńliklerdi tikkeley qollanıw qıyın emes. Kompleks sanlardı kóbeytiw ámelin $i^2=-1$ ekenligin itibarǵa alıp, kóp aǵzalını kóbeytiw kibi orınlaw múmkin.

2- misal. Qosındını tabıń: $(3+7i)+(-5+4i)$.

 Qosındını tabıw ushın (1) formuladan paydalanamız:

$$(3+7i)+(-5+4i)=(3+(-5))+(7+4)i=-2+11i. \quad \text{▲}$$

3- misal. Ayırmanı tabiń: $(13-7i)-(-5+4i)$.

△ Ayırmanı tabıw ushın (2) formuladan paydalanamız:

$$(13-7i)-(-5+4i)=(13-(-5))+(-7-4)i=18-11i. \blacktriangle$$

4- misal. Kóbeymeni tabiń: $(2-i) \cdot (\frac{3}{4}+2i)$.

△ Qawsırmalardı ashamız hám $i^2=-1$ ekenliginen paydalanamız:

$$(2-i) \cdot (\frac{3}{4}+2i) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot 2i - i \cdot \frac{3}{4} - 2i^2 = \frac{3}{2} + 4i - \frac{3}{4}i + 2 = \frac{7}{2} + \frac{13}{4}i. \blacktriangle$$

$\frac{a+bi}{c+di}$ bólinbeni esaplaw ushın, onıń alımı hám bólimin bólimniń “túyinlesi” $c-di$ ge kóbeytip, tiyisli ámellerdi orınlaw kerek.

5- misal. Bóliw ámelin orınláń: $\frac{2-i}{-3+2i}$.

$$\triangle \frac{2-i}{-3+2i} = \frac{(2-i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-6-4i+3i-2}{(-3)^2-(2i)^2} = \frac{-8-i}{13} = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}i. \blacktriangle$$

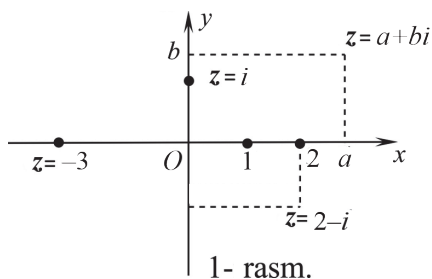
$z+w=0$ teńlikni qanaatlandıırıwshı z , w kompleks sanlar óz ara *qarama-qarsı* sanlar delinedi. z kompleks sanına qarama-qarsı sandı $-z$ penen belgilew qabıl qılınğan. $z=a+bi$ kompleks sanğa qarama-qarsı bolğan tek ğana bir kompleks san bar hám bul san $-z=-a-bi$ kompleks sannan ibarat.

$zw=1$ teńlikti qanaatlandıratuǵın z hám w kompleks sanlar óz ara *keri* kompleks sanlar delinedi. $z=0$ sanğa keri san joq. Hár qanday $z \neq 0$ kompleks sanğa keri kompleks san bar. Bul san $\frac{1}{z}$ sanınan ibarat.

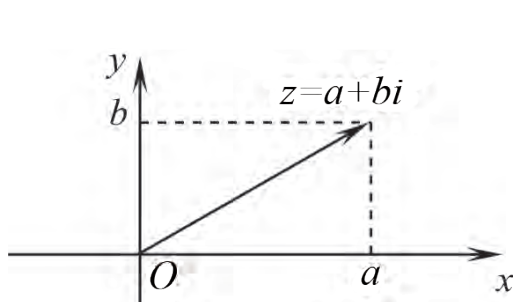
Kompleks sandı tegislikte súwretlew

Meyli, tegislikte tuwrı múyeshli Dekart koordinatar sistemasi berilgen bolsın. Ol jaǵdayda $z=a+bi$ kompleks sanğa tegislikte koordinatarı $(a; b)$ bolğan noqat sáykes keledi.

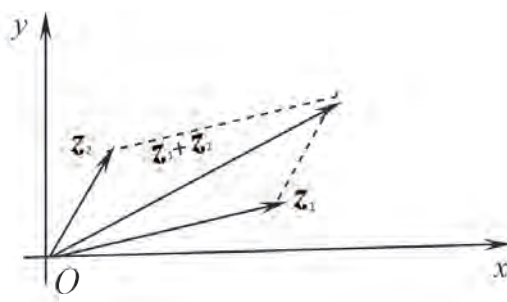
Bul usıl menen súwretlewde $a+0i$ kompleks sanğa $(a; 0)$ koordinatalı noqat, $0+bi$ kompleks sanğa bolsa $(0; b)$ noqat sáykes keledi. Sonıń ushın da Ox kósher haqıyqıy hám Oy kósher jorımal kósher delinedi (1-súwret).



$a+bi$ kompleks sandı tegislikte a hám b koordinatalı vektor kibi de súwretlew múmkin (2-súwret). Bul bolsa kompleks sanlardı qosıwda vektorlardı qosıwdıń parallelogramm qaǵıydasın qollanıw múmkinshiligin beredi (3-súwret).



2-súwret.



3-súwret.

Soraw hám tapsırmalar



1. Jorımal birlik degen ne? Nege onı kirgiziwge talap sezildi?
2. Kompleks sannıń algebralıq kórinisin jazıń, mısal keltiriń
3. Eki kompleks san qashan teń delinedi? Mısal keltiriń.
4. Eki kompleks sannıń qosındısı, ayırması, kóbeymesi, bólinbesi qalay anıqlanadı? Mısaltarda túsindiriń.
5. Qarama-qarsı kompleks san degen ne?
6. Túyinles kompleks san degen ne?
7. Óz ara keri kompleks sanlar degen ne? Mısaltar keltiriń.
8. Kompleks sandı vektor kibi súwretleń? Mısal keltiriń.

Shınıǵıwlar

1. Kompleks sanlardıń haqıyqıy hám jorımal bóleklerin aytıń:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------|--------------------|
| 1) $z = -3 + 7i$; | 2) $z = 4 - \frac{1}{2}i$; | 3) $z = -2 - 5i$; |
| 4) $z = -5,7 + 5i$; | 5) $z = 5i$; | 6) $z = 9$; |
| 7) $z = -7 + 3i$; | 8) $z = 8 - \frac{1}{2}i$; | 9) $z = -5 - 6i$; |
| 10) $z = -5,7 - 5i$; | 11) $z = -5i$; | 12) $z = 90$. |

2. Kompleks sanlardı algebralıq kórinisinde jazıń:

- | | |
|--|---|
| 1) $\text{Re}(z) = 4$, $\text{Im}(z) = -5$; | 2) $\text{Re}(z) = -2$, $\text{Im}(z) = 3$; |
| 3) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 8$; | 4) $\text{Re}(z) = 7$, $\text{Im}(z) = 0$; |
| 5) $\text{Re}(z) = 6$, $\text{Im}(z) = -7$; | 6) $\text{Re}(z) = -3$, $\text{Im}(z) = 4$; |
| 7) $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 9$; | 8) $\text{Re}(z) = 2$, $\text{Im}(z) = 0$; |
| 9) $\text{Re}(z) = 12$, $\text{Im}(z) = 20$. | |

3. Teń kompleks sanlardı kórsetiń (3–4):

1) $2 - 4i$; 2) $2 + 3i$; 3) $\frac{2}{3} + i$; 4) $\sqrt{121} - 7i$; 5) $33 + 44i$; 6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{27}i$.

4.

1) $4 - 3i$; 2) $1 + 3i$; 3) $\frac{1}{3} + i$; 4) $\sqrt{16} - \sqrt{9}i$; 5) $3 + 4i$; 6) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{64}i$.

5. z sanına túyinles bolǵan $\bar{z}$ sandı tabıń (5–6):

1) $z = 5 - 3i$; 2) $z = -5 + 3i$; 3) $z = 1 - i$; 4) $z = 2 + 3i$; 5) $z = -7 - i$.

6.

1) $z = 7, 2$; 2) $z = 6i$; 3) $z = \sqrt{16} - \sqrt{9}i$; 4) $z = -2i + (-7 + 3i)$.

7. Qosındını tabıń (7–8):

1) $(-5 + 3i) + (2 - i)$; 2) $(-3) + (3 - 4i)$; 3) $(2 + 5i) + (-2 - 5i)$; 4) $(-4i) + (3.6 - 3i)$.

8.

1) $(8 - 3i) + (8 + 3i)$; 2) $(-7 + 5i) + (7 - 5i)$; 3) $9i + (3 - 8i)$; 4) $-17i + (-9 + 16i)$.

9. Ayırmanı tabıń (9–10):

1) $(3 + 4i) - (4 + 2i)$; 2) $(4 - 6i) - (3 + 2i)$; 3) $(2 + 4i) - (-4 + 2i)$.

10.

1) $(5 + 4i) - (5 - 4i)$; 2) $7 - (8 + 5i)$; 3) $7i - (6i + 3)$.

11. Kóbeymeni tabıń (11–12):

1) $(4 + 6i)(3 + 4i)$; 2) $(5 + 8i)(3 - 2i)$; 3) $(6 - 4i)(3 - 6i)$.

12.

1) $(-3 + 2i)(8 - 4i)$; 2) $\left(\frac{1}{3} - i\right)\left(\frac{1}{2} + i\right)$; 3) $\left(\frac{5}{7} + 4i\right)\left(\frac{7}{5} - 2i\right)$.

13. Bólinbeni tabıń (13–14):

1) $\frac{2 + 2i}{1 - 2i}$; 2) $\frac{4 - 5i}{3 + 2i}$; 3) $\frac{3 + 4i}{3 - 4i}$; 4) $\frac{2 + 3i}{4 - 3i}$; 5) $\frac{4 - 5i}{3 + 2i}$.

14.

1) $\frac{4 - 5i}{-2 + 3i}$; 2) $\frac{3}{5 - 2i}$; 3) $\frac{5 - 2i}{3}$; 4) $\frac{7i}{13 - i}$; 5) $\frac{7 + 4i}{5 - 6i}$.

15. Ámellerdi orınláń (15–16):

1) $\frac{(3 - 4i)(4 - 3i)}{2 + i}$; 2) $\frac{(4 - i)(3 + 2i)}{3 - 2i}$; 3) $\frac{5 - 2i}{(2 + i)(1 - i)}$.

16.

1) $\frac{3 - 2i}{(1 + i)(3 - i)}$; 2) $\frac{3}{2 - 3i} + \frac{3}{2 + 3i}$; 3) $\frac{2}{1 + i} + \frac{5}{2 + i}$.

17. Kompleks sanlardı tegislikte súwretleń (17–18):

1) $z = 3 + 4i$; 2) $z = 3 - 4i$; 3) $z = -3 + 4i$; 4) $z = -3 - 4i$; 5) $z = 2i$.

18.

1) $z = 4 - 2i$; 2) $z = 5 + 3i$; 3) $z = \frac{2 + i}{2 - i}$; 4) $z = (2 - i)(1 + i)$; 5) $z = (2 + i)(2 - i)$.

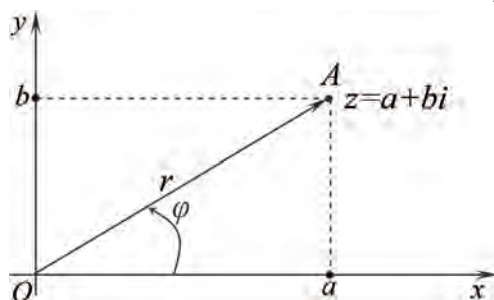
Bul temada kompleks sannıń trigonometriyalıq hám kórsetkishli kórinislerin úyrenemiz.

Trigonometriyalıq kórinisindegi kompleks sanlar

Tegislikte tuwrı múyeshli Dekart koordinatalar sisteması berilgen bolsın. $z = a + bi$ kompleks sanǵa (a ; b) koordinatalı A noqat sáykes qoyılǵan, deyik. Koordinatalar bası O hám A noqatların tutastırıp $\overline{OA}$ vektordı payda etemiz (4-súwret).

O noqattan A noqatqa shekem bolǵan $r = OA$ aralıq **kompleks sannıń moduli**, abscissa kósheriniń oń baǵıtı hám de $\overline{OA}$ vektor arasındadıǵı (φ) múyesh **kompleks sannıń argumenti** delinedi.

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$



4-súwret.

Kompleks sannıń $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kórinisine onıń trigonometriyalıq kórinisi hám $z = r \cdot e^{i\varphi}$ kórinisine bolsa kórsetkishli kórinisi delinedi. Kompleks sandı trigonometriyalıq kórinisinen algebralıq kórinisine ótkiziw ushın tómendegi formuladan paydalanıladı: $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$.

1-mısal. Kompleks sanlardı trigonometriyalıq kórinisinde jazıń:

- 1) i ; 2) $-2i$; 3) $-1 - i$.

△ 1) $z = i = 0 + 1 \cdot i$, $a = 0$, $b = 1$, $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $\cos \varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Demek, $i = 1 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$, yaǵnıy $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.

2) $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ bolǵanlıǵı ushın $-2i = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$;

3) $z = -1 - i$, $a = -1$, $b = -1$, $r = \sqrt{2}$, $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$.

Demek, $-1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$. ▲

2-misal. Kompleks sanlardi kórsetkishli kórinisinde jazıń:

- 1) i ; 2) $-2i$; 3) $-1-i$.

▲ 1-misaldıń esaplawlarınan paydalanamız:

$$i = e^{\frac{\pi i}{2}}, \quad -2i = 2e^{\frac{3\pi i}{2}}, \quad -1-i = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{4}}. \quad \blacktriangle$$

Soraw hám tapsırmalar



1. Kompleks sannıń moduli ne? Ol qalay esaplanadı?
2. Kompleks sannıń argumenti ne? Mısal keltiriń.
3. Kompleks sannıń trigonometriyalıq kórinisin túsindiriń.
4. Kompleks sannıń kórsetkishli kórinisin túsindiriń.
5. Eylerdiń belgili (ataqlı) formulasın dálilleń: $e^{i\pi} = -1$.

Shıńǵıwlar

19. Kompleks sannıń modulın tabıń (19–20):

- 1) $z = -2 + 3i$; 2) $z = -2 + 3i$; 3) $z = 1 + \sqrt{3}i$; 4) $z = \sqrt{8} - i$.

20.

- 1) $z = 6 - 8i$; 2) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; 3) $z = \sqrt{3} + i$; 4) $z = 2i$.

21. Kompleks sannıń argumentin tabıń (21–22):

- 1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; 2) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; 3) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z = 2\sqrt{2}i$.

22.

- 1) $z = 5$; 2) $z = -2i$; 3) $z = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$.

23. Kompleks sandı trigonometriyalıq hám kórsetkishli kórinisinde jazıń (23–24):

- 1) $z = -2 - 2i$; 2) $z = 2 - 2i$; 3) $z = \sqrt{3} - i$; 4) $z = 1 - \sqrt{3}i$.

24.

- 1) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$; 2) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $z = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$; 4) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

89-90 TRIGONOMETRIYALÍQ KÓRINISTE BERILGEN KOMPLEKS SANLARDÍŇ KÓBEYMESI HÁM BÓLINBESI

Trigonometriyalıq kóriniste berilgen kompleks sanlardı kóbeytiw

$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ trigonometriyalıq korinistegi kompleks sanlardıń kóbeymesi ushın tómendegi formula orınlı:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \quad (1)$$

z_1 hám z_2 trigonometriyalıq kórinisindegi sanlardı bóliw ushın bolsa $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)]$ formula orınlı, $r_1 \neq 0$. (2)

1- misal. $z_1 = 3(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$ hám $z_2 = 2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$ kompleks sanlardı kóbeytın.

△ Joqarıdağı qağıyda boyınsha, kóbeymeni tabamız:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2(\cos(20^\circ + 35^\circ) + i \sin(20^\circ + 35^\circ)) = 6(\cos 55^\circ + i \sin 55^\circ). \blacktriangle$$

2- misal. $z_1 = 2(\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ)$, $z_2 = 3(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ va $5 \cos$ hám $z_3 = 5(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$ kompleks sanlardı kóbeytın.

△ Joqarıdağı qağıyda boyınsha kóbeymeni tabamız:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 [\cos(140^\circ + 150^\circ + 70^\circ) + i \sin(140^\circ + 150^\circ + 70^\circ)] = 30 \cos 360^\circ \\ &= 30(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 30. \blacktriangle \end{aligned}$$

3- misal. $z_1 = 6(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$ hám $z_2 = 2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$ kompleks sanlar bólinbesin tabın.

△ Bóliwdiń qağıydasına muwapıq:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2} [\cos(50^\circ - 25^\circ) + i \sin(50^\circ - 25^\circ)] = 3(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ). \blacktriangle$$

Natural dárejege kóteriw

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks sandı kvadratqa kóteriw ushın kompleks sanlardı kóbeytiw formulası (1) den paydalanamız:

$$z^2 = r^2 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi). \text{ Sonday-aq,}$$

$$z^3 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \quad (3)$$

Ulıwma, *Muavr formulası* dep atalatuğın usı

$$z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \text{ formula orınlı, bunda } n \in \mathbb{N}.$$

4- misal. $z = 3(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ kompleks sandı kubqa kóterin:

△ (3) formula boyınsha:

$$z^3 = 27(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{27}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1 + i). \blacktriangle$$

5- misal. $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ kompleks sannıń 10-dárejesin tabın.

△ Aldın berilgen sannıń moduli hám argumentin tawıp, onı trigonometriyalıq kórinisinde jazıp alamız: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $z = 1 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$, bul

jerden:

$$z^{10} = (\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ) = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \cdot \blacktriangle$$

Soraw hám tapsırmalar



1. Trigonometriyalıq kórinisindegi kompleks sanlar qalay kóbeyttiriledi? Mánisin ashıń hám aytıń.
2. Trigonometriyalıq kórinistegi kompleks sanlar qalay bólinedi? Mánisin ashıń hám aytıń.
3. Trigonometriyalıq kórinistegi kompleks sanlar dárejege qalay kóteriledi?

Shımǵıwlar

27. Kompleks sanlardı kóbeytiń (27–28):

$$1) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad \text{hám} \quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6});$$

$$2) z_1 = \frac{1}{3}(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}) \quad \text{hám} \quad z_2 = 3(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}).$$

28.

$$1) z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \quad \text{hám} \quad z_2 = \sqrt{3}(\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$2) z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}) \quad \text{hám} \quad z_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}).$$

29. Kompleks sanlardı bóliń (29–30):

$$1) z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}) \quad \text{ni} \quad z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \quad \text{ga};$$

$$2) z_1 = 8(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad \text{ni} \quad z_2 = 4(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \quad \text{ga}.$$

30.

$$1) z_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{ni} \quad z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \quad \text{ga};$$

$$2) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}) \quad \text{ni} \quad z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) \quad \text{ga}.$$

31. Kompleks sandı dárejege kóteriń (31–32):

$$1) (3(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}))^5; \quad 2) (\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}))^6; \quad 3) (\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^7.$$

32.

$$1) (4(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}))^4; \quad 2) (\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15})^{10}; \quad 3) (\cos \frac{\pi}{22} + i \sin \frac{\pi}{22})^{11}.$$

33. Ámellerdi orınlań (33–34):

$$1) \frac{(1+i)^5 (\sqrt{2}-i)^4}{(1-i)(1+\sqrt{2}i)^4}; \quad 2) \frac{(1-i)^4 (\sqrt{2}+i)^3}{(1+i)^4}; \quad 3) \frac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{10} - (1+i)^{10} \cdot i}.$$

34.

$$1) \frac{2+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}; \quad 2) \frac{12+5i}{6-8i} + \frac{(2-i)^2}{1-2i}; \quad 3) \frac{3-4i}{3+4i} + \frac{5+6i}{5-6i}.$$

91

KOMPLEKS SANNAN KVADRAT KOREN SHÍĠARÍW

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kórinisindegi kompleks sannan kvadrat koren shıǵarıw ushın izlenip atırǵan kompleks sannıń modulın x hám argumentin y dep tómen-degi teńlikti jazamız:

$$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y).$$

Teńliktiń eki bólegin kvadratqa kóterip,

$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x^2(\cos 2y + i \sin 2y)$ hám de $x^2 = r$, $2y = \varphi + 2\pi n$ bolǵanlıqtan

$x = \sqrt{r}$, $y = \frac{\varphi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ qatnasların tabamız. Demek, izlenip atırǵan z kom-

pleks sannıń kvadrat koreni ushın

$$\beta = \sqrt{r} \left[\cos \frac{\varphi + 2\pi n}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi n}{2} \right]$$

formula orınlı. n ge 0, ± 1 , ± 2 , ... mánislerin qoyıp, túrli korenlerdi tabamız. Tekseriw nátiyjesinde tek ǵana 2 dana túrli mánis bar ekenligi anıqlanadı, yaǵnıy

$$n=0 \text{ de } \beta_1 = \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad (1)$$

$$n=1 \text{ de } \beta_2 = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right]. \quad (2)$$

1- mısál. $z = 9(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ kompleks sannan kvadrat koren shıǵarıń.

△ Joqarıdaǵı formula boyınsha, kvadrat korenlerdi esaplaymız:

$$\sqrt{z} = 3 \left[\cos(30^\circ + 180^\circ n) + i \sin(30^\circ + 180^\circ n) \right].$$

Bul formulada

$$n=0 \text{ ushın } \sqrt{z} = 3(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \text{ hám}$$

$$n=1 \text{ ushın } \sqrt{z} = 3(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i) \text{ kvadrat korenler tabıladı. } \blacktriangle$$

Kompleks sannan kub koren shıǵarıwda tómen-degi formuladan paydalanıladı:

$$z_n = \sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y) = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 360^\circ n}{3} + i \sin \frac{\varphi + 360^\circ n}{3} \right),$$

$n=0, 1, 2$.

Bul tabilgan sanlar Dekart koordinatalar sistemasında orayı koordinata basında hám radiusı $\sqrt[3]{r}$ bolğan sheńberge ishley sızılğan durıs úshmúyeshlik tóbele-
rinen ibarat boladı.

2- misal. $z=1$ kompleks sannıń kub koreniń tabıń hám sızılmada kórsetiń.

△ Bul sannıń modalı $r=1$ hám argumenti $\varphi=0^\circ$ bolğanı ushın,

$$z_n = \sqrt[3]{1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{0^\circ + 360^\circ n}{3} + i \sin \frac{0^\circ + 360^\circ n}{3} \right), n=0, 1, 2.$$

Bul jerden: $n=0$ de $z_0=1 \cdot (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)=1$,

$$n=1 \text{ de } z_1=1 \cdot (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$n=2 \text{ de } z_2=1 \cdot (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Bul sanlar durıs úshmúyeshliktiń tóbelerinen ibarat ekenin 5-súwretten kóriwimiz múmkin.

Kompleks sannan 4-dárejeli koren shıǵarıwda tómendegi formuladan paydalanıladı:

$$z_n = \sqrt[4]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[4]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 360^\circ n}{4} + i \sin \frac{\varphi + 360^\circ n}{4} \right),$$

bul jerde $n=0, 1, 2, 3$.

3- misal. $z=i$ kompleks sannan 4-dárejeli koren shıǵarıń.

△ Bul sannıń modalı $r=1$, argumenti $\varphi=90^\circ$ bolğanı ushın

$$z_n = \sqrt[4]{1(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)} = 1 \cdot \left(\cos \frac{90^\circ + 360^\circ n}{4} + i \sin \frac{90^\circ + 360^\circ n}{4} \right).$$

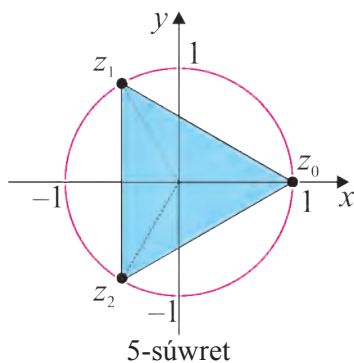
Bul jerden: $n=0$ de $z_0=\cos 22,5^\circ + i \sin 22,5^\circ$,

$$n=1 \text{ de } z_1=\cos 112,5^\circ + i \sin 112,5^\circ,$$

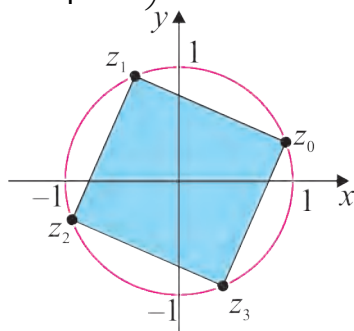
$$n=2 \text{ de } z_2=\cos 202,5^\circ + i \sin 202,5^\circ,$$

$$n=3 \text{ de } z_3=\cos 292,5^\circ + i \sin 292,5^\circ.$$

Bul sanlar orayı koordinata basında hám radiusı 1 bolğan sheńberge ishley sızılğan kvadrattıń ush-
larınan ibarat boladı (6-súwret).



5-súwret



Soraw hám tapsırmalar

1. Kompleks sannan kvadrat koren qaysı formula arqalı tabıladı?
2. Muavr formulası degen ne? Onıń mánisin ashıń hám aytıp beriń.

Shinigiwlar

35. Kompleks sannan kvadrat koren shigariń (35–36):

$$1) z = 25 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right); \quad 2) z = \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\pi}{18} + i \cdot \sin \frac{\pi}{18} \right);$$

$$3) z = \cos \frac{\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{\pi}{5}; \quad 4) z = \cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4};$$

$$5) z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{30} + i \cdot \sin \frac{\pi}{30} \right); \quad 6) z = \frac{1}{49} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$7) z = \cos \frac{\pi}{10} + i \cdot \sin \frac{\pi}{10}; \quad 8) z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2};$$

36.

$$1) z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right); \quad 2) z = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$3) z = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}; \quad 4) z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2};$$

$$5) z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right); \quad 6) z = \frac{16}{9} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right);$$

$$7) z = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right); \quad 8) z = \cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}.$$

IV bap boyınsha shinigiwlar

37. Esaplań:

$$1) (3+4i)(2-5i) + (3-4i)(2+5i); \quad 2) (1+3i)^3 - (4+i^5);$$

$$3) \frac{(1-2i)^2}{1+3i}; \quad 4) 5-7i+8i^2-9i^3+i^4.$$

38. Algebraıq kóriniside jazıń:

$$1) z = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{3i} \right)^2; \quad 2) z = \frac{12-13i}{8+6i} + \frac{(1+2i)^2}{i+3}; \quad 3) \frac{4i}{(\sqrt{3}-i)^2}.$$

39. Esaplań (39–42):

$$1) (1+i)^{10}; \quad 2) (1-i)^4 (-2\sqrt{3}+2i)^3; \quad 3) (1+i)^{2018} \cdot (1-i)^{2018};$$

$$4) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^8; \quad 5) \frac{2\sqrt{3}-2i}{(-1+i)(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)}; \quad 6) \left(\frac{\sqrt{2}-i}{1+i} \right)^{10}.$$

40.

$$\begin{aligned} 1) z &= \frac{(2+i)^2}{3-4i}; & 2) z &= \frac{(1+2i)^3}{2i} - 3i^{10}; & 3) z &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5; \\ 4) z &= \frac{3+2i}{1+4i} - i^7; & 5) \frac{(4-i)}{3+4i}; & & 6) \frac{2-3i}{1-4i}. \end{aligned}$$

41.

$$\begin{aligned} 1) \frac{2+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}; & 2) \frac{12+5i}{6-8i} + \frac{(2-i)^2}{1-2i}; \\ 3) (2-3i)^3 - (2+3i)^3; & 4) \frac{(4+3i)(2+3i)^2}{6+8i}; \\ 5) \frac{33+5i}{2-5i} + \frac{2-5i}{2+5i}; & 6) \frac{12-5i}{6-8i} + \frac{(2+i)^2}{1-2i}. \end{aligned}$$

42.

$$1) (2-2i) \cdot 2\sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ); \quad 2) \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \cdot (\sqrt{3}-3i).$$

43. Bóliwdi orinlań:

$$1) 5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right); \quad 2) (6+6i) : 3(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ).$$

44. Dárejege kóteriń:

$$\begin{aligned} 1) (1-\sqrt{3}i)^3; & 2) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^4; & 3) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)^6; \\ 4) (1-\sqrt{3}i)^5; & 5) \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^{10}; & 6) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right)^{10}. \end{aligned}$$

45. Kvadrat korendi esaplań:

$$1) \sqrt{-27i}; \quad 2) \sqrt{6-6\sqrt{3}i}; \quad 3) \sqrt{8+8\sqrt{3}i}; \quad 4) \sqrt{-256}.$$

46. Teńlikti tekseriń:

$$\begin{aligned} 1) \left[\frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right]^5 + \left[\frac{-\sqrt{3}-i}{2}\right]^5 &= \sqrt{3}; \\ 2) \frac{(\sin 26^\circ + i \cos 154^\circ) \cdot (\sin 27^\circ + i \cos 153^\circ)^3}{\sin 17^\circ - i \cos 17^\circ} &= -1. \end{aligned}$$

47. Kub korendi esaplań:

$$1) \sqrt[3]{1+i}; \quad 2) \sqrt[3]{-i}; \quad 3) \sqrt[3]{8}; \quad 4) \sqrt[3]{1-i}; \quad 5) \sqrt[3]{-8}.$$

48. 4-dárejeli koren shıǵarıń:

$$1) \sqrt[4]{-1}; \quad 2) \sqrt[4]{16}; \quad 3) \sqrt[4]{1+i}; \quad 4) \sqrt[4]{1-i}; \quad 5) \sqrt[4]{-16}.$$

Baqlaw jumisi namunalari



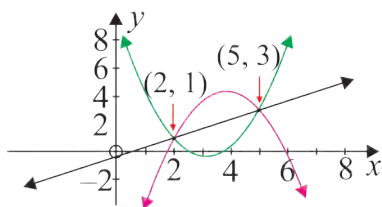
1. Esaplañ: $(35-7i) \cdot (4-6i)$.
2. Bóliwdi orınlañ: $\frac{8-i}{40+3i}$.
3. Kóbeytiñ:
 $3(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ) \cdot 8(\cos 3^\circ + i \sin 3^\circ)$.
4. Dárejege kóteriñ: $(3(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ))^6$
5. Kvadrat koren shıǵarıñ: $\sqrt{64i}$.

JUWAPLAR

III bab

73. a) Barlıq x abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; b) eki noqatta x abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı; c) barlıq noqatlarda x abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı; d) barlıq x abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; e) barlıq x abscissalar túrli bolǵanı ushın bul funkciya boladı; f) barlıq noqatlarda x abscissalar birdey bolǵanı ushın bul funkciya bólmaydı. **74.** a) Funkciya; b) funkciya; c) funkciya; d) funkciya emes; e) funkciya; f) funkciya emes; g) funkciya; h) funkciya emes. **75.** Yaq, hár qanday vertikal tuwrı funkciya bolmaydı. **76.** Yaq, $y = \pm\sqrt{9-x^2}$. **77.** a) 2; b) 8; c) -1; d) -13; e) 1. **78.** a) 2; b) 2; c) -16; d) -68; e) $\frac{32}{9}$. **79.** a) -3; b) 3; c) 3; d) -3; e) $\frac{15}{2}$. **80.** a) $7-3a$; b) $7+3a$; c) $-3a-2$; d) $10-3b$; e) $1-3x$; f) $7-3x-3h$. **81.** a) $2x^2+19x+43$; b) $2x^2-11x+13$; c) $2x^2-3x-1$; d) $2x^4+3x^2-1$; e) $2x^4-x^2-2$; f) $2x^2+4hx+2h^2+3x+3h-1$. **82.** a) **I** $-\frac{7}{2}$; **II** $-\frac{3}{4}$; **III** $-\frac{4}{9}$; b) $x=4$. **84.** $V(4)=6210$. Bul úskeneniń 4 jıldan soń bolatuǵın bahası. $t=4,5$ jıldan keyin úskeneniń bahası 5780 boladı. Úskeneniń dáslepki bahası 9650 ga teń.

85.



86. $f(x)=-2x+5$. **87.** $a=3$, $b=-2$. **88.** $a=3$, $b=-1$, $c=-4$. **90.** a) **I** $x>0$; b) **II** $-2 \leq x \leq 3$; c) **I** $-2 < x \leq 0$; **II** $0 \leq x < 2$; d) **I** $x \leq 2$; **II** $x \geq 2$; e) **II** $x \in \mathbb{R}$; f) **I** $x \in \mathbb{R}$; g) **I** $1 \leq x \leq 5$; **II** $x \leq 1$, $x \geq 5$; h) **I** $2 \leq x < 4$, $x > 4$; **II** $x < 0$, $0 < x \leq 2$; i) **I** $x \leq 0$, $2 \leq x \leq 6$; **II** $0 \leq x \leq 2$, $x \geq 6$. **92.** a) $V(0)=25000$ evro. Bul avtomashinaniń dáslepki bahası;

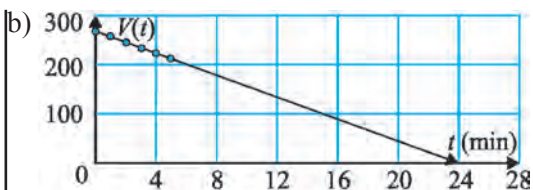
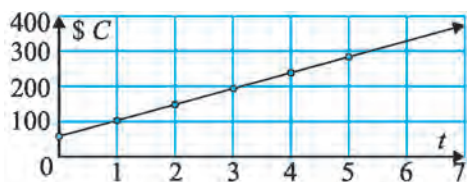
b) $V(3)=16\ 000$. Bul avtomashinaniń 3 jıldan soń bolǵan bahası; c) $t=5$.

93. a)

t	0	1	2	3	4	5
C	60	105	150	195	240	285

94. a)

t	0	1	2	3	4	5
V	265	254	243	232	221	210



b) $C=60+45t$; c) \$ 352,50.

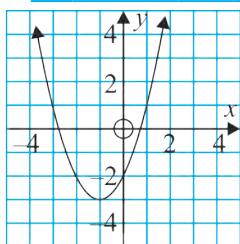
c) $V(t) = 265-11t$; d) **I** 100 l.

95. a) Awa; b) joq; c) awa; d) awa; e) awa; f) joq. 96. a) Yaq; b) awa; c) ha; d) awa; e) joq; f) joq.

97. a) $x=-3$; b) $x=-2$ yamasa -3 ; c) $x=1$ yamasa 4; d) haqiqiy sheshimge iye emes. 98. a) **I** 75 m; **II** 195; **III** 275 m; b) **I** $t=2$ s yamasa $t=14$ s; **II** $t=0$ s yamasa $t=16$ s. 99. a) 40 min, 480 min; b) 10 yamasa 62.

100. a)

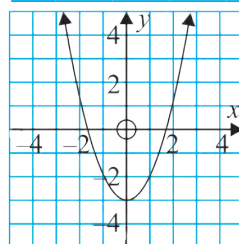
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1	6	13



$$y=x^2+2x-2$$

b)

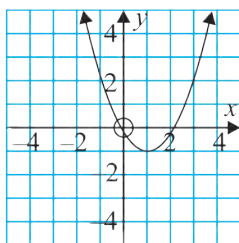
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	1	-2	-3	-2	1	6



$$y=x^2-3$$

c)

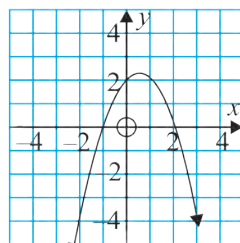
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	15	8	3	0	-1	0	3



$$y=x^2-2x$$

d)

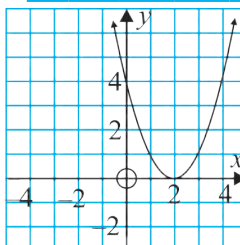
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-4	0	2	2	0	-4



$$f(x)=-x^2+x+2$$

e)

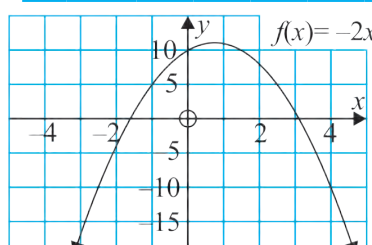
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	25	16	9	4	1	0	1



$$y=x^2-4x+4$$

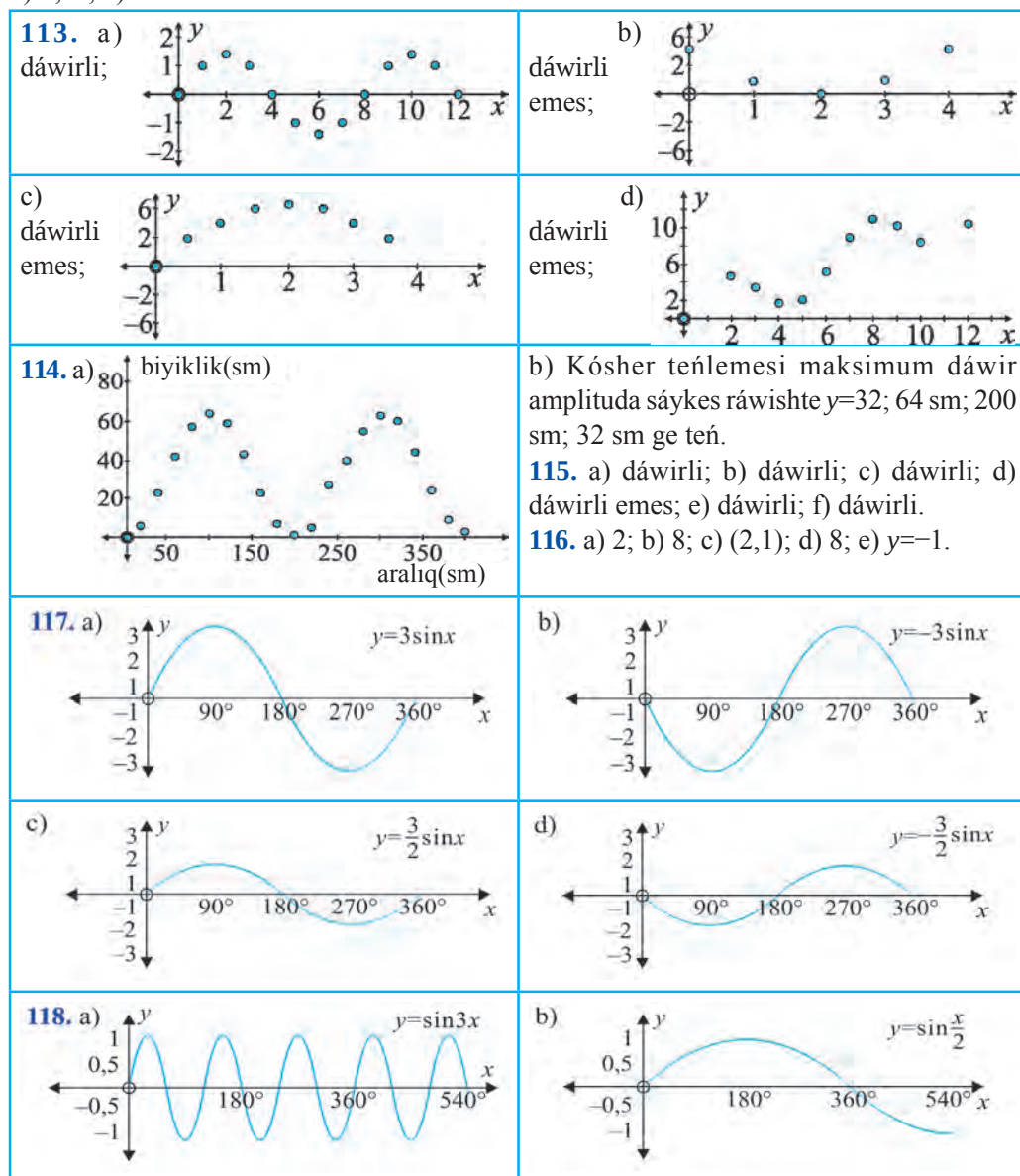
f)

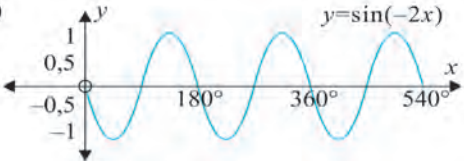
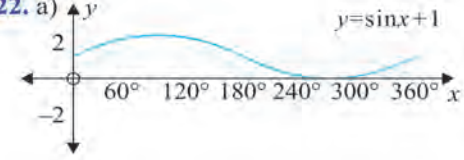
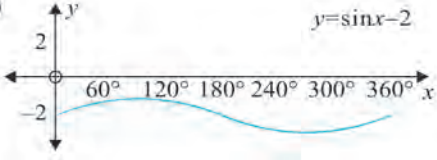
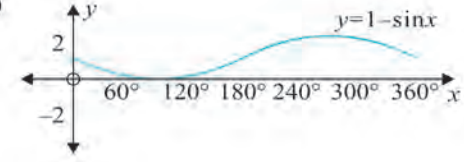
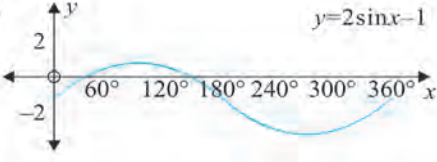
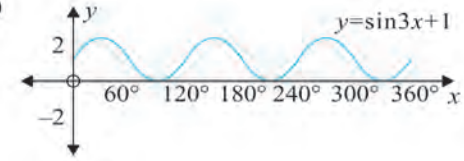
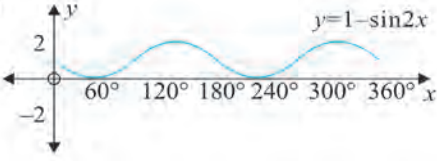
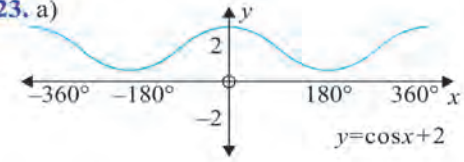
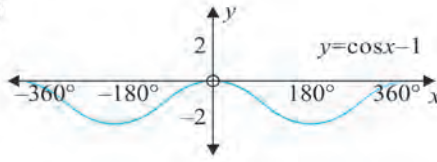
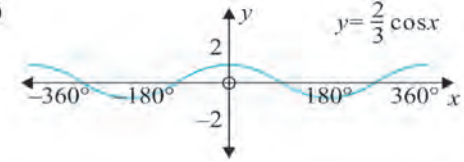
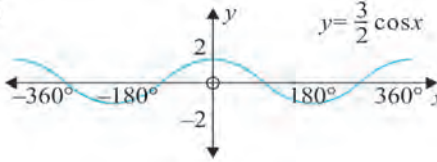
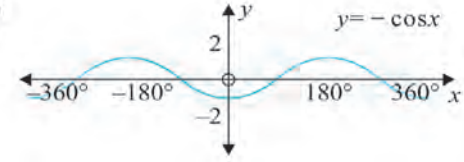
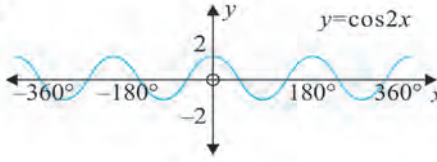
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-17	-4	5	10	11	8	1

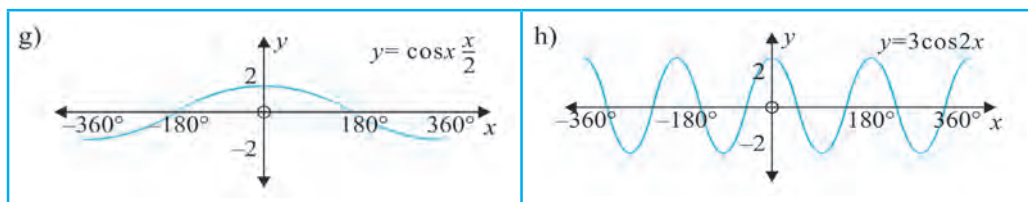


$$f(x)=-2x^2+3x+10$$

101. a) 3; b) -1; c) -4; d) 1; e) 5; f) 0; g) 8; h) -5; i) 2. **102.** a) 3; b) -6; c) 49; d) 15; e) 0; f) 20. **105.** a) $x=3$; b) $x=-5/2$; c) $x=1$; d) $x=-4$; e) $x=3$; f) $x=-4$. **106.** a) $x=4$; b) $x=-2$; c) $x=1$; d) $x=11/2$; e) $x=5$; f) $x=-2$. **107.** a) $x=-3$; b) $x=4$; c) $x=-5/4$; d) $x=3/2$; e) $x=0$; f) $x=7/10$; g) $x=3$; h) $x=5/3$; i) $x=-4$. **108.** a) (2, 3); b) (-1, 4); c) (3, 8); d) (0, 3); e) (-3, -18); f) (1, -1); g) (1/2, -5/4); h) (3/4, -7/8); i) (6, 7). **109.** a) $y=2(x-1)(x-2)$; b) $y=2(x-2)^2$; c) $y=(x-1)(x-3)$; d) $y=-(x-3)(x+1)$; e) $y=-3(x-1)^2$; f) $y=-2(x+2)(x-3)$. **110.** a) $y=3/2(x-2)(x-4)$; b) $y=-1/2(x+4)(x-2)$; c) $y=-4/3(x+3)^2$; d) $y=1/4(x+3)(x-5)$; e) $y=-(x+3)(x-3)$; f) $y=4(x-1)(x-3)$. **111.** a) 3m; b) 0,5s; c) 4m.



c)  $y = \sin(-2x)$	119. a) 90°; b) 90°; c) 1080°; d) 600°; 120. a) $b=2/5$; b) $b=3$; c) $b=1/6$. 121. a) $y=3\sin x$; b) $y=\sin x-2$; c) $y=-2\sin x-1$; d) $y=\sin 2x$; e) $y=-4\sin(x/2)$; f) $y=\sin(x/2)$; g) $y=2\sin 3x$; h) $y=2\sin 2x-3$.
122. a)  $y = \sin x + 1$	b)  $y = \sin x - 2$
c)  $y = 1 - \sin x$	d)  $y = 2\sin x - 1$
e)  $y = \sin 3x + 1$	f)  $y = 1 - \sin 2x$
123. a)  $y = \cos x + 2$	b)  $y = \cos x - 1$
c)  $y = \frac{2}{3} \cos x$	d)  $y = \frac{3}{2} \cos x$
e)  $y = -\cos x$	f)  $y = \cos 2x$



124. a) 120° ; b) 1080° ; c) 720° . **126.** a) $y=2\cos 2x$; b) $y=\cos(x/2)+2$; c) $y=-5x\cos 2x$. **127.**

$T=9,5\cos(30t)-9,5$. **130.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **131.** 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4)

$-\frac{\pi}{2}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{5\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) π . **136.** 1) 0; 2) $\frac{4\pi}{3}$. **138.** 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) $-\pi$. **140.**

1) 2π ; 2) $\frac{3\pi}{2}$. **142.** 1) mániske iye; 2) mániske iye emes; 3) mániske iye emes.

144. 1) $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **146.** 1) $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

148. 1) $x=-\frac{\pi}{3}+n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **150.** 1) $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

151. 1) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **152.** 2) $x=-\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$.

153. 1) $x_1=k\pi, x_2=\frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

156. 1) $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+n\pi, x_2=-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

157. 1) $x_1=-\frac{\pi}{2}+2n\pi, x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

158. 2) $x=\pm\arccos(1-\frac{\sqrt{7}}{2})+2n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **159.** 2) $x_1=-\frac{\pi}{4}+n\pi,$

$x_2=\arccos 4+n\pi, n \in \mathbb{Z}$. **160.** 1) $x=\frac{2n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x_1=\frac{n\pi}{2},$

$x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}, n \in \mathbb{Z}$. **162.** 1) $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$; 2) $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$; 3) $(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2})$.

163. 1) $[\frac{\pi}{4}+2n\pi; \frac{3\pi}{4}+2n\pi], n \in \mathbb{Z}$; 2) $(\frac{3\pi}{4}+2n\pi; \frac{5\pi}{4}+2n\pi), n \in \mathbb{Z}$;

3) $(-\frac{\pi}{2}+n\pi; -\frac{\pi}{4}+n\pi), n \in \mathbb{Z}$. **167.** 1) $[-\frac{\pi}{2}+n\pi; \frac{\pi}{3}+n\pi], n \in \mathbb{Z}$. **173.** 1) $y=2x+6$.

174. 1) $y = 13 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{17}}$. 175. 1) $x^2 + y^2 = 49$, sheńber. 176. 1) $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 36$, sheńber.

177. 1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 4. 178. 1) úlken; 2) kishi. 180. 1) anıqlanıw oblastı: $(-\infty; +\infty)$, mánisler oblastı: $(0; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ aralıqta ósedi. 181. 1) ósedi; 2) kemeyedi; 3)

ósedi. 183. 1) $(-\infty; 1]$; 2) $\left(-\infty; \frac{4}{9}\right)$; 7) $[1; +\infty]$; 12) $(-\infty; -2 - \sqrt{34}) \cup (-2 + \sqrt{34}; +\infty)$.

184. 1) $(-\infty; 2]$. 185. 1) 3; 2) -2; 3) -2; 4) -3; 5) -3. 186. 1) úlken; 2) úlken; 3) kishi.

187. 1) 2; 2) 5; 3) 125; 4) 45; 5) $\frac{1}{36}$; 9) -2. 188. 1) $(2,5; +\infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$;

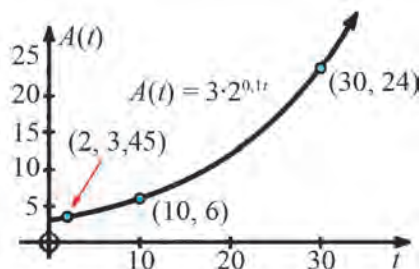
3) $(-2; 2)$. 190. 1) $\frac{1}{32}$; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 8) -2; 10) 0,5 hám 1; 15) $\frac{1}{7}$ hám 49. 191.

1) $(64; +\infty)$; 2) $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup (27; +\infty)$; 7) $(2; 5)$.

192. a) 3 m²;

b) I) 3,45 m²; II) 6 m²; III) 24 m²;

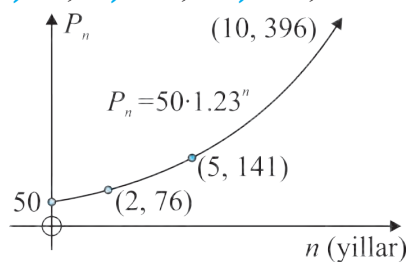
c)



193. a) 50;

b) I) 76; II) 141; III) 396;

c)

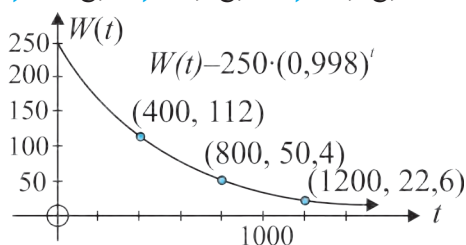


194. a) V_0 ; b) $2V_0$; c) 100%; d) 183 procentke artadı.

195. a) 250g;

b) I) 112g; II) 50,4g; III) 22,6g;

c)

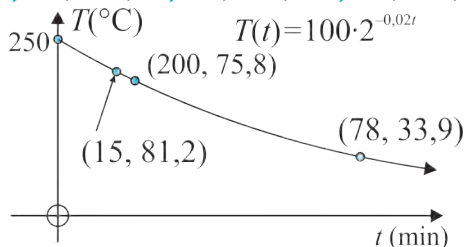


d) ≈ 346 .

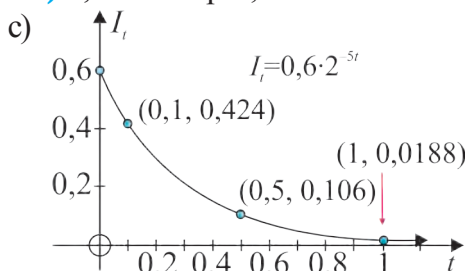
197. a) 100°C;

b) I) 81,2°C; II) 75,8°C; III) 33,9°C;

c)



198. a) 0,6 amper;
b) **I**) 0,424 amper; **II**) 0,106 amper;
III) 0,0188 amper;



199. a) L_0 ; b) 99%. 200. Shama menen 3 saat 15 min. 201. 37,8 oy. 202. 10,8 minut.

203. 22,7 yil. 204. b) 1. 205. a) $\{-14; 3; 15\}$; c) $\{-4; 4\}$. 206. a) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

207. a) $(-\infty; -6] \cup [-2; +\infty)$.

208. a) $\left(-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$;

- c) $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

209. a) $\{(7; 8); (8; 7); (-7; -8); (+8; -7)\}$. 212. a) 3; b) 2. 213. a) kishi; b) kishi. 216.

- a) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; b) $(-\infty; +\infty)$. 217. a) $(0; 1]$; b) $(3; +\infty)$; c) $(-\infty; 0)$. 218. a) $\frac{1}{15}$

- ; b) 0 hám 1; c) 1 hám -2. 219. c) 0. 220. a) $\{(2; 3); (-3; 8)\}$. 221. a) $(-\infty; 0]$; b)

- $(-\infty; 1,5)$. 222. a) kishi; b) úlken. 223. a) $(-3,5; +\infty)$; b) $(-2; 2)$. 224. a) $2\sqrt{5}$. 225.

- b) $(100000; 0,1)$. 226. a) $(3; 1)$. 227. a) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$. 229. a) kishi; b) úlken.

230. a) $-\frac{2\pi}{3}$ 231. c) $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $x_2 = \arccos \frac{1}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

234. a) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{7\pi}{6} + 2n\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. 235. c) $\left(-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}; \frac{\pi}{27} + \frac{n\pi}{9}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

IV bob

1. 7) $\operatorname{Re}(z) = -7$, $\operatorname{Im}(z) = 3$; 8) $\operatorname{Re}(z) = 8$, $\operatorname{Im}(z) = 5$; 9) $\operatorname{Re}(z) = -0,5$, $\operatorname{Im}(z) = -6$; 10) $\operatorname{Re}(z) = -5,7$, $\operatorname{Im}(z) = -5$; 11) $\operatorname{Re}(z) = 0$, $\operatorname{Im}(z) = -5$; 12) $\operatorname{Re}(z) = 90$, $\operatorname{Im}(z) = 0$.

6. 1) $\bar{z} = 7,2$; 3) $\bar{z} = 4 + 3i$. 8. 1) 16; 3) $3 + i$. 10. 1) $8i$; 2) $-1 - 5i$; 3) $-3 + i$. 12. 2) $1\frac{1}{6} - \frac{1}{6}i$.

14. 1) $-\frac{23}{13} - \frac{2}{13}i$; 3) $\frac{5}{3} - \frac{2}{3}i$. 16. 2) $\frac{12}{13}$. 20. 1) 10; 2) 4; 3) 2; 4) 2. 22. 1) 0;

- 2) $\frac{3\pi}{2}$; 3) $\frac{11\pi}{6}$. 24. 1) $2\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4}\right)$ va $2 \cdot e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

28. 1) $z_1 \cdot z_2 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{13\pi}{12}$. 30. 1) $\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}$. 32. 2) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$.

34. 1) $-\frac{42}{29}$; 2) $-18i$. 36. 1) $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)$, $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6}\right)$.

Paydalanilgan hám usınıs etiletuğın ádebiyatlar

1. Alimov Sh.A., Xolmuhamedov O.R., Mirzaahmedov M.A. Algebra hám analiz tiykarları. 10-klass ushın sabaqlıq. Tashkent: "O'qituvchi", 2004.
2. Mal Coad and others. Mathematics for the international students. Mathematical Studies SL 2 nd education. Haese and Harris publications. 2010.
3. Э. Сайдаматов и др. Алгебра и основы математического анализа. Часть 1, Ташкент: "O'qituvchi", 2016.
4. Abduhamidov A.U. hám basqalar. Algebra hám matematikalıq analiz tiykarları, 1-bólim, Tashkent: "O'qituvchi", 2012.
5. Филичева Н.П. Уравнения и системы уравнений: Учебно-методическое пособие. "Рязань" 2009.
6. Исроилов М.И. Ҳисоблаш методлари. Тошкент: "Ўқитувчи" 1988.
7. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса. М., "Дрофа", 2006.
8. Алгебра. Учебное пособие для 9-10 классов. Под ред. Н.Я.Виленкина. М."Просвещение", 2004.
9. <http://www.ams.org/mathweb/> - Internetda matematika (ingliz tilinde).
10. "Математика в школе" jurnali.
11. Fizika, matematika hám informatika. Ilimiy – metodikalıq jurnal (2001 – jildan baslap shıǵa baslaǵan).
12. Mirzaahmedov M. A., Ismailov Sh.N. Matematikadan qiziqarli va olimpiada masalalari. I qism, Toshkent, "Turon-Iqbol", 2016.
13. Математикадан қўлланма, I ва II қисмлар. Ўқитувчилар учун қўлланма. Проф. Азларов Т.А. таҳрири остида. Тошкент, "Ўқитувчи", 1979.
14. Мирзаахмедов М. А., Сотиболдиев Д. А. Ўқитувчиларни математик олимпиадаларга тайёрлаш. Тошкент, "Ўқитувчи", 1993.
15. <http://www.uzedu.uz> – Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portalı.
16. <http://www.eduportal.uz> – Multimediya orayı xabar bilimlendiriw portalı.
17. <http://www.problems.ru> – Matematikadan máseleler izlew sisteması (rus tilinde).
18. <http://matholymp.zn.uz> – Ózbekistanda hám dúnyada matematikalıq olimpiadalar.

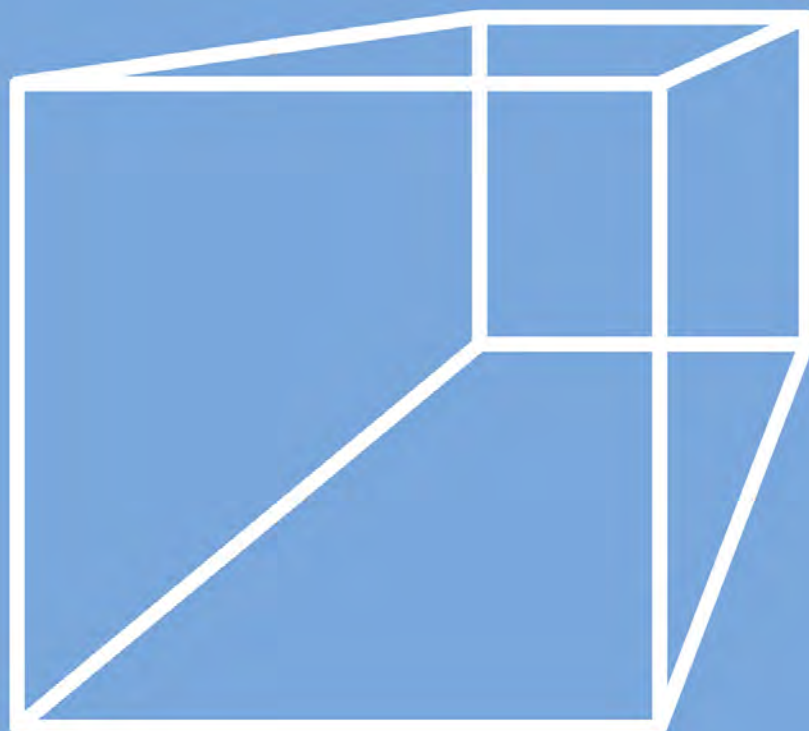
MAZMUNÍ

III bap. ELEMENTAR FUNKCIYALAR HÁM TEŇLEMELER.....	3
47 – 49-sabaqlar. Qatnaslar hám sáwlelendiriwler. Funkciya	3
50 – 51-sabaqlar. Elementar funkciyalardıń monotonlıǵı, eń úlken hám eń kishi mánisleri haqqında túsiniq	8
52 – 54-sabaqlar. Sızıqlı hám kvadratlıq modeller	12
55-sabaq. Dáwirli procesler hám olardı baqlaw	23
56–58-sabaq. $y=\sin x$, $y=\cos x$ funkciyalar hám olar járdeminde modellestiriw .	27
59 – 61-sabaqlar. Eń ápiyayı trigonometriyalıq teńlemeler	37
62 – 64-sabaqlar. Eń ápiyayı trigonometriyalıq teńsizlikler	44
68-sabaq. Grafiklerdi almasırw	48
69 – 70-sabaqlar. Parametrlı kóriniste berilgen ápiwayı funkciyalardıń grafikleri	52
71-sabaq. Kórsetkishli funkciya hám onıń grafigi	54
72 – 74-sabaqlar. Tikkeley sheshiletuǵın kórsetkishli teńsizlikler	55
75 – 78-sabaqlar. Logarifm haqqında túsiniq. Logarifmlik funkciya. Eń ápiyayı logarifmlik teńleme hám teńsizlikler	57
79 – 81-sabaqlar. Kórsetkishli hám logarifmlik funkciyalar járdeminde modellestiriw	62
IV bap. KOMPLEKS SANLAR.....	75
86 – 87-sabaqlar. Kompleks sanlar hám olar ústinde ámeller. Kompleks sandı súwretlew.	75
88-sabaq. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ hám $r \cdot e^{i\varphi}$ ($r > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) kórinisindegi kompleks sanlar	80
89 – 90-sabaqlar. Trigonometriyalıq kóriniste berilgen kompleks sanlardıń kóbeymesi hám bólinbesi	81
91-sabaq. Kompleks sanlardan kvadrat koren shıǵarıw	84
Juwaplar	92
Paydalanılǵan hám usınıs etiletuǵın ádebiyatlar	95

MATEMATIKA



GEOMETRIYA



10-klass

10-klasta geometriyaning stereometriya bo'lini – kenglikdagi geometriyalik figuralarning (denelarning) xassiyatlarini sistemali o'rgatishga kirisiladi. Sabaqliqdan tiyargi kenglikdagi figuralar (deneler), kopyajlilar ham aylanuv deneleri ham olarning tiyargi xassiyatlari, kenglikte parallel ham perpendikulyar tuvrlar ham tegisliklar ham de olarning xassiyatlariga saykes maseler orin algan.

“Geometriya-10” sabaqligida teoriyalik materiallar apiwayi ham aniq tilde anlatiwga hareket qilingan. Barliq tema ham tusiniklar turli turmishliq misallar arqali ashiv berilgen. Har bir temadan son berilgen sorawlar, dalillewge, esaplawga ham siziwga say koplep maseler ham misallar oqiwshini doretivshilik pikirlewge shaqiradi, ozlestirilgen bilimlardi tereñlestiriwge ham bekkemlep bariwga jardem beredi.

“Geometriya-10” sabaqligi uliwma bilimlendiriw mekteplerining 10-klass ham orta arawli, kasiy-oner bilimlendiriw makemeleri oqiwshilarina molsherlengen, onnan geometriyani oz betinshe o'rgatibekshi, takirarlamaqshi bolgan kitap oqiwshilar da paydalanivi mumkin.

MAZMUN

IV b'lim. Kenglikte tuvrlar ham tegisliklarning parallelligi

- | | | |
|-----|---|-----|
| 10. | Kenglikte tuvrlarning oz ara jaylasivi | 99 |
| 11. | Kenglikte tuvrlar ham tegislikning oz ara jaylasivi | 106 |
| 12. | Kenglikte tegisliklarning oz ara jaylasivi | 108 |
| 13. | Kenglikte parallel proekciya | 114 |
| 14. | Ameliy shing'iwlar ham qollaniliwlar | 116 |

V b'lim. Kenglikte tuvrlar ham tegisliklarning perpendikulyarlighi

- | | | |
|-----|--|-----|
| 15. | Kenglikte perpendikulyar tuvri ham tegisliklar | 119 |
| 16. | Kenglikte perpendikulyar, qiya ham araliq | 124 |
| 17. | Ush perpendikulyarlar haqqindaqi teorema | 128 |
| 18. | Kenglikte tegisliklarning perpendikulyarlighi | 132 |
| 19. | Kenglikte ortogonal proekciya ham onnan texnikada paydalaniv | 137 |
| 20. | Ameliy shing'iwlar ham qollaniliwlar | 140 |

Sabaqliqning "Geometriya" b'liminde qollanilgan belgilar ham olarning manisi:

- | | |
|---|---|
|  – teoremaning mazmuni |  – teorema dalilleniwinin soni |
|  – aksiomaning mazmuni |  – ameliy qollaniliwlar |
|  – tema boyinsha sorawlar |  – tariyxliq uzindiler |
|  – aktivlestiriwshi shing'iw |  – geometriyalik basqatirmalar |



IV BÓLIM

KEÑISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLERDÍŇ PARALLELLIGI

10 KEÑISLIKTE TUWRÍLARDÍŇ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Keñisliktegi eki a hám b tuwrılar bir tegislikte jatsa hám kesilispese, olar *parallel tuwrılar* delinedi. a hám b tuwrılardıń parallelligi $a \parallel b$ kórinisinde jazıladı.

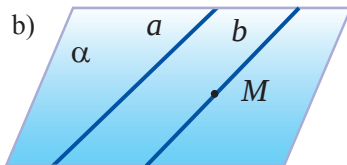
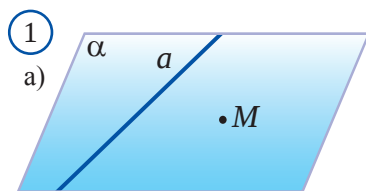
Tegislikte berilgen noqat arqalı berilgen tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin. Bunday qásiyet – keñislikte de orınlı boladı:

4.1-teorema. *Keñislikte berilgen tuwrıda jatpaytuǵın noqattan usı tuwrıǵa tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin.*

Dálilleniwi. a – berilgen tuwrı hám M – bul tuwrıda jatpaytuǵın noqat bolsın (1.a-súwret). Dálillengen 2.1-teorema boyınsha, berilgen a tuwrı hám onda jatpaytuǵın M noqat arqalı tek ǵana bir α tegislik ótkiziw múmkin.

α tegislikte bolsa M noqat arqalı berilgen a tuwrıǵa parallel tek ǵana bir b tuwrını ótkiziw múmkin (1.b-súwret).

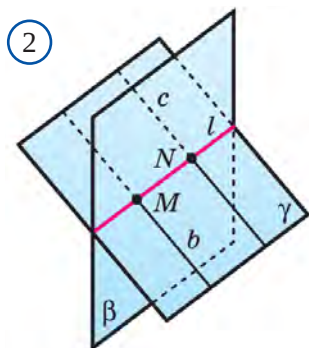
Tap usı b tuwrı izlengen tek ǵana bir tuwrı boladı. $\square$



Tegislikte jatırǵan eki parallel tuwrılardan biri úshinshi tuwrını kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tuwrını kesip ótedi. Usıǵan uqsas qásiyet – keñislikte de orınlı boladı:

4.2-teorema. *Keñislikte berilgen eki parallel tuwrılardan biri tegislikti kesip ótse, olardıń ekinshisi de bul tegislikti kesip ótedi.*

Dálilleniwi. b hám c parallel tuwrılar berilgen bolıp, olardıń biri – b tuwrı berilgen β tegislikti M noqatta kesip ótsin (2.a-súwret).



b hám c tuwrılar parallel bolğanlıǵı ushın olar bir tegislikte jatadı. Bul – γ tegislik bolsın.

β hám γ tegislikler ushın M ulıwma noqat. Onda S3 aksioma boyınsha, bul tegislikler bir l tuwrı boyınsha kesilisedi. Bul tuwrı γ tegislikte jatadı hám b tuwrını M noqatta kesip ótedi. Sonıń ushın, bul tuwrı b tuwrıǵa parallel bolğan c tuwrını da N noqatta kesip ótedi.

l tuwrı β tegislikte de jatqanı ushın N noqat bul β

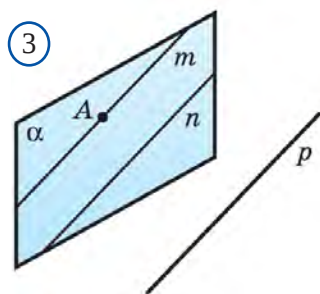
tegislikke de tiyisli boladı. Demek, N noqat β hám γ tegislikler ushın ulıwma noqat.

Endi c tuwrınıń β tegislik penen basqa ulıwma noqatı joq ekenligin kórsetemiz. Kerisinshesi bolsın dep esaplayıq. Meyli, c tuwrınıń β tegislik penen jáne basqa K ulıwma noqatı bar bolsın. Onda S2 aksioma boyınsha, c tuwrı β tegislikte jatadı. Onda c tuwrı β hám γ tegislikler ushın ulıwma boladı. Biraq l – bunday tuwrı edi. Bunnan c tuwrınıń l tuwrı menen ústpe-úst úsiwi kelip shıǵadı. Bunıń bolıwı múmkin emes. Sebebi, b tuwrı c tuwrıǵa parallel hám l tuwrını kesip ótedi. Qarama-qarsılıq kerisinshesin oylaǵanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. $\square$

Eki tuwrınıń hár biri úshinshi tuwrıǵa parallel bolsa, olar óz ara parallel bolıwı, planimetriyadan sizge belgili. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bolıp, ol tuwrılardıń parallellik teoreması dep júrgiziledi.

4.3.-teorema. *Úshinshi tuwrıǵa parallel eki tuwrı óz ara parallel boladı.*

Dáلیلeniwi. Meyli, m hám n tuwrılar p tuwrıǵa parallel bolsın. m hám n tuwrılardıń bir tegislikte jatıwı hám óz ara kesilispewin, yaǵnıy parallel ekenligin kórsetemiz.



m tuwrıda A noqatı alamız hám bul noqat hámde n tuwrı arqalı α tegislik ótkizemiz. m tuwrınıń α tegislikte jatıwın dálilleymiz.

Meyli, bunday bolmasın. m tuwrı α tegislik penen ulıwma noqatqa iye bolğanlıǵı ushın, ol tegislikte kesip ótedi. Onda 4.2-teorema boyınsha, bul tegislikte m tuwrıǵa parallel bolğan p tuwrı da, p tuwrıǵa parallel bolğan n tuwrı da, kesip ótedi. Biraq bunday bolıwı múmkin emes, sebebi n tuwrı α tegislikte jatadı.

Demek, m hám n tuwrılar α tegislikte jatadı.

Demek, m hám n tuwrılar α tegislikte jatadı.

Endi bul tuwrılardıń kesilispewi dúǵın dálilleymiz. Jáne kerisinshesi bolsın dep esaplayıq. m hám n tuwrılar qanday da B noqatta kesilissin. Onda B noqat

arqali p tuwrığa parallel eki m hám n tuwrılar ótedi. Al, bul 4.1-teorema boyınsha bolıwı múmkin emes. $\square$

Endi parallelepipedtiń tómenдеgi qásiyetlerin dálilleymiz.

1-qásiyet. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedte (4-súwret) ultan diagonalı hám qaptal qabırǵalardan dúzilgen $ACC_1 A_1$ tórtmúyeshlik parallelogrammnan ibarat boladı.

Haqıyqattan da, parallelepipedtiń $ABB_1 A_1$ hám $BCC_1 B_1$ jaqları anıqlaması boyınsha, parallelogrammnan ibarat.

Bul parallelogrammlardıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı. Dara jaǵdayda, $AB = A_1 B_1$ hám $BC = B_1 C_1$.

Parallelepiped anıqlaması boyınsha, $AA_1 \parallel BB_1$ hám $BB_1 \parallel CC_1$. Onda 3.2-teorema boyınsha, $AA_1 \parallel CC_1$ hám $AA_1 = CC_1$ boladı. Demek, $ACC_1 A_1$ tórtmúyeshlik – parallelogramm.

2-qásiyet. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedtiń (4-súwret) qarama-qarsı jaqları óz ara teń.

Joqarıdaǵı qásiyet boyınsha, $ACC_1 A_1$ – parallelogramm hám $AC = A_1 C_1$. Onda ABC hám $A_1 B_1 C_1$ úshmúyeshlikler úsh tárepi boyınsha teń bolıp, ABC hám $A_1 B_1 C_1$ múyeshler de óz ara teń boladı. Nátiyjede, $ABCD$ hám $A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelogrammlar da óz ara teń boladı.

Basqa qarama-qarsı jaqlardıń teńligi de usı tárizde dálillenedi.

3-qásiyet. Parallelepipedtiń barlıq diagonalı bir noqatta kesilisedi hám bul noqatta teń ekige bólinedi (5-súwret).

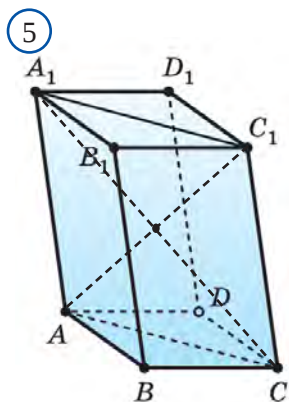
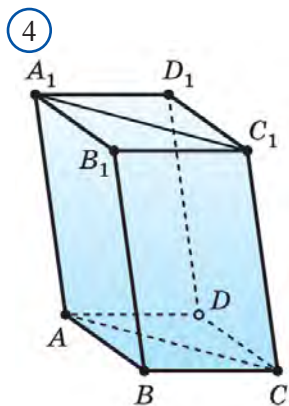
1-qásiyet boyınsha, $ACC_1 A_1$ – parallelogramm. Onda bul parallelogrammnıń diagonalı $A_1 C$ hám AC_1 bir noqatta kesilisedi hám kesilisiw noqatında teń ekige bólinedi.

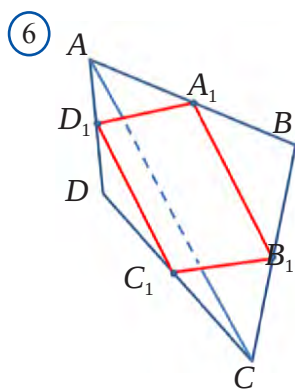
Qalǵan diagonalardıń kesilisiwi hám bul noqatta teń ekige bóliniwi usıǵan uqsas dálillenedi.

Bir tuwrı yamasa parallel tuwrınılarda jatıwshı kesindiler (nurlar) óz ara parallel kesindiler (nurlar) dep ataladı.

Másele. Tóbeleri bir tegislikte jatpaytuǵın keńisliktegi tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları parallelogrammnıń tóbeleri bolatuǵının dálilleń.

Dálilleniwi. $ABCD$ – keńisliktegi tórtmúyeshlik hám A_1, B_1, C_1 hám D_1 – tórtmúyeshlik tárepleriniń ortaları bolsın (6-súwret). Ol jaǵdayda, $A_1 B_1$ kesindi





– ABC úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı, al C_1D_1 – ACD úshmúyeshliktiń AC tárepine parallel orta sızıǵı boladı.

4.3-teorema boyınsha, A_1B_1 hám C_1D_1 tuwrılar parallel boladı. Demek, olar bir tegislikte jatadı.

A_1D_1 hám B_1C_1 tuwrılardıń parallelligi de tap usılay dálillenedi.

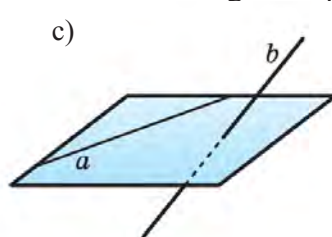
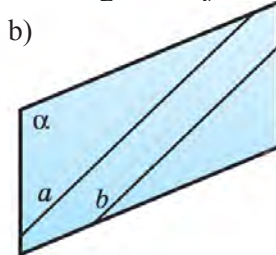
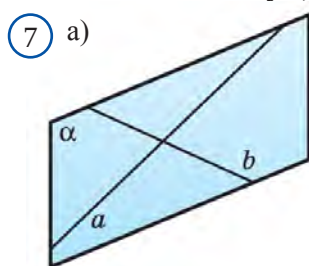
Sonday qılıp, $A_1B_1C_1D_1$ tórtmúyeshlik bir tegislikte jatadı hám onıń qarama-qarsı tárepleri parallel. Demek, ol parallelogramm boladı. $\square$

Eger keńislikte eki tuwrı óz ara kesilisse yamasa óz ara parallel bolsa, olar bir tegislikte jatadı (7.a hám 7.b-súwret). Keńislikte bir tegislikte jatpaytuǵın tuwrılar *ayqasıwshı tuwrılar* dep ataladı (7.c-súwret).

Ayqasıwshı tuwrılardı tómendegi teorema boyınsha tanıp alıw múmkin:

4.4-teorema. *Eger eki tuwrıdan biri bazı bir tegislikte jatsa, al ekinshisi bul tegislikti birinshi tuwrı jatpaytuǵın noqatta kesip ótse, ol jaǵdayda bul tuwrılar ayqasıwshı boladı.*

Dálilleniwi. Meyli, p tuwrı α tegislikte jatsın. q tuwrı bolsa bul tegislikti p

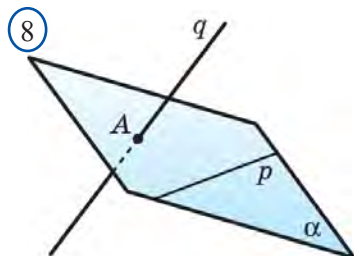


tuwrıǵa tiyisli bolmaǵan A noqatta kesip ótsin (8-súwret). p hám q tuwrılardıń ayqasıwshı ekenligin dálilleymiz.

Kerisi bolsın dep esaplayıq: p hám q tuwrılar qanday da bir β tegislikte jatsın. Ol jaǵdayda β tegislikke p tuwrı hám A noqat tiyisli boladı. Óz nábvetinde A noqat q tegislikke de tiyisli. Demek, α hám β tegislikler ústpe-úst túsedi. Nátiyjede,

shárt boyınsha α tegislikke tiyisli bolmaǵan q tuwrı bul tegislikke tiyisli bolıp qaldı. Qarama-qarsılıq kerisinshesin oylaǵanıımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. $\square$

Eki tuwrınıń kesilisiwinen payda bolǵan qońsılás múyeshlerdiń kishisi *eki tuwrı arasındaǵı múyesh* delinedi.



Ayqasıwshı tuwrılar arasındaǵı múyesh dep, bul tuwrılarǵa parallel bolǵan kesilisiwshı tuwrılar arasındaǵı múyeshke aytıladı (9-súwret).

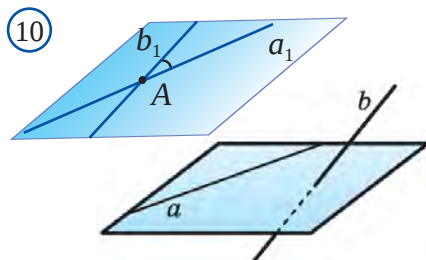
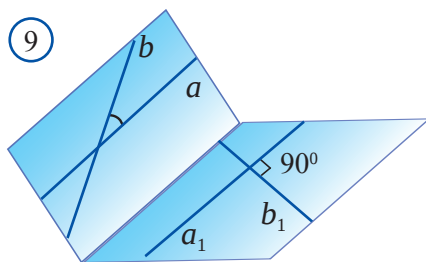
Ámelde a hám b ayqasıwshı tuwrılar arasındaǵı múyeshti tabıw ushın (10-súwret)

- 1) bazı bir A noqat tańlanadı.
- 2) A noqattan ayqasıwshı tuwrılarǵa parallel a_1 hám b_1 tuwrılar ótkiziledi;

- 3) bul tuwrılar arasındaǵı múyesh ólshenedi.

Bul algoritmniń nátiyjesi – A noqatqa baylanıslı emesligi haqqında oylap kóriń.

Arasındaǵı múyesh 90° qa teń tuwrılar *perpendikulyar tuwrılar* dep ataladı. Parallel tuwrılar arasındaǵı múyesh 0° qa teń dep esaplanadı.



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Parallel tuwrılardıń qanday qásiyetlerin bilesiz?
2. Tuwrılardıń parallellik teoremasın aytıp berıń
3. Parallelepipedtiń qanday qásiyetlerin bilesiz?
4. Tuwrılardıń ayqasıwshılıq teoremasın aytıp berıń.
5. Tuwrılar arasındaǵı múyesh qalay anıqlanadı?
6. Ayqasıwshı tuwrılar parallel bolıwı múmkin be?

4.1. a) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedtegi; b) $ABCA_1 B_1 C_1$ prizmadaǵı parallel qabırǵalar juplıqların anıqlań.

4.2. Qanday piramidalarda parallel qabırǵalar boladı?

4.3. Tegislikte tuwrı parallel tuwrılardan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótiwi belgili. Bul qásiyet keńislikte de orınlı bola ma?

4.4. Durıs tastıyıqlawdı tabıń:

A) Keńislikte tuwrı jatpaytuǵın noqattan oǵan parallel kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin;

B) úshinshi tuwrıǵa parallel tuwrılar óz ara kesilisedi; C) eger eki tuwrı tegislikte jatsa, olar kesilisedi; D) tuwrıdan hám onda jatpaytuǵın noqattan eki túrli tegislik ótkiziw múmkin; E) keńisliktiń tegislikte jatpaytuǵın noqatınan bul tegislikte kesetuǵın kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin.

4.5. A ushı a tegislikte jatırǵan AB kesindide C noqat tańlangan. B hám C

noqatlardan ótkizilgen parallel tuwrılar a tegislikti, saykes türde, B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi. Eger: a) C noqat B kesindiniń ortası, hám $BB_1 = 14$ sm; b) $AC : CB = 3 : 2$ hám $BB_1 = 50$ sm bolsa, CC_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.6. Bir tegislikte jatpaytuǵın $MNOP$ parallelogramm hám EK ultanlı $MNEK$ trapeciya berilgen. a) PO hám EK tuwrılardıń óz ara jaylasıwın anıqlań; b) trapeciyanıń ultanları $MN = 45$ sm, $EK = 55$ sm ge teń bolıp, oǵan ishley sheńber sızıw múmkin. Trapeciyanıń perimetrin tabıń.

4.7. a hám b tuwrılar bir tegislikte jatadı. Bul tuwrılardıń múmkin bolǵan óz ara jaylasıwın kórsetiń.

A) a hám b parallel; B) a hám b kesilisedi; C) a hám b kesilispeydi; D) a hám b ayqasıwshı; E) a hám b parallel emes.

4.8. a hám b tuwrılar c tuwrıǵa parallel. a hám b tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.9. 11-súwrette α hám β tegislikler b tuwrı boylap kesilisedi. Eger $a \parallel b$, c hám b tuwrılar parallel bolmasa, a hám c tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.10. 12-súwrette M noqat ABC úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes. MA , MC , MB tuwrılarǵa ayqasıwshı tuwrılardı anıqlań.

4.11. 13-súwrette PQ tuwrı $ABCD$ tórtmúyeshlik tegisligine tiyisli emes hám BC ǵa parallel. a) PQ hám AB ; b) PQ hám CD ; c) PQ hám AD qanday tuwrılar?

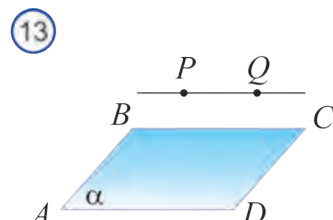
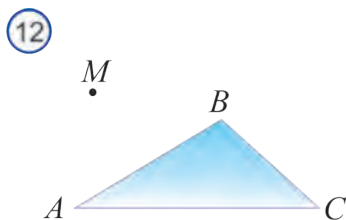
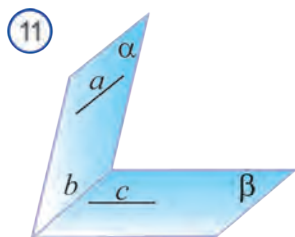
4.12. 14-súwrette M noqat ABC úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes. MA , MB , MC kesindilerdiń ortaları, saykes türde, K , F , P noqatlar menen belgilengen. 1) KP ; 2) PF ; 3) KF ; 4) KM ; 5) PM ; 6) FM ; 7) AB ; 8) BC ; 9) AC tuwrılardan qaysıları óz ara parallel?

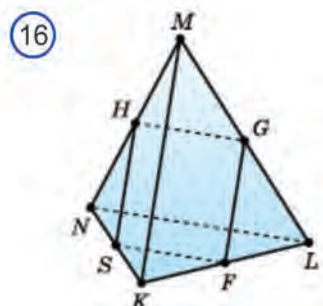
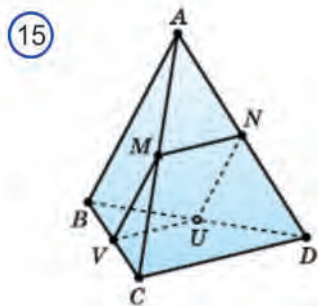
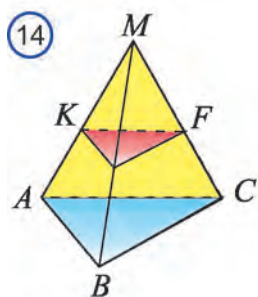
4.13. M , N , U , V noqatlar $ABCD$ piramidaniń, saykes türde, AC , AD , BD hám BC qabırǵalarınıń ortaları (15-súwret). Eger $AB = 20$ sm, $CD = 30$ sm bolsa, $MNUV$ tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

4.14. H , G , F , S noqatlar úshmúyeshli $KLMN$ piramidaniń, saykes türde, MN , ML , LK hám KN qabırǵalarınıń ortaları (16-súwret). Eger $LK = 18$ mm, $MN = 22$ mm bolsa, $HGFS$ tórt múyeshtiń perimetrin tabıń.

4.15. Tuwrıdan túrli eki tegislik ótkiziw múmkinligin dálilleń.

4.16. Bir tegislikte jatpaytuǵın tórt noqat berilgen. Olardıń úshewi arqalı neshe





tegislik ótkiziw múmkin?

4.17. A, B, C noqatlar berilgen eki tegislikniń hár birinde jatadı. Bul noqatlardıń bir tegislikte jatıwın dálilleń.

4.18. a tuwrı boylap kesilisiwshi eki tegislik berilgen. b tuwrı olardan birinde jatadı hám ekinshisin kesip ótedi. a hám b tuwrılardıń kesilisiwini dálilleń.

4.19. Úsh tegislikniń hár ekeyi óz ara kesilisedi. Tegisliklerdiń kesilisiw tuwrılarınan ekeyi bazı bir noqatta kesilisse, úshinshi kesilisiw sıızǵı da bul noqattan ótiwin dálilleń.

4.20. Eger tórtmúyeshlikniń diagonalları kesilisse, onda onıń tóbeleri bir tegislikte jatıwın dálilleń.

4.21. K, Z, M, N noqatlar $SABC$ úshmúyeshli piramidanıń, sáykes túrde, SA, AC, BC, SB kesindileriniń ortaları. Eger piramidanıń qaptal qabırǵaları b , ultanınıń tárepi a ǵa teń bolsa, $KZMN$ tórtmúyeshlikniń perimetrin tabıń.

4.22. XU hám VT tuwrılar parallel, al XY hám VT tuwrılar ayqasıwshı. Eger: a) $\angle YXU = 40^\circ$; b) $\angle YXU = 135^\circ$; c) $\angle YXU = 90^\circ$ bolsa, XY hám VT tuwrılar arasındaǵı múyeshti tabıń.

4.23. l tuwrı $ABCD$ parallelogrammniń BC tárepi parallel hám onıń tegisliginde jatpaydı. l hám CD tuwrılar ayqasıwshı ekenligin dálilleń. Eger piramidanıń múyeshlerinen biri: a) 58° ; b) 133° bolsa, l hám CD tuwrılar arasındaǵı múyeshti tabıń.



11 KEÑISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKNIŃ ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Eger tuwrı menen tegislik kesilispese, *tuwrı hám tegislik parallel* delinedi. Tuwrı menen tegislikniń parallelligi tómendegi teorema arqalı anıqlanadı.



4.5. Teorema. *Eger tegislikte jatpaytuǵın tuwrı usı tegisliktegi bazı bir tuwrıǵa parallel bolsa, bul tuwrı tegislikniń ózine de parallel boladı.*

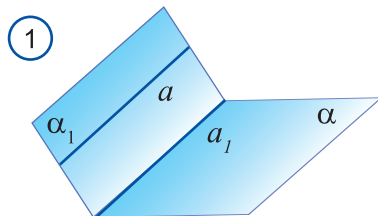
Dálilleniwi. Meyli, α – tegislik, a – onda jatpaytuǵın tuwrı, a_1 bolsa α tegisliktegi jatqan hám a ǵa parallel tuwrı bolsın.

a hám a_1 tuwrılar arqalı α_1 tegislikti ótkizemiz (1-súwret). α hám α_1 tegislikler a_1 tuwrı boyınsha kesilisedi.

Eger a tuwrı α tegislikti kesip ótse, ol jaǵdayda kesilisiw noqatı a_1 tuwrıǵa tiyisli bolar edi. Biraq, bunıń ilájı joq, sebebi a hám a_1 tuwrılar óz ara parallel. Sonday qılıp, a tuwrı α tegislikti kesip óte almaydı.

Demek, a tuwrı α tegislikke parallel. $\square$

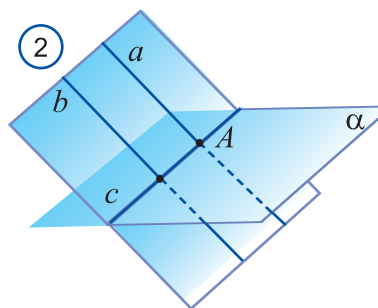
Másele. Eger tegislik eki parallel tuwrıdan birin kesip ótse, ekinshisin de kesip ótiwin dálilleń.



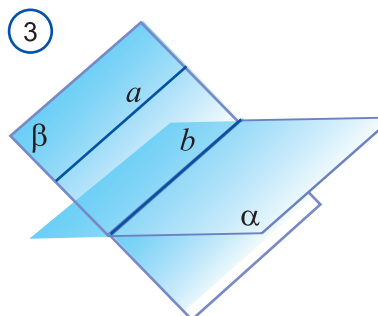
Dálilleniwi. a hám b – eki parallel tuwrı, α bolsa a tuwrını A noqatta kesip ótiwshi tegislik bolsın (2-súwret).

a hám b tuwrılardan tegislik ótkizemiz. Ol α tegislikti bazı bir c tuwrı boyınsha kesedi. c tuwrı a tuwrını A noqatta kesip ótedi.

Demek oǵan parallel bolǵan b tuwrını da kesip ótedi. c tuwrı α tegislikte jatqanı ushın α tegislik b tuwrını da kesip ótedi.



4.6-teorema. Eger bir tegislik ekinshi tegislikke parallel bolǵan tuwrıdan ótse, bul tegisliklerdiń kesilisiw tuwrısı da berilgen tuwrıǵa parallel boladı.



Dálilleniwi. Meyli, a tuwrı α – tegislikke parallel hám β tegislikte jatsın. b tuwrı bolsa α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın (3-súwret). Ol jaǵdayda, a hám b tuwrılar β tegislikte jatadı hám óz ara kesilispeydi. Keri jaǵdayda, a tuwrı β tegislikti kesip ótken bolar edi.

Demek, a hám b tuwrılar óz ara parallel. $\square$



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Tuwrı hám tegislik keńislikte óz ara qalay jaylasıwı múmkin?
2. Tuwrı hám tegislik qashan parallel boladı?
3. Tuwrınıń tegislikke parallellek teoremasın aytıp beriń.
4. Keńislikte tuwrı hám tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanıslı qanday qásiyetlerdi bilesiz?

4.24. a) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubtín; b) $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ altımúyeshli duris prizmanín bir-birine parallel bolǵan qabırǵa hám jaqların anıqlań.

4.25. Duris tastıyqlawdı kórsetiń:

A) Keńisliktegi tuwrıda jatpaytuǵın noqattan bul tuwrıǵa parallel kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin;

B) Úshinshi tuwrıǵa parallel tuwrılar bir noqatta kesilisedi;

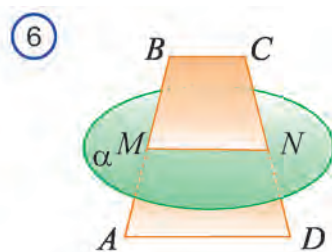
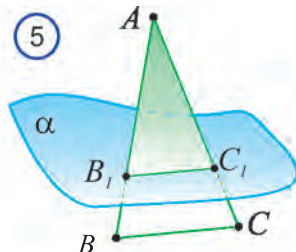
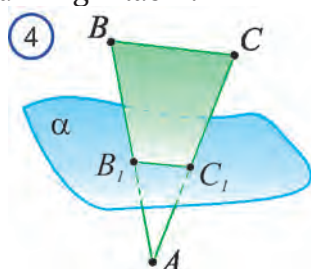
C) Eger tuwrının eki noqatı tegislikke tiyisli bolsa, tuwrı tegislikti kesip ótedi;

D) Tuwrı hám onda jatpaytuǵın noqattan eki hár qıylı tegislik ótkiziw múmkin;

E) Keńisliktegi tegislikte jatpaytuǵın noqattan berilgen tegislikti kesip ótiwshi kóplep tuwrılar ótkiziw múmkin.

4.26. A hám C noqatlar α tegislikte jatadı. B hám D noqatlar β tegislikte jatadı. AC , CD , BD , AB , BC hám AD tuwrılardan qaysıları β tegislikti kesip ótedi?

4.27. ABC úshmúyeshlik α tegislikti B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi (4-súwret). Eger $AB_1 : BB_1 = 2 : 3$, $BC = 15$ sm, $BC \parallel B_1 C_1$ bolsa, $B_1 C_1$ kesindiniń uzınlıǵın tabıń.



4.28. α tegislik ABC úshmúyeshliktiń AB hám AC táreplerin B_1 hám C_1 noqatlarda kesip ótedi (5-súwret). Eger $AB_1 : BB_1 = 3 : 1$, $B_1 C_1 = 12$ sm, $BC \parallel \alpha$ bolsa, BC kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.29. α tegislik $ABCD$ trapeciyanıń AD ultanına parallel hám qaptal táreplerin M hám N noqatlarda kesip ótedi (6-súwret). Eger $AD = 17$ sm, $BC = 9$ sm bolsa, MN kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

4.30. Tegislikke onda jatpaytuǵın noqattan neshe parallel tuwrı ótkiziw múmkin?

4.31. a tuwrı α tegislikke parallel. Duris tastıyqlawlardı tabıń.

A) a tuwrı α tegisliktiń tek ǵana bir tuwrıǵa parallel boladı;

B) a tuwrı α tegisliktiń bir tuwrıdan basqa barlıq tuwrılarına ayqasıwshi boladı;

C) α tegislikte a tuwrıǵa parallel hám ayqasıwshi bolǵan kóplep tuwrılar tabıladı;

D) α tegislikte tek ǵana bir a tuwrıǵa parallel hám bul tegisliktiń qálegen noqatınan ótiwshi tuwrı bar.

4.32. A, B, C, D noqatlar bir tegislikte jatpaydı. M, N, K, Z noqatlar, saykes türde, AD, BD, BC, AC kesindilerdin ortalari. Eger $CD=AB$ bolsa, MK ham NZ tuwrilardin perpendikulyarligin dälilleñ.

4.33. $ABCD$ parallelogrammnin AB ham BC tárepleri α tegislikti kesip ótedi. AD ham DC tuwrilar ham α tegislikti kesip ótiwin dälilleñ.

4.34. ABC ham ABD úshmúyeshlikler bir tegislikte jatpaydı. CD tuwrığa parallel bolğan qálegen tuwrınıñ bul úshmúyeshlikler tegisligin kesip ótiwin dälilleñ.

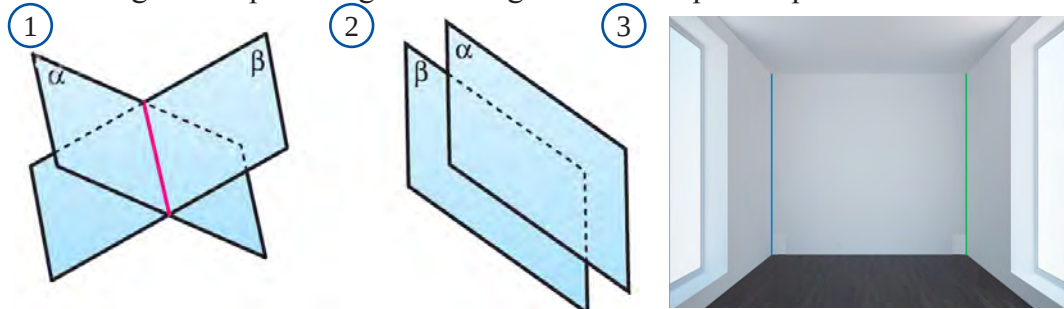
4.35. Berilgen eki tuwrını kesip ótiwshi tuwrılardin bir tegislikte jatiwin dälilleñ.

12 KEÑISLIKTE TEGISLIKLERDİN ÓZ ARA JAYLASÍWÍ

Eki tuwrı yaki ulıwma noqatqa iye, yaki ulıwma noqatqa iye bolmawı múmkin. Birinshi jaǵdayda $S3$ aksioma boyınsha bul tegislikler ulıwma tuwrığa da iye boladı, yaǵnıy tuwrı boylap kesilisedi (1-súwret). Ekinshi jaǵdayda tegislikler kesilispeydi (2-súwret).

Kesilispeytuǵın tegislikler *parallel tegislikler* dep ataladı. Parallel tegislikler haqqında bólmenin poli ham potologı, qarama-qarsı diywalları misal bolıwı múmkin (3-súwret).

Eki tegisliktin paralleligi tómendegi teorema arqalı anıqlanadı.



4.7-teorema. Eger bir tegisliktegi kesilisiwshi eki tuwrı ekinshi tegisliktegi eki tuwrığa saykes türde parallel bolsa, bul tegislikler parallel boladı.

Dälilleniwi. Meyli, α ham β – berilgen tegislikler, a ham b – α tegislikte jatırğan ham A noqatta kesilisiwshi tuwrılar, a_1 ham b_1 bolsa – β tegislikte jatırğan ham saykes türde, a ham b tuwrılarga parallel tuwrılar bolsın (4-súwret).

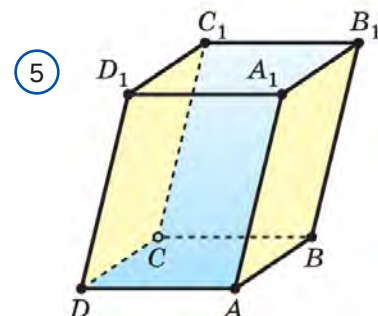
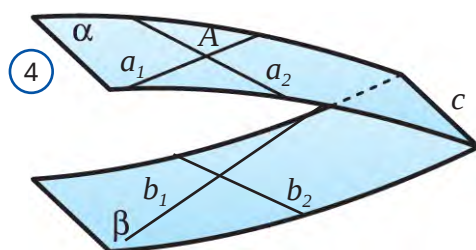
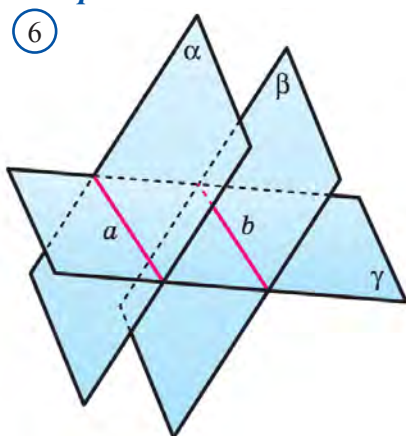
Meyli, α ham β – tegislikler óz ara parallel bolmasın, yaǵnıy qanday da c tuwrı boylap kesilissin. Ol jaǵdayda 4.6-teorema boyınsha, a_1 ham a_2 tuwrılar, saykes türde, b_1 ham b_2 tuwrılarga parallel bolıp, β tegislikke de parallel boladı. Sonın

ushin olar bul tegislikte jatirgan c tuwrini da kesip o'tpeydi.

Solay etip, α tegislikte jatirgan A noqat arqali c tuwriga parallel eki a_1 ham a_2 tuwrı o'tpekte. Parallellik aksiomasına kóre, bunday bolıwı mümkin emes. Qarama-qarsılıq oylağanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. $\square$

Bul teoremadan paydalanıp, parallelepipedtiń qaptal jaqları (5-súwret) parallel bolıwın óz betińizshe dälilleń.

4.8-teorema. *Eki parallel tegisliktiń úshinshi tegislik penen kesilisiw tuwrıları óz ara parallel boladı.*



Dälilleniwi. Meyli, α ham β parallel tegislikler γ tegislikti, saykes türde, a ham b tuwrılar boylap kesip ótsin (6-súwret). a ham b tuwrılar parallel ekenligin dälilleymiz.

Meyli, a ham b tuwrılar qanday da bir Q noqatqa kesilissin. Ol jağdayda Q noqat α tegislikte jatağı, sebebi a tuwrı α tegislikte jatağı. Sonday-aq, Q noqat β tegislikte jatağı, sebebi b tuwrı β tegislikte jatağı. Nátıyjede, α ham β tegislikler ulıwma Q noqatqa iye bolmaqta. Al, bunıń shárt boyınsha

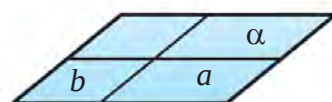
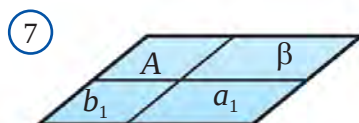
iláji joq. Qarama-qarsılıq oylağanımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. $\square$

4.9-teorema. *Berilgen tegislikke oğan tiyisli bolmağan noqattan jalğız parallel tegislik ótkiziw mümkin.*

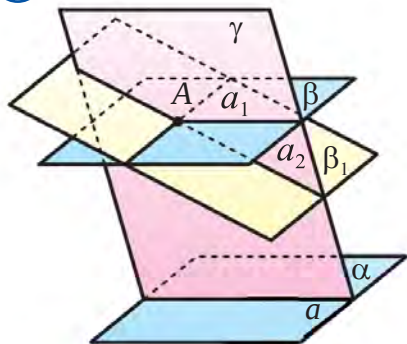
Dälilleniwi. Berilgen α tegislikte kesilisetuğın eki a, b tuwrı ótkizemiz. Berilgen A noqattan olarğa parallel a_1, b_1 tuwrılardı ótkizemiz (7-súwret).

a_1, b_1 tuwrılar arqalı β tegislik ótkizemiz. Bul tegislik 3.7-teorema boyınsha, α tegislikke parallel bolıp, izlenip atırğan tegislik boladı.

Endi bul tegisliktiń jalğız ekenligin kórsetemiz. Meyli, α tegislikke parallel jáne bir β_1 tegislik bar



8



bolsin (8-súwret). A noqattan hám a tuwrıdan ótiwshi γ tegislikni ótkizemiz. Bul tegislik β tegislikni a_1 tuwrı boylap, β_1 tegislikni a_2 tuwrı boylap kesip ótedi. a_1 , a_2 tuwrılar 3.6-teorema boyınsha a tuwrıǵa parallel boladı. Biraq, bunıń bolıwı múmkin emes, sebebi tegislikte onda jatpaytuǵın noqattan tek ǵana bir parallel tuwrı ótkiziw múmkin. Qarama-qarsılıq oylaganımızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi. $\square$



4.10-teorema. Úshinshi tegislikke parallel eki tegislik óz ara parallel boladı.

Bul teoremani óz betinızshe dálilleń.



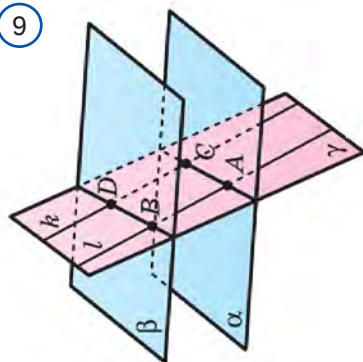
4.11-teorema. Parallel tegislikler arasındaǵı parallel tuwrılar kesindileri teń boladı.

Dálilleniwi. Meyli, α hám β tegislikler k hám l tuwrılardan AB hám CD kesindilerdi ajıratsın (9-súwret).

Bul kesindilerdiń teń ekenligin kórsetemiz.

k hám l tuwrılardan ótiwshi γ tegislik parallel tegisliklerdi AC hám BD tuwrılar boylap kesip ótedi. Nátiyjede, qarama-qarsı tárepleri parallel bolǵan $ABCD$ tórtmúyeshlikke, yaǵnıy parallelogrammǵa iye bolamız. Parallelogrammnıń qarama-qarsı tárepleri óz ara teń boladı. Dara jaǵdayda, $AB = CD$. $\square$

9



4.12-teorema. Úsh parallel tegislikler arasındaǵı qálegen tuwrılar kesindileri óz ara proporsional boladı.

Teoremani óz betinızshe dálilleń.

1. Tegislikler keńislikte qalay jaylasıwı múmkin?
2. Parallel tegislikler dep qanday tegisliklerge ayıladı?
3. Tegisliklerdiń parallellik teoremasın ayıp berıń.
4. Keńislikte tegisliklerdiń jaylasıwı menen baylanışlı qanday qásiyetlerin bilesiz?
5. Parallelepipedtiń qaptal jaqları parallel bolıwın tiykarlań.



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

4.36. a) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ parallelepipedtiń; b) $ABCA_1 B_1 C_1$ prizmanıń parallel jaqların anıqlań.

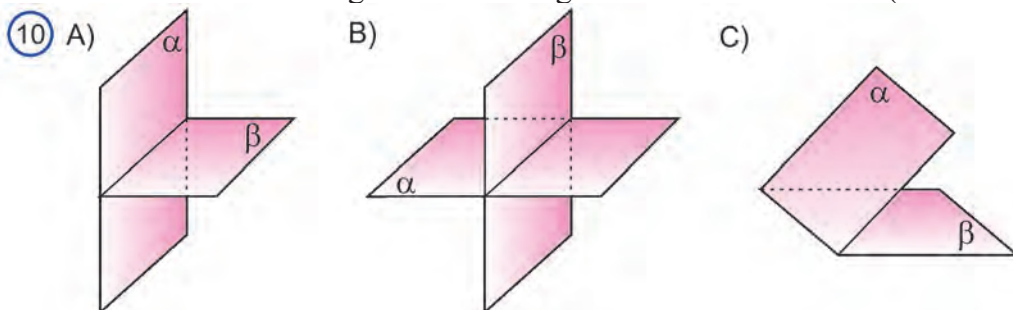
4.37. Bir de ulıwma noqatı bolmaǵan α hám β tegislikler keńislikte qalay

jaylasadı?

4.38. α hám β tegislikler parallel. a hám b tuwrılar α tegislikte jatadı, c hám d tuwrılar bolsa β tegislikte jatadı. Tóمندegi tastıyqlawlardan qaysıları durıs:

1) $a \parallel b$; 2) $c \parallel b$; 3) $b \parallel b$; 4) $b \parallel a$; 5) $c \parallel a$; 6) $d \parallel b$; 7) $a \parallel a$; 8) $d \parallel a$.

4.39. Kesilisiwshi eki tegislik súwretlengen úsh súwretti kórsetiń (10-súwret).



4.40. α hám β tegislikler parallel. Olardıń hesh birine tiyisli bolmağan noqattan γ tegislik ótkizilgen. Durıs tastıyqlardı kórsetiń.

A) γ tegislik α tegislikke parallel bolğan jalǵız tegislik;

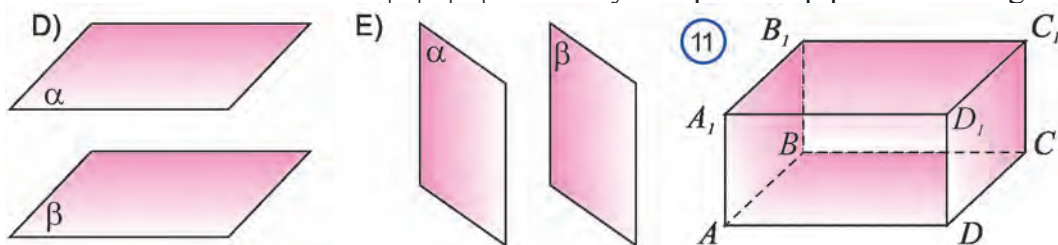
B) γ tegislik β tegislikti kesip ótiwshi jalǵız tegislik;

C) γ tegislik β tegislikke parallel bolğan jalǵız tegislik;

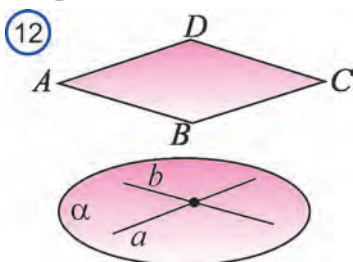
D) γ tegislik α tegislikti kesip ótiwshi jalǵız tegislik;

E) γ tegislik α tegislikke de, β tegislikke de parallel bolğan jalǵız tegislik.

4.41. 11-súwrette $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped súwretlengen.



a) $A_1 B_1 C_1 D_1$ hám $B_1 A_1 A B$; b) $A D D_1 A_1$ hám $A B C D$; c) $A B B_1 A_1$ hám $C_1 D_1 D C$; d) $B A D C$ hám $A B B_1 A_1$; e) $C C_1 B_1 B$ hám $A D D_1 A_1$ tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

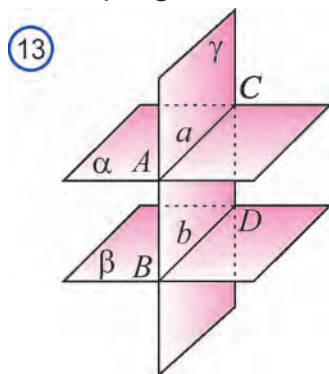


4.42. $A B, B C$ kesindiler $A B C D$ parallelogrammnıń tárepleri bolıp, olar sáykes túrde, a hám b tuwrılarǵa parallel (12-súwret). a hám b tuwrılar óz ara kesilisedi hám α tegislikke tiyisli. $A B C D$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.43. a hám b ayqasıwshi tuwrılar berilgen. a

tuwrıdan ótiwshi hám β tegislikke parallel bolğan neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.44. Eki α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sıızığı úshinshi γ tegislikke parallel. α hám β tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.



4.45. AB hám CD parallel tuwrılar arqalı ótkizilgen γ tegislik α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, AC hám BD tuwrılar boylap kesip ótedi (13-súwret). Eger $BD = 15$ sm bolsa, AC kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.46. Qálegen eki ayqasıwshı tuwrı arqalı jalǵız parallel tegislikler juplıǵın ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.

4.47. α hám β tegislikler parallel. α tegislikte jatiwshı qálegen tuwrı β tegislikke parallel bolıwın dálilleń.

4.48. O noqat – bir tegislikte jatpaytuǵın AA_1 , BB_1 , CC_1 kesindilerdiń ulıwma ortası. ABC hám $A_1B_1C_1$ tegislikler parallel ekenligin dálilleń.

4.49. $ABCD$ parallelogramm hám onı kespeytuǵın tegislik berilgen. Parallelogrammnıń A , B , C , D ushlarınan tegislikti, sáykes túrde, A_1 , B_1 , C_1 , D_1 noqatlarda kesip ótetuǵın parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger $AA_1 = 4$ m, $BB_1 = 3$ m hám $CC_1 = 1$ m bolsa, DD_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.50. Eki parallel tegislik berilgen. Bir tegisliktiń A hám B noqatlarınan ekinshi tegislikti A_1 hám B_1 noqatlarda kesip ótiwshi parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger $AB = a$ bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

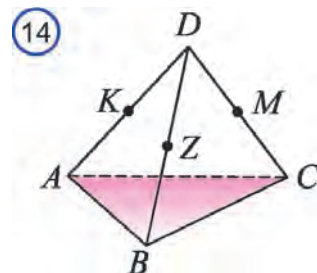
4.51. α hám β tegislikler parallel. α tegisliktiń M hám N noqatlarınan β tegislikti K hám L noqatlarda kesip ótiwshi parallel tuwrılar ótkizilgen. $MNLK$ parallelogramm ekenligin dálilleń. Eger $ML = 14$ sm, $NK = 8$ sm hám $MN : NK = 9 : 7$ bolsa, $MNLK$ tórtmúyeshliktiń perimetrin tabıń.

4.52. OF hám OP nurlar α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, F_1 , P_1 , F_2 , P_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger $F_1P_1 = 3$ sm, $F_2P_2 = 5$ sm hám $P_1P_2 = 4$ sm bolsa, OP_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.53. OA hám OB nurlar α hám β parallel tegisliklerdi, sáykes túrde, A_1 , B_1 , A_2 , B_2 noqatlarda kesip ótedi. Eger $OA_1 = 16$ sm, $A_1A_2 = 24$ sm hám $A_2B_2 = 50$ sm bolsa, A_1B_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

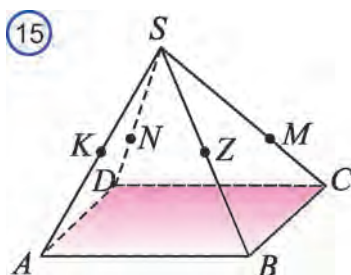
4.54. D noqat ABC úshmúyeshlik tegisligine tiyisli emes (14-súwret). K , M , Z noqatlar, sáykes túrde, DA , DB hám DC kesindilerdiń ortası. ABC hám KZM tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.55. S noqat $ABCD$ parallelogramm tegisligine tiyisli



emes (15-súwret). K, Z, M, N noqatlar, saykes túrde, SA, SB, SC hám SD kesindilerge tiyisli. Eger $SK = AK$, $SZ = BZ$, $SM : MC = 2 : 1$, $SN : ND = 2 : 1$ bolsa, $ABCD$ hám $KZMN$ tegisliklerdiń óz ara jaylasıwın anıqlań.

Keńisliktegi figuralar túrli usıllar menen tegislikte súwretlenedi. Tómonde olar menen tanısamız.



13 KEŇISLIKTE PARALLEL PROEKCIYA

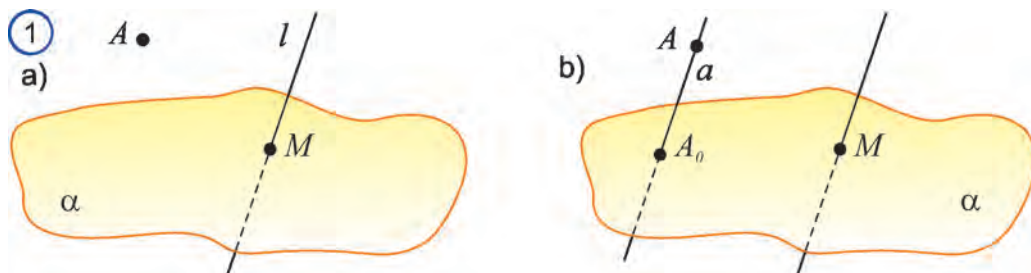
Keńisliktegi figuranıń tegislikke *parallel proekciyalaw* dep sonday sáwlelendiriwge aytıladı, onda figuranıń hár bir noqatı berilgen proekciyalaw bağıtına parallel bolǵan tuwrılar boylap tegislikke kóshiriledi.

Parallel proekciyalawdı jaqtılıq nurları járdeminde bir zattıń diywal yamasa polǵa túsirilgen sayasına uqsatıw múmkin.

Solay etip, parallel proekciyalawda bazı bir figura hám *proekciyalaw tegisligi* dep atalıwshı tegislik alınadı hám de *proekciyalaw bağıtı*, yaǵnıy bazı bir tuwrı tańlanadı. Álbette, bul tuwrı proekciya tegisligi menen kesilisiwi kerek.

Meyli, qálegen α tegislik hám proekciyalaw tuwrısı l hám tegislikte de, tuwrıda da jatpaytuǵın A noqat berilgen bolsın (1.a-súwret).

A noqattan α tegislikke l tuwrıǵa parallel bolǵan a tuwrı ótkizemiz. Bul tuwrı α tegislikte A_0 noqatta kesip ótsin (1.b-súwret).



Tabılǵan A_0 noqat A noqatnıń α tegislikke *parallel proekciyası* dep ataladı.

Meyli, bazı bir F figuranıń α tegislikke l bağıt boyınsha parallel proekciyalaw kerek bolsın. Bunıń ushın F figuranıń qálegen noqatın alamız, onnan l ge parallel tuwrı ótkizemiz hám onıń α tegislik penen kesilisiw noqatın belgileymiz. Bunday noqatlar α tegislikte qanday da F_1 figuranı payda qıladı. Tap usı F_1 figura F

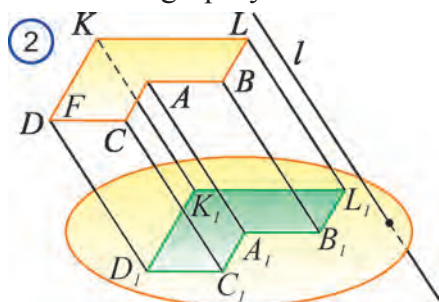
figuranıń α tegisliktegi parallel proekciyası boladı. 2-súwrette F figuranıń α tegislikke proekciyası – F_1 figura súwretlengen.

Parallel proekciyalawdıń tómendegi qásiyetlerin keltirip ótemiz. Olardı óz betıńızshe dálillep kórin.

Parallel proekciyalawda: noqat – noqatqa, kesindi – kesindige, tuwrı – tuwrıǵa ótedi.

Parallel tuwrılar proekciyaları parallel boladı yamasa ústpe-úst túsedı .

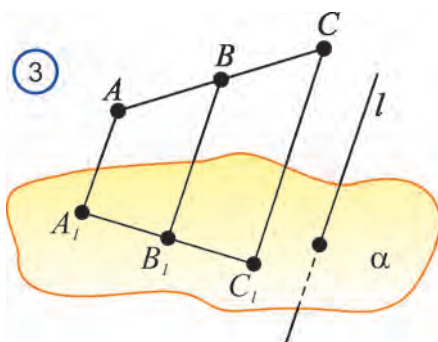
Tómendegi qásiyetlerdi dálilleyik.



1-qásiyet. Figuranıń tuwrı sıızılqı kesimleri proekciyası da kesindilerden ibarat boladı.

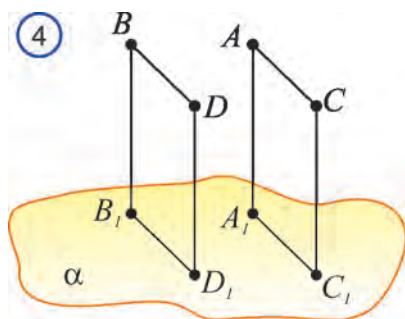
Haqıyqattan da, AC kesindiniń noqatların proekciyalawshı barlıq tuwrılar α tegislikte A_1C_1 tuwrı boyınsha kesip ótiwshi tegislikte jatadı (3-súwret). AC kesindiniń qálegen B noqatı A_1C_1 kesindiniń B_1 noqatına ótedi. $\square$

2-qásiyet. Figuranıń parallel kesimleri proekciyası da parallel kesindilerden ibarat boladı.



Haqıyqattan da, AC hám BD birár figuranıń parallel kesindileri bolsın (4-súwret). Olardıń proekciyaları – A_1C_1 hám B_1D_1 kesindiler de parallel boladı, sebebi olardı eki parallel tegislikte α tegislik penen keskende payda qıldıq.

3-qásiyet. Bir tuwrıda yamasa parallel tuwrılarda jatırǵan kesindiler uzınlıqları qatnası óz proekciyalarınıń uzınlıqları qatnasına teń.

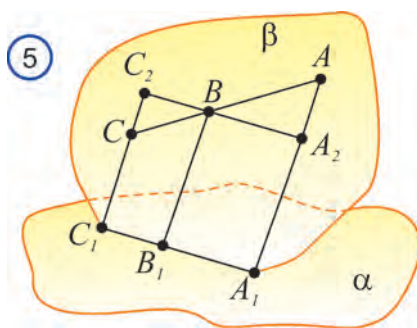


Haqıyqattan da, 5-súwrette AC hám A_1C_1 tuwrılar β tegislikte jatadı. AC kesindiniń B noqatınan A_1C_1 ge parallel bolǵan A_2C_2 tuwrını ótkizemiz.

Payda bolǵan BAA_2 hám BCC_2 úshmúyeshlikler uqsas boladı. Úshmúyeshliklerdiń uqsaslıǵı

hám $A_1B_1 = A_2B$ hám $B_1C_1 = BC_2$ teńliklerden izlenip atırǵan qatnasqa iye bolamız: $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$. $\square$

Solay etip, parallel proyekciyalawda tuwrıda yamasa parallel tuwrılarda



jatirgan kesindiler uzunliqlari qatnasi saqlanadi eken.

Dara jagdayda, kesindiniń ortası proekciya ortasına ótedi.

? Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Keńisliktegi figuranı tegislikke parallel proekciyalaw dep qanday sáwlelendiriwge ayıladı ?

2. Noqatnıń tegislikke parallel proekciyası qalay tabıladı?

3. Parallel proekciyalaw tegisligi hám proekciyalaw baǵıtı dep nege ayıladı ?

4. Parallel proekciyalawdın qanday qásiyetlerin bilesiz?

5. Parallel proekciyalawdan qayerde paydalanıw múmkin?

4.56. Parallel proekciyalawda kesindiniń proekciyası: a) kesindi; b) noqat; c) eki noqat; d) nur; e) tuwrı bolıwı múmkin be?

4.57. Parallel proekciyalawda kvadrattın proekciyası: a) kvadrat; b) parallelogramm; c) romb; d) tuwrı tórtmúyeshlik; e) trapeciya; f) kesindi bolıwı múmkin be?

4.58. Parallel tegisliklerden birinde jatırǵan úshmúyeshlik ekinshi tegislikke parallel proekciyalansa, onıń maydanı ózgermeytuǵınlıǵın dálilleń.

4.59. Parallelogrammnıń parallel proekciyası trapeciya bolıwı múmkin be? Juwabınızdı tiykarlań.

4.60. Durıs úshmúyeshliktiń parallel proekciyası durıs úshmúyeshlik bola ma?

4.61. Tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń parallel proekciyası tuwrı múyeshli úshmúyeshlik bola ma?

4.62. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Bul proekciyalawda ABC úshmúyeshliktiń: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisası. $A_1B_1C_1$ úshmúyeshliktiń sáykes: a) medianası; b) biyikligi; c) bissektrisasına óte me?

4.63. ABC úshmúyeshliktiń parallel proekciyası $A_1B_1C_1$ úshmúyeshlikten ibarat. Eger $\angle A = 30^\circ$, $BC = 20$ sm bolsa, $\angle A_1 = 30^\circ$, $B_1C_1 = 20$ sm bola ma?

4.64. AB kesindiniń parallel proekciyası A_1B_1 kesindiden ibarat. AB kesindiden alınǵan C noqatnıń proekciyası bolsa C_1 noqat. $AB = 48$ sm, $A_1B_1 = 36$ sm. Eger

AC kesindiniń uzınlıǵı: a) 24 sm; b) 12 sm; c) 8 sm; d) 32 sm; e) 36 sm bolsa, A_1C_1 kesindiniń uzınlıǵın tabıń.

14 ÁMELİY SHINÍGİWLAR HÁM QOLLANIWLAR

4.65. a) Eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik neshe ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin?

4.66. a) Eki tuwrı; b) tuwrı hám tegislik; c) eki tegislik; d) úsh tegislik jalǵız ulıwma noqatqa iye bolıwı múmkin be?

4.67. Tórt noqat bir tegislikte jatpaydı. a) olardan úshewi bir tuwrıda jatıwı múmkin be? b) Olar arqalı neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.68. m hám n tuwrılar kesilisedi, d tuwrı bolsa n tuwrıǵa parallel. m hám d tuwrılar óz ara qalay jaylasıwı múmkin?

4.69. ABC úshmúyeshliktiń C ushınan ótiwshi hám AB tárepine parallel bolǵan neshe tegislik ótkiziw múmkin?

4.70. $ABCD$ hám $ABKZ$ parallelogrammlar túrli tegisliklerde jatadı. Parallel tuwrılardı kórsetiń:

A) DA hám KB ; B) CD hám KZ ; C) BC hám AZ ; D) DA hám ZA ; E) CB hám KB .

4.71. A hám C noqatlar α tegislikke, B hám D noqatlar β tegislikke tiyisli. AC , CD , BD , AB , BC , AD tuwrılardan qaysıları β tegislikte kesip ótedi?

4.72. AB , AC , KB , KD kesindiler α tegislikte kesip ótedi. AK , AD , BD , KC , CD tuwrılardan qaysıları α tegislikte kesip ótedi?

4.73. Bir tegislikte jatpaytuǵın AB , AC hám AD tuwrılar α tegislikte B_1 , C_1 hám D_1 noqatlarda kesip ótedi. B_1 , C_1 hám D_1 noqatlar izbe-iz tutastırılса, qanday figura payda boladı?

4.74. α tegislikte kesip ótpeytuǵın MN kesindi ushlarınan hám ortasınan parallel tuwrılar ótkizilgen. Eger bul tuwrılar α tegislikte sáykes túrde M_1 , N_1 , hám K_1 noqatlarda kesip ótse hám $KK_1 = 9$ sm, $NN_1 = 15$ sm bolsa, MM_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.75. α tegislikte P hám Z noqatlarınan onnan sırttaǵı uzınlıqları $PK = 6$ sm hám $ZM = 9$ sm bolǵan parallel kesindiler túsirilgen. MK tuwrı α tegislikte O noqatta kesip ótedi. Eger $MK = 6$ sm bolsa, MO kesindi uzınlıǵın tabıń.

4.76. Parallelogrammdı parallel proekciyalawda kvadrat payda bolıwı múmkin be?

4.77. Úshmúyeshliktiń parallel proekciyası berilgen. Bul úshmúyeshlik medianaların proekciyası qalay jasaladı?

4.78. $ABCD$ hám $CDPZ$ (CD – ulıwma) parallelogrammlar bir tegislikte jatpaydı. Q hám R noqatlar BC hám AD kesindilerdiń ortası, M hám N bolsa DP

hám CZ kesindilerdiń ortası. MN hám QR tuwrılardıń parallel ekenligin dálilleń.

4.79. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kubtıń (6-súwret) a) $AA_1 D_1 D$; b) $BB_1 C_1 C$; c) $ABCD$; d) $DD_1 C_1 C$; e) $B_1 C_1 D_1 A_1$; f) $ADD_1 A_1$ jaqlarınan qaysıları $A_1 B_1$ tuwrıǵa parallel boladı?

4.80. PRT úshmúyeshlik berilgen. PT tuwrıǵa parallel α tegislik PR tárepti S noqatta, RT tárepti Q noqatta kesip ótedi (7-súwret). Eger $SR = 7$ sm, $SQ = 3$ sm hám $SP = 35$ sm bolsa, PT tárepti tabıń.

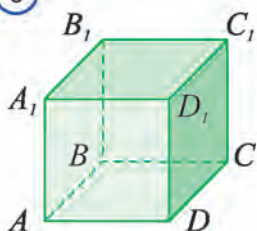
4.81. α tegislik $ABCD$ trapeciya ultanı AD ǵa parallel hám de AB hám CD táreplerin M hám N noqatlarda kesip ótedi (8-súwret). $AD = 20$ sm, $MN = 16$ sm. Eger M noqat AB kesindi ortası hám $AB = 8$ sm bolsa, trapeciya perimetrin tabıń.

4.82. α tegisliktiń P hám Z noqatlarına onnan sırttaǵı $PK = 6$ sm hám $ZM = 9$ sm kesindiler ótkizilgen. MK tuwrı tegislikti O noqatta kesip ótedi. Eger $MK = 6$ sm bolsa, MO aralıqtı tabıń.

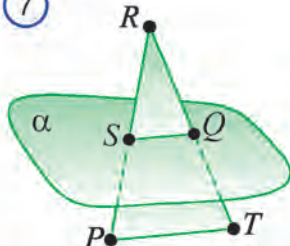
4.83. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń AB tárepi α tegislikke parallel, al AD tárepi bul tegislikke parallel emes. $ABCD$ hám α tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.84. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń tómende berilgen jaqlarınan qaysıları $ABCD$ jaǵına parallel boladı:

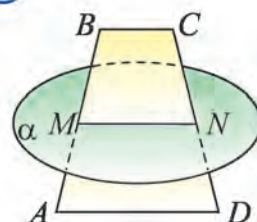
6



7



8



A) $D_1 A_1 AD$; B) $D_1 A_1 B_1 C_1$; C) $ABB_1 A_1$; D) $D_1 C_1 CD$; E) $D_1 A_1 BD$?

4.85. Rombtıń eki diagonalı α tegislikke parallel. Romb tegisligi hám α tegisliktiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.

4.86. D noqat ABC úshmúyeshlik tegisliginde jatpaydı. K , Z hám M noqatlar, sıykes túrde, DA , DB , hám DC kesindilerdiń ortaları. ABC hám KZM tegisliklerdiń keńislikte óz ara jaylasıwın anıqlań.



Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qalıplestiriw

1. Temir jol vagonlarınń kósherleri bir-birine qaraǵanda qalay jaylasqan?
2. Temir jol vagonlarınń kósherleri relslerge qaraǵanda qalay jaylasqan?
3. Jan átiraptan parallel hám ayqasıwshı tuwrılarga mısallar keltiriń.
4. Ne ushın jazıw stolı tartparaları geyde jaqsı ashılmaydı?

5. Ne ushin nasos porsheni onin ishinde jaqsi hareketlenedi?
6. Tigiwshilik lentasi yamasa qalegen uzinliqtagi tayaq jardeminde bolme polinin shetindegi plintus reykalarinin parallelligin qalay tekseriwge boladi?
7. Agashtan islengen brus (taxta) nin hamme jaqlari tuwri tortmuyeshlik korinisinde. Oni kesesine qabirgalari boylap qalay pishqilasañiz da, payda bolgan hamme kesimler parallelogramm bolıwın dälilleñ.



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Keñislikte qanday tuwrılar óz ara perpendikulyar boladı?*

2. *Ayqasıwshı tuwrılar perpendikulyar bolıwı múmkin be?*

3. *7-súwrette qaysı qala súwretlengen? Bunda siz qanday tuwrılardı hám tegisliklerdi kórip tursız? Súwretten parallel, perpendikulyar hám ayqasıwshı tuwrılarga mısallar keltiriñ.*



4. *Qanday tuwri tegislikke perpendikulyar boladı?*

5. *Bir tegislikke perpendikulyar tuwrılardıñ qásiyetlerin aytp berin.*

6. *Tuwri hám tegisliklerdin perpendikulyarlıq alamatın aytp berin.*

7. *Parallel tegisliklerdin birine perpendikulyar bolgan tuwrınıñ qásiyetin aytp berin.*

8. *Bir tuwrıǵa perpendikulyar bolgan tegisliklerdin qásiyetin aytp berin.*

9. *Ulıwmalasqan Pifagor teoreması ne haqqında?*

5.1. *SB kesindi ABCD parallelogramm tegisligine perpendikulyar (8-súwret). SB perpendikulyar bolgan tuwrılardı aytp berin.*

5.2. *Qanday da l tuwri ABC úshmúyeshliktiñ AB hám AC táreplerine perpendikulyar. l tuwri hám ABC úshmúyeshlik tegisliginiñ óz ara jaylasıwın anıqlañ.*

A) l tuwri ABC tegislikti kesip ótedi, biraq oǵan perpendikulyar emes; B) l tuwri ABC tegislikke tiyisli; C) l tuwri ABC tegislikke perpendikulyar; D) l tuwri ABC tegislikke parallel.

5.3. *KO tuwri ABCD parallelogramm tegisligine perpendikulyar (9-súwret). KO tuwrıǵa perpendikulyar tuwrını anıqlañ*

5.4. *MB tuwri ABC úshmúyeshliktiñ AB hám BC táreplerine perpendikulyar (10-súwret). X noqat AC táreptiñ qálegen noqatı bolsa, MBX úshmúyeshliktiñ túrin anıqlañ.*

5.5. *ABCD₁B₁C₁D₁ tuwri múyeshli parallelepipedtiñ AA₁C₁C hám BB₁D₁D diagonal kesimleri óz ara perpendikulyar ekenligin dälilleñ.*

5.6. *ABCD tortmúyeshliktiñ tárepleri A₁B₁C₁D₁ tuwri tortmúyeshliktiñ táreplerine sáykes rawishte parallel. ABCD tuwri tortmúyeshlik ekenligin dälilleñ.*

V BÓLIM

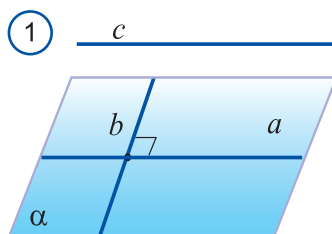


KEÑISLIKTE TUWRÍLAR HÁM TEGISLIKLERDÍŇ PERPENDIKULYARLÍGÍ

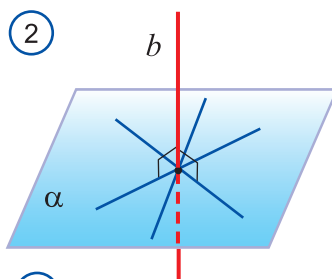
15

KEÑISLIKTE PERPENDIKULYAR TUWRÍ HÁM TEGISLIKLER

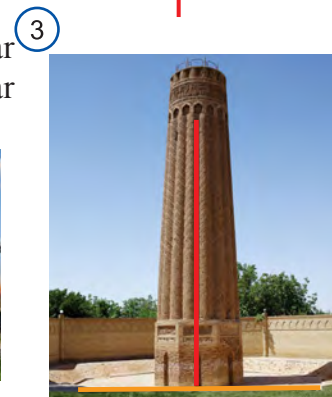
Esletip ótemiz, keñislikte berilgen eki tuwrı arasındaǵı múyesh 90° qa teń bolsa, olar óz ara *perpendikulyar tuwrılar* delinedi. Perpendikulyar tuwrılar kesilisiwshi hám ayqasıwshı bolıwı múmkin. 1-súwrette a hám b perpendikulyar tuwrılar kesilisiwshi, b hám c perpendikulyar tuwrılar bolsa ayqasıwshı. a hám b tuwrılardıń perpendikulyarlıǵı $a \perp b$ tárizde jazıladı.



Tegisliktegi qálegen tuwrıǵa perpendikulyar tuwrı *tegislikke perpendikulyar* delinedi (2-súwret). α tegislik hám b tuwrılardıń perpendikulyarlıǵı $b \perp \alpha$ tárizde jazıladı.



Qorshaǵan ortalıqtan óz ara perpendikulyar figuralarǵa kóplep mısallar keltiriw múmkin. Ádette, úy diywalları hám sútinleri, mináralar, shıraq sútinleri hám sımaǵashlar jerge qaraǵanda tik, yaǵnıy perpendikulyar qılıp qurıladı. Bólmedegi shkaf, stol hám muzlatqıshlar da polǵa qaraǵanda tik

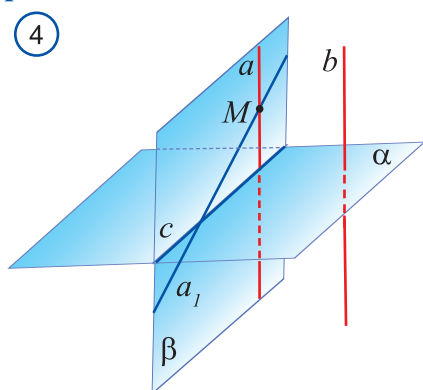


qılıp ornatıladı (3-súwret).

Endi keńisliktegi perpendikulyar tuwrılardıń baǵı bir qásiyetleri haqqında toqtalamız.

Eger a tuwrı α tegislikte jatsa yamasa oǵan parallel bolsa, ol jaǵdayda α tegislikte jatırǵan hám a tuwrıǵa parallell basqa b tuwrı da tabıladı. Sonıń ushın, tegislikke perpendikulyar tuwrı, álbette, bul tegislikti kesip ótedi. Keri tastıyıqlaw da orınlı boladı.

5.1-teorema. *Eger eki tuwrı tegislikke perpendikulyar bolsa, olar óz ara parallel boladı.*



Dálilleniwi. a hám b tuwrılar α tegislikke perpendikulyar bolsın (4-súwret). Bul tuwrılardıń óz ara parallel ekenligin dálilleybiz.

a tuwrınıń qanday da bir M noqatınan b tuwrıǵa parallel a_1 tuwrı ótkizemiz.

Ol jaǵdayda, $a_1 \perp \alpha$ boladı.

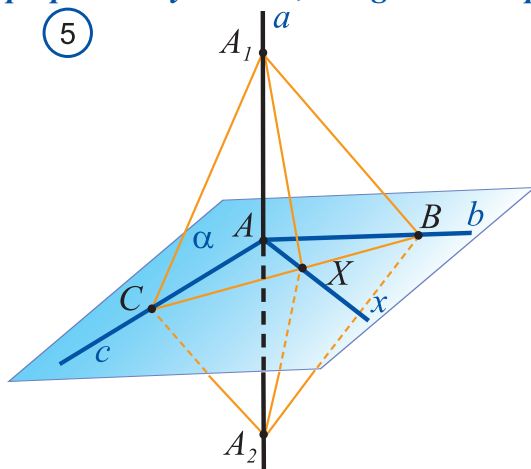
a hám a_1 tuwrılardıń ústpe-üst túsiwin kórsetemiz. Meyli, onday bolmasın, a hám a_1 tuwrılar ústpe-üst túspesin. Onda a hám a_1 tuwrılar jatırǵan β tegisliktegi M noqattan α hám

β tegisliklerdiń kesilisiw sıızǵı – c tuwrıǵa eki a hám a_1 perpendikulyar tuwrı ótedi. Al, bunıń bolıwı múmkın emes. Qarama-qarsılıq oylaǵanıwızdıń nadurıs ekenligin kórsetedi.

Demek, a hám b tuwrılar óz ara parallel. $\square$

Endi tuwrınıń tegislikke perpendikulyarlıq teoremasın keltiremiz.

5.2-teorema. *Eger tuwrı tegislikte jatırǵan eki kesilisiwshi tuwrıǵa perpendikulyar bolsa, ol tegislikke de perpendikulyar boladı.*



Dálilleniwi. a tuwrı α tegislikte jatırǵan eki b hám c tuwrıǵa perpendikulyar bolsın. Ol jaǵdayda a tuwrı b hám c tuwrılardıń kesilisiw noqatı A arqalı ótedi. a tuwrınıń α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleybiz.

α tegisliktiń A noqatı arqalı qálegen x tuwrı ótkizemiz hám onıń a tuwrıǵa perpendikulyar bolıwın kórsetemiz. α tegislikte A noqattan ótpeytuǵın, b , c

hám x tuwrılardı kesip ótetuǵın x tuwrını ótkizemiz. Usı kesilisiw sáykes túrde B , C hám X noqatlar bolsın.

a tuwrıda A noqattıń túrli táreplerinde AA_1 hám AA_2 kesindilerdi qoyamız. Payda bolǵan A_1BA_2 hám A_1CA_2 úshmúyeshlikler teń qaptallı boladı (buni óz betińizshe tiykarlań). Bunnan A_1BC hám A_2BC úshmúyeshlikler teń bolıwı kelip shıǵadı (buni da óz betińizshe tiykarlań). Óz nábwetinde, bunnan A_1BX hám A_2BX múyeshlerdiń teń bolıwı hám de A_1BX hám A_2BX úshmúyeshliklerdiń de teń bolıwı kelip shıǵadı (buni da óz betińizshe tiykarlań).

Dara jaǵdayda, $A_1X = A_2X$ boladı. Onda A_1XA_2 úshmúyeshlik teń qaptallı boladı. Sonıń ushın, onıń XA medianası onıń biyikligi de boladı. Bul bolsa, óz nábwetinde, x tuwrınıń a tuwrıǵa perpendikulyar bolıwın kórsetedi. Demek, a tuwrı α tegislikke perpendikulyar. $\square$

Bul teoremadan nátiyje retinde tómendegi qásiyetler kelip shıǵadı. Olardı óz betińizshe tiykarlań.

5.3-teorema. Eger tuwrı eki parallel tegisliktiń birine perpendikulyar bolsa, ekinshisine de perpendikulyar boladı.

5.4-teorema. Eger eki tegislik bir tuwrıǵa perpendikulyar bolsa, olar parallel boladı.

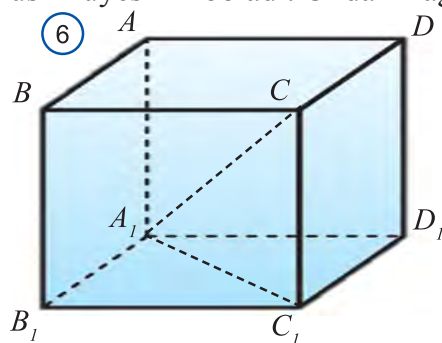
Tómende “bar ekenlik hám jalǵızlıq teoremaları” dep atalıwshı qásiyetlerin de óz betińizshe dálillew ushın keltiremiz.

5.5-teorema. Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tuwrıǵa perpendikulyar jalǵız tegislik ótkiziw múmkin.

5.6-teorema. Keńisliktiń qálegen noqatınan berilgen tegislikke perpendikulyar jalǵız tuwrı ótkiziw múmkin.

Nátiyje (ulıwmalasqan Pifagor teoreması). Tuwrı múyeshli parallelepiped diagonalınıń kvadratı onıń úsh ólshemleri kvadratlardı qosındısına teń.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tuwrı múyeshli parallelepiped bolsın (6-súwret). CC_1 qabırǵa $A_1 B_1 C_1 D_1$ jaqqa perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın $A_1 C_1 C$ tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Onda Pifagor teoreması boyınsha,



$$A_1 C^2 = CC_1^2 + A_1 C_1^2 \quad (1).$$

$A_1 D_1 C_1$ ham tuwrı múyeshli úshmúyeshlik. Jáne Pifagor teoreması boyınsha,

$$A_1 C_1^2 = A_1 D_1^2 + D_1 C_1^2 \quad (2).$$

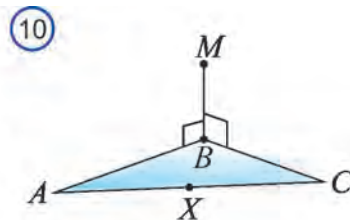
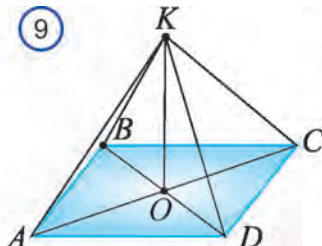
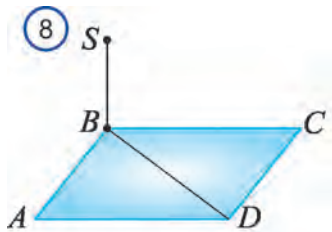
Onda, (1) hám (2) boyınsha: $A_1 C^2 = CC_1^2 + A_1 C_1^2 = CC_1^2 + A_1 D_1^2 + D_1 C_1^2$.

$A_1 D_1 = B_1 C_1$ bolǵanlıǵı ushın $A_1 C^2 = CC_1^2 + B_1 C_1^2 + D_1 C_1^2$. $\square$

táreplerine sáykes túrde parallel. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlik ekenligin dálilleń.

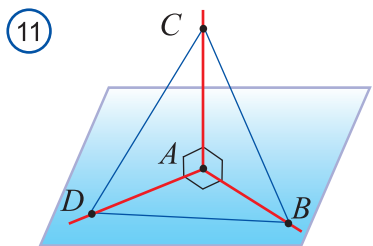
5.7. α tegislik m tuwrıǵa, m tuwrı n tuwrıǵa perpendikulyar. Tegisliktiń n tuwrıǵa parallel bolıwın dálilleń.

5.8. $ABCD$ trapeciyanıń AB ultanı jatırǵan tuwrı α tegislikke perpendikulyar. Bul trapeciyanıń CD ultanı jatırǵan tuwrı da α tegislikke perpendikulyar bolıwın dálilleń.



5.9. Keńisliktegi tuwrınıń qálegen noqatınan oǵan perpendikulyar tuwrı ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.

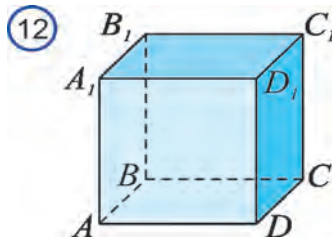
5.10. Keńisliktegi tuwrınıń qálegen noqatınan oǵan eki túrli perpendikulyar tuwrı ótkiziw múmkin ekenligin dálilleń.



5.11. AB, AC, AD tuwrılar jup-jubı menen óz ara perpendikulyar (11-súwret). Eger

- 1) $AB = 3$ sm, $BC = 7$ sm, $AD = 1,5$ sm;
- 2) $BD = 9$ sm, $BC = 16$ sm, $AD = 5$ sm;
- 3) $AB = b$ sm, $BC = a$ sm, $AD = d$ sm;
- 4) $BD = c$ sm, $BC = a$ sm, $AD = d$ sm bolsa, CD

kesindi uzınlıǵın tabıń.

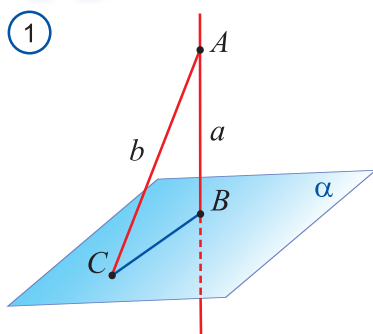


5.12. $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshliktiń A ushında onıń tegisligine perpendikulyar AK tuwrı ótkizilgen. K noqattan tuwrı tórtmúyeshliktiń basqa ushlarına shekemgi aralıq 6 m, 7 m, 9 m. AK aralıqtı tabıń.

5.13. A hám B noqatlardan α tegislikke perpendikulyar hám onı sáykes túrde C hám D noqatlarda kesip ótiwshi tuwrı ótkizilgen. Eger $AC = 3$ m, $BD = 2$ m hám $CD = 2,4$ m bolsa hám AB kesindi α tegislikte kesip ótpese, A hám B noqatlar arasındadı aralıqtı tabıń

5.14. 12-súwrette súwretlengen kubtıń qabırǵası: a) 4 sm; b) 8 sm bolsa, AB_1C úshmúyeshlik perimetrin hám DAC_1 úshmúyeshliktiń maydanın tabıń.

16 КЕЊИСЛИКТЕ PERPENDIKULYAR, QÍYA HÁM ARALIQ



α tegislikke onda jatpaytuğın A noqattan perpendikulyar a tuwrı ótkizemiz (1-súwret). Bul tuwrı tegislikti B noqatta kesip ótsin. Sonday-aq, tegisliktiń qanday da bir C noqatın A noqat penen tutastıramız. Nátiyjede, payda bolǵan

AB kesindi – *tegislikke túsirilgen perpendikulyar*;

AC kesindi – *tegislikke túsirilgen qıya*;

BC kesindi – *qıyanıń tegisliktegi proekciyası*;

B noqat – *perpendikulyardıń ultanı*;

C noqat – *qıyanıń ultanı* dep ataladı.



ABC úshmúyeshlik tuwrı múyeshli hám onda AB katet, AC bolsa gipotenuza bolǵanlıǵı ushın hár dayım $AB < AC$ boladı.

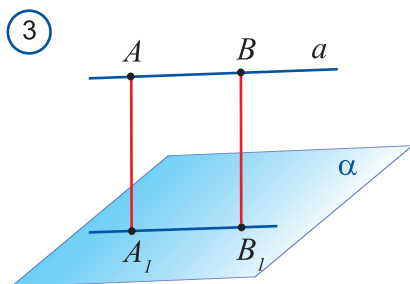
Demek, qanday da bir noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyardıń uzınlıǵı usı noqattan ótkizilgen qálegen qıyanıń uzınlıǵınan kishi boladı.

Noqattan tegislikke shekemgi aralıq dep noqattan tegislikke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına aytıladı .

Tashkettegi saat minárasınıń biyikligi 30 m delingende, mináranıń ushınan onıń ultan tegisligine túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵı túsiniledi (2-súwret).

5.7-teorema. *Eger tuwrı tegislikke parallel bolsa, ol jaǵdayda onıń barlıq noqatları tegislikten teńdey aralıqta boladı.*

Dálilleniwi. a – berilgen tuwrı hám α – berilgen tegislik bolsın (3-súwret).



a tuwrıda eki A hám B noqattı alamız. Olardan α – tegislikke perpendikulyarlar túsiremez. Bul perpendikulyarlardıń ultanı, sáykes túrde, A_1 hám B_1 noqatlar bolsın. Onda A hám B noqatlardan α tegislikke shekemgi aralıqlar, sáykes túrde, AA_1 hám BB_1 kesindiler boladı. 4.6-teorema boyınsha AA_1 hám BB_1 kesindiler parallel boladı.

Demek, olar bir tegislikte jatadı. Bul tegislik α tegislikti A_1B_1 tuwrı boylap kesedi. a tuwrı A_1B_1 tuwrıǵa parallel boladı, sebebi ol α tegislikti kesip ótpeydi.

Solay etip, ABA_1B_1 tórtmúyeshliktiń qarama-qarsı tárepleri parallel.

Demek, ol parallelogramm. Bul parallelogrammda $AA_1 = BB_1$. $\square$

Tuwrıdan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi aralıq dep tuwrınıń

qālegen noqatınan usı tegislikke shekemgi aralıqqa aytıladı.

Tegisliktiŋ qálegen eki noqatınan oǵan parallel bolǵan tegislikke shekemgi aralıq birdey boladı. Bul qásiyet aldınǵı teorema dálilleniwine uqsas dálillenedi.

Eki parallel tegislikler arasındagi aralıq dep bir tegisliktiñ qálegen noqatınan ekinshi tegislikke

shekemgi aralıqqa aytiladı. 4-súwrette súwretlengen stoldıń biyikligi pol hám stol tegislikleri arasındagı aralıqqa teń boladı.

 **5.8-teorema.** *Eki ayqasiwshi tuwri jalgız ulıwma perpendikulyargá iye boladı.*

Dálilleniwi. a hám b ayqasıwshı tuwrılar bolsın (5-súwret). Bul tuwrılarda

sonday A hám B noqatlardı tańlaw múmkinligin kórsetemiz, AB tuwrı a ǵa da, b ǵa da perpendikulyar boladı. α tegislik b tuwrıdan ótiwshi hám a tuwrıǵa parallel bolsın. a tuwrıda C noqattı alamız hám odan α tegislikke CD perpendikulyar túsiremiz. Kesilisiwshi a hám CD tuwrılardan β tegislikti ótkizemiz. a_1 tuwrı – α hám β tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵı bolsın.

$a_1 \parallel a$ bolǵanlıǵı ushın a_1 hám b tuwrılar qanday da B noqatta kesilisedi. B noqattan β tegislikte jatıwshı, a tuwrıǵa BA perpendikulyar túsiremiz.

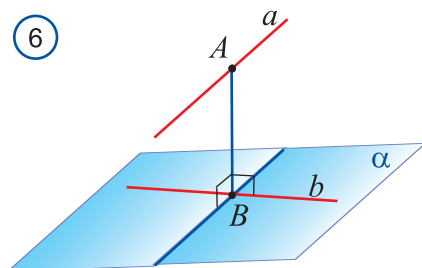
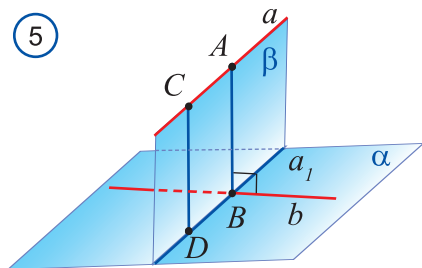
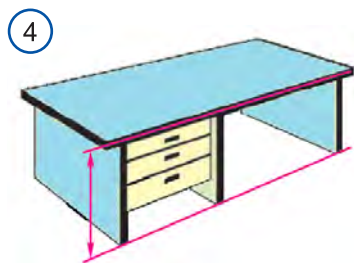
Nátiyjede, AB hám CD tuwrılardıń hár ekewi de β tegislikte jatadı hám a tuwrıǵa perpendikulyar boladı. Sonıń ushın, $AB \parallel CD$ hám $AB \perp \alpha$ boladı.

Demek, $AB \perp a$ hám $AB \perp b$ boladı. AB izlenip atırǵan tuwrı bolıp, ol a hám b ayqasıwshı tuwrılardıń hár ekewine de perpendikulyar boladı.

Ulıwma perpendikulyardıń jalǵız ekenligin óz betińizshe dálilleń. $\square$

Eki ayqasıwshı tuwrı arasındağı aralıq
dep olardıń ulıwma perpendikulyarı uzınlıǵına
aytıladı.

Joqarıdağı teoremadan tómendegi juwmaq kelip shıǵadı:

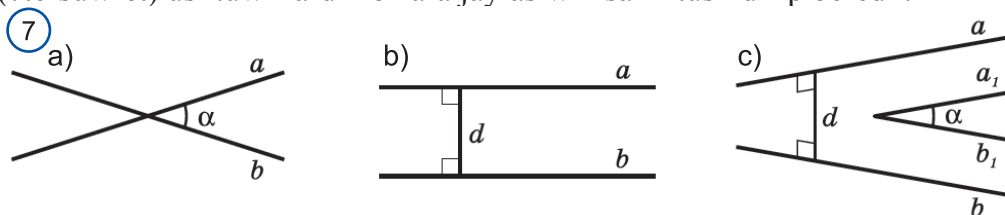


Eki ayqasıwshı a hám b tuwrı arasıdǵı aralıq (6-súwret) - a tuwrınıń qálegen noqatınan b tuwrı jatırǵan hám a tuwrıǵa parallel bolǵan α tegislikke shekemgi aralıqqa teń boladı.

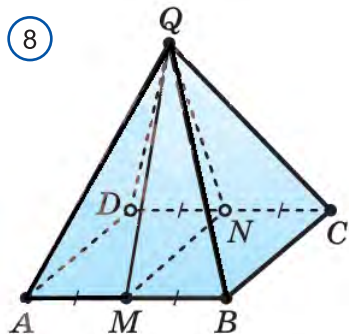
Joqarıdǵılarga tiykarlanıp, endi biz keńislikte eki tuwrınıń óz ara jaylasıwın sanlar járdeminde túsindirip beriwimiz múmkin.

Eger keńislikte eki tuwrı:

- óz ara kesilisse, olar arasıdǵı α múyesh (7.a-súwret),
- óz ara parallel bolsa, olar arasıdǵı d aralıq (7.b-súwret),
- óz ara ayqasıwshı bolsa, olar arasıdǵı α múyesh hám arasıdǵı d aralıq (7.c-súwret) usı tuwrılardıń óz ara jaylasıwın sanlı túsindirip beredi .



Másele. Tórtmúyeshli $SABCD$ piramidanıń barlıq qabırǵaları a ǵa teń. Onıń AB hám SC qabırǵaları arasıdǵı aralıqtı tabıń (8-súwret).



Sheshimi. 4.8-teorema boyınsha, AB hám SC qabırǵalarında sonday X hám Y noqatlar bar bolıp, XY tuwrı AB hám SC qabırǵalardıń hár ekewine de perpendikulyar boladı. Sonday-aq, XY tuwrı, SC tuwrı jatırǵan hám AB tuwrıǵa parallel bolǵan tegislikke de perpendikulyar boladı.

Meyli, α tegislik – S noqattan ótiwshi hám AB tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan tegislik bolsın. Bul tegislik AB hám CD qabırǵalardıń ortaları – M hám N noqatlardan ótedi. Onda $XY \parallel \alpha$ hám XY kesindiniń α tegisliktegi proekciyası XY kesindige teń boladı.

Endi X hám Y noqatlardıń α tegisliktegi qaysı noqatlarga proekciyalanıwın anıqlaymız.

$AB \perp \alpha$ bolǵanlıǵı ushın AB qabırǵanıń barlıq noqatları M noqatqa proekciyalanadı. Demek, X noqat M noqatqa proekciyalanadı.

S hám C noqatlar sáykes túrde, S hám N noqatlarga proekciyalanǵanı ushın, SC kesindi SN kesindige ótedi. SN tuwrı AB tuwrıǵa parallel tegislikte jatqanı ushın, izlenip atırǵan XY kesindiniń proekciyası – SN tuwrıǵa M noqattan túsirilgen perpendikulyardan ibarat boladı.

Bul perpendikulyar uzunligi d ni, ultani a hám qaptal tárepi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ge teń bolǵan SMN teń qaptallı úshmúyeshlik maydanınan paydalanıp tabamız.

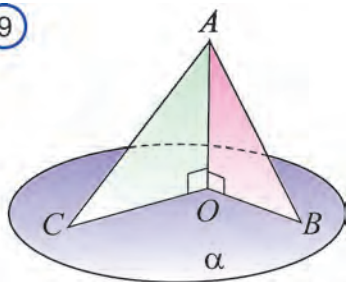
Bir tárepten bul úshmúyeshliktiń maydanı: $\frac{a}{2} \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ge teń, al ekinshi tárepten bolsa $\frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} d$ ǵa teń. Bul teńlikten $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Tegislikke túsirilgen perpendikulyar hám qıyaǵa anıqlama berii
2. Qıyanıń tegisliktegi proekciyası dep nege ayıladı?
3. Noqattan tegislikke shekemgi aralıq qalay anıqlanadı?
4. Tegislikke parallel bolǵan tuwrı hám tegislik arasındaǵı aralıq qalay tabıladı?
5. Eki parallel tegislikler arasındaǵı aralıq qalay anıqlanadı?
6. Eki ayqasıwshı tuwrılar arasındaǵı aralıq qalay anıqlanadı?
7. Keńislikte eki tuwrınıń óz ara jaylasıwın qaysı sanlı shamalar anıqlaydı?

9



5.15. A, B, Q noqatlar α tegislikke tiyisli, M noqat bolsa oǵan tiyisli emes hám $MQ \perp \alpha$. MA, AQ, MQ, BQ, MB kesindilerdiń qaysı biri a) perpendikulyar; b) qıya; c) qıya proekciyası ekenligin anıqlań.

5.16. A noqattan a tegislikke AB hám AC qıyalar hám AO perpendikulyar ótkizilgen (9-súwret). Eger $AB = 2,5$ sm, $AC = 3$ sm bolsa, qıyalarđın proekciyaların óz ara salıstırıń.

5.17. Noqattan tegislikke eki qıya túsirilgen (9-súwret). Eger qıyalarđın biri ekinshisinen 26 sm uzın, al proekciyaları 12 sm hám 40 sm bolsa, bul qıyalarđın uzunlıqların tabıń.

5.18. Úshmúyeshlikke sırtlay sızılǵan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı ótkizilgen. Bul tuwrınıń hár bir noqatı úshmúyeshlik tóbelerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

5.19. Maydanı a) 21 sm^2 ; b) 96 sm^2 ; c) 44 sm^2 ; d) 69 sm^2 ; e) 156 sm^2 bolǵan $ABCD$ kvadrat tegisligine uzunlıǵı 10 sm bolǵan DM perpendikulyar túsirilgen. MA qıyanıń uzunlıǵın tabıń.

5.20. Tuwrı múyeshi C bolǵan ABC úshmúyeshliktiń súyir múyeshi ushınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar AD tuwrı ótkizilgen. Eger $AC = c$, $BC = b$ hám $AD = c$ bolsa, D noqattan B hám C tóbelerine shekemgi aralıqlardı tabıń.

5.21. Bir-birinen 3,4 m uzaqlıqta bolǵan vertikal sútinlerdiń joqarı ushları tosın menen tutastırılǵan. Sútinlerdi kóp qabatlı biyiklikleri 5,8 m hám 3,9 m bolsa, tosın uzunlıǵın tabıń.

5.22. 15 m uzunlıqtağı telefon sımı sımagashqa jer betinen 8 m biyiklikte bekkemlengen hám onnan biyikligi 20 m bolğan kópqabatlı úydıń tóbesine tarttırıp baylangan. Úy menen sütün arasındağı aralıqtı tabıń.

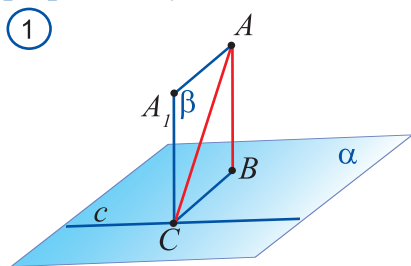
5.23. Tegislikke P noqattan túsirilgen PQ perpendikulyar uzunlıǵı 1 ge, al PA hám PB qıyalar uzunlıqları 2 ge teń. C noqat AB kesindi ortası. Eger
a) $\angle APB = 90^\circ$; b) $\angle APB = \beta$ bolsa, QC kesindi uzunlıǵın tabıń.

5.24. $ABCD$ parallelogrammın doǵal B múyeshi ushınan onıń tegisligine perpendikulyar bolǵan BH kesindi tiklengen. Eger $AH = 5$ sm, $HD = HC = 8,5$ sm, $AC = 1,5\sqrt{33}$ bolsa, parallelogramm táreplerin tabıń.

5.25. M noqat tárepí 60 sm bolğan durıs ABC úshmúyeshliktiń hár bir tóbesinen 40 sm aralıqta jaylasqan. ABC úshmúyeshlik tegisliginen M noqatqa shekemgi aralıqtı tabıń.

ÚSH PERPENDIKULYAR HAQQÍNDAGÍ TEOREMA

 **5.9-teorema.** Eger tegislikke túsirilgen qıyanın ultaninan ótiwshi tuwri qıyanın proekciyasına perpendikulyar bolsa, ol jaǵdayda ol qıyanın ózine de perpendikulyar boladı.



Dálilleniwi. Meyli, AB kesindi α tegislikke túsirilgen perpendikulyar, AC kesindi bolsa qıya bolsın. c tuwrı α tegislikte jatıwshı, C noqattan ótiwshi hám qıya proekciyasına perpendikulyar bolğan tuwrı bolsın (1-súwret). AB ğa parallel A_1C tuwrını ótkizemiz. Bul tuwrı α tegislikke perpendikulyar boladı.

AB hám AC_1 tuwrılar arqalı β tegislikti ótkizemiz. c tuwrı CA_1 tuwrıǵa perpendikulyar boladı. Ol shárt boyınsha, CB tuwrıǵa da perpendikulyar edi. Onda c tuwrı β tegislikke de perpendikulyar boladı.

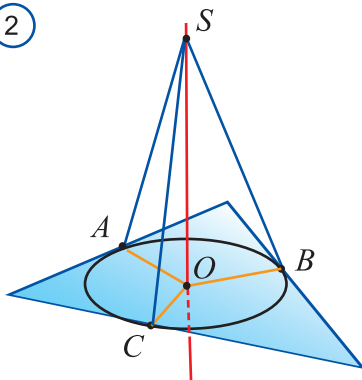
Demek, c turarı β tegislikte jatırğan AC qıyağa da perpendikulyar boladı. $\square$

Usı teoremada úsh perpendikulyarlar haqqında gáp baratırǵanlıǵı ushın ol “Úsh perpendikulyarlar haqqındaǵı teorema” atın alǵan. Bul teoremaǵa keri bolǵan teorema da orınlı boladı. Onı óz betińizshe dálilleń.

 **5.10-teorema.** Eger tegislikke túsirilgen qıyanın ultaninan ótiwshi tuwri qıyaǵa perpendikulyar bolsa, ol jaǵdayda ol qıyanın proekciyasına da perpendikulyar boladı.

1- másele. Úshmúyeshlikke ishley sızılğan sheńber orayınan úshmúyeshlik tegisligine perpendikulyar tuwrı ótkizilgen (2-súwret). Bul tuwrınıń qálegen noqatı úshmúyeshlik táreplerinen teńdey uzaqlıqta jatıwın dálilleń.

2



Dálilleniwi. Meyli, A, B, C – úshmüyeshlik tárepleriniń sheńber menen kesilisiw noqatları, O – sheńber orayı, al S bolsa perpendikulyardaǵı qálegen noqat bolsın.

OA úshmúyeshlik tárepine perpendikulyar bolǵanlıǵı ushın, úsh perpendikulyarlar haqqındaǵı teorema boyınsha, OA da bul tárepke perpendikulyar boladı. Onda SAO tuwrı múyeshli úshmúyeshlik boladı. Bul úshmúyeshlikte Pifagor teoreması boyınsha,

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

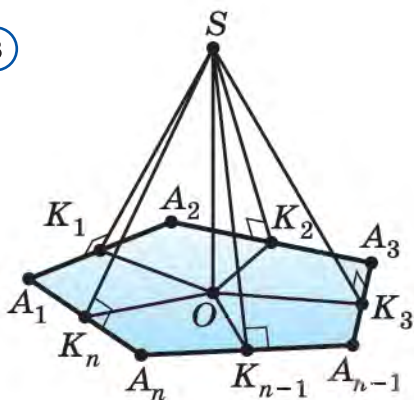
bul jerde r – sheńber radiusi:

Tap usıǵan uqsas, SBO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$ hám SCO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten bolsa $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$ ekenligin tabamız.

Demek, $SA = SB = SC$. $\square$

Joqarida keltirilgen 3–4-súwretler ultanında 1-máselege uqsas hám qálegen kóp múyeshlik ushın ulıwmalıraq jaǵdaylardı óz betinızshe dálillew ushın keltiremiz.

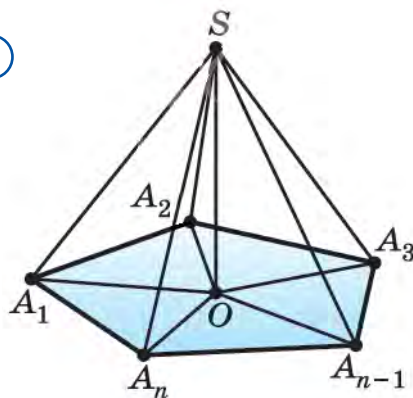
3



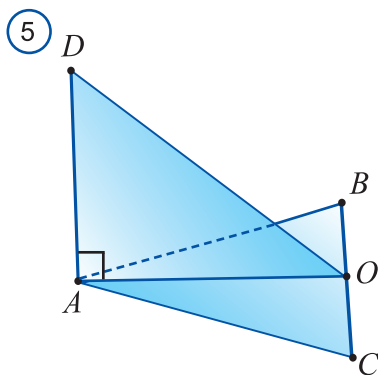
2- másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń táreplerinen teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsilgen. Bul perpendikulyar ultanı kópmúyeshlikke ishley sızılğan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin dálilleń (3-súwret).

3- másele. Keńisliktegi noqat kópmúyeshliktiń ushlarınan teńdey uzaqlıqta jaylasqan bolıp, onnan kópmúyeshlik tegisligine perpendikulyar túsilgen. Bul perpendikulyar ultanı kópmúyeshlikke sırtlay sızılğan sheńber orayı menen ústpe-úst túsiwin dálilleń (4-súwret).

4



4-másele. ABC úshmúyeshlik tegisligine onıń A noqatınan perpendikulyar túsirilgen (5-súwret). Eger $AB = c = 13$, $BC = a = 20$, $AC = b = 11$ hám $AD = 36$ ға teń bolsa, D noqattan BC tuwrıǵa shekemgi aralıqtı tabıń.



Sheshimi. Izlenip atırǵan aralıq D noqattan BC tárepke túsirilgen perpendikulyar uzınlıǵına teń boladı. Bul kesindini túsiriw ushın onıń BC táreptegi ultanın tabıw kerek boladı. Bunıń ushın ABC úshmúyeshliktiń A ushınan BC tárepine AO biyiklikti túsiremiz: $AO \perp BC$.

Onda úsh perpendikulyar haqqındaǵı teorema boyınsha, $BC \perp DO$ boladı. Demek, DO izlenip atırǵan kesindi eken.

Endi DO kesindiniń uzınlıǵın tabamız. Bunıń ushın, aldın ABC úshmúyeshlik maydanın Geron formulasınan paydalanıp tabamız:

$$p = (a + b + c) : 2 = (20 + 11 + 13) : 2 = 22;$$

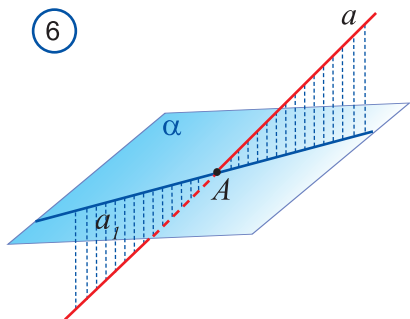
$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} = \sqrt{22 \cdot (22 - 20) \cdot (22 - 11) \cdot (22 - 13)} = 66.$$

$$AO = 2S / a = (2 \cdot 66) : 20 = 6,6.$$

ADO tuwrı múyeshli úshmúyeshlikte, Pifagor teoreması boyınsha

$$DO = \sqrt{AD^2 + AO^2} = \sqrt{36^2 + 6,6^2} = 36,6.$$

6



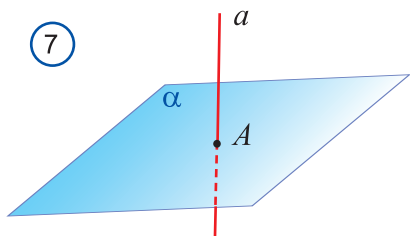
Meyli, α tegislik hám onı kesip ótiwshi hám bul tegislikke perpendikulyar bolmaǵan a tuwrı berilgen bolsın (6-súwret). a tuwrınıń hár bir noqatınan perpendikulyarlar túsiremiz. Bul perpendikulyarlardıń ultanları a_1 tuwrını payda qıladı.

a_1 tuwrı a tuwrınıń α tegisliktegi *proekciyası* dep ataladı.

a tuwrı hám α tegislik arasındadı múyesh dep, tuwrı menen onıń bul tegisliktegi proekciyası arasındadı múyeshke aytıladı.

Eger tuwrı tegislikke perpendikulyar bolsa (7-súwret), onıń menen tegislik arasındadı múyesh 90° qa, eger parallel bolsa, bul tuwrı menen tegislik arasındadı múyesh 0° qa teń dep alınadı.

7





Tema boyinsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremanı túsindirih. Ne sebepten ol solay atalǵan?*
2. *Úsh perpendikulyar haqqındaǵı teoremaǵa keri teoremanı ayıp hám túsindirip berih.*
3. *Tuwrı hám tegislik arasındaǵı múyesh qalay anıqlanadı?*
4. *Tegislik hám oǵan perpendikulyar tuwrı arasındaǵı múyesh neshe gradus?*

5.26. A noqat tárepi a ǵa teń bolǵan teń tárepli úshmúyeshliktiń ushlarınan a aralıqta jatadı. A noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.27. α tegisliktiń sırtındaǵı S noqattan oǵan úsh teń SA , SB , SC qıya hám SO perpendikulyar ótkizilgen. Perpendikulyardıń O ultanı ABC úshmúyeshlikke sırtlay sızilǵan sheńberdiń orayı bolıwın dálilleń.

5.28. Teń tárepli úshmúyeshliktiń tárepleri 3 m ge teń. Úshmúyeshliktiń hár bir tóbesinen 2 m aralıqta bolǵan noqattan úshmúyeshlik tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.29. Teń qaptallı úshmúyeshlikte ultanı hám biyikligi 4 m ge teń. Berilgen noqat úshmúyeshlik tegisliginen 6 m aralıqta hám onıń ushlarınan birdey aralıqta jatadı. Usı aralıqtı tabıń.

5.30. A noqattan kvadrattıń ushlarına shekemgi aralıq a ǵa teń. Kvadrattıń tárepi b ǵa teń bolsa, A noqattan kvadrat tegisligine shekemgi aralıqtı tabıń.

5.31. Berilgen noqattan tegislikke ótkizilgen berilgen uzınlıqtaǵı qıyalar ultanlarınıń geometriyalıq ornın tabıń.

5.32. Berilgen noqattan tegislikke uzınlıqları 10 sm hám 17 sm bolǵan eki qıya ótkizilgen. Bul qıyalarlar proekciyasınıń ayırması 9 sm ge teń. Qıyalarđıń proekciyaların tabıń.

5.33. Noqattan tegislikke eki qıya ótkizilgen. Eger: 1) olardan biri ekinshisinen 26 sm uzın, qıyalarđıń proekciyaları 12 sm hám 40 sm bolsa; 2) qıyalarđıń uzınlıqları 1 : 2 qatnasta bolıp, olardıń proekciyaları 1 sm hám 7 sm ge teń bolsa, qıyalarđıń uzınlıqların tabıń.

5.34. α tegislikten d aralıqta jatırǵan A noqattan tegislik penen 30° múyesh payda etiwshi AB hám AC qıyalar ótkizilgen. Olardıń α tegislikke proekciyaları óz ara 120° lı múyesh payda etedi. BC kesindi uzınlıǵın tabıń.

5.35. Eger tuwrı múyeshli úshmúyeshliktiń katetlerinen biri tegislikke tiyisli, al ekinshisi onıń menen 45° lı múyesh payda qılsa, gipotenuza bul tegislik penen 30° lı múyesh payda qılıwın dálilleń.

5.36. a qıya α tegislik penen 45° lı múyesh payda qıladı, al tegisliktiń b tuwrısı

qiya proekciyası menen 45° lı múyesh payda qıladı. a hám b tuwrılar arasındaǵı múyeshtiń 30° qa teń ekenligin dálilleń.

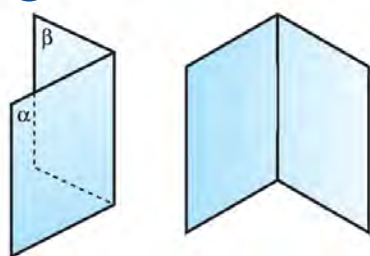
5.37. P noqat tárepi a ǵa teń $ABCD$ kvadrattıń hár bir tóbesinen a aralıqta jatadı. Kvadrat tegisligi hám AP tuwrı arasındaǵı múyeshti tabıń.

5.38. Úshmúyeshli piramidanıń hámme qabırǵaları óz ara teń. Piramidanıń qabırǵası hám bul qabırǵa tiyisli bolmaǵan jaǵı arasındaǵı múyeshti tabıń.

5.39. Tuwrı múyeshli parallelepipedtıń ólshemleri a , b hám c ǵa teń. Parallelepiped diagonalı menen onıń jaqları diagonalı arasındaǵı aralıqtı tabıń.

18 KEÑISLIKTE TEGISLIKLERDİŇ PERPENDIKULYARLIǴI

1



Eki yarimtegislik hám olardı shegaralap turǵan ulıwma tuwrıdan ibarat geometriyalıq figura *eki jaqlı múyesh* dep ataladı (1-súwret). Yarimtegislikler eki jaqlı múyeshtiń *jaqları*, al olardı shegaralawshı tuwrı eki jaqlı múyeshtiń *qabırǵası* dep ataladı.

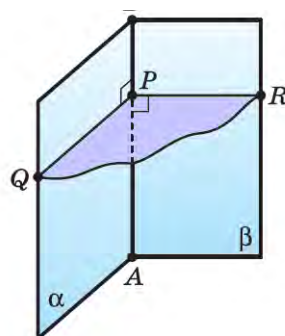
Eki jaqlı múyeshler haqqında qorshaǵan ortalıqtaǵı tómendegi zatlar mısál bola aladı (2-súwret): kitap, notebook (noutbuk), ashıq esik

hám imárat tóbesi.

2

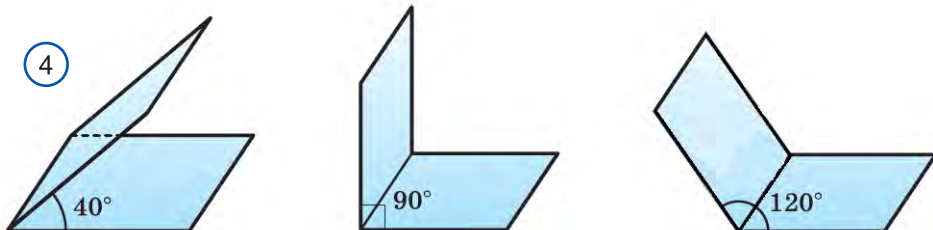


3

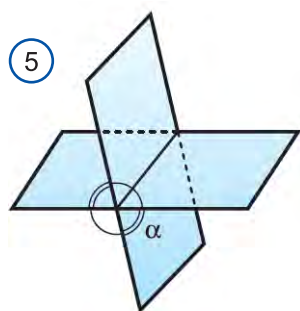


Eki jaqlı múyesh qabırǵasınıń qálegen noqatınan onıń jaqlarında jatiwshı hám bul qabırǵaǵa perpendikulyar bolǵan nurlardı shıǵaramız. Bul nurlar payda qılǵan múyesh eki jaqlı múyeshtiń *sızıqlı múyeshi* dep ataladı (3-súwret).

Eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi qabırǵada tańlangan noqat penen anıqlanadı hám sheksiz kóp bolıwı, anıqlamadan kórinedi. Solay bolsa da, eki jaqlı múyeshtiń sızıqlı múyeshi ólshemi qabırǵada tańlangan noqatqa baylanisli emes, yaǵnıy olardıń hámmesi óz ara teń boladı.

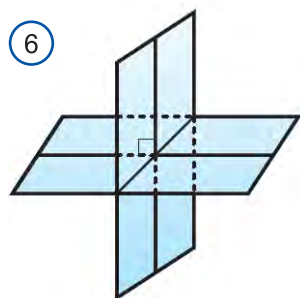


Eki jaqlı mıyeshler ólshemi onıń sıızıqlı mıyeshi ólshemi menen anıqlanadı. Sıızıqlı mıyeshlerdıń súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq bolıwına qarap, eki jaqlı mıyeshler de, sáykes túrde, súyir, tuwrı, doǵal hám jayıq eki jaqlı mıyeshlerge ajratıladı. 4-súwrette hár túrli eki jaqlı mıyeshler súwretlengen.



Eki kesilisiwshi tegislik pútin keńislikti ulıwma qabırǵaǵa iye bolǵan tórt eki jaqlı mıyeshke ajratadı (5-súwret). Bul eki jaqlı mıyeshlerdıń biri α ǵa teń bolsa, olardan jáne birewiniń mánisi de α ǵa teń boladı. Al, qalǵan ekewiniń mánisi $180^\circ - \alpha$ ǵa teń boladı.

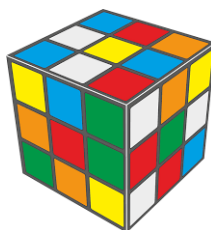
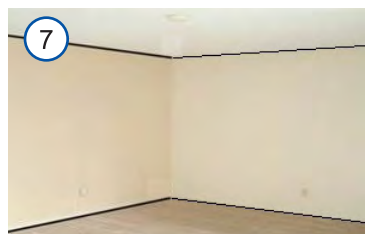
Usı eki jaqlı mıyeshler ishinde 90° tan kishisi de boladı. Usı mıyeshtiń mánisi kesilisiwshi *tegislikler arasındǵı mıyesh* dep alınadı.



Eger eki jaqlı mıyeshlerdıń biri tuwrı, yaǵnıy 90° qa teń bolsa, qalǵan úshewi de tuwrı boladı (6-súwret).

Tuwrı mıyesh astında kesilisiwshi tegislikler – *perpendikulyar tegislikler* dep ataladı.

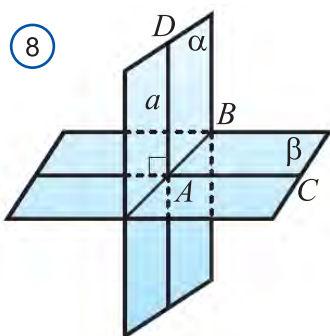
Perpendikulyar tegisliklerge qorshaǵan ortalıqtan bólmeniń polı hám diywalların, ulıwma qabırǵaǵa iye bólmeniń diywalları, ulıwma qabırǵaǵa iye Rubik kubigi jaqları, jer beti hám úy diywalları hám de úydiń bir-birine tutasqan diywalların mısıl retinde keltiriw múmkin (7-súwret).



α hám β tegisliklerdiń perpendikulyarlıǵı tuwrılardaǵı kibi “ $\perp$ ” belgi járdeminde, $\alpha \perp \beta$ tárizde jazıladı.

Endi perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetleri haqqında toqtalamız. Tómendegi teorema – “tegisliklerdiń perpendikulyarlıq teoreması” dep ataladı.

5.11-teorema. *Eger tegisliklerden biri ekinshisine perpendikulyar bolǵan tuwrıdan ótse, bunday tegislikler óz ara perpendikulyar boladı.*



Dálilleniwi. Meyli, α hám β tegislikler berilgen bolıp, α tegislik β tegislikke perpendikulyar bolǵan a tuwrıdan ótsin (8-súwret). β tegislik penen a tuwrınıń kesilisiw noqatı A bolsın. $a \perp b$ ekenligin dálilleymiz.

α hám β tegislikler AB tuwrı boylap kesilisedi. Onda, $AB \perp a$ boladı, sebebi shárt boyınsha $\beta \perp \alpha$. β tegislikte jatırǵan hám AB tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan AC tuwrını ótkizemiz. Nátiyjede, payda bolǵan DAC múyesh $\alpha\beta$ eki jaqlı múyeshtiń sıızıqlı múyeshi boladı. Shárt boyınsha, $a \perp \beta$. Onda, DAC tuwrı múyesh. Demek, $\alpha \perp \beta$. $\square$

Bul teoremadan tómendegi nátiyje kelip shıǵadı.

Nátiyje. *Eger tegislikler eki tegisliktiń kesilisiw sıızıǵına perpendikulyar bolsa, bul tegisliklerdiń hár birine de perpendikulyar boladı (9-súwret).*

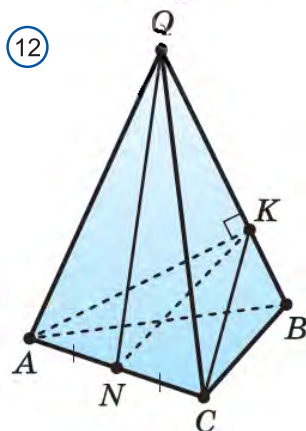
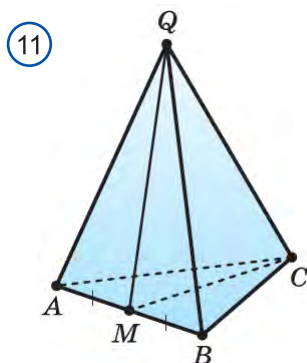
4.11 teoremaǵa kerı teorema da orınlı boladı. Onı dálilleniwisiz keltiremiz.

5.12-teorema. *Eger eki perpendikulyar tegisliklerden biriniń bazı bir noqatınan ekinshisine perpendikulyar tuwrı ótkizilse, bul tuwrı birinshi tegislikte jatadı.*

Nátiyje. *Eger eki perpendikulyar tegislik úshinshi tegislikke perpendikulyar bolsa, olardıń kesilisiw sıızıǵı da bul tegislikke perpendikulyar boladı (10-súwret).*

1-másele. M noqat $QABC$ durıs piramida ultanındaǵı qabırǵasınıń ortası bolsa (11-súwret), QCM tegislik piramida ultanı tegisligi ABC ǵa perpendikulyar ekenligin dálilleń.

Dálilleniwi. AB kesindi teń qaptallı AQB hám ACB úshmúyeshliklerdiń ultanı bolǵanlıǵı ushın bul úshmúyeshlikler medianaları QM hám CM ga ham perpendikulyar boladı. Sonıń menen birge, AB kesindi QCM tegislikke de



perpendikulyar boladı. Onda 5.12-teorema boyınsha, ABC tegislik QCM tegislikke perpendikulyar boladı. $\square$

2-másele. $QABC$ durıs piramidanın tóbesindegi tegis AQB múyeshi α ға teń. Onıń qaptal qabırǵasındaǵı eki jaqlı múyeshin tabıń (12-súwret).

Sheshimi. Meyli, N noqat AC qabırǵanın ortası, AK bolsa A noqattan BQ qabırǵaǵa túsirilgen perpendikulyar bolsın.

ABQ hám CBQ úshmúyeshliklerdiń teńliginen $CK \perp BQ$ boladı. Sonıń ushın, AKC múyesh BQ eki jaqlı múyeshitiń sızıqlı múyeshi boladı.

AKQ hám ANQ tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten $AK = \sin \alpha$, $AN = AQ \sin(\alpha/2)$ ekenligin tabamız.

AKN tuwrı múyeshli úshmúyeshlikten bolsa $\sin(\frac{\angle AKC}{2}) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$ ge iye bolamız.

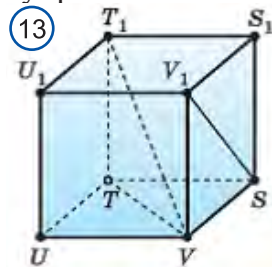
Bunnan, $\angle AKC = 2 \arcsin \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}$. $\square$



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

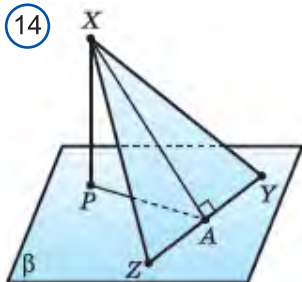
1. Eki jaqlı múyesh dep nege ayıladı?
2. Qanday múyesh tegislikler arasındaǵı múyesh dep ataladı?
3. Tuwrı múyesh astında kesilisiwshi tegislikler qalay ataladı?
4. Tegisliklerdiń perpendikulyarlıq teoremasın aytıp berin.
5. Perpendikulyar tegisliklerdiń qásiyetlerin aytıp berin hám túsindirin.

5.40. a) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ tuwrı múyeshli parallelepipedtiń; b) $ABCA_1 B_1 C_1$ tuwrı prizmanıń perpendikulyar jaqların anıqlań hám tuwrı eki jaqlı múyeshlerin aytıp berin.



5.41. $STUVS_1T_1U_1V_1$ kubta (13-súwret): a) TVT_1 múyesh; b) T_1ST múyesh T_1SVT eki jaqlı múyeshitiń sızıqlı múyeshi bola ma? V_1UTS eki jaqlı múyeshitiń mánisin tabıń.

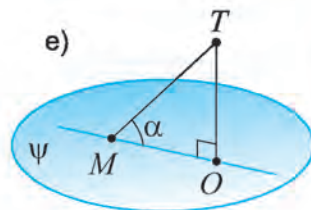
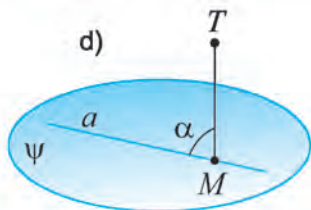
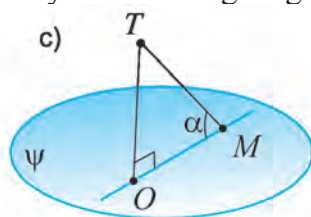
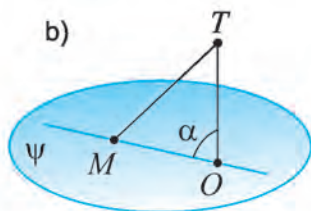
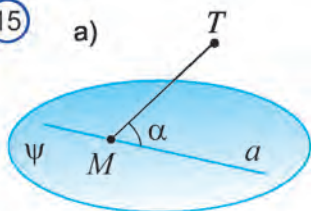
5.42. Eki jaqlı múyeshitiń birewden jaǵı ulıwma, qalǵan jaqları birgelikte tegislikti payda qıladı. Bul eki jaqlı múyeshlerdiń qosındısı 180° qa teń ekenligin dálilleń.



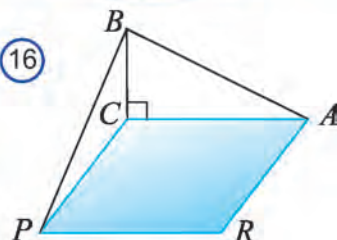
5.44. Úshmúyeshli $ABCD$ piramidaniń CD qabırǵası ABC tegislikke perpendikulyar. $AB = BC = AC = 6$ hám $BD = 3\sqrt{7}$ bolsa, $DACB$, $DABC$, $BDCA$ eki jaqlı múyeshlerdi tabıń.

5.45. T noqattan ψ tegislikke qıya túsirilgen (15-súwret). Tóمندegi súwretlerdiń qaysılarında tegislik hám qıya arasındaǵı α múyesh durıs belgilengen?

15



16



5.46. Úshmúyeshli $ABCD$ piramidada DAB , DAC , ACB múyeshler tuwrı, $AC = CB = 5$ hám $DB = 5\sqrt{5}$ bolsa, $ABCD$ eki jaqlı múyeshin tabırń.

5.47. Eki jaqlı mýyesh sızıqlı mýyeshiniń tegisligi onıń hár bir jaǵında perpendikulyar ekenligin dálilleń.

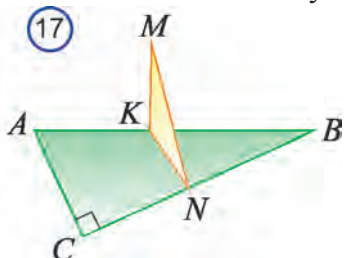
5.48. Eki jaqlı müyeshtiñ bir jaǵında jatırǵan eki noqat onıñ qabırǵasınan, sáykes túrde, 51 sm hám 34 sm uzaqlıqta jatır. Bul noqatlardıñ birinshisi basqa jaǵınan 15 sm uzaqlıqta jatırǵanlıǵı belgili bolsa, usı jaǵınan ekinshi noqatqa shekemgi aralıqtı tabıń.

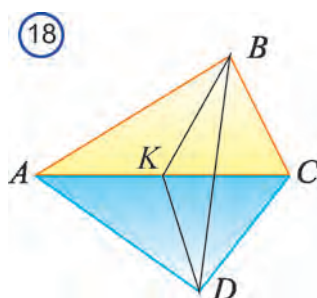
5.49. ABC tuwrı múyeshli úshmúyeshlik ($\angle C = 90^\circ$) hám $ACPR$ kvadrat

tegisliliklari óz ara perpendikulyar (16-súwret). Kvadrat tárepi 6 sm, úshmúyeshlik gipotenuzasi 10 sm. *BP* kesindi uzınlıgın tabıń.

5.50. MK kesindi tuwrı mύyeshli ABC úshmύyeshlik ($\angle C = 90^\circ$) tegisligine perpendikulyar (17-súwret). $KN \parallel AC$, $AK = KB$, $AC = 12$ sm, $MK = 8$ sm bolsa,

17





MN kesindi uzunlugini tabii.

5.51. ABC ham ADC teñ qaptallı úshmúyeshlikler tegislikleri perpendikulyar (18-súwret). AC olardıń ulıwma ultanı. BK kesindi ABC úshmúyeshlikteń medianası.

Eger $BK = 8$ sm, $DK = 15$ sm bolsa, BD kesindi uzunlugini tabii.

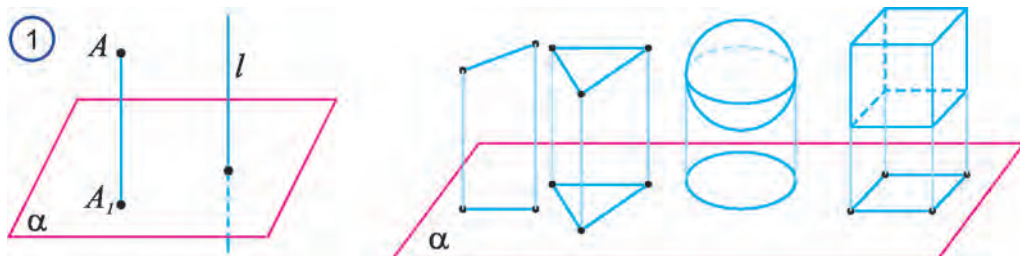
19 KEÑISLIKTE ORTOGONAL PROEKCIYA HÁM ONNAN TEXNIKADA PAYDALANÍW

Eger proekciya bağıtı l proekciyalaw tegisligi α ğa perpendikulyar bolsa, bunday parallel proekciyalaw *ortogonal proekciyalaw* dep ataladı.

Ortogonal proekciyalawda payda bolgan figura berilgen figuranıń *ortogonal proekciyası* yamasa qısqasha *proekciyası* dep ayıladı.

Parallel proekciyalawdıń hámme qásiyetleri ortogonal proekciyalawda da orınlı boladı. Tómende tek ğana ortogonal proekciya ğa tiyisli bolğan áhmiyetli qásiyetti dälilleymiz.

5.13-teorema. *Kópmúyeshlikteń tegisliktegi ortogonal proekciyasınıń maydanı kópmúyeshlik maydanın onıń tegisligi menen proekciya tegisligi arasında ğı múyesh kosinusi kóbeymesine teñ.*

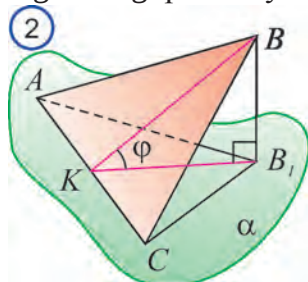


Dálilleniwi. 1) Aldın úshmúyeshlik ham onıń bazı bir tárepinen ótiwshi tegisliktegi proekciyası ushın qarap shıǵamız.

2) Meyli, ABC úshmúyeshlikteń α tegisliktegi proekciyası AB_1C úshmúyeshlik bolsın.

ABC úshmúyeshlikteń BK biyikligin túsiremez. Úsh perpendikulyar haqqında ğı teorema boyınsha, B_1K kesindi KBB_1 úshmúyeshlikteń biyikligi boladı.

BKB_1 múyesh – úshmúyeshlik tegisligi menen proekciya tegisligi arasında ğı φ múyesh ibarat boladı. BKB_1 úshmúyeshlikte: $KB_1 = KB \cdot \cos \varphi$.

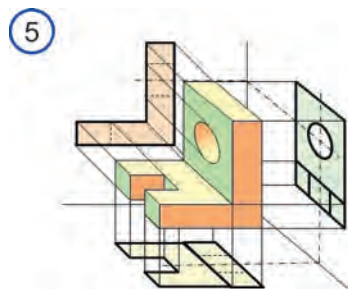
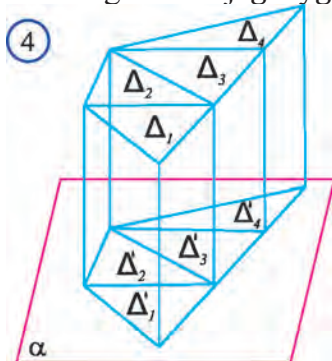
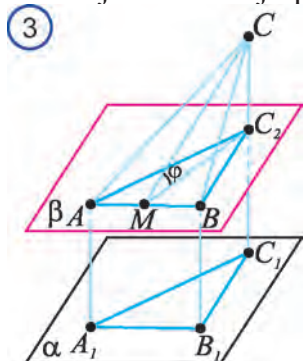


Ol jaǵdayda, $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot KB$, $S_{AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot KB_1$.

Bulardan, $S_{AB_1C} = S_{ABC} \cdot \cos \varphi$ di payda qılamız. 1-jaǵdayda teorema dálillendi.

2) α tegislik ornına oǵan parallel bolǵan basqa β tegislik alıńanda da teorema orınlı boladı (3-súwret). Bul parallel proekciyalaw qásiyetinen paydalanıp dálillenedi.

3) Endi ulıwma, kópmúyeshlik kórinisine keletuǵın bolsaq (4-súwret) bul jaǵdayda teorema kópmúyeshlikti diagonalları járdeminde úshmúyeshliklerge bóliw járdeminde joqarıda kórilgen dara jaǵdayǵa keltirip dálillenedi. $\square$

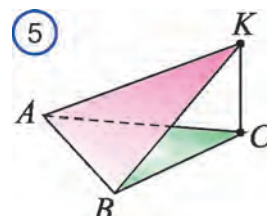
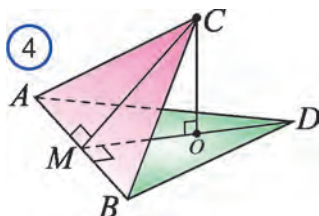
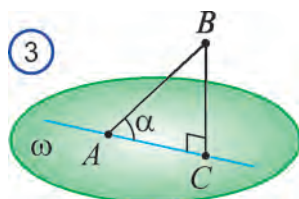
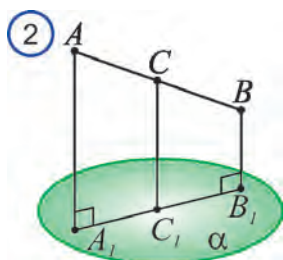
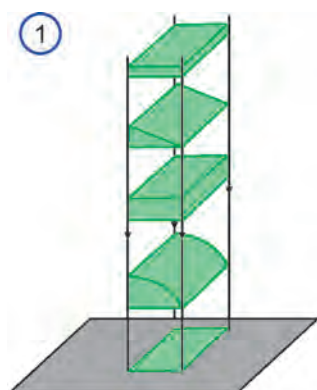


Ortogonal proekciyadan texnikalıq sıızılma hár túrli detallardı proektlestiriwde paydalanıladı. Túrli mashina detalları sıızılmaları bir, eki yamasa úsh óz ara perpendikulyar proekciyalar tegisliklerine ortogonal proekciyalaw jolı menen payda qılınadı (5-súwretler). Bul proekciyalar qaysı baǵıtlarda proekciyalanǵanlıǵına qarap, vertikal (tik), gorizontal hám frontal proekciyalar dep te ataladı.



Tema boyınsha sorawlar hám shınıǵıwlar

1. Ortogonal proekciyalaw dep nege aytıladı?
2. Ortogonal proekciyalaw qásiyetlerin sanap berin.
3. Ortogonal proekciyalawdan texnikada qalay paydalanıladı?
4. Bir tuwrıǵa perpendikulyar bolǵan tegisliktiń qásiyetin aytıp berin.
5. Ulıwmalasqan Pifagor teoreması ne haqqında?
6. Úshinshi tegislikke preperdikular eki tuwrı óz ara parallel bola ma?
7. Ekinshi tegislikke perpendikulyar tegislik hám tuwrı óz ara parallel bola ma?
8. Berilgen tuwrıdan berilgen tegislikke perpendikulyar bolǵan neshe tegislik ótkiziw múmkin?
9. α tegislik β tegislikke perpendikulyar. α tegisliktegi hár qanday tuwrı β tegislikke perpendikulyar bola ma?
10. Birinshi tegislikke qıya bolǵan kesindiden ótiwshi ekinshi tegislik birinshisine perpendikulyar bola ma?
11. Tuwrı múyeshli parallelepipedtiń kesilisiwshi jaqları óz ara perpendikulyar bola ma?



5.52. Trapeciyanıń ortogonal proekciyası: a) kvadrat; b) kesindi; c) tuwrı tórtmúyeshlik; d) parallelogramm; e) trapeciyalardan biri bolıwı múmkin be?

5.53. 6-súwretke qarap ortogonal proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik bolǵan geometriyalıq figuralardı aytıp berıń.

5.54. A_1B_1 kesindi AB kesindiniń α tegislikke ortogonal proekciyası (7-súwret). Eger $AB = 20$ sm, $AC = 10$ sm, $A_1B_1 = 12$ sm bolsa, B_1C_1 kesindi uzınlıǵın tabıń.

5.55. Uzınlıǵı 5 sm bolǵan AB kesindiniń ω tegislikke ortogonal proekciyası uzınlıǵı 3 sm bolǵan AC kesindiden ibarat (8-súwret). AB kesindiniń ω tegislikke qıyalıq múyeshi kosinusın tabıń.

5.56. Eger AB tuwrıdan C noqatqa shekemgi aralıq (9-súwret) C noqattan ABD tegislikke shekemgi aralıqtan eki márte úlken bolsa, ABC hám ABD tegislikler arasındaǵı múyeshti tabıń.

5.57. ABC úshmúyeshliktiń maydanı 18 sm^2 qa teń. $KC \perp (ABC)$. Eger ABK hám ABC úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh: a) $\alpha = 30^\circ$; b) $\alpha = 45^\circ$; a) $\alpha = 60^\circ$ bolsa, ABK úshmúyeshlik maydanın tabıń.

5.58. ABC hám ABD úshmúyeshlikler tegislikleri arasındaǵı múyesh 60° qa teń. Eger $AB = 4\sqrt{3}$ bolsa, CD aralıqtı tabıń.

5.59. Maydanı 48 sm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası tárepleri 14 sm, 16 sm hám 6 sm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.

5.60. Maydanı 12 sm^2 qa teń bolǵan úshmúyeshliktiń ortogonal proekciyası – tárepleri 13 sm, 14 sm hám 15 sm bolǵan úshmúyeshlikten ibarat. Bul úshmúyeshlik tegisligi hám onıń proekciyası arasındaǵı múyeshti esaplań.



20 АМЕЛИЙ ШИЊИЊЛАР ҺАМ ҚОЛЛАЊЛАР



Qollanıwlar hám ámeliy kompetenciyalardı qalıplestiriw

1. Eki qońsı bólmeniń diywalları tutasqan sıızıqtıń polğa perpendikulyarlıgın qanday qılıp ólshewler járdeminde tekseriwge boladı?

2. Uzunlıq ólshew ásbabı – ruletká járdeminde sútinniń tik ekenligin qalay tekseriwge boladı?

3. Dóńgelektiń (kolesonıń) kósheri tegisliginiń ol dóńgelep atırǵan tegislikke perpendikulyarlıgın qalay tekseriwge boladı?

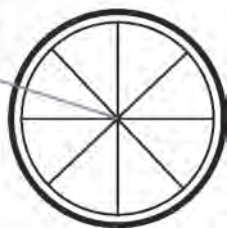
4. Ne sebepten qısta tamnıń tóbesinen salbırıp turǵan súmeleklerdi, olardıń qalıńlıgın esapqa almastan, óz ara parallel dew mumkin?

5. Oqıwshı ámeliy jumıs orınlap atır. Ornatılǵan bir neshe sütünlerdiń Jerge qaraǵanda tik ekenligin tekseriw ushın olardan tek ǵana birewin tekserdi. Qalǵan sütünlerdiń tik ekenligin tómendegishe tekserdi: hámme ústinlerdiń biyikligin, olardıń tómengi ultanları hám joqarı ushları arasındaǵı aralıqlardı ólshep qarar qabıl qıldı. Ol bul jumıstı durıs orınladı ma ?

6. Ne sebepten esik, ol ashıq pa yamasa jabıq pa hár sapar polğa qaraǵanda perpendikulyar boladı?

7. Tuwrınıń tegislikke perpendikulyarlıǵına anıq mısál retinde dóńgelektiń (kolesonıń) sımları jatırǵan tegisliktiń dóńgelektiń (kolesonıń) kósherine qaraǵanda jaylasıwın keltiriw múmkin (11-súwret). Kósher dóńgelektiń (kolesonıń)

5



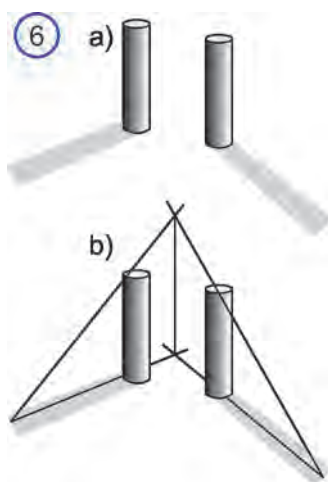
hár bir sımına perpendikulyar. Háreket dawamında dóńgelektiń (kolesonıń) sımları hár biri bir noqatta kesilisetuǵın kesindilerden ibarat dóńgelek tegisligin payda qıladı. Eger kósher gorizontál jaylasqan bolsa, dóńgelek (koleso) qanday tegislikte aylanadı? Nege?

Kórsetpe: dóńgelektiń (kolesonıń) kósherine perpendikulyar tegislikke perpendikulyar boladı.

8. Biyiklikke sekiriw shıńıǵıwı orınlanbaqta. Tosıq tayaqtı qoyıw ushın qabırǵası 25 m bolǵan kub hám ólshepleri $25 \times 25 \times 50$ bolǵan tuwrı múyeshli parallelepipedlerden paydalanılmaqta.

1) 125 sm; 2) 150 sm; 3) 175 sm biyiklikke sekiriw shıńıǵıwların qalay payda qılıwǵa boladı?

9. 6-súwrette eki vertikal sütün hám olardıń sayası súwretlengen. Usı maǵlıwmatlardan paydalanıp, jaqtılıq deregi jaylasqan noqattı hám onıń gorizontál tegislikke proekciyasın tabıń hám tómendegi sorawlarǵa juwap beriń.



- a) Sútinlerdiń vertikallıǵınıń áhmiyeti bar ma?
 b) Saya túsip atırǵan tegisliktiń gorizontallıǵınıń áhmiyeti bar ma?
 c) Súwrette berilgen maǵlıwmatlardıń hámmesi de áhmiyetli me ?

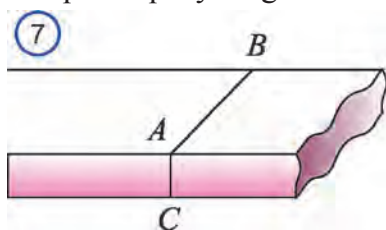
Sheshimi. 12-súwrette tiyisli jasawlar keltirilgen. Jaqtılıq dereginiń ornın tabıwda sútinlerdiń baǵıtı áhmiyetke iye emes, biraq olardıń vertikal ekenligi áhmiyetli esaplanadı. Eger ústinler vertikal hám saya gorizontal tegislikke túsip atırǵan bolsa, máseleni sheshiw ushın súwrettegi bir sútinniń sayasın hám ekinshi sútinnen túsip atırǵan sayanıń baǵıtın biliv jeterli (12.b-súwret).

10. Domalaq stolǵa tárepi a ǵa teń bolǵan kvadrat kórinisindegi dasturxan salınǵan. Dóngelek orayı kvadrat orayı menen ústpe-úst tusedi. Dasturxannıń ushları onıń tárepleri ortalarına qaraǵanda qansha polǵa jaqınaraq?

Juwap: $a(\sqrt{2}-1)/2 = 0,207 a$.

11. Diywallardıń tikligin otves (bir ushına tas baylanǵan jip) penen tekseriledi. Eger otvestiń jibi diywalǵa qanshalıq jabısıp tursa, diywal sonshalıq tik degen qararǵa kelinedi. Bul qarar qanshalıq tuwrı? Bul tekseriw usılı nege tiykarlanǵan?

12. Pıshqılaw beti (sırtı pıshqılanıp atırǵan taxtanıń hámme qabırǵalarına perpendikulyar bolıwın táminlew ushın (13-súwret) taxa sırtında pıshqılaw sıızıqların qalay belgilew kerek?



13. Bólmeniń qońsı diywallarınıń óz ara perpendikulyarlıǵın tekseriw ushın Pifagor teoremasınan qalay paydalanıwǵa boladı?

14. Sútinniń tikligin tekseriw ushın sútın ultanı menen bir tuwrıda jatpaytuǵın eki noqattan baqlanadı. Bunday tekseriw usılın tiykarlań.

Kórsetpe: Tuwrı hám tegisliktiń perpendikulyarlıq teoremasınan paydalanıń.

15. Barıp bolmaytuǵın tóbeliktegi noqatta biyik sútın ornatılǵan. Otves járdeminde onıń tikligin qalay tekseriwge boladı?

Sheshimi: Sútinniń bazı bir vertikal tuwrı menen bir tegislikte jatıwın hám jáne basqa vertikal tuwrı menen bir (basqa) tegislikte jatıwın kórsetiw jeterli boladı. Otvesti aldımızǵa sonday etip qoyamız, onıń hám sútinniń joqarı ushları hám de kózimiz bir tuwrıda jatırǵanda, otves jibi hám sútın bir tuwrıda jatsın. Bul usıl tómendegilerge tiykarlanǵan: 1) vertikal sútın qálegen vertikal tuwrı menen bir

tegislikte jatiwi kerek; 2) eger eki parallel tuwrı eki kesilisiwshi tegislikte jatsa, bul tuwrılar tegisliklerdiń kesilisiw sızıǵına da parallel boladı.

16. Eki vertikal jaylasqan tegis ayna berilgen. Bul aynalardan biriniń sırtına parallel bolǵan, gorizontal nur ekinshi aynadan birinshi ayna sırtına perpendikulyar bolǵan tuwrı boyınsha qaytıdı. Aynalar arasındaqı múyeshti tabıń.

Kórsetpe: Jaqtılıqtıń qaytıw nızamınan paydalanıń. Juwap: 45° .

17. Gorizontal nur vertikal jaylasqan eki tegis aynadan qaytpaqta. Dáslep nur birinshi ayna sırtına parallel bolǵan bolsa, eki márte sáwlelendiriw nátiyjesinde ekinshi ayna tekisligine parallel bolıp qalmaqta. Aynalar arasındaqı múyeshti tabıń.

Juwap: 60° .

18. Qalınlıǵı 5 m, maydanı 4 m^2 bolǵan, kvadrat kórinisindegi polat platforma tórt ushınan tros sim menen gorizontal ildirilgen. Hár bir tros sim uzınlıǵı 2m. Tros simlardıń platformaǵa qaraǵanda qıyalıq múyeshin tabıń. Biyikligi 0,9 m, ultanınıń diametri 0,6 m bolǵan silindr kórinisindegi bakti bul platformaǵa jaylastırıwǵa bola ma?

Juwap: 45° , bakti jaylastırıwǵa boladı.

19. Suw tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesi ultanına ortogonal proekciyalanǵan. Tamnıń tóbesi qabırǵalarınń proekciyası tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi tam ultanı múyeshiniń bissektrisası bolıwın dálilleń.

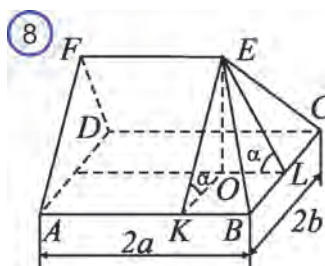
20. Ultanı $ABCD$ tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jawın suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesin ornatiw kerek (8-súwret). $AB = 2a \text{ m}$, $BC = 2b \text{ m}$. Tamnıń hámme jaqları ultan tegisligi menen α múyesh payda qıladı. Bul tamdı jabıw ushın qansha qańıltır kerek boladı. Bunda tam tóbesi bet maydanınıń k procenti muǵdarındaǵı qańıltır shıǵındıǵa ketiwin esapqa alıń.

Juwap: $4ab(1 + 0,01k) / \cos\alpha$.

21. Samalsız hawada jawın “qiyalap” jawmaqta. Tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi faner bólegi járdeminde jawınıń gorizontal tegisligine qaraǵanda qıyalıǵın qalay anıqlawǵa boladı? Tiyisli sızilmanı sıziń .

Kórsetpe: Faner bólegin sonday jaylastırıw kerek, onıń tegisligi jawın tamshıları háreket trayektoriyası hám olardıń gorizontal tegislikke proekciyası anıqlaǵan tegislikke shama menen perpendikulyar bolsın. Sonda, gorizontal tegislikte jawın túspeytuǵın tuwrı tórtmúyeshlik payda boladı. Soń tiyisli kesindilerdiń uzınlıqları ólshenedi hám olar arasındaqı múyeshtiń tangensi esaplanadı.

22. Maydanı S_1 ge, uzınlıǵı n ge teń bolǵan balalar krovatı sútini eki birdey tuwrı tórtmúyeshlik kórinisindegi perdeler menen jabıw kerek. Hár bir perdeniń



maydani S_2 ge, al uzunligi krovat uzunligina teń. Hár eki perdeniń joqarı sheti krovat ústinde parallel ornatiłǵan hám krovat uzunligina teń sımǵa bekkemlengen. Sımnıń krovattan qanday biyiklikte ornatiłǵanlıǵın tabıń. Máseleni tómendegi sanlı shártlerde sheshiń: $n = 1$ m 20 sm, $S_1 = 6000$ sm², $S_2 = 7800$ sm². Tiyisli sızılmanı sıziń.

Kórsetpe: $\sqrt{4S_2^2 - S_1^2} / 2n$.

Juwap: 0,5 m.

23. Ultanı ABCD tuwrı tórtmúyeshlikten ibarat úyge jamǵır suwı tórt tárepinen aǵıp túsetuǵın tamnıń tóbesin ornatiw kerek (14-súwret). $AB = 18$ m, $BC = 12$ m. Tamnıń hámme jaqları ultan tegisligi menen 40° lı múyesh payda qıladı. Eger 1 m² maydandı jabıw ushın 15 dana cherepica paydalanılsa, bul tamdı jabıw ushın neshe dana cherepica kerek boladı?

24. Altıjaqlı qálem hám ashılǵan kitap járdeminde tuwrılar arasındaǵı, tuwrı hám tegislik arasındaǵı, tegislikler arasındaǵı múyeshlerdiń tımsalların kórsetiń.

25. Eki simmertiya kósherine iye, 14-súwrette súwretlengen tamnıń tóbesinen jawın suwı qaysı baǵıtlarda aǵıp túsiwin anıqlań.

26. Ultanına barıp bolmaytuǵın mináranıń biyikligin anıqlaw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?

27. Biyikligi belgili, biraq jaqınına barıp bolmaytuǵın imáratqa shekemgi aralıqtı tabıw ushın qanday ólshewlerdi ámelge asırıw kerek?

28. Nege sayalar tal túste joǵaladı?

29. Terektiń tóbesine shıqpastan onıń biyikligin qalay ólshewge boladı?

Juwaplar hám kórsetpeler

4.5. a) 7 sm; b) 30 sm; **4.6.** b) 200 mm; **4.13.** 50 sm; **4.14.** 40 mm; **4.21.** $a + b$; **4.22.** a) 40° ; b) 45° ; c) 90° ; **4.23.** a) 58° ; b) 47° ; **4.40.** 32 sm; **4.41.** 6 sm; **4.42.** 20 sm; **5.11.** 1) 6,5 sm; 2) 15 sm; 3) $\sqrt{2a^2 - b^2 + d^2}$; 3) $\sqrt{2a^2 - c^2 + 2d^2}$; **5.12.** 2 m; **5.17.** 15 sm hám 41 sm; **5.20.** $BD = \sqrt{2a^2 + b^2 + c^2}$; $CD = \sqrt{a^2 + c^2}$; **5.21.** 3,9 m; **5.22.** 9 m; **5.23.** a) $\sqrt{2/2}$; b) $\sqrt{(5 + 3 \cos b)/2}$; **5.24.** 3 sm; 7,5 sm; **5.25.** 20 sm; **5.34.** $3d$; **5.37.** 45° ; **5.38.** $\arccos \sqrt{3/3}$; **5.44.** 90° ; **5.46.** 60° ;

Sabaqlıqtı dúziwde paydalanılğan hám qosımsha úyreniw ushın usınıs etilip atırğan oqıw-metodikalıq ádebiyatları hám elektron resurslar

1. A'zamov A., B. Haydarov. Matematika sayyorasi. Toshkent. "O'qituvchi", 1993.
2. Afonina S.I. Matematika va go'zallik, Toshkent, O'qituvchi, 1986.
3. Norjigitov X., Mirzayev Ch. Stereometrik masalalarni yechish. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma.-T., 2004 y.
4. Israilov I., Pashayev Z. Geometriya. Akademik litseylar uchun o'quv qo'llanma. II qism. -T.: O'qituvchi, 2005 y.
5. Погорелов А.В. "Геометрия 10-11", учебник, Москва. Просвещение", 2009.
6. Л. А. Латотин, Б. Д. Чеботаревский. "Математика 10", учебник, Минск, 2013.
7. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. учебник, Москва, 2008
8. Билянина О.Я. и др. "Геометрия 10" учебник, Киев, "Генеза", 2010.
9. Daniel C.Alexander, Elementary geometry for college students, Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
10. Mal Coad and others, Mathematics for the international students, Haese and Harris publocations, Australia, 2010.
11. <http://www.uzedu.uz> - Xalıq bilimlendiriw ministrliginiń xabar bilimlendiriw portali.
12. <http://www.eduportal.uz> - Multimedia orayı xabar bilimlendiriw portali.
13. <http://www.school.edu.ru> - Ulıwma bilimlendiriw portali (rus tilinde).
14. <http://www.problems.ru/> Matematikadan máseleler izlew системасы (rus tilinde).
15. <http://geometry.net/> - Algebra hám geometriyadan oqıw materialları (inglis tilinde).
16. <http://mathproblem.narod.ru/> - Matematikalıq krujoklar hám olimpiadalar (rus tilinde);
17. <http://www.ixl.com> - Aralıqtan turıp oqıtıw saytı (ingliz tilinde).
18. <http://www.mathkang.ru> - "Kenguru" xalıqaralıq matematikalıq tańlaw saytı (rus tilinde).
19. <http://www.khanakademy.org> - "Xan akademiyası" Aralıqtan turıp bilimlendiriw saytı (ingliz tilinde).

M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismailov, A.Q. Amanov, B.Q. Haydarov

MATEMATIKA 10
ALGEBRA HÁM ANALIZ TIYKARLARÍ
GEOMETRIYA
II BÓLIM

(Qoraqalpoq tilida)

Orta bilimlendiriw mákemeleriniń 10-klası hám orta arnawlı,
kásip-óner bilimlendiriw mákemeleri oqıwshıları ushın sabaqlıq
1-basılıwı

Redaktor: R.Abbazov
Awdarǵan: K.Sagidullaev

Texn. redaktor: K. Madiarov
Kompyuterte teriwshi: F. Quدراتillayev

Baspaxana licenziyasi AI № 296. 22.05.2017
Basıwǵa ruqsat etildi 25.01.2018. Pishimi 70×100¹/₁₆

«TimesNewRoman» garniturası.

Kólemi: 9,0 baspa tab. Esap.b.t. 9,0.

Tirajı 10 444 dana

Original-maket «Extremum-press» JShJ de
tayarlandı. 100053, Tashkent q.

Baǵıshamal kóshesi, 3. Tel: 234-44-05

Ózbekistan Baspasóz hám xabar agentliginiń «O‘qıtuvchi»
baspa-poligrafiya dóretiwshilik úyi baspaxanasında basıp shıǵarıldı.

100206, Tashkent q. Yunusabad rayonu,

Yangishahar kóshesi, 1- úy.

Buyurtpa № .