Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

ГЕОМЕТРИЯ

7

Учебник для 7 класса
школ общего среднего образования

Рекомендовано к печати Министерством
народного образования Республики Узбекистан

Новое издание

Ташкент – 2022

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

УДК 514(075.3)
ББК 22.147я72
Г 35

Составители:

Боходир Хайдаров
Наргиза Таштемирова
Исак Асроров

Рецензенты:

З. Р. Бабаева – учитель математики общеобразовательной школы №11 города Гулистан Сырдарьинской области;

М. Х. Усманов – учитель математики ГСОШ №3 Наманганской области при Министерстве народного образования;

А. К. Алибекова – учитель математики ГСОШ №180 Шайхантахурского района города Ташкента.

Геометрия для 7 класса: учебник / Б. Хайдаров, Н. Таштемирова, И. Асроров – Ташкент: Республиканский центр образования, 2022. – 192 с.

Усовершенствован на основе заключения
Института математики им. В.И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан.

Оригинальный макет и концепция дизайна разработаны Республиканским центром образования.

Издано за счёт средств Республиканского целевого книжного фонда.

Подготовлено при содействии UNICEF в Узбекистане.

Условные обозначения:

– определение геометрического понятия

– формулировка теоремы

– формулировка аксиомы

– вопросы к теме

– активизирующие упражнения

– пример решения задачи

– практические упражнения

– геометрическое исследование

– исторические сведения

– геометрические головоломки

– мультимедийные приложения

– электронные ресурсы

ISBN 978-9943-8354-3-6

© Республиканский центр образования, 2022

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ученики! *Вы начинаете изучение самого красивого раздела математики – геометрии. В предыдущих классах вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и их свойствами. В 7 классе вы совершите путешествие в удивительный мир геометрических фигур, приступите к его всестороннему и систематическому изучению.*

Нас окружает мир геометрических фигур. В повседневной жизни мы сталкиваемся с ними на каждом шагу. Действительно, оконная рама имеет форму прямоугольника, снежинки – свою удивительную форму. Различные предметы имеют определённую форму: здания, спичечный коробок, велосипедное колесо, мыльные пузыри, цветы, листья деревьев.

Значит, они имеют отношение к геометрии. Следовательно, знать геометрию, её секреты важно для каждого человека.

Знакомство с геометрией начинается с изучения простых геометрических фигур и их свойств. На их основе вы открываете для себя всё больше новых фигур и их свойства.

Вместе с этим, ***геометрия научит вас правильному мышлению, поможет логически рассуждать, принимать разумные решения и на их основе приходить к верным выводам.***

А это очень важно для каждого человека, стремящегося к совершенству.

Нужно будет стремиться не просто читать геометрию, а ещё и вникать в неё. Попытайтесь понять каждую фразу. Если не поняли, прочтите её ещё раз, используйте чертёжи, решайте как можно больше задач. Ведь каждая решённая задача служит основой для дальнейшего изучения следующей ступени геометрии. Только тогда эта наука сможет раскрыть для вас свои секреты.

Мы уверены, что в скором времени вы подружитесь с геометрией и она станет одним из ваших любимых и интересных предметов.

Авторы

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Начальные сведения по геометрии

Глава II. Треугольники

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

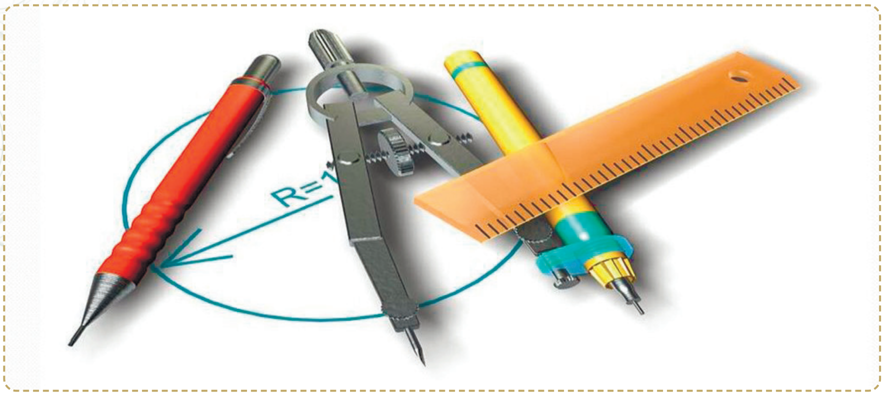
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Глава III. Параллельные прямые

Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольников

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



Глава V. Задачи на построение

Глава VI . Повторение

ОБУЧАЮЩИЕ ИГРЫ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ 7»

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ 7»

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

ГЛАВА I

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ГЕОМЕТРИИ

После изучения этой главы вы должны обладать следующими знаниями и практическими навыками:

Знания:

– основные сведения из истории геометрии;
– начальные геометрические понятия о точке, прямой, плоскости, отрезке, луче, угле;
– свойства простейших геометрических фигур;
– определение геометрии и планиметрии;
– определение окружности, круга и их элементов;
– прямой, острый и тупой углы;
– смежные и вертикальные углы и их свойства;
– суть понятий «определение», «аксиома», «теорема» и «доказательство»;
– метод доказательства от противного.

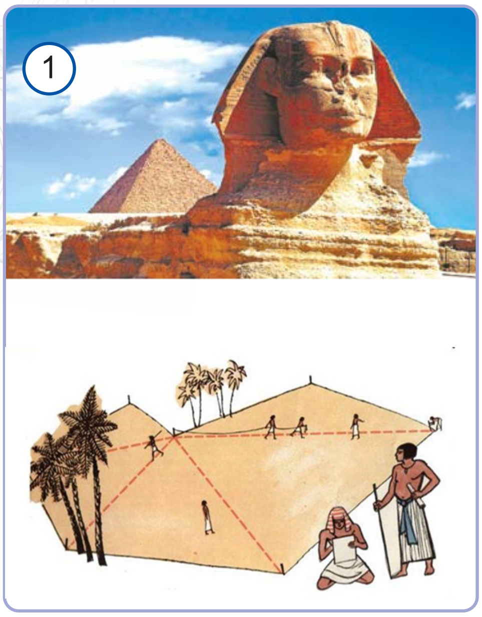
Практические навыки:

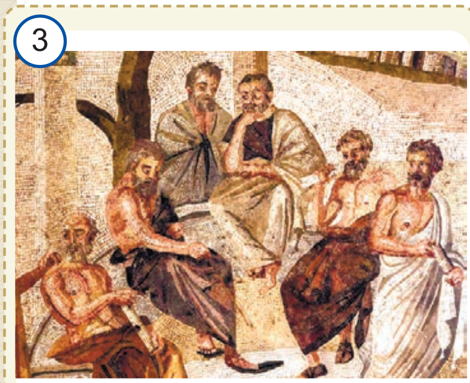
– изображать на плоскости простейшие геометрические фигуры, уметь обозначать, узнавать их и читать в соответствии с обозначениями;
– изображать отрезки, сравнивать и измерять их длины;
– изображать углы в полуплоскости, сравнивать и находить их градусные меры;
– строить геометрические фигуры и использовать при измерениях линейку, циркуль, транспортир и другие чертёжные инструменты.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

1 ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ





1.1. Возникновение геометрии

Первоначальные сведения по геометрии появились за 4-5 тысячелетий до наших дней в Древнем Египте. В этих краях ежегодные разливы Нила смывали посевы. Поэтому, для того чтобы восстанавливать посевы и уточнять размеры налогов, необходимо было размечать поля и выполнять необходимые подсчеты (рис. 1). Древнегреческие учёные переняли у египтян способы измерения и учёта земель и назвали эти знания *геометрией*. «Геометрия» – слово, происходящее от греческих слов «гео» – земля, «метрео» – измерять.

Сведения, относящиеся к геометрии, появились также в Древнем Вавилоне. В частности, историки считают, что теорема Пифагора была открыта в Вавилоне. В VII–VI вв. до н.э. в Хорезме, в низовьях Амударьи, как и в Египте, выполнялись работы по учёту посевных площадей.

В Древнем Египте геометрия была необходима при сооружении величественных пирамид, дворцов, при строительстве жилья. Грекам геометрия была нужна не только для строительства, но и в мореплавании (рис. 2). Именно такие потребности побуждали людей изучать различные фигуры и их свойства. В Древней Греции одним из первых учёных был Фалес из Милета, который сформулировал и доказал ряд геометрических теорем.

К IV до н.э. были накоплены многие геометрические понятия и их свойства. Греческий учёный Платон обнаружил замечательную закономерность в геометрии: логически рассуждая, можно находить новые результаты, исходя из уже изученных свойств, наличие которых было установлено. Такие занятия, направленные на воспитание у учащихся способности мыслить, привели к тому, что геометрия превратилась в одну из основных наук, изучавшихся в школе. Платон даже велел повесить у входа в свою академию лозунг «Да не войдёт сюда не знающий геометрию!» (рис. 3).

Древнегреческий учёный Евклид собрал и систематизировал известные к тому времени

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

геометрические понятия и их свойства в книге, известной под названием «Начала». На протяжении двух тысячелетий эта книга выполняла роль важнейшего учебника для школы и способствовала развитию точных наук. Изучение геометрии и сегодня во многом основано на идеях этой книги.

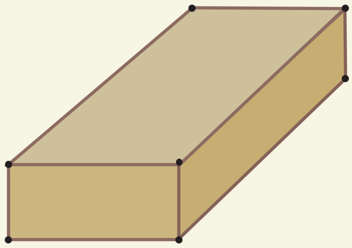
Наши великие соотечественники Мухаммад аль-Хорезми, Ахмад Фергани, Абу Райхан Беруни, Абу Али ибн Сина способствовали дальнейшему прогрессу этой науки, сохраняя и развивая достижения учёных античного мира. На Востоке изучению геометрии придавалось большое значение. Эту мысль подтверждает и тот факт, что слово muhandis (инженер) происходит от того же корня, что и handasa (геометрия).

Евклид (III век до н.э.) – древнегреческий учёный, внесший большой вклад в формирование геометрии как науки, известен своим сочинением «Начала».

1.2. Введение в геометрию

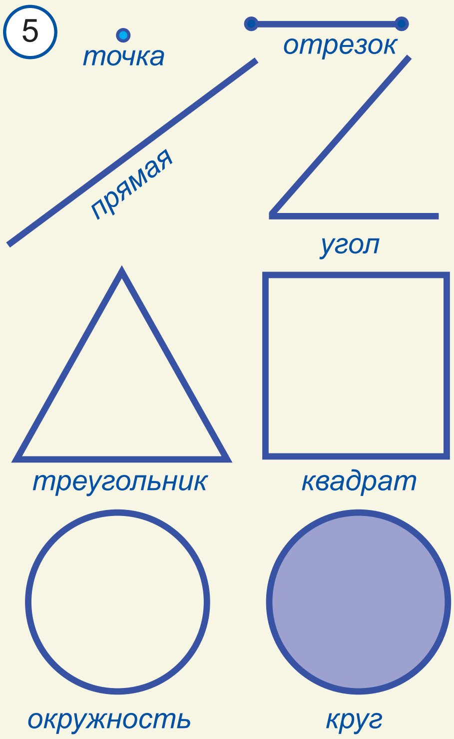
Изучаемые нами предметы имеют определенную форму. Возьмём, например, кирпич или картонную коробку. Они имеют форму фигуры, известной вам из курса 5 класса – прямоугольного параллелепипеда (рис. 4). Он имеет 8 вершин – точек, 12 рёбер – отрезков, 6 граней– прямоугольников.

4



С понятиями точки, прямой, отрезка, угла, квадрата, окружности, куба и шара вы познакомились в младших классах (рис. 5–6).

5



Фигуры, изображённые на рисунке 6, – это геометрическая иллюстрация многих природных тел. Изучая тела с точки зрения геометрии, мы будем принимать во внимание только их формы.

Точку, отрезок, угол, треугольник и другие подобные им плоские фигуры мы можем начертить в своих тетрадях. Но пространственные фигуры такие как куб, пирамида, шар, начертить в тетради не удастся. Однако получить представление об их внешнем виде можно и в тетради.

Геометрия – это наука о геометрических фигурах и их свойствах.

Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости.

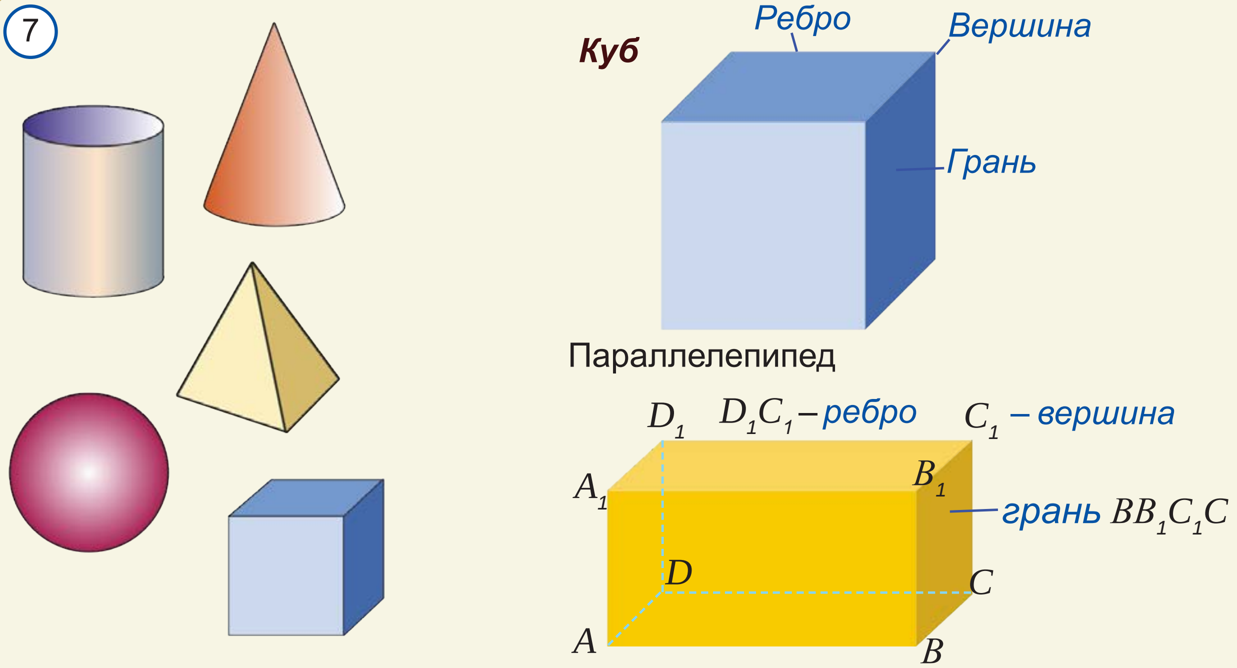
Эти фигуры также называют плоскими фигурами (т.е. двумерными).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

6

7



Пространственные фигуры изучает раздел геометрии, называемый *стереометрией*. Все окружающие нас предметы трёхмерные, их формы напоминают некоторые геометрические тела *(рис. 6)*.

В старших классах вы познакомитесь с такими пространственными (трёхмерными) фигурами. В то же время некоторые свойства этих геометрических фигур относятся к планиметрии.Эту науку мы будем изучать позже.

Поэтому мы считаем необходимым напомнить некоторые свойства элементов пространственных тел *(рис. 7)*.

1.3. Начальные понятия геометрии

Точка, прямая и плоскость – основные понятия геометрии, которые мы принимаем без определения.

Если прикоснуться карандашом к бумаге, мелом к доске, оставив на ней след, или

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

посмотреть на звёздочку в небе *(рис.1)*, они покажутся нам такими маленькими, что их видимыми размерами можно будет пренебречь (*рис.8*). *Точка* – это символ именно такого объекта, размеры которого можно не учитывать. Евклид в своем геометрическом труде «Начала» определил точку как фигуру, не имеющую частей.

Рельсы, уложенные в степи *(рис. 9)*, электрические провода, натянутые между столбами, луч лазера и подобные им объекты – это все примеры *прямых линий*. Луч света также распространяется по прямой. Прямая линия бесконечна. Изображая её на бумаге или классной доске, мы чертим только её часть. Но прямая линия всегда может быть неограниченно продолжена в обе стороны.

Пол в комнате, столешница, стена, потолок, тетрадный лист, поверхность воды в озере дают представление о *плоскости* *(рис. 10)*.

Точки обозначаются заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \ldots$, прямые – строчными буквами $a, b, c, d, \ldots$, и запись читается «точка A», «прямая a» *(рис. 11)*.

Какова бы ни была прямая на плоскости, существуют точки, лежащие на прямой, и точки, не лежащие на ней.

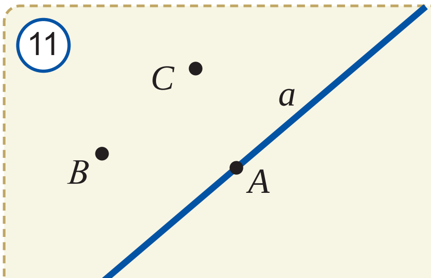
Например, на рисунке 11 точка A лежит на прямой a, точки B и C не лежат на прямой a. Это записывают в виде: $A \in a$ и $B \notin a$, $C \notin a$ и читают «точка A принадлежит прямой a» и «точка B не принадлежит прямой a», «точка C не принадлежит прямой a».

Если точка O принадлежит и прямой b, и прямой c, то прямые b и c пересекаются в точке O, и точка O называется *точкой пересечения* прямых b и c *(рис.12)*.

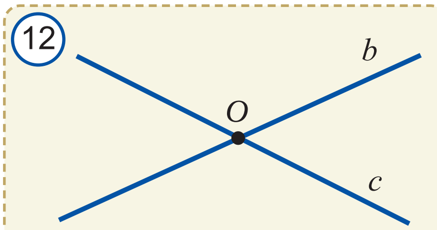
Изображённая на рисунке 13 прямая проходит через точки A и B.

Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая.

Из этого свойства следует, что если известны две различные точки прямой, то прямая будет определена однозначно. Поэтому прямую обычно обозначают с помощью лежащих на ней точек. На рисунке 13 изображена *прямая* AB. Эту же прямую можно также обозначить как BA.



A, B, C – *точки*
a – *прямая*
$A \in a$, $B \notin a$, $C \notin a$

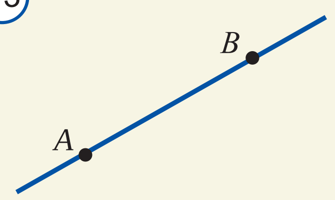


Точка O – точка пересечения прямых b и c

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

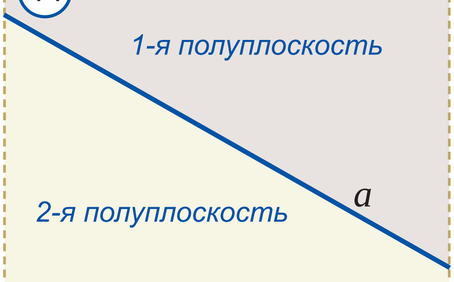
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

13



Прямая AB

14



Каждая прямая разбивает плоскость на две части – две полуплоскости.

Прямая считается принадлежащей обеим полуплоскостям, на которые она разбивает плоскость, и является их общей границей *(рис. 14)*.

Примечание. *В дальнейшем, говоря «две прямые» (две точки, две полупрямые,...), мы имеем в виду две различные прямые (две точки, две полупрямые,...).*

Задача. Прямые a и b пересекаются в точке A. Прямая a проходит через точку B. Будет ли прямая b проходить через точку B?

Решение. Прямая b проходит через точку A, но не может проходить через точку B. Иначе обе прямые a и b проходили бы и через точку B. Но это противоречит тому, что через две различные точки проходит единственная прямая. Поэтому точка B не лежит на прямой b.

Отсюда получаем ещё одно важное свойство прямых.

***Следствие.* Две прямые пересекаются не более чем в одной точке.**

Вопросы к теме

1. Где и как возникли первоначальные сведения о геометрии?

2. Что означает слово геометрия?

3. Каких учёных, положивших начало геометрии и способствовавших её развитию, вы знаете?

4. Что изучает геометрия?

5. Какую часть геометрии называют планиметрией? Стереометрией?

6. Какие свойства плоскости вы знаете?

7. Какие геометрические фигуры вы видите на рисунках 15–16, на которых изображены современные здания?

8. На рисунке 17 изображено футбольное поле. Какие геометрические фигуры вы видите?

9. На рисунке 18 изображён герб нашего государства. Из каких геометрических фигур он состоит?

15

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Практические упражнения и приложения

1. Прочитайте и объясните следующие выражения: a) $A \in b$; b) $C \notin b$; c) $C \in AB$. Начертите соответствующие им чертежи.

2. Начертите две пересекающиеся прямые и отметьте точки, принадлежащие: a) каждой из двух прямых; b) только одной прямой; c) не принадлежащие ни одной из прямых. Запишите эти связи при помощи введённых обозначений.

3. Определите связи между всеми точками, прямыми, плоскостями и полуплоскостями на рисунке 19 и запишите эти связи при помощи введённых обозначений.

4. На рисунке 20 определите точки:
a) принадлежащие прямой a;
b) принадлежащие прямой b;
c) принадлежащие каждой из двух прямых;
d) принадлежащие прямой a, но не принадлежащие прямой b;
e) принадлежащие прямой b, но не принадлежащие прямой a;
f) принадлежащие и прямой a, и прямой b.

5. Точки A и B принадлежат прямой c, а точка C не принадлежит прямой c. Что можно сказать о прямых AB и AC?

6. Сколько общих точек могут иметь прямые AB и AK?

7. Начертите на плоскости прямую b и отметьте на ней точку A. Проведите прямую AB, отличную от прямой b. Будет ли точка B лежать на прямой b?

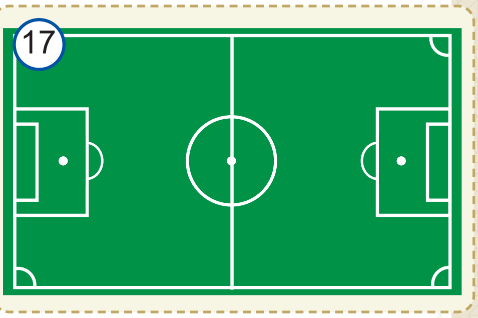
8. Сколько прямых можно провести на плоскости через: a) одну; b) две; c) три точки? Обоснуйте ответ.

9. На сколько: a) полуплоскостей делит плоскость одна прямая; b) частей делят плоскость две прямые?

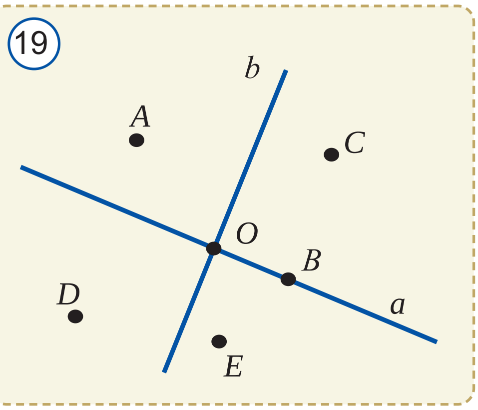
10. Начертите прямые AB, BC, AC. На сколько частей они делят плоскость?

11. Отметьте в тетради точки A, B, C и D *(рис. 21)*. Начертите все прямые, проходящие через любые две из этих точек. Сколько прямых получилось всего? На сколько частей они разделили плоскость?

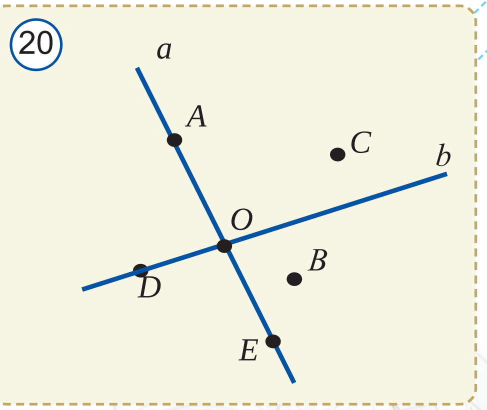

16


17


18



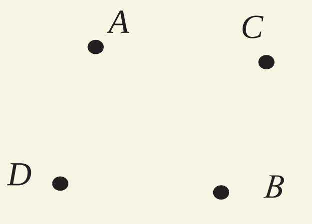
19



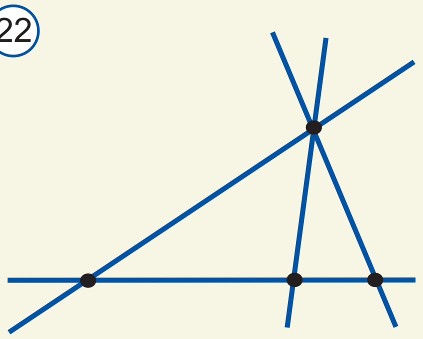
20

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

21



22



12*. Сколько прямых можно провести через: a) три точки; b) четыре точки, любые три из которых не лежат на одной прямой, если провести прямые через любые две из них?

13*. Обозначены точки пересечения каждых двух из четырёх прямых. Каково наибольшее число этих точек? А если рассмотреть пять прямых?

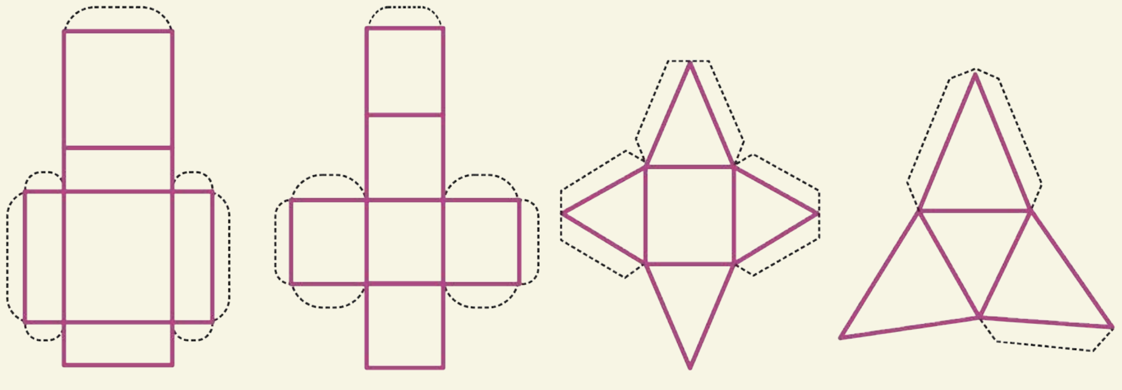
14*. На рисунке 22 четыре прямые пересекаются в 4 точках. Начертите чертёж, в котором они пересекаются в: a) 5; b) 6 точках. Могут ли 4 прямые пересекаться в трёх точках?

15. Расположите на плоскости пять точек так, чтобы число прямых, проведённых через каждые две из них, равнялось пяти.

Практическое задание

Для лучшего представления пространственных тел целесообразно воспользоваться их моделями. Модели пространственных тел можно изготовить, пользуясь их развёрткой *(рис. 23)*. Как видите, развёртки пространственных тел состоят из плоских геометрических фигур. Пользуясь следующими развёртками, соберите модели прямоугольного параллелепипеда, куба и пирамид.

23



Геометрическая красота

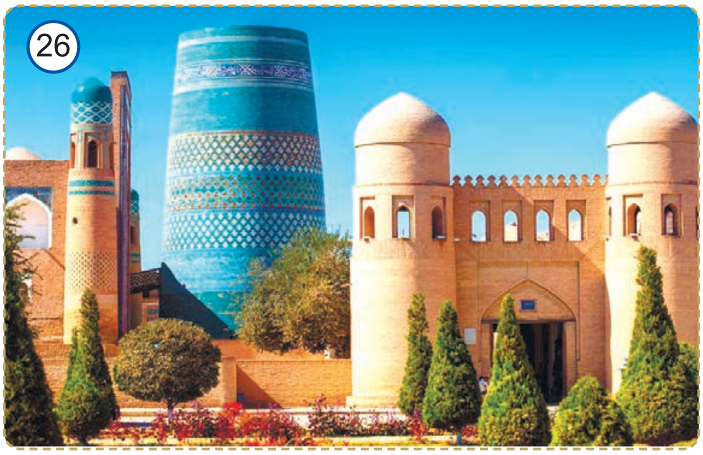
Наши предки, которые строили в прошлом архитектурные памятники, обладали обширными геометрическими знаниями и потенциалом. Это можно увидеть, глядя на архитектурные памятники, расположенные на одной только площади Регистан в Самарканде (рис. 24). Как вы думаете, какими геометрическими знаниями и навыками они пользовались при строительстве этих чудес?

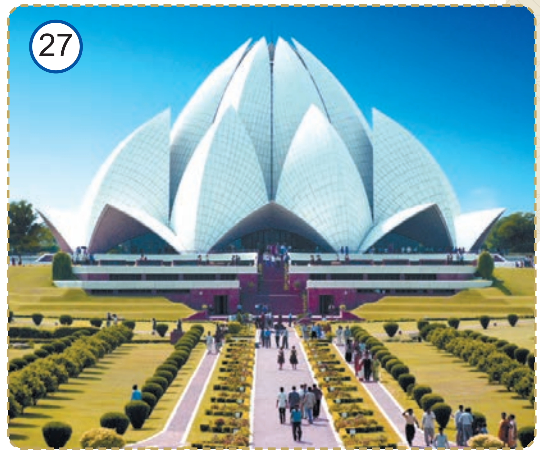
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE


24


25


26


27


28

Какие геометрические фигуры вы видите на минарете Ичан-кала в Хиве (рис. 26)?

Тадж-Махал – древний памятник, построенный правителем династии Бобуридов Шах-Джаханом в городе Агра в Индии (рис. 25). Ясно, что строители этого памятника хорошо знали геометрию.

Оперный театр в Сиднее (рис. 27) – образец современной архитектуры, построенный в Австралии. Он достоин внимания своей удивительной геометрической формой.

Поражает своим великолепием развлекательный комплекс «Galaxy Soho», построенный в столице Китая – Пекине по проекту известного иранского архитектора Захи Хадида (рис. 28).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Ахмад аль-Фергани

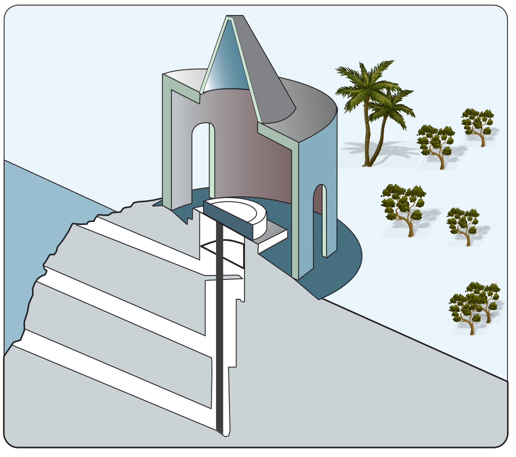
Великий астроном, математик и географ, живший приблизительно в 797–875 гг.

Исторические сведения

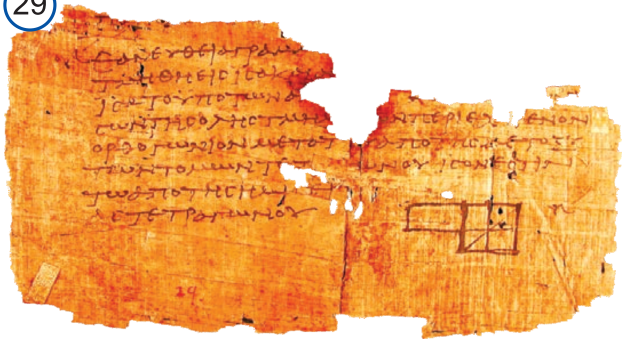
Ферганский учёный, обуздавший Нил

Согласно историческим свидетельствам, наш соотечественник Ахмад аль-Фергани установил в 861 г. на реке Нил, неподалеку от Каира, устройство под названием нилометр, предназначенное для измерения уровня воды в Ниле (рис. 28). По научно-техническим и архитектурным качествам это сооружение, которое считалось совершенным и воплощало в себе исключительно смелые геометрические решения, было на протяжении долгого времени жизненно важным для крестьян и сохранилось до наших дней. В своём «Трактате о конструировании астролябий» Фергани дал изящное доказательство важной для астрономии теоремы Птолемея. Имя Фергани носит кратер на Луне, а в Каире в его честь установлен памятник.

28



29



Древнейший научный трактат

На рисунке 29 вы видите фото древнейшего геометрического трактата III в. до н.э, дошедшего до нашего времени так называемого папируса Ахмеса.

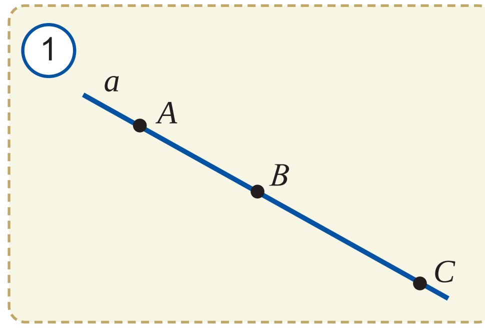
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

2 ОТРЕЗОК. СРАВНЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

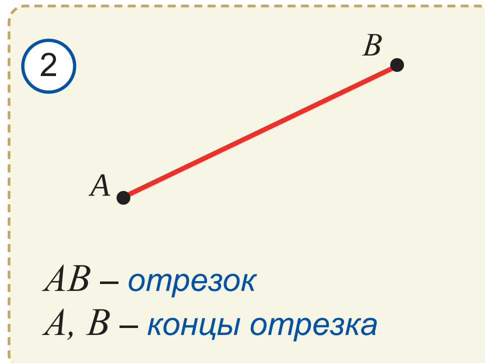
2.1. Отрезок и луч

Если на прямой a взять три точки A, B, C *(рис.1)*, то только одна из них – точка B лежит между двумя остальными, т.е. точками A и C. Точки A и B лежат по одну сторону от точки C, точки B и C лежат по одну сторону от точки A.



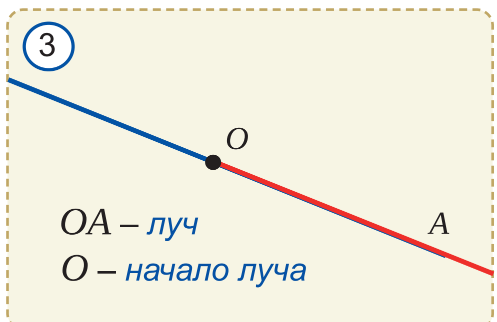
Из трёх данных точек, лежащих на одной прямой, одна и только одна лежит между двумя другими.

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух её точек и всех точек, лежащих между ними. На рисунке 2 изображён отрезок. Точки A и B называются *концами отрезка* или его *граничными точками*. Точки, лежащие между ними, называются *внутренними точками* отрезка.



Отрезок можно обозначать, указывая его концы: *отрезок* AB, точно также его можно обозначить как *отрезок* BA.

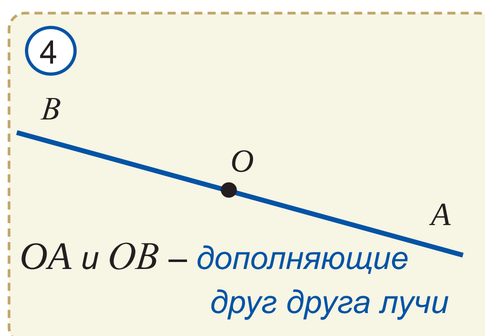
Лучом называется часть прямой, состоящая из точки O и всех точек, лежащих по одну сторону от неё. Точка O называется *началом луча* или *начальной точкой*. На рисунке 3 изображён луч.



Луч обозначают при помощи начала O и некоторой его точки A «луч OA» *(рис. 3)*. На первом месте указывают начало луча.

Иногда луч OA называют лучом, исходящим из точки O.

Точка O некоторой прямой a разбивает прямую на два *дополняющих друг друга луча*. На рисунке 4 изображены два взаимодополняющих луча OA и OB.

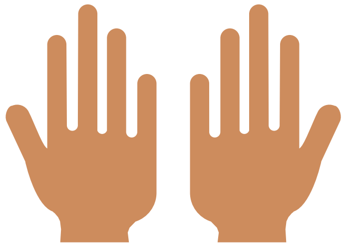


Луч можно рассматривать как геометрическую модель луча света. Луч лазера или мощного прожектора в ночном небе также можно рассматривать как примеры луча *(рис. 5)*. Отсюда и происходит термин «луч».

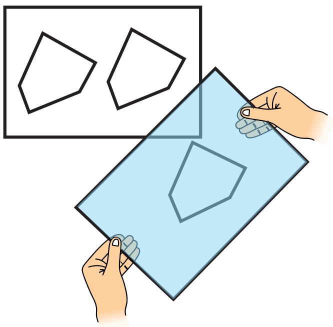
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

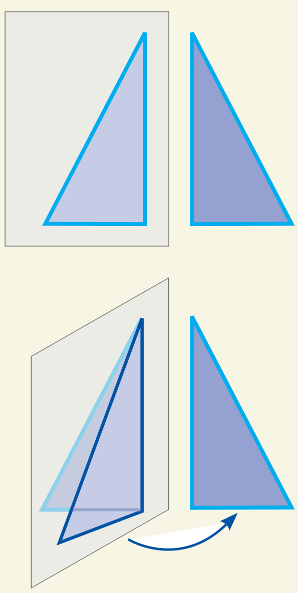
6



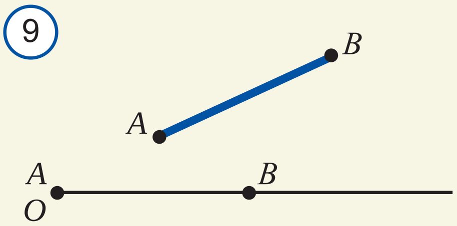
7



8



9



2.2. Сравнение отрезков

Активизирующие упражнения

1. Приведите примеры предметов окружающей вас среды, имеющих одинаковую форму и одинаковые размеры.

2. Как можно проверить на практике, что два тетрадных листа одинаковы?

3. На рисунке 6 изображены ладони правой и левой рук. Можно ли совместить одну из этих фигур с другой? Как это сделать? Продемонстрируйте это на своих руках.

Две фигуры называются *равными фигурами*, если их можно совместить наложением.

С понятием наложения одной фигуры на другую вы познакомились на активизирующих упражнениях. Представить себе, как это сделать на практике, можно следующим образом. Для того чтобы совместить одну фигуру с другой, скопируем вначале на прозрачную бумагу одну из фигур (сделаем эскиз). Затем станем передвигать её так, чтобы эскиз первой фигуры в точности совпал со второй *(рис. 7)*. Если это можно будет сделать, то эти фигуры окажутся равными.

Иногда, для того чтобы совместить одну фигуру с другой, приходится предварительно перевернуть прозрачную бумагу с изображением фигуры. На рисунке 8 рассмотрен такой вариант.

Пусть даны луч с началом O и произвольный отрезок AB. Ясно, что можно откладывать отрезок, равный AB, один конец которого совпадает с точкой O, а другой конец лежит на луче (рис.9). Такой отрезок будет единственным, и это построение называется *откладыванием отрезка AB на луче O*. В дальнейшем для краткости мы будем называть это откладыванием отрезка на луче.

При распиливании досок одинаковой длины поступают аналогичным способом *(рис. 10)*.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

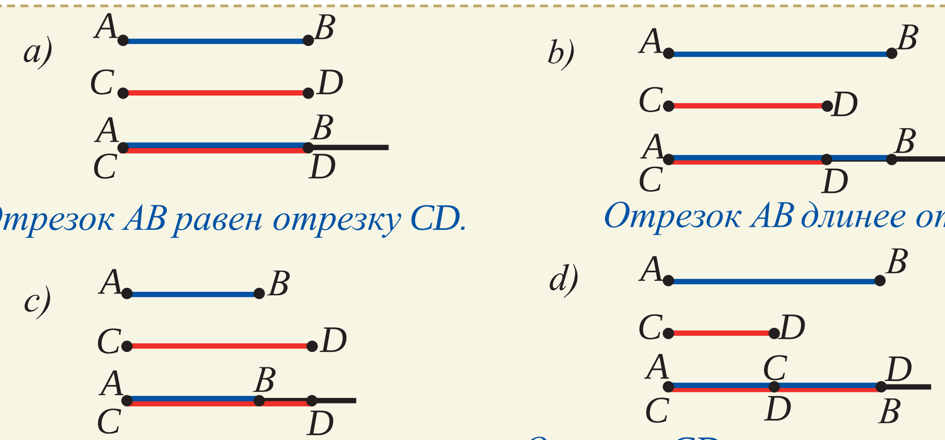
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

10

Для того чтобы сравнить два отрезка, надо отложить каждый из них на одном и том же луче от его начала и, в зависимости от того, какому из случаев, изображённых на рисунке, это соответствует, сделать нужное заключение *(рис.11)*:

11



Отрезок AB равен отрезку CD.

Отрезок AB длинее отрезка CD.

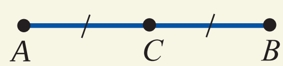
Отрезок AB короче отрезка CD.

Отрезок CD равен половине отрезка AB.

Серединой отрезка называют точку, которая делит этот отрезок на два равных между собой отрезка.

На рисунке 12 точка C – середина отрезка AB. На чертеже равные отрезки отмечаются равным числом чёрточек.

12



2.3. Длина отрезка и её свойства. Измерение отрезков

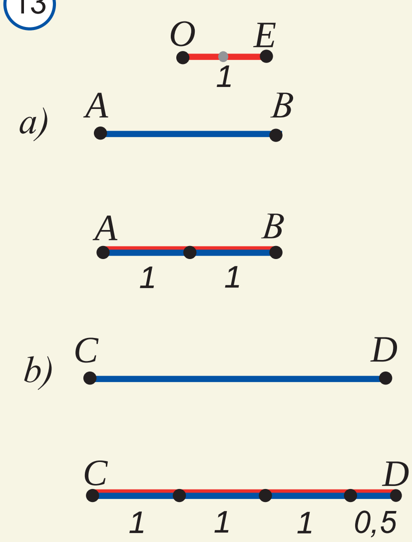
Сравнивать длины отрезков, откладывая их на луче, не слишком удобно. Узнать, какой из отрезков длиннее или короче (т. е. больше или меньше), можно, сравнивая их длины.

Примем какой-нибудь отрезок за единичный и будем считать его длину равной 1. Длины оставшихся отрезков определим по отношению к единичному отрезку.

Длина отрезка – это положительное число, которое показывает, сколько раз можно отложить на нём единичный отрезок или его части.

Ясно,что если выбрать отрезок OE в качестве единичного *(рис. 12)*, т.е. принять его длину

13



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

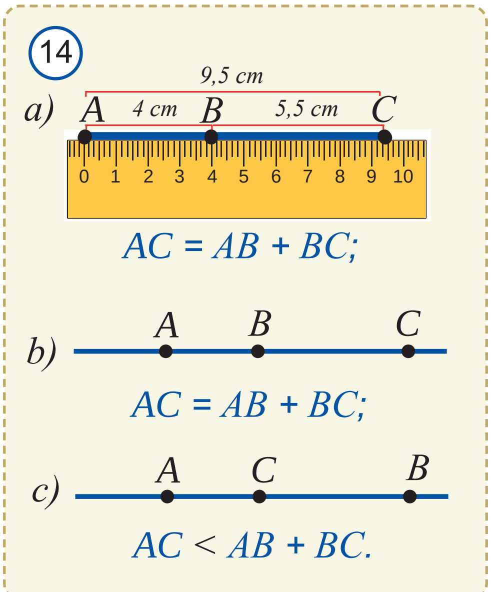
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

за 1, то длина отрезка AB будет равна 2. Действительно, отрезок OE откладывается на отрезке AB два раза. Длина отрезка CD будет равна 3,5, так как отрезок OE откладывается на этом отрезке три с половиной раза.

Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля, являющуюся положительным числом.

Активизирующее упражнение

Длины отрезков на рисунке 14*а* измерены линейкой. Проверьте формулы, которые связывают длины этих отрезков.



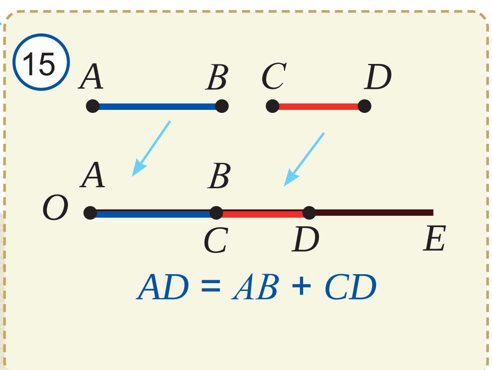
Если на прямой точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC (рис. 14b):

$$AC = AB + BC.$$

Если точка B не лежит на отрезке AC, то длина отрезка AC будет меньше суммы длин отрезков AB и BC (рис. 14c): $AC < AB + BC$.

К этому неравенству мы ещё вернёмся позже.

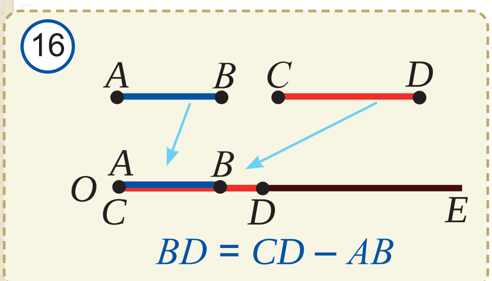
Вышеприведённое свойство даёт возможность определить действия сложения и вычитания отрезков. Пусть заданы луч OE и отрезки AB и CD. Отложим отрезок AB на луче OE. Затем отложим отрезок CD на луче BE (рис. 15).



Полученный в результате отрезок AD называют *суммой отрезков* AB и CD, при этом выполняется равенство: $AD = AB + CD$.

Точно так же можно прийти к действию вычитания отрезков.

Пусть заданы луч OE и отрезки AB и CD и пусть $CD > AB$ (рис. 16). Вначале отложим отрезок CD на луче OE, затем отложим на том же луче OE отрезок AB. Полученный в результате отрезок BD называют *разностью отрезков* CD и AB, при этом выполняется равенство: $BD = CD - AB$.



Говорят также, что длина отрезка AB равна *расстоянию* между точками A и B.

Очевидно, что отрезки, имеющие равные длины, равны.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

2.4. Окружность и круг

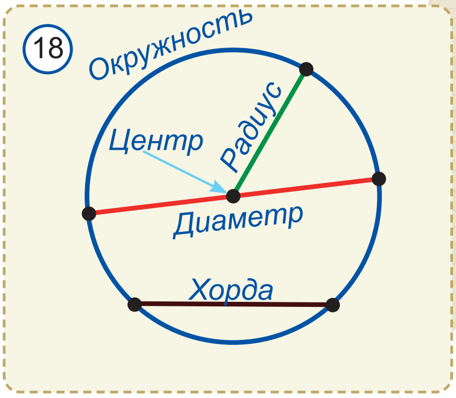
Геометрическим местом точек называют фигуру, состоящую из всех точек, удовлетворяющих одному или нескольким свойствам.

Примером геометрического места точек может служить окружность и круг.

Окружностью называют геометрическое место точек, равноудалённых от заданной точки. Эту точку называют *центром* окружности.

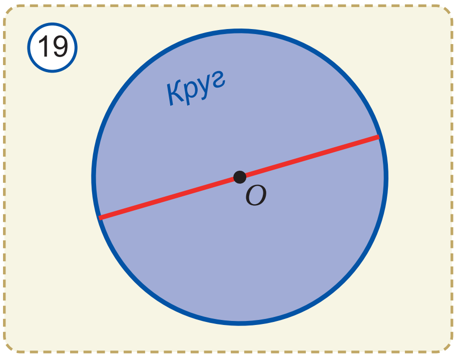
На рисунке 17 вы видите аттракцион «Чёртово колесо», имеющий форму окружности.

Радиус – это расстояние от любой точки окружности до её центра *(рис.18)*. Отрезок, соединяющий центр окружности с любой её точкой, также называют радиусом.



Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называют *хордой*. Хорду, проходящую через центр окружности, называют *диаметром*.

Кругом называют геометрическое место точек, находящихся от заданной точки на расстоянии не большем, чем данное число *(рис. 19)*. Заданную точку называют *центром* круга, а данное расстояние его *радиусом*.



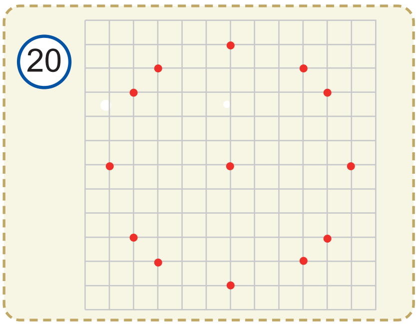
Так как диаметр окружности (круга) проходит через центр, то он состоит из двух радиусов *(рис. 19)*. Следовательно, длина диаметра равна длине двух радиусов.

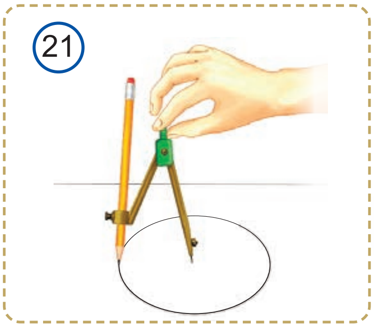
Построение окружности без циркуля на бумаге в клетку

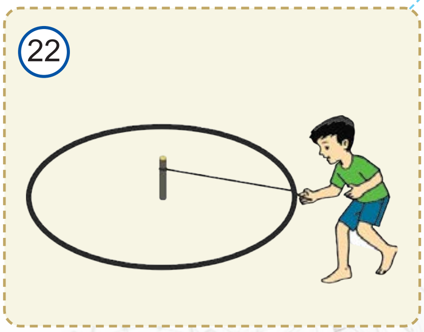
- *Отметьте точки на бумаге в клетку так, как показано на рисунке 20.*
- *Последовательно соедините дугой эти 12 точек.*

В результате вы получите приблизительное изображение окружности с центром в точке O (проверьте).

Окружность чертят при помощи циркуля. На рисунках 21 и 22 показано, как начертить окружность с радиусом AB с центром в точке O.







*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

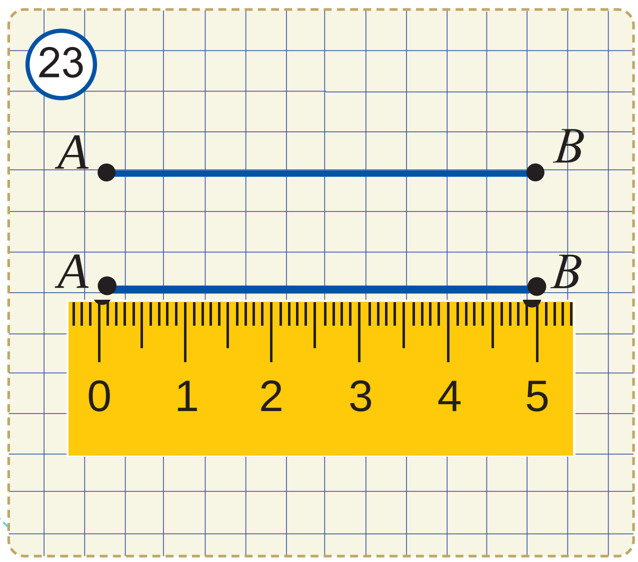
2.5. Единицы измерения длины

С древнейших времён люди использовали для измерения длин различные единицы длины. Например, в Средней Азии были в ходу такие единицы, как пядь, локоть, маховая сажень, верста. Использование различных единиц измерения создавало много трудностей. Поэтому, начиная с XVIII века, в мире получила распространение международная единица длины – *метр*.

С эталоном метра вы познакомились в учебнике «Физика» для 7 класса. Для измерения длин, больших (меньших) метра, используются следующие единицы: 1 km = 1 000 m; 1 cm = 0,01 m; 1 mm = 0,001 m.

Длины отрезков измеряются с помощью различных инструментов. Самые простые из них имеют шкалу, т. е. снабжены набором делений с числами, служащими для измерения более мелких длин. Например, если в качестве единицы измерения длин принят 1 cm, то линейкой на рисунке 23 можно измерять отрезки длиной до 5 cm. Пишут, что AB = 5 cm. Если в качестве единицы измерения выбрать 1 миллиметр, то длина AB = 50 mm.

23



Иногда длины отрезков записывают без единиц измерений. Например, запись AB = 5, означает, что длина отрезка равна 5 единицам длины.

Для измерения длин отрезков в тетради вы используете учебную линейку с миллиметровыми делениями *(рис. 24)*. Для измерения длин отрезков на доске вы используете школьную линейку. Для выполнения измерительных работ на земле используют рулетку, а в поле – полевой циркуль.

24

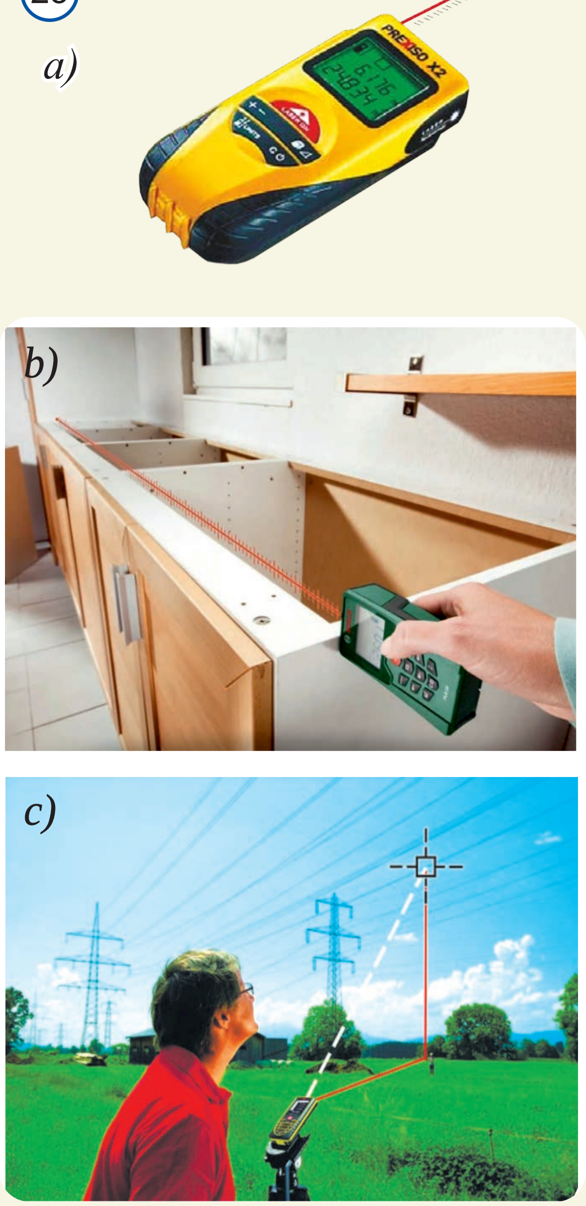
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Современные мастера и инженеры используют удобные и точные электронные рулетки (рис. 25).

На рисункае 25*b* показан способ измерения расстояния до стены, а на рисунке 25*c* – расстояния от основания столба до его вершины. Используя эти рисунки, попробуйте понять, как применяют лазерные электронные рулетки.

25



Задача. Найдите длину отрезка AC, если точки A, B и C лежат на одной прямой, $AB = 8$ и $BC = 11$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1. Точки A, B, C расположены на прямой a, как показано на рисунке 26*a*.

Используя свойства длин отрезков, получим $AC = AB + BC = 8 + 11 = 19$.

2. Пусть точки A, B и C расположены на прямой a так, как на рисунке 26b.

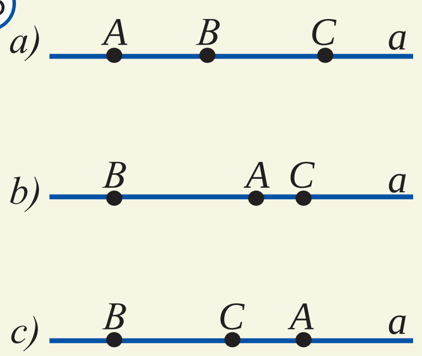
Тогда, по свойству длин отрезков, получим $BA + AC = BC$ или

$AC = BC - BA = 11 - 8 = 3$.

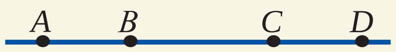
3. Точка C не может лежать между точками B и A, как показано на рисунке 26c, потому что $AB < BC$. Итак, в зависимости от порядка точек, длина отрезка AC равна либо 19, либо 3.

Ответ: 19 или 3.

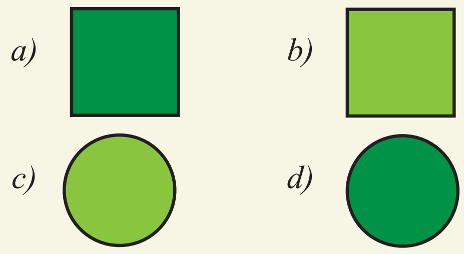
26



27



28



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вопросы к теме

1. Между какими точками расположена точка B на рисунке 27? Какие точки расположены по одну сторону от точки C?
2. Дайте определения отрезка и луча. Как они обозначаются?
3. Точки C и D расположены на прямой. Совпадают ли отрезки CD и DC? А лучи CD и DC?
4. Каковы различия между отрезком, лучом и прямой?
5. Какие фигуры мы называем равными?
6. Какие фигуры на рисунке 28 равны?
7. Что значит отложить отрезок на луче?
8. Сколько отрезков, равных данному, можно отложить на луче?
9. Как сравнивают и измеряют отрезки?
10. Что такое середина отрезка?
11. Сформулируйте свойства длин отрезков.
12. Запишите сумму и разность отрезков.
13. Что такое геометрическое место точек?
14. Дайте определения окружности и круга и назовите их элементы.

Практические упражнения и приложения

1. Сколько отрезков на рисунке 27?

2. Сколько всего существует отрезков с концами в точках A, B, C, D, расположенных на одной прямой? Напишите их.

3. Напишите все лучи на рисунке 29. Какие из них взаимно дополняют друг друга?

4. На рисунке 30 прямая AB пересекает прямые MN и PQ соответственно в точках C и D. Напишите взаимно дополняющие друг друга лучи, исходящие:
a) из точки C; b) из точки D.

5. Сколько лучей определяют две точки, лежащие на одной прямой? А три точки?

6. Начертите на бумаге фигуру, изображённую на рисунке 31a, не меняя её размеров, и вырежьте её. Попробуйте совместить её с фигурой на рисунке 31b.

7. Какие из a) букв; b) цифр равны между собой, если рассматривать их как геометрические фигуры?

a) **a, b, g, d, i, y, n, o, p, u, q;**

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

b)

8. Найдите равные фигуры на рисунке 32.

9*. На сколько частей делится прямая: a) 1; b) 2; c) 3; d) 10; e) n точками?

10*. На какое наибольшее число частей можно разделить плоскость: a) одна; b) две; c) три; d) четыре прямые?

11*. Дана прямая и точки A, B, C, не лежащие на ней. Отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает её. Пересекает ли эту прямую отрезок BC?

12. Найдите длины отрезков на рисунке 33, приняв отрезок AB за единичный.

13. Определите длины отрезков AB, AC, AD, BC, BD, CD на рисунке 34.

14. Используя данные на рисунке 35, найдите неизвестные длины.

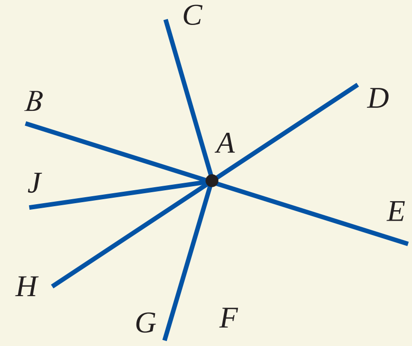
15. Найдите BC, если $B \in AC$, $AB = 7{,}2\ cm$, $AC = 2\ dm$.

16. Найдите CD, если $C \in AB$, $D \in AB$, $AB = 5$, $AC = 2{,}2$ и $BD = 3{,}6$.

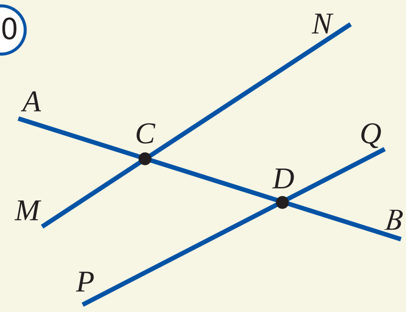
17. Отложите «на глаз» на прямой отрезки длиной: a) $3\,cm$; b) $7\ cm$; c) $10\ cm$. Затем проверьте правильность построений с помощью линейки.

18. Найдите AC, если для точек A, B, C: $AB = 600\ m$, $BC = 200\ m$.

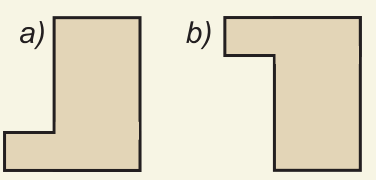
29



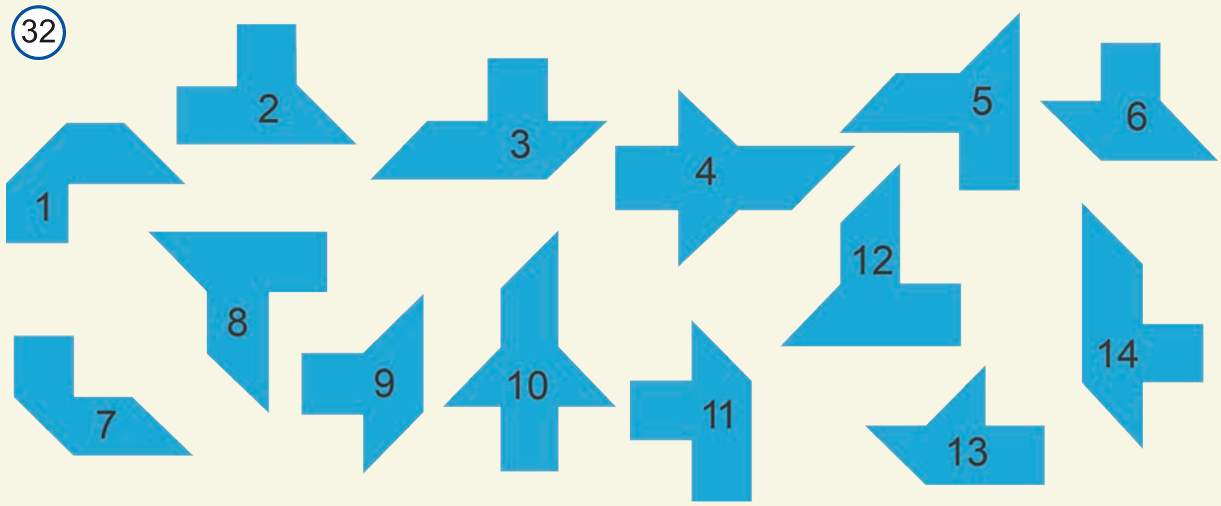
30



31

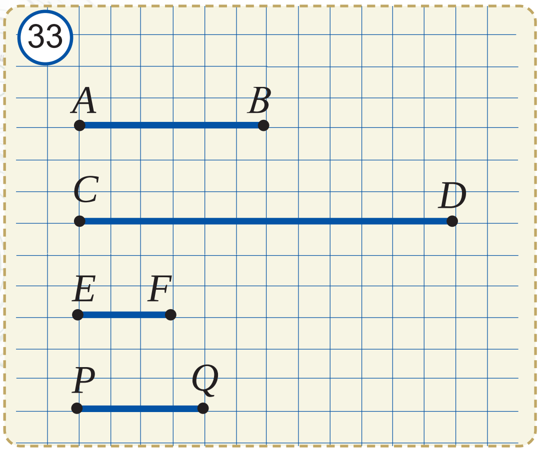


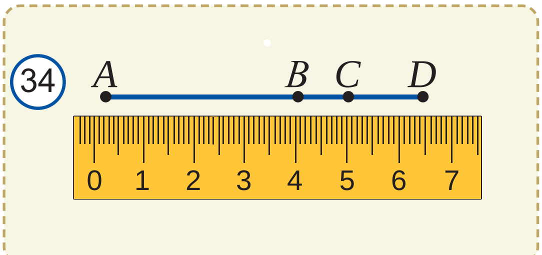
32

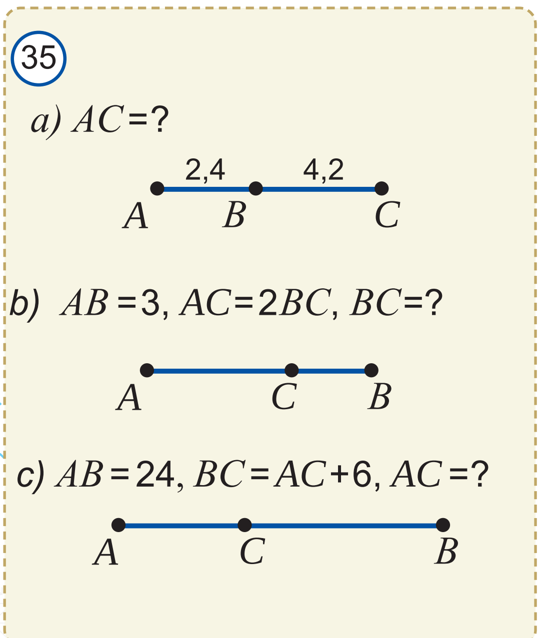


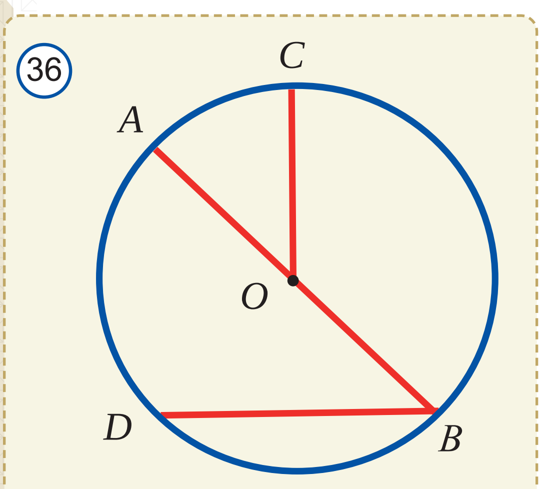
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE









19. Запишите центр, все радиусы, диаметр и хорды окружности, изображённой на рисунке 36.

20. Найдите длину наибольшей хорды для окружности с радиусом 23 cm.

21. Найдите: a) диаметр, если радиус равен 12 cm; b) радиус, если диаметр равен 28 dm.

22. Найдите CD, если для точек A, B, C и D: $AB = 2$, $AC = CB$, $2AD = 3BD$.

23. Сколько точек пересечения a) с прямой OA; b) лучом OA может иметь окружность с центром в точке O?

24*. Даны луч и отрезки с длинами AB = 1,2 cm, CD = 2,8 cm. Используя данные отрезки, постройте на этом луче отрезки с длинами a) 4 cm; b) 1,6 cm; c) 0,4 cm; d) 2,6 cm.

25. Найдите длину отрезка AB, если точка C – середина отрезка AB и CB = 13.

26. Найдите длину отрезка, который длиннее своей половины на 46 cm.

27. Измерьте линейкой длину и ширину вашего учебника и запишите их: a) в mm; b) в dm; c) в m; d) в km.

28. Точка C делит отрезок AB в отношении 1 : 3. Найдите длину отрезка CB, если длина отрезка AC равна: a) 2,5 cm; b) 3,9 m; c) 1,4 km.

29. Точка D делит отрезок EF в отношении 1 : 2. Найдите длину отрезка EF, если длина отрезка DE равна: a) 35 cm; b) 93 dm; c) 41 m.

30*. Постройте отрезок AB длиной 9 cm. Отметьте на луче AB такую точку C, чтобы: a) $AC - BC$ = 1 cm; b) $AC + BC$ = 11 cm; c) $AC + BC$ = 10 cm.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

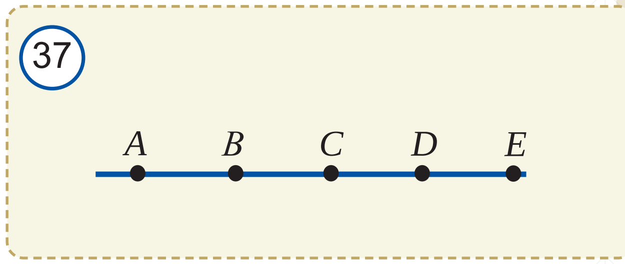
31*. Дан отрезок AB. Постройте отрезки, длины которых равны: a) $2AB$; b) $AB:2$; c) $AB:4$; d) $0{,}75\ AB$.

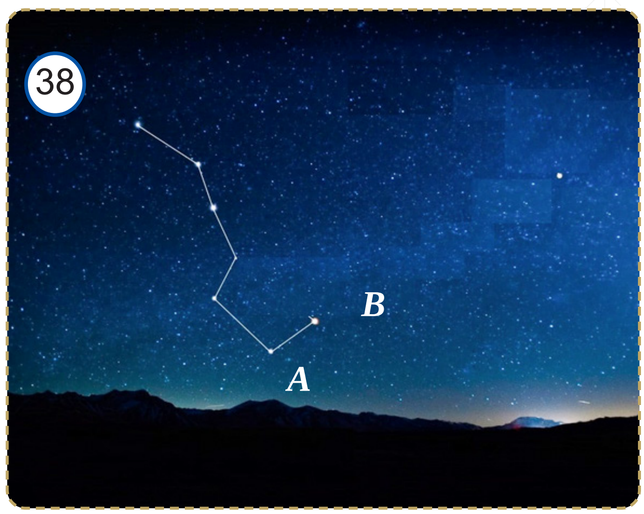
32*. Известно, что для точек A, B, C, расположенных на одной прямой, $AB = 5{,}6\ cm$, $AC = 8{,}9\ cm$ и $BC = 3{,}3\ cm$. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

33. На рисунке 38 точка C лежит между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если: a) $AC = 2{,}5\ cm$, $CB = 3{,}4\ cm$; b) $AC = 5{,}3\ dm$, $CB = 4{,}2\ dm$.

34*. Отрезки AB, BC, CD и DE равны. Найдите длину отрезка AD, если за единичный отрезок принять отрезок: a) AB; b) AC; c) AE.

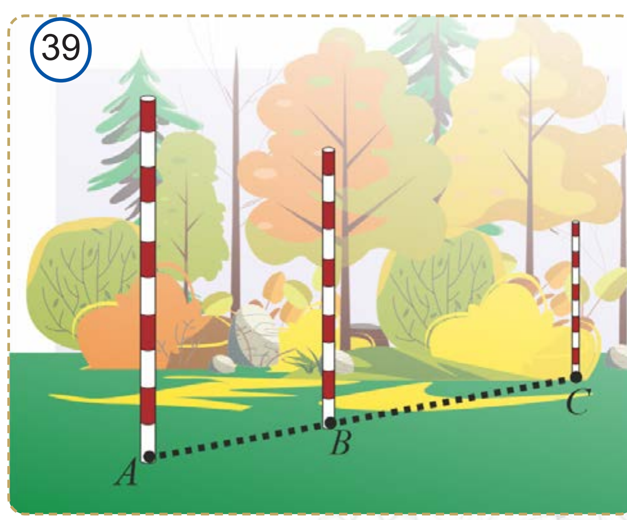
35. На рисунке 38 мы видим созвездие «Большая медведица». Если соединить изображения звезд, получится фигура, похожая на «ковш». Соединяя последние две звезды «ковша» отрезком AB и откладывая его 5 раз на луче AB, попадём в изображение Полярной звезды. Найдите его на рисунке.





36. На рисунке 39 показано, как провести прямую линию в полевых условиях. Этим методом пользуются в саду или огороде, когда нужно посадить саженцы в один ряд. Объясните, на каком геометрическом свойстве прямых основана эта практическая работа.

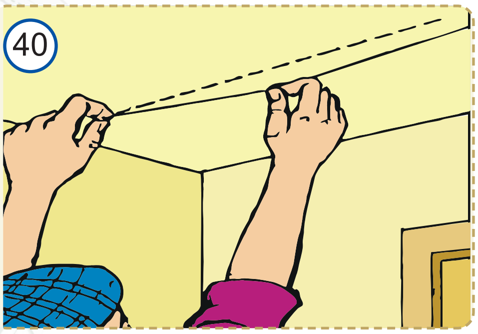
37. На рисунке 40 вы видите, как маляр проводит прямые на потолке. Для этого нитку натирают мелом, один её конец закрепляют гвоздём, а другой – в нужной точке. Затем в середине натягивают нить как тетеву и отпускают. Тогда мел оставляет след в виде прямой. Точно так же можно провести прямую на стене. Объясните, на каком геометрическом свойстве прямых основан этот метод.



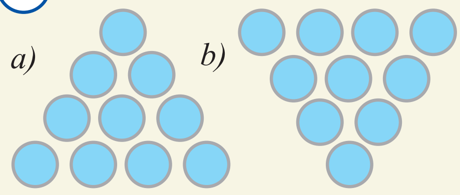
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

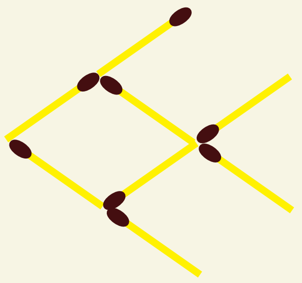
40



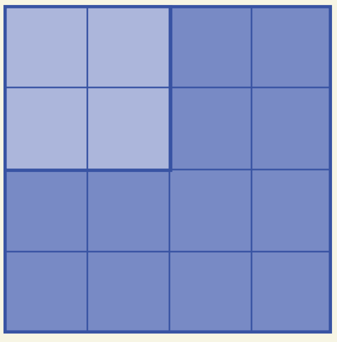
41



42



43

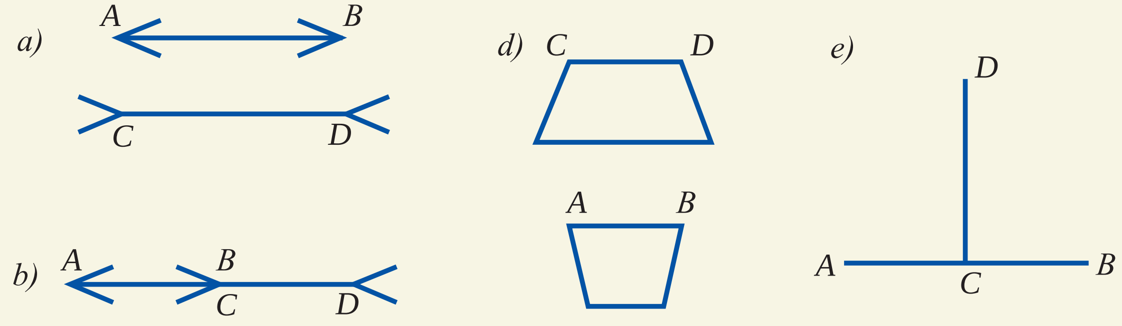


Геометрические головоломки

1. 10 одинаковых монет на рисунке 41a разложены пирамидкой. Поменяв местами только 3 монеты, расположите их так, как показано на рисунке 41b.
2. Поменяв местами 3 спички, поверните «рыбу» на рисунке 42 в противоположную сторону.
3. У дедушки был сад в форме квадрата. Часть сада, показанную на рисунке 43, он оставил себе. Оставшуюся территорию он разбил на участки одинаковой формы и подарил четырём сыновьям. Как ему удалось осуществить эту разбивку сада?
4. Отрезки AB и CD, изображённые на рисунке 44, сравните «на глаз», затем проверьте с помощью кальки свои выводы.

Вывод. *В геометрии необходимо выполнять измерения и сравнения точно. Можно ошибиться!*

44



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

3 УГОЛ. СРАВНЕНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

3.1. Сравнение углов

Углом называется фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из неё.

Лучи, образующие угол, называются *сторонами угла,* их общая вершина – *вершиной угла* (*рис. 1*). Угол AOB или угол BOA обозначают как $\angle AOB$ или $\angle BOA$. При такой записи вершина угла всегда должна быть в середине. Также кратко можно написать $\angle O$ и прочитать угол O. Для того чтобы отметить угол на чертеже, используют небольшую дужку как на рисунке 1.

Развёрнутым углом называют угол, стороны которого являются взаимно дополняющими лучами.

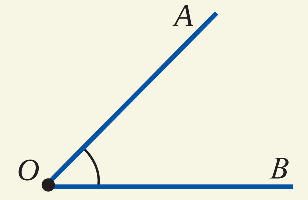
На рисунке 2 изображён развёрнутый угол.

Пусть задан неразвёрнутый угол O. Рассмотрим отрезок AB с концами на сторонах этого угла. Если луч OC, исходящий из вершины угла, (*рис. 3*) пересечёт отрезок AB, то луч *пройдёт между сторонами угла*. Ясно, что угол разбивается лучом, проходящим между его сторонами, на два угла.

Любой угол разбивает плоскость на две части (*рис. 4*). Часть плоскости, в которой лежит луч, проходящий между сторонами угла, называется *внутренней областью луча*, а вторая часть – *внешней областью.*

Пусть задан произвольный луч OB и неразвёрнутый угол A (*рис. 5a*). Известно, что прямая OB разбивает плоскость на две полуплоскости. Одну из сторон угла A можно совместить с лучом OB. Это действие в зависимости от того, в какой полуплоскости лежит угол A, приводит к двум случаям (рис. *5b, 5c*) и называется *откладыванием угла в данную полуплоскость от заданного луча*.

1

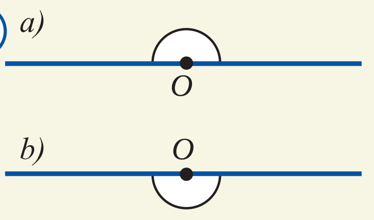


$\angle AOB$ – *угол AOB*

O – *вершина угла*

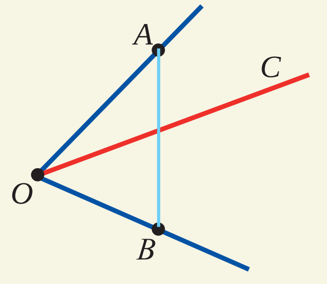
OA, OB – *стороны угла*

2



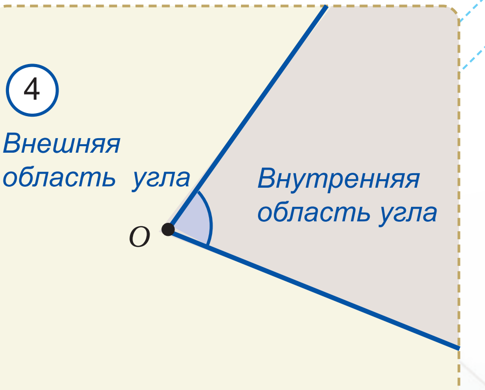
$\angle O$ – *развёрнутый угол*

3



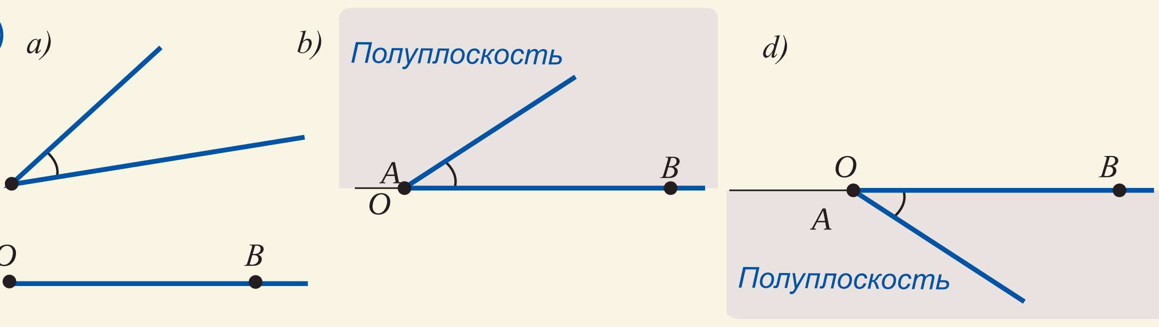
OC – *луч, проходящий между сторонами угла*

4



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

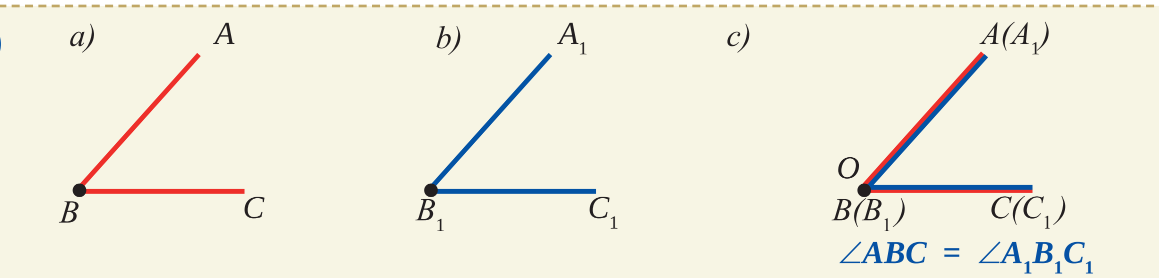
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5


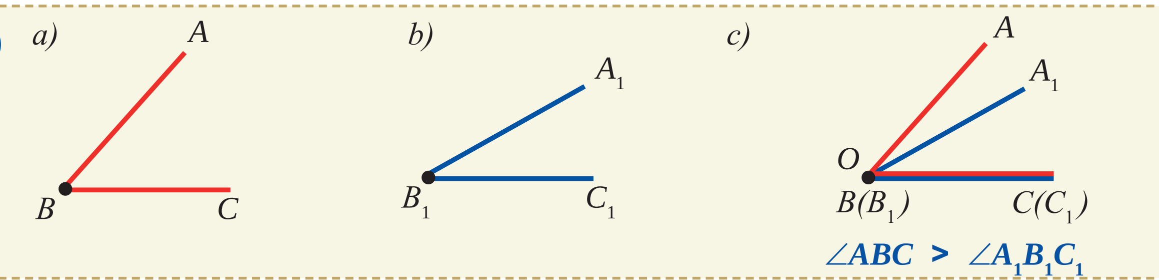
От произвольного луча в заданную полуплоскость можно отложить единственный угол, равный данному неразвёрнутому углу.

Чтобы сравнить два угла, надо отложить их от некоторого луча в заданную полуплоскость. Отложим данные углы ABC и $A_1B_1C_1$ в одну полуплоскость от луча O:

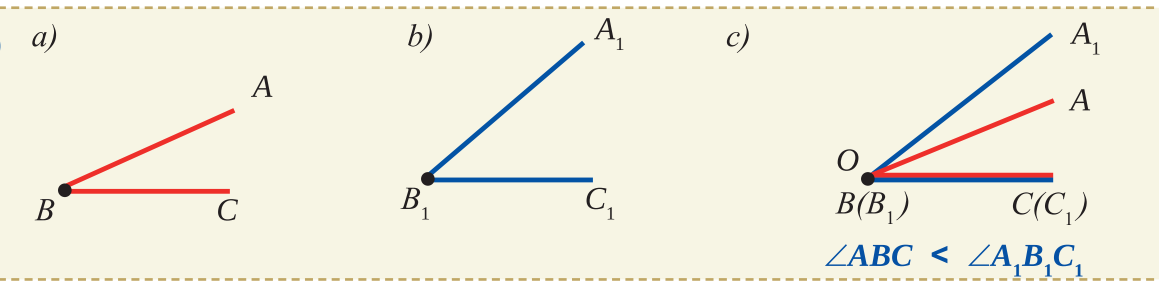
1 случай (*рис. 6*). Если при откладывании угла сторона BA совпадёт со стороной B_1A_1, а сторона BC совпадёт со стороной B_1C_1, то говорят, что углы ABC и $A_1B_1C_1$ равны и пишут $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (чтобы обозначить на чертеже равенство углов, их стороны соединяют равным числом дужек).

6


2 случай (*рис. 7*). Если сторона A_1B_1 будет лежать во внутренней области угла ABC, то говорят, что угол ABC больше угла $A_1B_1C_1$ и пишут $\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$.

7


3 случай (*рис.* 8). Если же сторона AB будет лежать во внутренней области угла $A_1B_1C_1$, то говорят, что угол ABC меньше угла $A_1B_1C_1$ и пишут $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$.

8


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол на два равных угла.

На рисунке 9 изображена биссектриса OC угла AOB.

3.2. Измерение углов

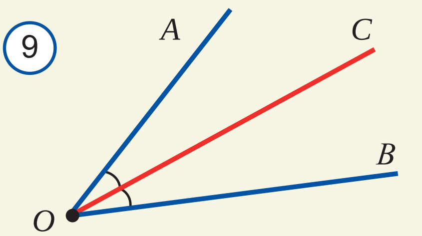
Пусть развёрнутый угол разбит лучами, проходящими между его сторонами, на 180 равных углов (рис.10). Один из этих углов принимают за единицу измерения– *единичный угол*. Его угловую величину называют *один градус* и обозначают 1°. Градусную меру любого угла можно определить на основе этого выбора единицы измерения углов. *Градусная мера угла* показывает, сколько единичных углов и их частей укладывается во внутренней области угла.

На рисунке 11 изображён угол ABC, равный 15°. Это значит, что в его внутренней области укладываются 15 единичных углов.

Каждый угол имеет определённую градусную меру, которая выражается положительным числом. 180° – градусная мера развёрнутого угла.

Градусную меру угла измеряют с помощью *транспортира*. Вы познакомились с транспортиром в младших классах. Его шкала, размещённая на дугообразной части, разделена чёрточками на 180 равных частей, каждая из которых соответствует одному градусу. На рисунке 3 показан процесс определения градусной меры угла с помощью транспортира. Вы видите, что угловая величина угла AOB равна 60 градусам, что записывается в виде $\angle AOB = 60°$. Ясно, что углы, имеющие одинаковую градусную меру, равны, и обратно, градусная мера равных углов одна и та же. Больший угол имеет большую градусную меру.

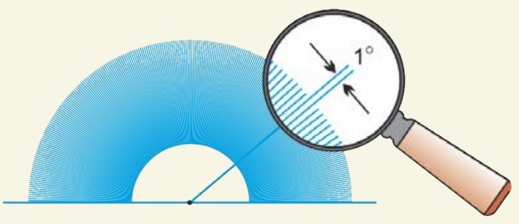
9



$\angle AOC = \angle COB$

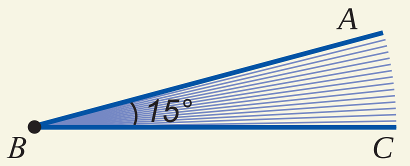
OC – *биссектриса угла AOB*

10

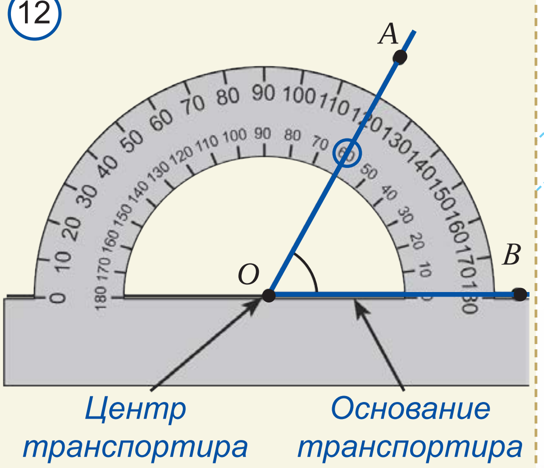


угол в один градус

11



12



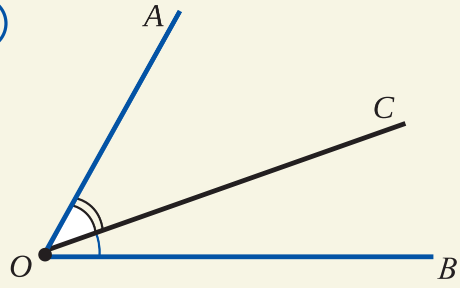
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

При измерении углов используются и доли градуса. А именно, $\frac{1}{60}$ часть 1° называется *минута*, а $\frac{1}{3600}$ часть *секунда*, которые помечаются значками «′» и «″» соответственно. Например, угол, имеющий величину 45 градусов 38 минут 59 секунд, записывается как 45°38′59″.

Запомните: 1°=60′, 1′=60″.

13



$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$

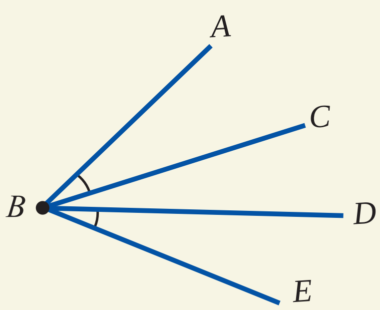
Пусть задан угол AOB и пусть произвольный луч OC делит его на углы AOC и COB *(рис.13)*. Тогда:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Это свойство можно сформулировать так:

Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

14



Задача 1. Покажите, что если $\angle ABC = \angle DBE$, то $\angle ABD = \angle CBE$ *(рис. 14)*.

Решение. Прибавим к обеим частям равенства $\angle ABC = \angle DBE$ слагаемое $\angle CBD$:

$\angle ABC + \angle CBD = \angle CBD + \angle DBE.$

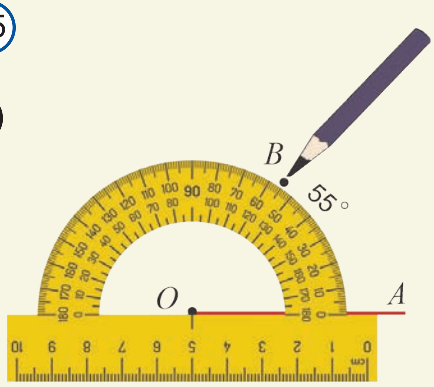
Но $\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD$ и

$\angle CBD + \angle DBE = \angle CBE.$

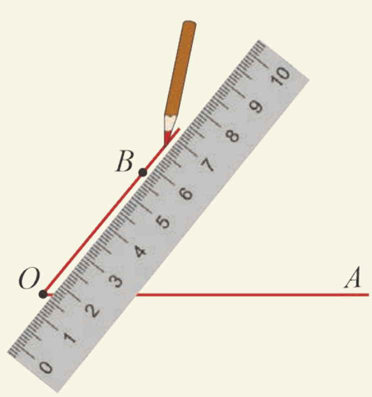
Итак, $\angle ABD = \angle CBE.$

15

a)



b)



Как отложить на луче угол с данной градусной мерой на практике:

1. Начертите произвольный луч OA.
2. Основание транспортира совместите с данным лучом, а центр транспортира совместите с точкой O *(рис. 15а)*.
3. Найдите на шкале транспортира градусную меру нужного угла и отметьте рядом точку B.
4. Проведите через точки O и B луч *(рис. 15b)*. В результате получим угол AOB с заданной градусной мерой.

Подумайте, каким ещё способом можно выполнить эту работу.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

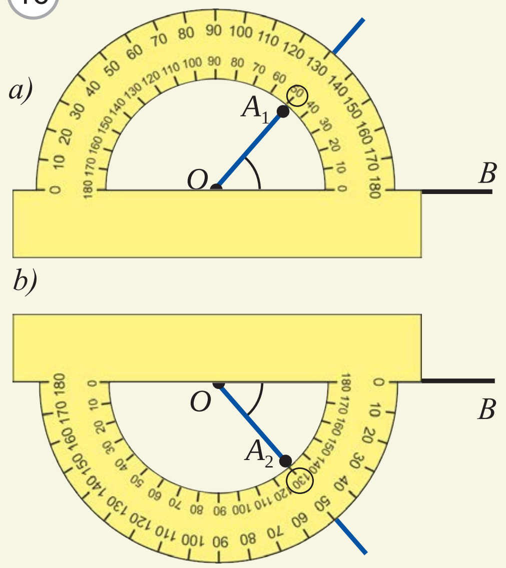
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача 2. От данного луча OB отложить угол 50°.

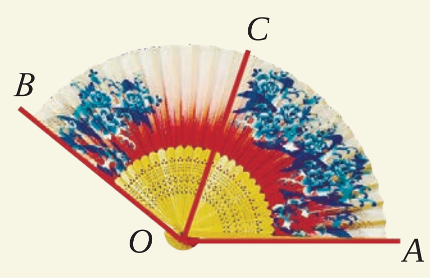
Решение. Основание транспортира наложим на луч OB и совместим его центр с точкой O. Прямая OB делит плоскость на две полуплоскости. Поэтому, найдя на шкале деление 50°, отложим в каждую полуплоскость нужный угол *(рис. 16)*.

Следовательно, от заданного луча можно отложить в каждую полуплоскость по одному углу: $\angle A_1OB = \angle A_2OB = 50°$.

16



17



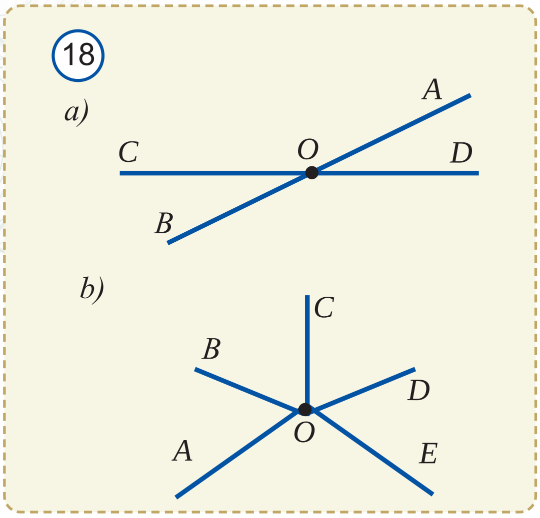
Вопросы к теме

1. *Что такое угол и как он обозначается?*
2. *Что такое развёрнутый угол?*
3. *На какие части разбивает угол плоскость?*
4. *Что значит «отложить угол от луча» в заданную полуплоскость?*
5. *Когда углы равны между собой?*
6. *Когда один из углов будет больше или меньше другого?*
7. *Что такое биссектриса угла?*
8. *Что такое градусная мера угла?*
9. *Сколько градусов составляет развёрнутый угол?*
10. *Какой угол вы имеете в виду, говоря, что угол равен 1°?*
11. *Будут ли равны углы, имеющие равные градусные меры?*
12. *Какое свойство градусной меры угла приведено на рисунке 17?*

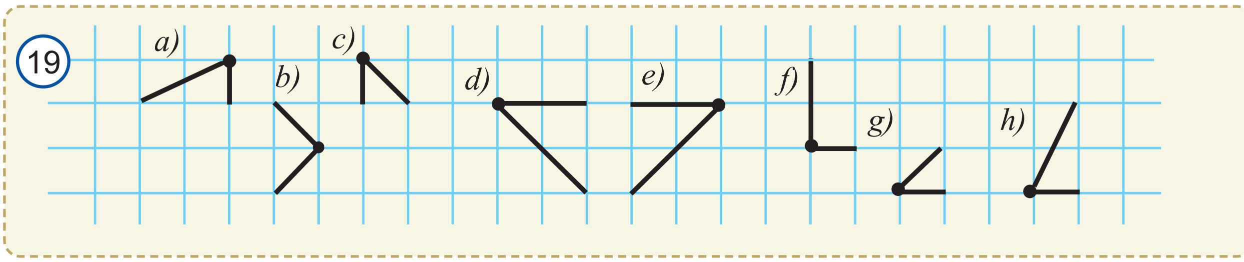
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

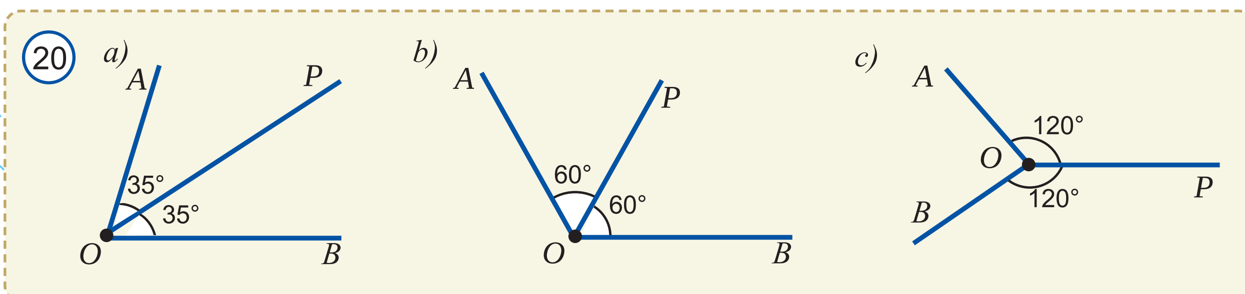
Практические упражнения и приложения



1. Постройте углы: a) $\angle MNL$; b) $\angle ABO$. Напишите их вершины и стороны.
2. Начертите прямые AB, AC и DA и отметьте на них точки A, B, C и D. Напишите получившиеся углы, их вершины и стороны.
3. Определите все углы, изображённые на рисунке 18 и напишите их.
4. Среди углов, изображённых на рисунке 19, найдите равные.

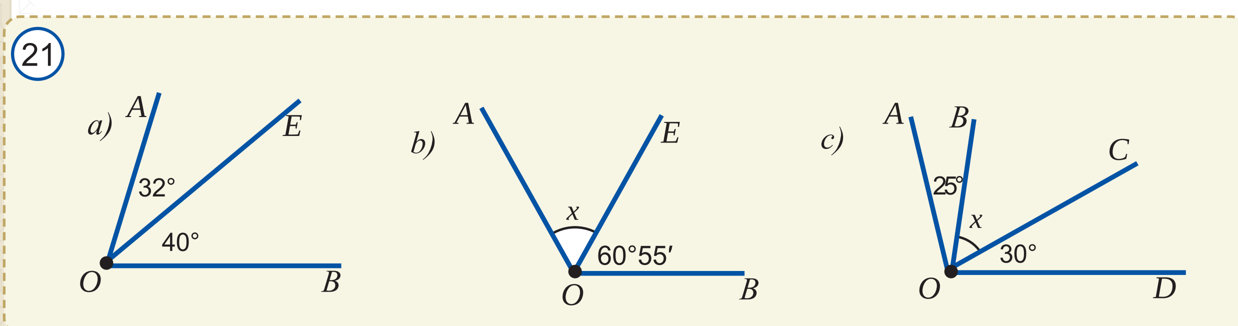


5. Является ли луч OP, изображённый на рисунке 20, биссектрисой угла AOB?



6. Найдите следующие углы, используя данные рисунка 21.

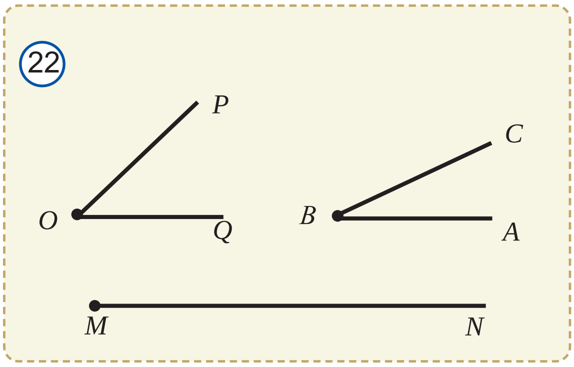
a) $\angle AOB = ?$; b) $\angle AOB = 120°38'$, $x = ?$; c) $\angle AOD = 105°45'$, $x = ?$

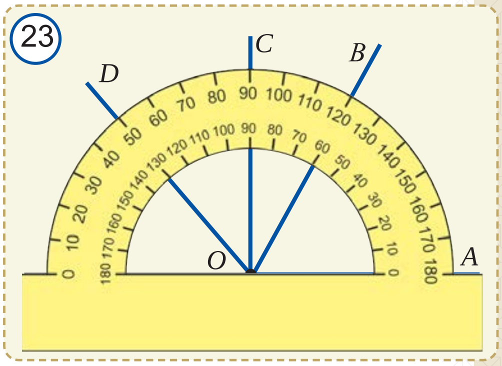


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7. Сравните углы POQ и ABC, изображённые на рисунке 22, отложив их на луче MN.



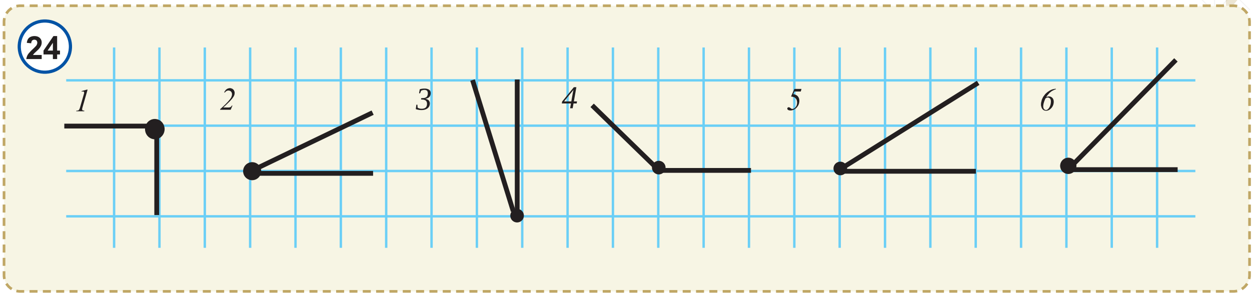


8. Определите градусные меры углов AOB, AOC, AOD, BOC, BOD и COD, используя рисунок 23, и, пользуясь транспортиром, постройте их биссектрисы.

9. Верны ли следующие равенства: a) $\angle AOB = \angle BOA$; b) $\angle AOB = \angle ABO$?

10. Постройте с помощью транспортира углы 60° и 176° и их биссектрисы.

11. Постройте с помощью транспортира углы 49°, 79° и 142°, а также их биссектрисы.



12*. Запишите номера углов, изображённых на рисунке 24, в порядке возрастания их градусных мер.

13. Вычислите:

a) $34°18' + 53°38'$; b) $15°8'38'' + 113°21'9''$; c) $115°8'38'' - 113°21'9''$.

14. Постройте с помощью транспортира углы: 10°, 30°, 74°45′, 113°30′ и 165°.

15. Постройте углы $\angle A + \angle B$ и $\angle A - \angle B$, если заданы углы $\angle A$ и $\angle B$ и $\angle A > \angle B$.

16. Отложите на луче AB угол OAB, равный 150°.

17*. Пройдёт ли луч OE между сторонами $\angle AOB$, если: a) $\angle AOE = 20°$, $\angle EOB = 40°$, $AOB = 60°$; b) $\angle AOE = 80°$, $EOB = 120°$; c) $\angle AOE > \angle AOB$?

18*. Луч OC проходит между сторонами угла AOB. Найдите $\angle AOC$, если $\angle AOB = 108°$, $\angle BOC = 68°$, и постройте при помощи транспортира эти углы.

19*. Луч OT проходит между сторонами угла ROS. Найдите $\angle TOS$, если $\angle ROT = 37°$, $\angle ROS = 98°$, и постройте при помощи транспортира эти углы.

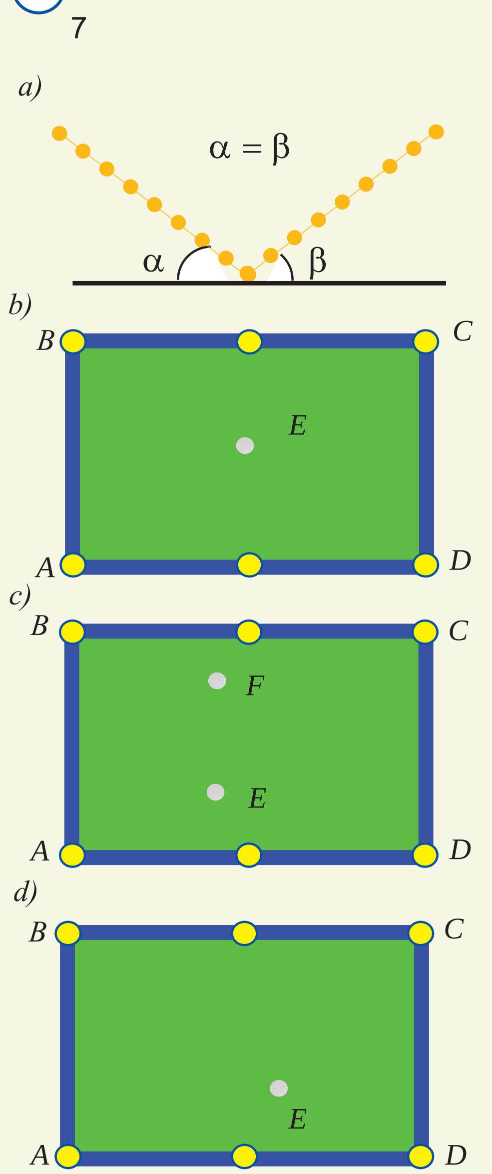
20*. Определите градусную меру угла между часовой и минутной стрелками, если на часах: a) 3:00; b) 6:00.

21. Начертите в тетради луч и отложите от него «на глаз», пользуясь только линейкой, углы 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 120° и 150°. Затем измерьте построенные углы транспортиром и проверьте, насколько вы были точны. Повторите упражнение.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

25



Практические упражнения

1. На листе бумаги начертите угол. Сложите бумагу по сторонам угла так, чтобы получить: угол: a) в 2 раза больший; b) в 2 раза меньший; c) дополняющий его до прямого.
2. На классной доске начерчены два угла. Как с помощью нити и мела сравнить эти углы?
3. На земле начерчен прямой угол. Как с помощью нити можно проверить, что этот угол прямой?
4. На земле начерчен произвольный угол. Как с помощью нити можно начертить равный ему угол?
5. Начертите окружность с помощью монеты. Как определить центр этой окружности?
6. Вы замечали, как движутся шары на бильярдном столе? Они отлетают от края стола под тем же углом, что и ударяются о него *(рис. 25a):*

   a) ударьте по шару, лежащему в центре стола, и начертите траекторию его движения *(рис. 25b)*;

   b) начертите траекторию движения шара, лежащего в точке E, если он, ударившись о стороны AD и AB, задел шар, находящийся в точке F *(рис. 25c)*;

   c) начертите траекторию движения шара, лежащего в точке E, если он, ударившись о стороны AD, AB и BC, задел шар, находящийся в точке D *(рис. 25d)*.

26

Исторические сведения

Астролябия – астрономический инструмент для измерения углов, изобретённый древнегреческим астрономом Гиппархом (II в. до н.э.) (рис. 26). С помощью этого простого инструмента можно выполнять десятки измерительных работ.

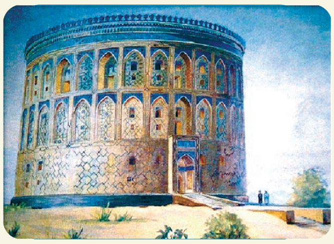
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

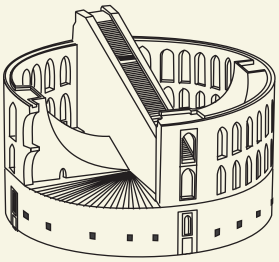
В Самаркандской астрономической обсерватории Улугбека производились работы по измерению углов между светилами. В этой большой обсерватории было много астрономических инструментов (рис. 27a-c). К ним относился не имевший аналогов вертикальный квадрант (рис. 27b) для измерений углов и геометрических вычислений. Он имел радиус 42 m! С помощью этого инструмента Улугбек уточнил положение 1018 звёзд на небесной сфере и привёл эти данные в своём труде «Гураганский зидж».

27

a)



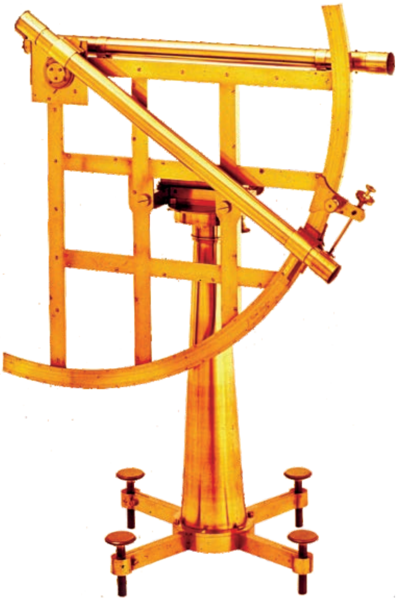
b)



c)

На рисунке 28 изображён европейский средневековый квадрант, которым пользовались учёные до изобретения телескопа. Конечно же, его размеры были намного меньше квадранта Улугбека.

28



Сегодня в геодезической практике для измерения углов используется ***электронный теодолит*** *(рис. 29a). С его помощью можно, соединившись с любой точкой Земли, измерять, сравнивать и передавать данные (рис. 29b).*

29

a)

b)

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

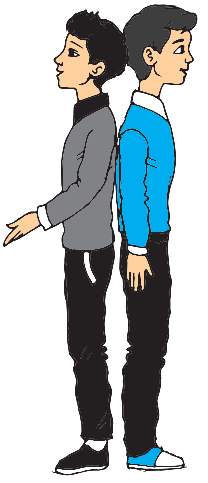
4 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

1. Измерьте линейкой длину, ширину и толщину вашего учебника.
2. Как можно измерить толщину листа вашего учебника? Сможете ли вы измерить линейкой диагональ кирпича?
3. Как плотники направляют доски при сравнении их длин *(рис. 30)*?
4. Измерьте на глаз рост учеников вашего класса. Определите, кто из них самый высокий. Разъясните, как на практике сравнить, кто из двух учеников выше *(рис. 31)*.
5. Измерьте линейкой, сколько в вашей пяди сантиметров. Затем измерьте пядями размеры нескольких предметов (длину, ширину и высоту парты, высоту и ширину окна, длину и ширину доски) и выразите результаты в сантиметрах.

30

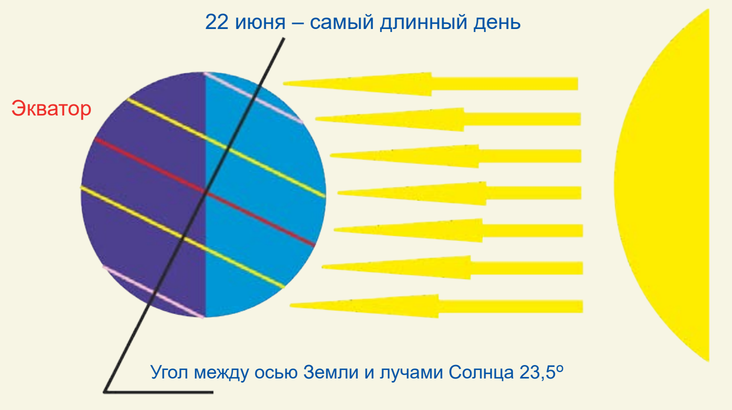
Измерьте длину вашей пяди и шага и запомните их. Это поможет вам в ежедневной жизни!

31



6. Как построить отрезок длиной 1 метр с помощью 30-сантиметровой линейки?
7. Измерьте длину вашего шага. Измерьте в шагах длину и ширину школьного здания, длину и ширину спортплощадки и выразите их в метрах.
8. Ось Земли относительно лучей Солнца, падающих на неё, отклонена на 23,5° *(рис. 32)*. На сколько градусов повернётся Земля вокруг своей оси за 8 часов? За сколько часов Земля повернётся на 90°?
9. Выразите расстояние между Бухарой и Самаркандом в верстах, если 1 верста = 900 *m*.
10. В соответствии с масштабом карты Узбекистана, найдите расстояния между различными городами *(рис. 33)*.

32

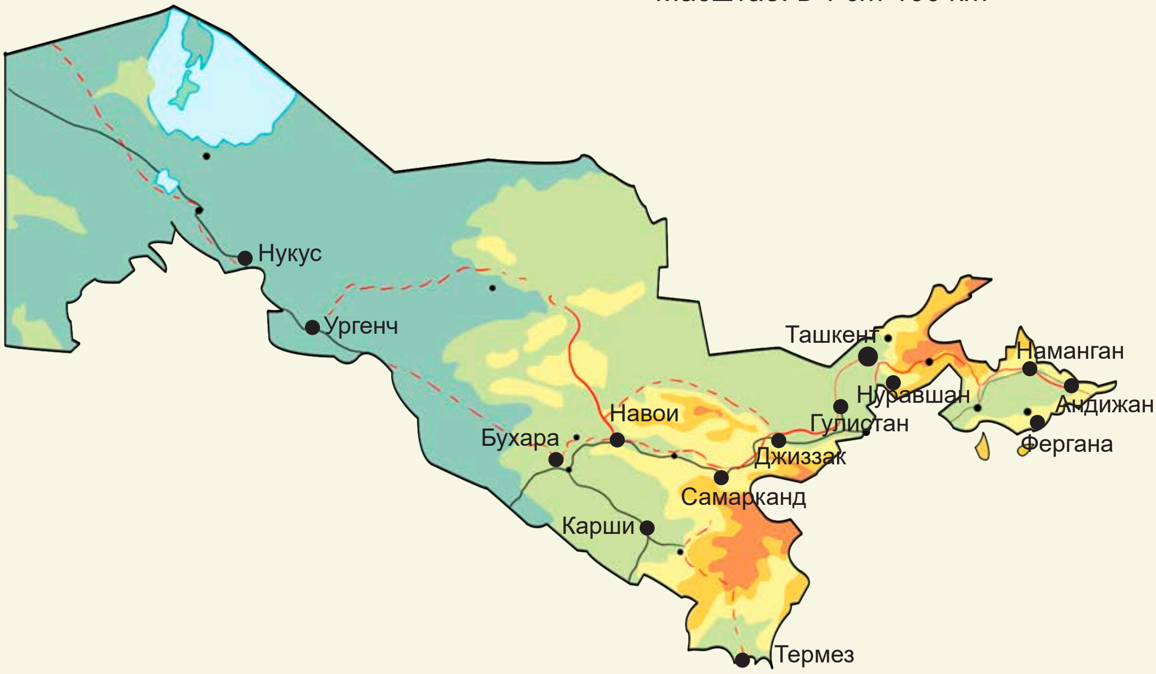


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

33

Масштаб: в 1 *cm* 100 *km*



Образец: *Нахождение расстояния между Ташкентом и Бухарой. По карте с помощью линейки найдём, что расстояние между городами 4,38 cm. Затем по масштабу определим, что расстояние на местности 4,38 · 100 km = 438 km.*
Ответ: 438 *km*.

Во многих странах, наряду с международными единицами длины, используются также другие единицы длины: 1 *дюйм* = 2,54 *cm*, 1 *миля* = 1,609 *km*.

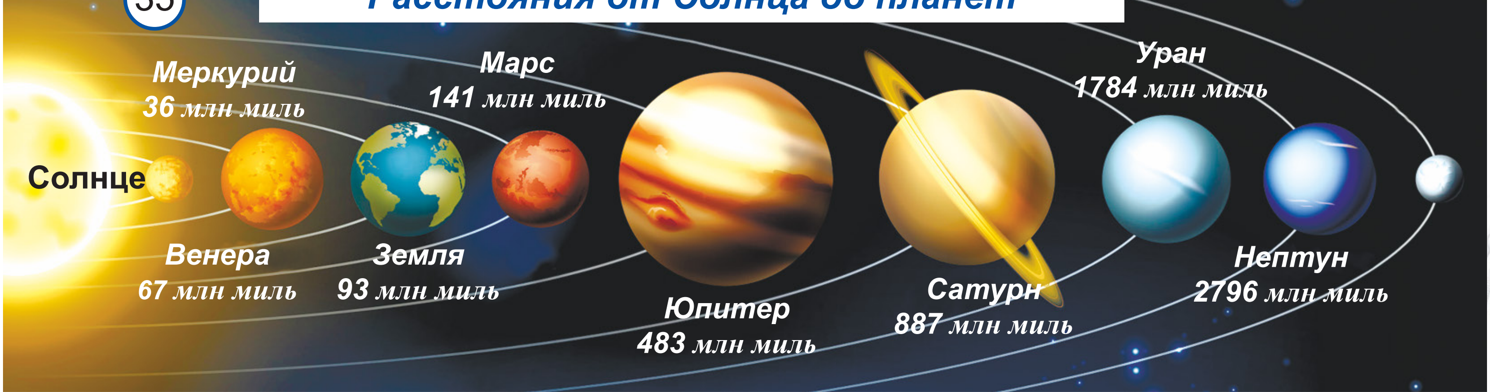
34

11. Диагонали экрана телевизора и монитора компьютера *(рис. 34)* измеряются в дюймах. Выразите в сантиметрах диагональ 15, 17 и 19-дюймового монитора, если 1 дюйм = 2, 54 *cm*.

12. Используя данные на рисунке 35, найдите расстояния от Земли до Солнца и до планет и выразите их в километрах.

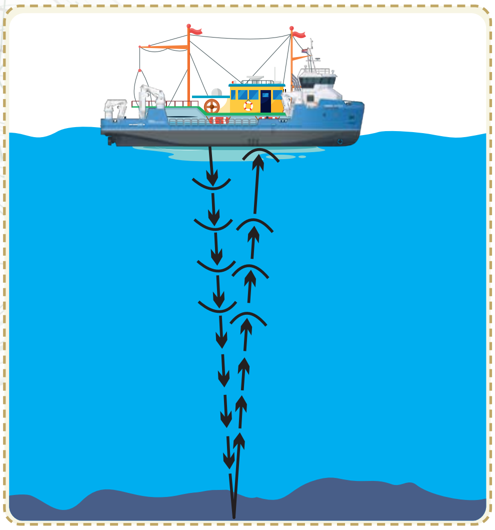
35

Расстояния от Солнца до планет



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



13. *Измерение расстояний эхолокацией.* Для корабля, плывущего в море, очень важно знать глубину моря. Для этого посылается звуковой сигнал ко дну и на корабле подсчитывается время, за которое сигнал возвращается, отразившись от дна.

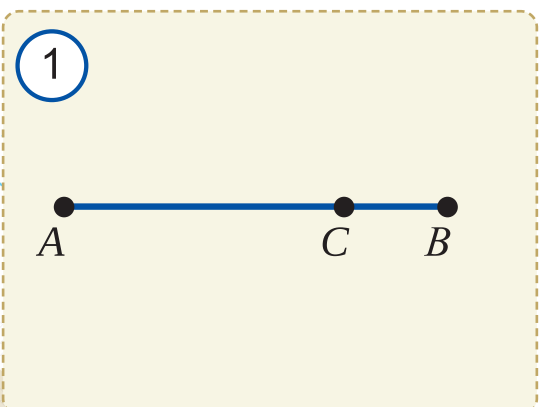
Половина этого времени умножается на скорость движения звука в воде – 1490 m/s, что даёт глубину моря.

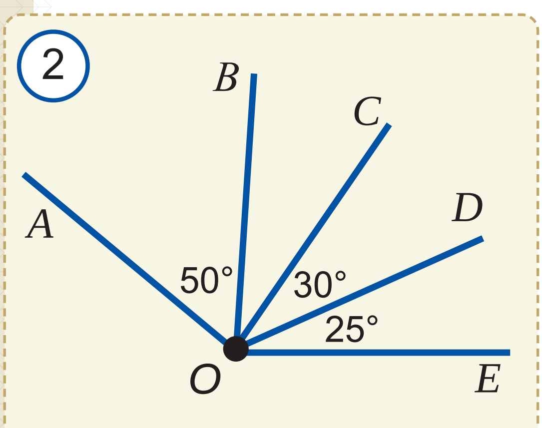
Какова глубина моря, если это время равно: a) 3; b) 10,5; c) 14,6 секундам?

ИКТ в геометрии

Для измерения угла наклона разработаны приложения для мобильных телефонов, с их помощью можно автоматически измерить угол наклона. На рисунке показано, как с помощью такой программы измерить угол наклона Пизанской башни, которая находится в Италии.

Образец контрольной работы 1





Контрольная работа состоит из двух частей:

I. Теоретическая часть. Сколько геометрических фигур вы узнали до настоящего времени? Дайте их определения и выпишите их свойства.

II. Практическая часть. Решите следующие задачи (задача 4 для желающих получить оценку «отлично»):

1. Найти длину отрезка BC, если для точек A, B и C, лежащих на одной прямой: $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm.

2. $AB = 48$, $AC = 3BC$, $BC = ?$ *(рис. 1).*

3. Найти градусную меру угла BOC, если $\angle AOE = 140°$ *(рис. 2).*

4*. Чему равна градусная мера угла, образованного часовыми стрелками в 5.00 часов?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Сокровища математических задач

Известно, что в последнее время компьютерные информационные технологии стремительно развиваются и быстро проникают в образовательную систему. Сегодня Интернет содержит так много источников информации, что воспользоваться этим богатством для каждого молодого человека крайне необходимо и полезно. Со специальных web-сайтов можно узнать на русском, узбекском, английском и других языках последние новости из мира математики, найти в компьютерных библиотеках большое количество электронных учебников. Кроме того, с их помощью можно найти множество теоретических материалов, методических руководств, много задач, примеров с указаниями и решениями. В различных источниках даны сведения о проводимых математических конкурсах и олимпиадах, о занимательных задачах и их решениях.

Ниже приведён ряд Интернет-адресов источников информационных ресурсов. Мы рекомендуем по возможности использовать их для самостоятельного изучения математики и интересующих вас тем геометрии:

uzedu.uz – официальный сайт Министерства народного образования, информационно-образовательный портал;

ziyonet.uz – социально-образовательный портал «Ziyonet»;

dr.rtm.uz – платформа новых учебников и методических пособий в электронном виде, презентаций, мультимедийных приложений, видеоуроков и цифровых ресурсов;

maktab.uz – платформа видеоуроков и других материалов онлайн обучения и школьных учебных программ для 1-11 классов;

stesting.uz – электронная платформа подготовка к международным исследованиям по оценке для учащихся;

masofa.uz – портал дистанционного обучения национального исследовательского института повышения квалификации и обучения новым методикам педагогов имени А. Авлоний;

onlinedu.uz – электронная платформа «Непрерывное профессиональное образование» национального исследовательского института повышения квалификации и обучения новым методикам педагогов имени А. Авлоний;

skillsgrover.uz – платформа обучения математики и оценивания знаний учащихся в Финляндии (на узбекском языке);

khanakademy.org – сайт дистанционного обучения «Академия Хана» (на английском языке);

xanakademiyasi.uz – платформа видеоуроков по математике, информатике, химии, физике, экономике, биологии и астрономии (на узбекском языке);

school.edu.ru – портал всеобщего образования;

problems.ru – поисковая система математических задач;

geometry.net – учебные материалы по алгебре и геометрии (на английском языке);

mathproblem.narod.ru – математические кружки и олимпиады;

ixl.com – портал дистанционного обучения математике (на английском языке);

mathkang.ru – сайт международного конкурса по математике «Кенгуру»;

olimpia.uz – сайт международного конкурса по математике «Кенгуру» (на узбекском языке);

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

brilliant.org – сайт дистанционного обучения математике;

geogebra.com – бесплатная программа, позволяющая строить динамичные («живые») объекты в алгебре и геометрии;

yaklass.ru – платформа онлайн образования для учеников и учителей;

schulen-ans-netz.de – сайт «Интернет школы» Германии (на немецком языке);

studienkreis.de – сайт учебных кружков Германии (на немецком языке);

educasource.education.fr – образовательный сайт Франции (на французском языке);

educmath.inrp.fr – цифровые ресурсы математического образования Франции (на французском языке);

mat-game.narod.ru – математическая гимнастика, математические задачи и головоломки;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

GeoGebra – программа «живых» чертёжей по математике

GeoGebra — это бесплатная, динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру и другие направления в одном удобном для использования пакете. GeoGebra разработана в 2002 году для изучения и преподавания математики в школе австралийским математиком **Маркусом Хохенвартером** и международным сообществом программистов на языке Java. Приложение поддерживает работу в различных операционных системах. В настоящее время программу GeoGebra широко используют в мире миллионы пользователей.

Преимущества программы GeoGebra:

- распространяется бесплатно;
- многоязычный интерфейс;
- простота и удобство графического интерфейса;
- возможность установки на различные операционные системы и устройства (включая планшеты и смартфоны) и наличие онлайн версии;
- наличие отрытых баз примеров дополнительних пользователей.

Элементы программы GeoGebra

Множество калькуляторов
Предназначено для исследования функций, решения уравнений, построения геометрических фигур и 3D объектов.

Графический калькулятор
Предназначен для построения графиков различных функций, исследования уравнений и описания информации.

3D калькулятор
Предназначен для изображения различных чертежей, геометрических фигур и объектов в 3D (трёхмерном измерении).

Геометрия
Предназначен для черчения и изменения геометрических фигур.

CAS калькулятор
Предназначен для решения уравнений, преобразования алгебраических выражений, вычисления производных и интегралов.

GeoGebra в программе геометрии

Программа GeoGebra предназначена для решения следующих геометрических задач: построение всех видов геометрических фигур с помощью точки, отрезка, вектора, сегмента и прямой, наблюдение за их динамическим изменением, а также построение прямой, параллельной или перпендикулярной заданной прямой, построение серединных перпендикуляров, биссектрис углов, определение длин отрезков и площадей многоугольников.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Онлайн ресурсы по использованию GeoGebra

•Получите детальные сведения о программе GeoGebra на официальном веб-сайте (GeoGebra.org) и скачайте её (бесплатное приложение).

• На Youtube канале GeoGebra (канал youtube.com GeoGebraChannel) имеются видео-уроки по изучению и примеры использования программы GeoGebra.

• На сайте для сохранения GeoGebra (tube.geogebra.org) пользователи сайта делятся своими приложениями и планами уроков.

Установка программы GeoGebra

Указания по установке GeoGebra на компьютер:

1. Откройте браузер Google Chrome и зайдите на официальный сайт GeoGebra: geogebra.org. Перейдите в раздел установки – «App Downloads».

2. Выберите подходящее для вашего компьютера приложение:

a) для использования веб-версии GeoGebra через браузер Chrome прав администратора компьютера не требуется, однако во время использования приложения требуется подключение к Интернету;

b) приложение GeoGebra – приложение, которое может использоваться в операционных системах Windows, Mac OS X, Linux без подключения к Интернету.

Указания по установке приложения GeoGebra на планшет:

1. Зайдите Google Play Market на Android-устройстве или в Apple Store на iOS -устройстве.

2. Введите в строке поиска GeoGebra.

3. Установите приложение на ваше устройство.

4. Альтернативный вариант установки – перейдите на официальный сайт GeoGebra и перейдите в раздел установки приложений – **«App Downloads»**, откуда можно скачать приложение на ваш планшет.

Выполнение практических упражнений на GeoGebra

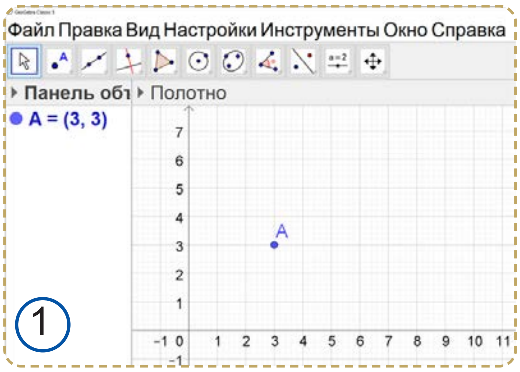
1. Построение точки.

Точка – самая маленькая геометрическая фигура. Для её построения:

1) выберем инструмент «Точка» нажатием левой кнопкой мыши;

2) щёлкнем левой кнопкой мыши в рабочей области, там, где хотим поставить точку;

3) на экране появится точка *(рис. 1)*.



Нажимая левой кнопкой мыши на изображение точки, её можно перемещать.

Цвет, стиль, обозначение точек можно изменять. Для этого следует воспользоваться панелью объектов, расположенной в левой части интерфейса.

Нажатием правой кнопкой мыши по инструменту «Точка» откроется дополнительное окно. Нажатием левой кнопкой мыши на строку «Свойства» открывается новое окно, в котором можно выбрать цвет и стиль точки.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5 ВИДЫ УГЛОВ

5.1. Прямой, острый и тупой углы

Углы, в зависимости от их градусной величины, делят на несколько видов. Если градусная величина угла:

меньше 90° (рис. *1a*), то угол называют *острым*;

равен 90° (рис. *1b*), то угол называют *прямым*;

больше 90° и меньше 180° (рис. *1c*), то угол называют *тупым*.

На чертеже прямой угол выделяют так, как показано на рисунке 1*b*.

Задача. Пусть $\angle AOD = 135°$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$ (*рис.2a*);

a) определите, сколько на чертеже острых, тупых и прямых углов;

b) определите угол между биссектрисами углов AOB и COD.

Решение. a) Пусть $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD = \alpha$. Тогда, по основному свойству измерения углов, $\angle AOD = \alpha+\alpha+\alpha = 135°$. Откуда $\alpha = 45°$. Значит, $\angle AOC = 2\alpha = 90°$, $\angle BOD = 2\alpha = 90°$. Таким образом, на чертеже три острых угла, два прямых угла и один тупой угол.

b) Пусть OO_1 и OO_2 соответствующие биссектрисы (*рис. 2b*). Так как $\angle AOB = \angle COD = \alpha$, то, по определению биссектрисы угла:

$$\angle O_1OB = \angle O_2OC = \frac{\alpha}{2}.$$

Находим искомый угол:

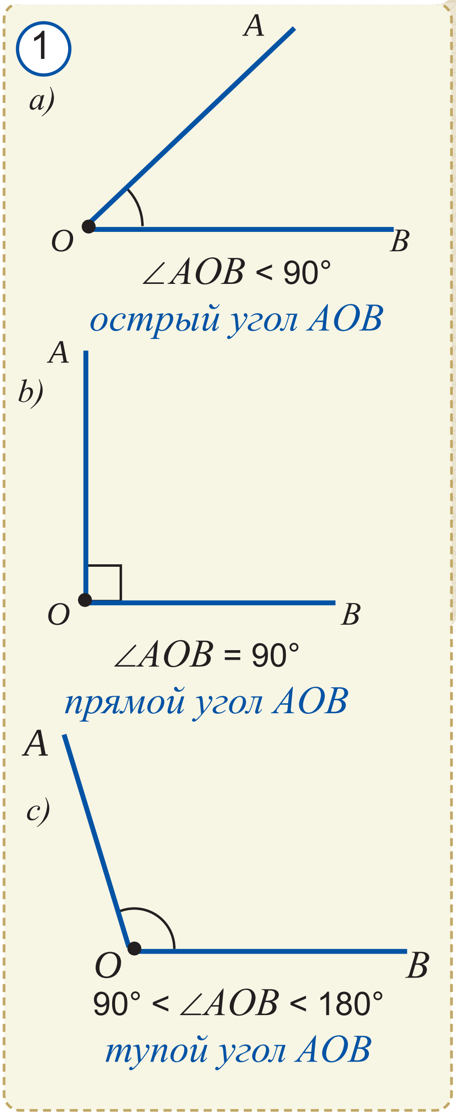
$$\angle O_1OO_2 = \angle O_1OB + \angle BOC + \angle COO_2 =$$

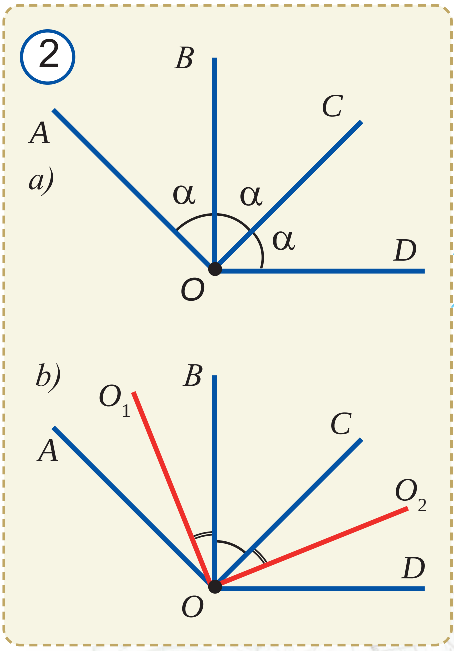
$$= \frac{\alpha}{2} + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 90°,$$

или $\angle O_1OO_2$ – прямой угол.

Ответ: угол между биссектрисами углов AOB и COD равен 90°.

Примечаеие. Обычно величины углов обозначают малыми буквами греческого алфавита: α (альфа), β (бета), γ (гамма) , ...

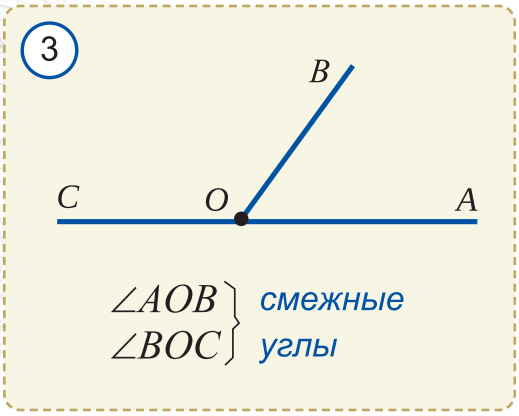


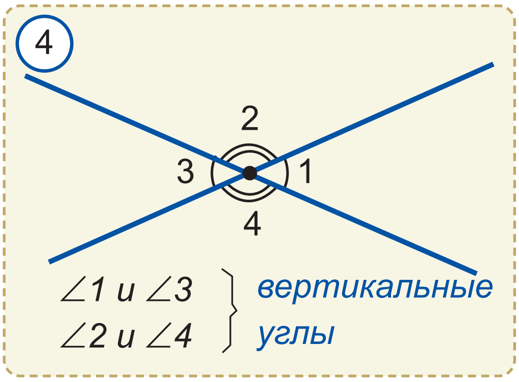


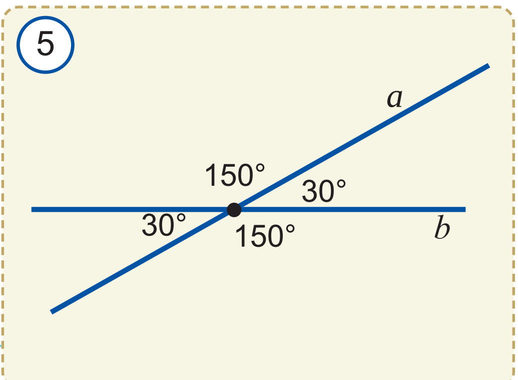
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5.2. Смежные и вертикальные углы







Если при наложении одних из сторон двух углов две другие стороны образуют дополняющие друг друга углы, то они называются *смежными углами*.

На рисунке 3 изображены смежные углы AOB и BOC. OB их общая сторона, а лучи OC и OA лежат на одной прямой и дополняют друг друга.

Это показывает, что угол AOC – развёрнутый. С другой стороны, по определению угол AOC равен сумме углов AOB и BOC. Наши рассуждения приводят к следующему свойству:

Свойство: **Сумма смежных углов равна 180°.**

Из этого свойства непосредственно вытекают следующие выводы:

Вывод 1. **Если смежные углы равны, то они являются прямыми.**

Вывод 2. **Угол, смежный прямому углу, также прямой.**

Вывод 3. **Если один из смежных углов острый (тупой), то второй будет тупым (острым).**

Если лучи, являющиеся продолжением сторон одного угла, образуют стороны второго угла, то эти углы называют ***вертикальными углами***.

На рисунке 4 углы $\angle 1$ и $\angle 3$ – вертикальные углы. Аналогично, углы $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные углы. Теперь докажем следующее свойство вертикальных углов.

Свойство: **Вертикальные углы равны.**

Пусть заданные углы $\angle 1$ и $\angle 3$ вертикальные *(рис. 4)*. Докажем, что $\angle 1 = \angle 3$.

Доказательство: Так как $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Так как $\angle 2$ и $\angle 3$ также смежные, то $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Из этих двух равенств получаем: $\angle 1 + \cancel{\angle 2} = \cancel{\angle 2} + \angle 3$, то есть $\angle 1 = \angle 3$.

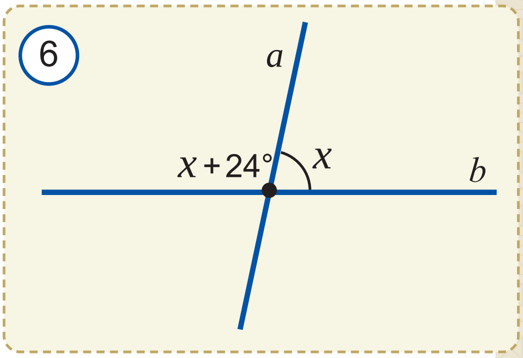
Свойство доказано.

Итак, при пересечении двух прямых образуются вертикальные и смежные углы. Каждые два смежных угла составляют в сумме один развёрнутый угол. Если один из них больше 90°, то второй будет меньше 90°. Тот из смежных углов, градусная мера которого меньше, принимается по определению за *угол между пересекающимися прямыми*. Например, на рисунке 4 угол между прямыми составляет 30°. Говорят также, что «*прямые пересекаются под углом 30°*».

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача. Один из двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, больше второго на 24°. Найдите углы между этими прямыми.



Решение. Как вы знаете, при пересечении двух прямых a и b образуются смежные и вертикальные углы *(рис. 6)*. Однако вертикальные углы равны между собой.

Значит, в условии говорится о смежных углах. Если обозначить меньший из них через x, то больший угол равен x+24°. По свойству смежных углов $x+x+24°=180°$. Тогда x=78° и $x+24°=102°$.Таким образом, при пересечении прямых a и b получаются углы 78°, 102°, 78°и 102°.

Ответ: при пересечении прямых a и b получаются углы 78°, 102°, 78° и 102°.

5.3. Последовательность рассуждений и их взаимосвязь при изучении геометрии

Мы уже познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и их свойствами. Например, в пройденной теме мы узнали о вертикальных углах и доказали, что они равны между собой. Вспомните, мы не только познакомились со свойствами, но и доказали утверждение: «Вертикальные углы равны», проведя необходимые рассуждения. Это было наше первое знакомство с понятием «доказательсво». Древнегреческий математик Фалес из Милета, живший в 625 – 527 гг. до н.э., был первым, кто ввёл в геометрию понятие «доказательства».

Доказать некоторое утверждение – это значит показать путём логических рассуждений, что оно верно. Утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью доказательства, называется *теоремой*. Формулировка теоремы состоит обычно из условия и заключения. В первой части – условии теоремы – речь идёт о том, что известно, в заключении – о том, что требуется доказать.

Теорема. **Если смежные углы равны, то каждый из них является прямым углом.**

Условие этой теоремы: *равенство смежных углов*, заключение: *каждый из них является прямым углом*.

Доказать теорему – это значит, воспользовавшись её условием и тем, что уже известно и доказано ранее, путём рассуждений убедиться в справедливости утверждения, содержащегося в заключительной части теоремы. Уточнение того, о чём говорится в условии и заключении теоремы, прояснит её содержание и облегчит процесс доказательства. Поэтому перед доказательством полезно выделить из формулировки условие и заключение. Например, приведённую выше теорему перепишем в виде:

Дано: Смежные углы $\angle A$ и $\angle B$, $\angle A = \angle B$	⇒	***Надо доказать:*** $\angle A = \angle B = 90°$
↑ ***Условие теоремы***		↑ ***Заключение теоремы***

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

В общем случае, разбив формулировку теоремы на условие и заключение, её можно схематически представить в следующем виде:

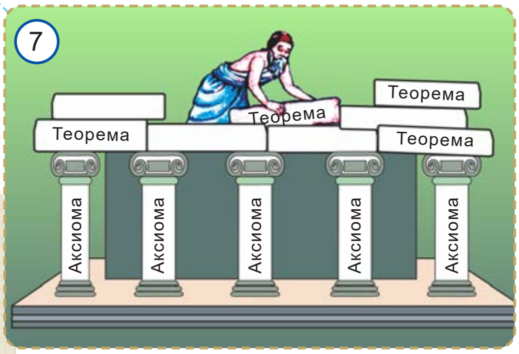
Основные понятия и аксиомы. Точка, прямая и плоскость считаются основными понятиями геометрии. Мы не определяем их. *Основные понятия геометрии* – это понятия, ясные сами по себе. Если сравнить геометрию со зданием, то основные понятия – это его фундамент. С помощью основных понятий формулируются *определения* новых понятий и фигур, т. е. объяснения того, что это такое.

Кроме того, мы приняли в качестве очевидных те свойства, которыми обладают точка, прямая и плоскость. Такие свойства называются *аксиомами*. Если вы обратили внимание, все аксиомы в учебнике выделены в основном тексте значком. Приведём примеры аксиом, с которыми вы уже познакомились (перепишите оставшиеся аксиомы, разыскав их на страницах учебника):

1. Какова бы ни была прямая на плоскости, существуют точки, принадлежащие ей и не принадлежащие ей.

2. Через любые две точки можно провести только одну прямую.

3. Для любых трёх точек на прямой только одна лежит между двумя другими.



Греческий учёный Платон обнаружил замечательную закономерность в геометрии: логически рассуждая, можно находить новые результаты, исходя из уже изученных свойств, наличие которых было установлено. Используя эту возможность, остальные свойства формулируются в виде теорем, которые доказывают путём логических размышлений, основываясь на аксиомах и доказанных до этого свойствах.

Пользоваться свойствами, не доказанными в результате размышлений (несмотря на их очевидность), запрещается.

Так как такое занятие повышает мыслительную способность учащихся, то геометрия стала основным предметом в школах.

Таким образом, если предполагать, что геометрия – это здание *(рис. 7)*, то начальные понятия и аксиомы – это фундамент. А кирпичи, сложенные на этом фундаменте, состоят из сформулированных новых понятий и свойств, доказанных в виде теорем.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Геометрические аналогии. Иногда при решении задач на свойства отрезков и углов используют одинаковые методы или подходы. Причина в том, что некоторые свойства этих фигур схожи. В науке такую схожесть называют аналогией. Разъясним понятие аналогии на следующем примере.

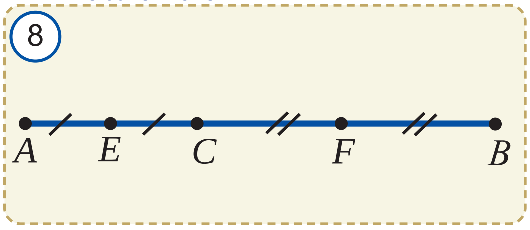
Задача 1. На отрезке AB длиной 32 *cm* взята точка C. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и CB *(рис. 8)*.

Задача 2. Луч OC делит угол AOB, равный 120°, на два угла. Найдите величину угла между биссектрисами углов AOC и COB *(рис. 9)*.

На первый взгляд, это разные задачи, так как в одной из них говорится об отрезках, а во второй – об углах.

Но, несмотря на это, между ними есть и общее. В каждой задаче целое делится на две части. С другой стороны, середина отрезка делит отрезок на две равные части, точно так же биссектриса делит угол пополам.

Решение.



Пусть точки E и F середины отрезков AC и CB соответственно. Тогда

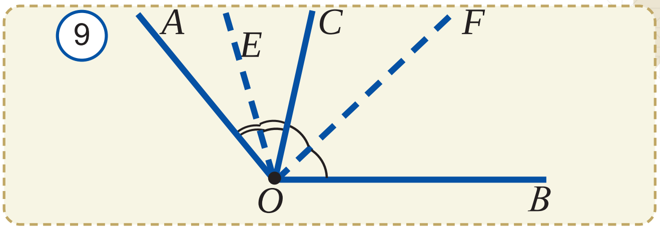
$$EC = \frac{AC}{2} \quad \text{и} \quad CF = \frac{CB}{2}.$$

Откуда:

$$EF = EC + CF = \frac{AC}{2} + \frac{CB}{2} = \frac{AB}{2}$$

$EF = 32 : 2 = 16$ (cm).

Решение.



Пусть лучи OE и OF биссектрисы углов $\angle AOC$ и $\angle COB$ соответственно. Тогда

$$\angle EOC = \frac{\angle AOC}{2} \quad \text{и} \quad \angle COF = \frac{\angle COB}{2}.$$

Откуда:

$$\angle EOF = \angle EOC + \angle COF = \frac{\angle AOC}{2} + \frac{\angle COB}{2} = \frac{\angle AOB}{2}$$

$\angle EOF = 120° : 2 = 60°$.

Вы видите, методы решения обеих задач также похожи. Поэтому метод рассуждения при решении первой задачи можно последовательно применить к решению второй задачи. В этом случае говорят: «решение второй задачи аналогично решению первой задачи».

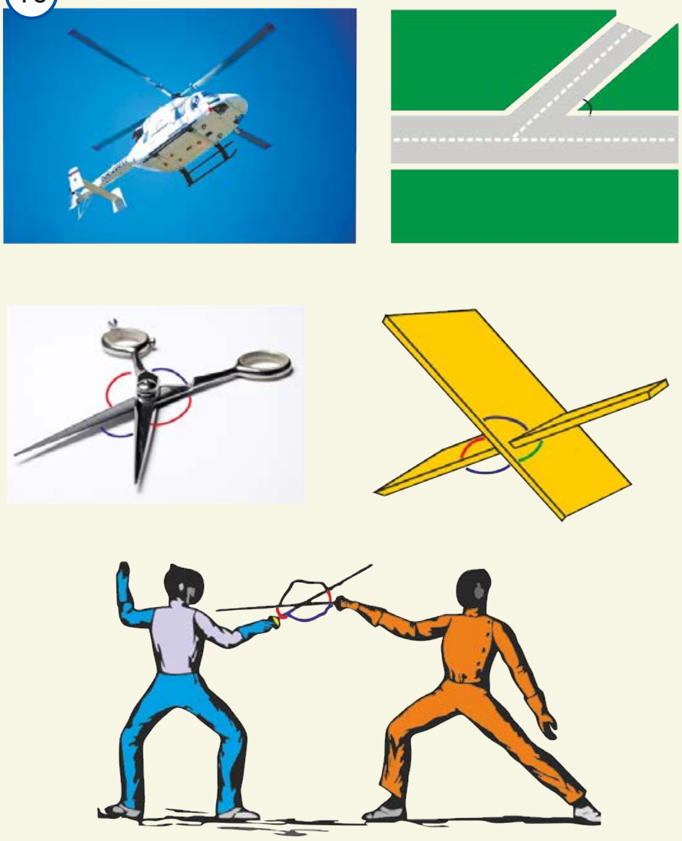
Вопросы к теме

1. На какие виды делятся углы по величине?
2. Приведите примеры острых, тупых и прямых углов из окружающей вас среды.
3. Какие углы называют смежными?
4. Чему равна сумма смежных углов? Обоснуйте свой ответ.
5. Могут ли быть равными смежные углы? В каких случаях?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

10



6. Какие углы называют вертикальными?

7. Объясните основное свойство вертикальных углов.

8. Какие углы вы видите на рисунке 10?

9. *Могут ли оба смежных угла быть: a) острыми; b) прямыми; c) тупыми?*

10. *Будут ли равны углы, если равны смежные им углы?*

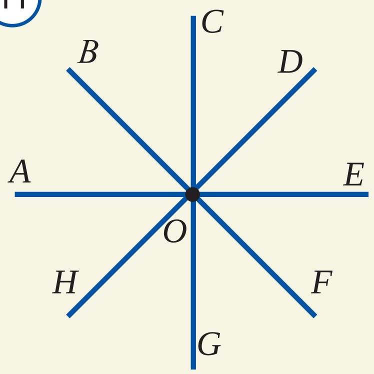
11. *Что такое определение? Какие понятия принимаются без доказательства?*

12. *Что такое теорема? Из каких частей она состоит?*

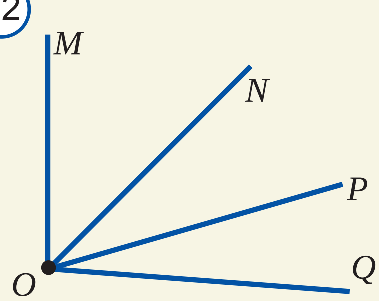
13. *Как доказывают теоремы? Что мы понимаем под доказательством?*

14. *Что такое аксиома?*

11



12



Практические упражнения и приложения

1. Начертите три угла и обозначьте их $\angle AOB$, $\angle MNL$, $\angle PQR$ соответственно. Измерьте их транспортиром и определите их виды.

2. Начертите луч OA. Постройте с помощью транспортира углы AOB, AOC и AOD с угловыми величинами 25°, 72° и 146° соответственно.

3. Какой угол образует биссектриса прямого угла с его сторонами?

4. Луч OC биссектриса угла AOB, а луч OD биссектриса угла AOC. Во сколько раз угол AOB больше угла DOC?

5a. Сколько на рисунке 11: а) острых; б) тупых; в) прямых; г) развёрнутых углов?

5b. Сколько на рисунке 12 имеется острых и сколько тупых углов?

6. Сможете ли вы получить прямой угол, сгибая лист бумаги?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7. Когда часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол? Приведите примеры.

8. Определите угол между часовой и минутной стрелками *(рис 13)*.

9*. На сколько градусов повернётся минутная стрелка часов за: а) 1 час; б) 6 часов; в) 2 минуты?

10. Сколько градусов составляет угол, смежный углу: a) 20°; b) 90°; c) 145°; d) 9°?

11. Сколько градусов составляет угол, смежный углу: a) 34°; b) 109°; c) 5°; d) 167°?

12. Найдите смежные углы, если один из них в три раза больше другого.

13. Найдите смежные углы, если один из них в четыре раза меньше другого.

14. Найдите неизвестный угол x на рисунке 14.

15. Найдите смежные углы, если отношение их градусных мер равно: a) 2:7; b) 11:25; c) 1:9.

16. Один из углов, полученных при пересечении двух прямых, равен 40°. Найдите остальные углы.

17. $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные. Заполните таблицу.

$\angle 1$	34°			19°	175°
$\angle 2$		118°	132°		

18. $\angle 1$ и $\angle 2$ смежные. Заполните следующую таблицу.

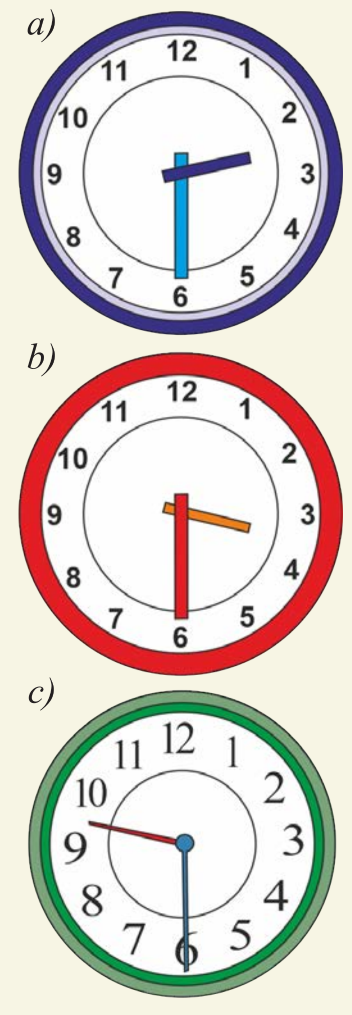
$\angle 1$	12°		120°		45°
$\angle 2$		18°		165°	

19*. Найдите $\angle ABD$, если $\angle ABC$ = 30°, $\angle CBD$ = 80°. Рассмотрите все возможные случаи.

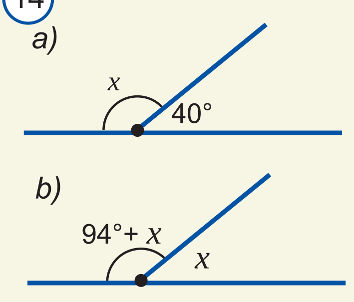
20*. Найдите $\angle MOL$, если $\angle MON$ = 45°, $\angle NOL$ = 104°. Рассмотрите все возможные случаи.

21. Найдите неизвестный угол x на рисунке 15.

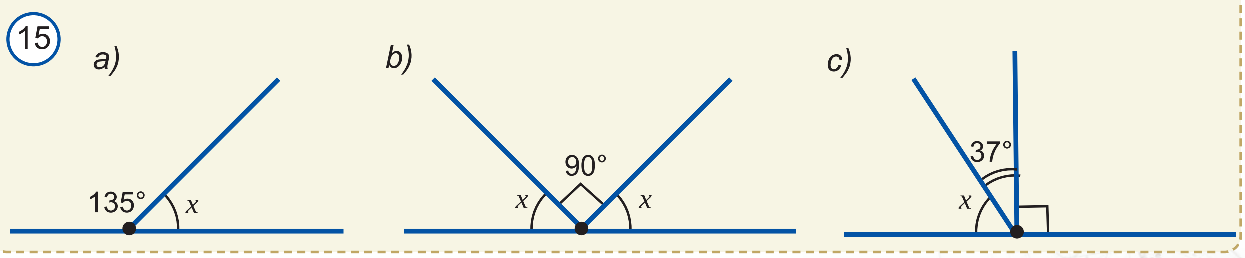
13



14



15

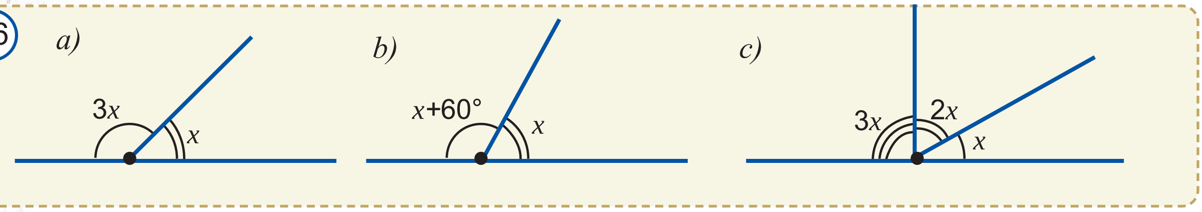


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

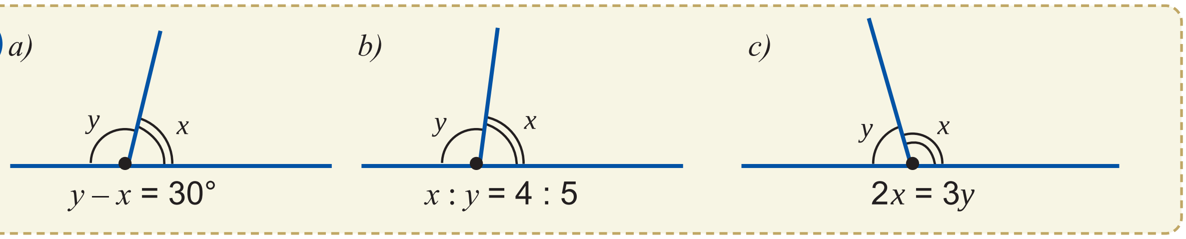
22*. Найдите неизвестный угол x на рисунке 16.

16



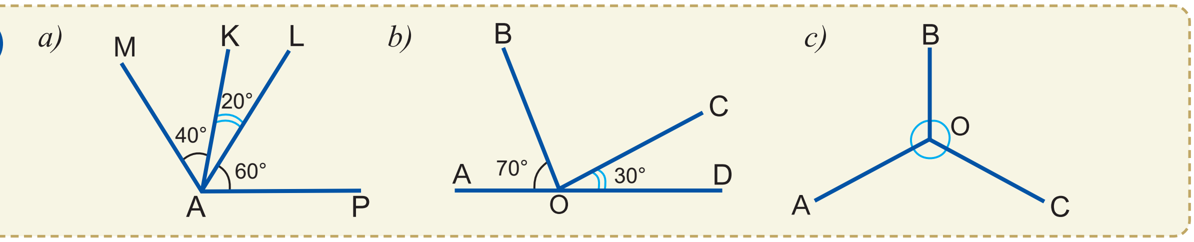
23*. По рисунку 17 составьте задачу и решите её.

17



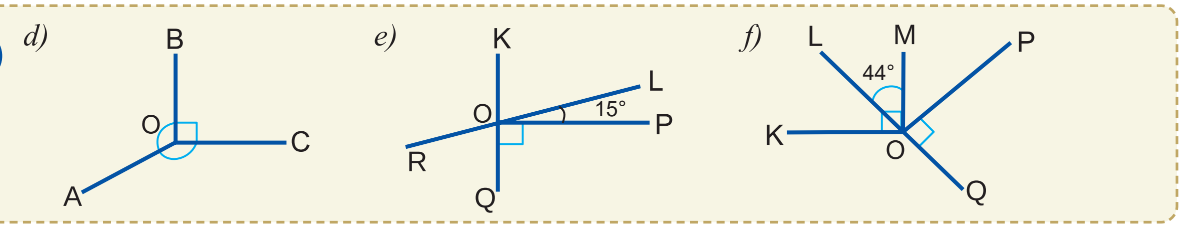
24. Найдите градусные меры углов на рисунке 18.

18



25. Найдите градусные меры углов на рисунке 19.

19

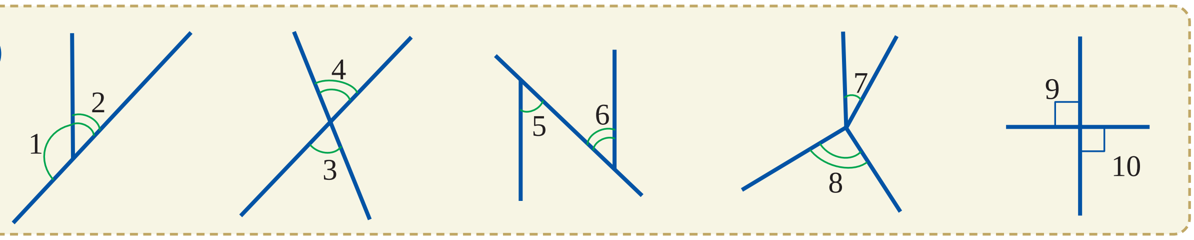


26*. Начертите при помощи транспортира угол $\angle PQR = 45°$. Постройте смежный ему угол с общей стороной QR и найдите его градусную меру.

27*. Начертите при помощи транспортира угол $\angle MNL = 120°$. Постройте смежный ему угол с общей стороной MN и найдите его градусную меру.

28. На рисунке 20 найдите пары: а) вертикальных; b) смежных углов.

20



29. Угол AOB разделён на четыре равных угла лучами OC, OD и OE. Биссектрисами каких углов будут эти лучи?

30*. На прямой даны точки A, B и C. Какие из этих точек лежат между другими, если $AB = 42\ cm$, $AC = 3\ dm\ 2\ cm$ и $BC = 74\ cm$? Обоснуйте ответ.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

6 ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

6.1. Перпендикулярные прямые

Активизирующие упражнения

Что можно сказать об углах, образующихся при пересечении двух прямых, если один из них прямой угол *(рис. 1)*?

Прямые, пересекающиеся под прямым углом (углом 90°), называются *перпендикулярными углами*.

Наверняка вы видели, как зимой с крыш перпендикулярно свисают сосульки *(рис. 2)*. На рисунке 1 прямая a перпендикулярна другой прямой b. Перпендикулярность этих прямых обозначается специальным значком $a \perp b$, что читают так: «прямая a перпендикулярна прямой b» или «прямые a и b взаимно перпендикулярны».

При пересечении перпендикулярных прямых образуются четыре прямых угла.

Теорема. **Через каждую точку прямой можно провести единственную перпендикулярную ей прямую.**

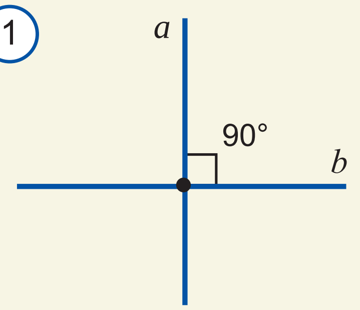
Доказательство. Пусть даны прямая AB и точка O *(рис. 3)*. Известно, что от луча OB можно в заданную полуплоскость отложить угол COB с вершиной в точке O, равный 90°. Тогда прямая CO будет перпендикулярна прямой AB.

Докажем теперь единственность этой прямой. Предположим, что существует ещё одна прямая DO, проходящая через точку O и перпендикулярная данной прямой AB. В таком случае, каждый из углов DOB и COB равен 90° и отложен от данного луча OB в заданную полуплоскость. Однако от луча OB в заданную полуплоскость может быть отложен только один угол, равный 90°.

Следовательно, через точку O проходит только одна прямая, перпендикулярная прямой AB.

Теорема доказана.

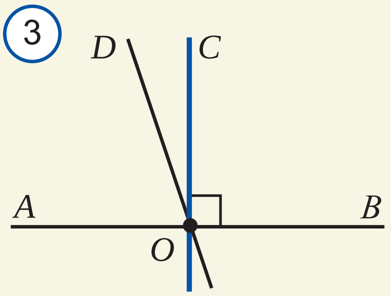
1



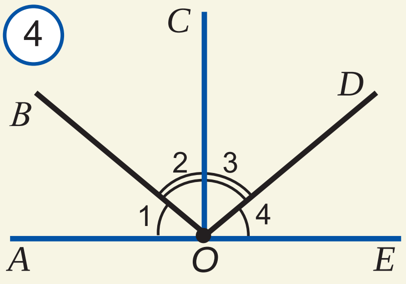
$a \perp b$ – *прямая a перпендикулярна прямой b*

2

3



4



Задача. Доказать, что $CO \perp AE$, если $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ *(рис. 4)*.

Решение. Пусть $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$, $\angle 2 = \angle 3 = \beta$. По свойству измерения углов:

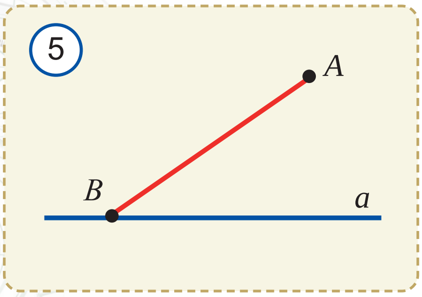
$\angle AOE = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2\alpha + 2\beta = 180°$, $2(\alpha+\beta) = 180°$, т.е. $\alpha + \beta = 90°$.

Тогда:

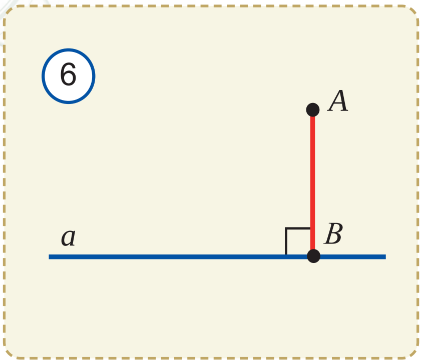
$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = \alpha + \beta = 90°$, т.е. $CO \perp AE$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Соединим точку A с некоторой точкой B прямой a. Если прямая, на которой лежит отрезок AB, не перпендикулярна прямой a, то этот отрезок называется *наклонной* (*рис. 5*).



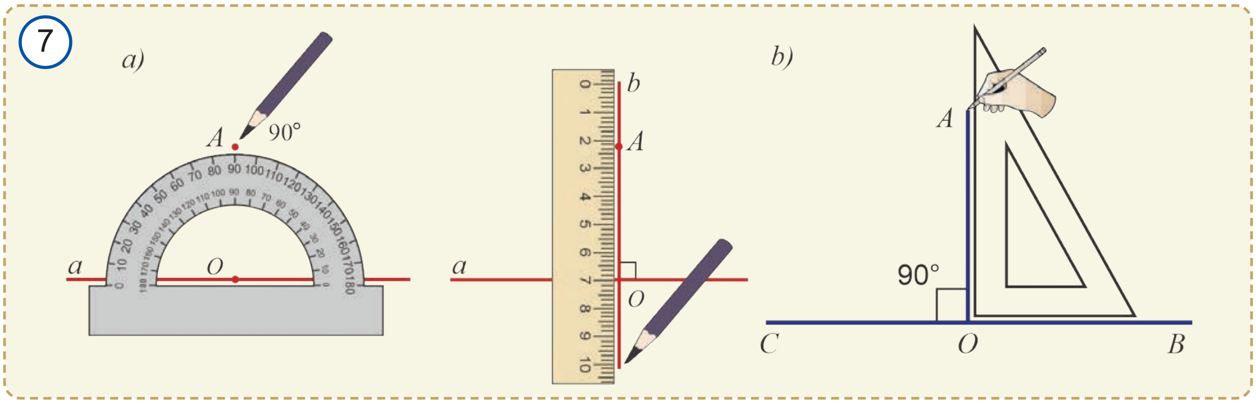
Если же отрезок AB лежит на прямой, перпендикулярной прямой a, то этот отрезок называется *перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую a*.

На рисунке 6 отрезок AB – перпендикуляр, опущенный на прямую a. Точка B – *основание* наклонной (перпендикуляра).

Способы построения перпендикуляра к прямой:

1-й способ. С помощью транспортира (*рис. 7a*).

2-й способ. С помощью чертёжного угольника (*рис. 7b*).



Начертите прямую. Из точки, не лежащей на ней, опустите на прямую перпендикуляр и несколько наклонных. Измерьте длины перпендикуляра и наклонных. Какой отрезок имеет наименьшую длину? Сформулируйте свой ответ в виде предположения. Можно ли принять это предположение без доказательства или его обязательно нужно доказать?

Геометрическое исследование

Упражнение. На рисунке 8 дан план фермерского хозяйства.

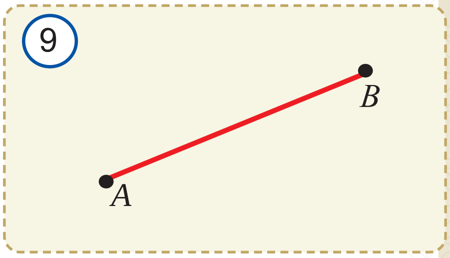
1. Фермер намерен проложить дорогу от дома до фермы. Сумеете ли вы посоветовать ему, по какой прямой следует направить дорогу? Начертите этот путь на плане. Почему вы его выбрали?

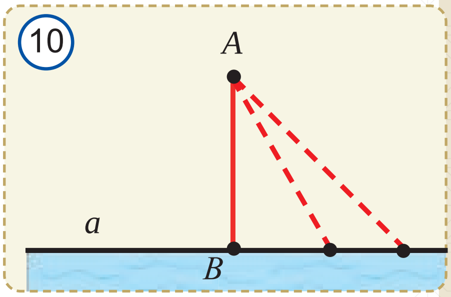
2. Фермер хочет проложить кратчайшую дорогу от фермы до канала. Какой путь вы ему посоветуете? Почему? Начертите этот путь.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

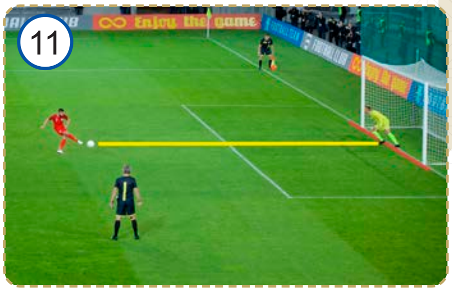
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вы знаете, что кратчайший путь, соединяющий точки A и B, – это отрезок AB *(рис. 9)*. Поэтому в младших классах длину отрезка AB называли *расстоянием от точки A до точки B.* Подобно этому *расстоянием от точки A до прямой a* естественно назвать длину перпендикуляра AB, опущенного из точки A на прямую a. Легко понять, что этот отрезок будет короче любой наклонной, опущенной из точки A на прямую a *(рис. 10)*. Однако это утверждение нуждается в доказательстве, которое будет предложено позже.

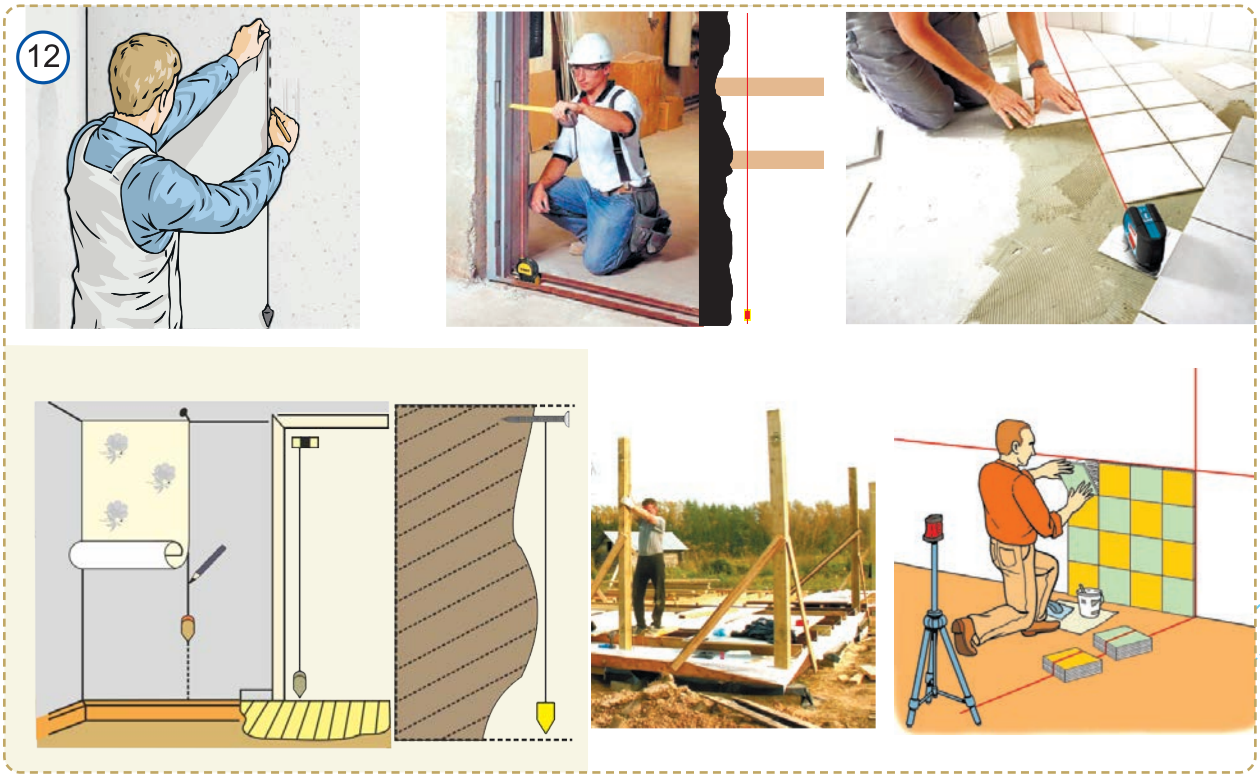




Знать расстояние от точки до прямой нужно и в спорте. Например, 11-метровый пенальти выполняет игрок, находящийся на расстоянии 11 метров от ворот *(рис. 11)*.



При строительстве дома перпендикулярность стен по отношению к полу проверяется с помощью *отвеса (рис. 12).* Современные строители пользуются также лазерными или электронными отвесами.

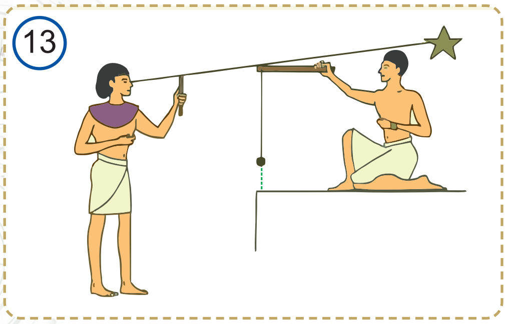


На рисунке 13 приведён способ измерения углов в Древнем Египте. Расскажите каким образом выполняли эту работу древние строители.

Для проведения прямых на земле используют *нивелир*. Пользуясь рисунком 14, объясните, как нужно использовать этот прибор.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



6.2. Метод доказательства от противного

По этому методу, если предположить, что несмотря на выполнение условия теоремы заключение не выполняется, то мы придём к противоречию. Пусть перпендикуляр, проведённый через точку O прямой AB, не один, то есть существует ещё одна прямая DO, перпендикулярная прямой AB *(рис. 3)*.

В таком случае каждый из углов DOB и COB отложен на луче OB и равен 90°. Однако это противоречит аксиоме о единственности угла определённой градусной величины, отложенного на луче OB. Мы получили противоречие.

Следовательно, через точку O прямой AB можно провести единственный перпендикуляр.

Схема применения метода доказательства от противного

Теорема (прямая)	***Если имеет место A, то имеет место B.***
Доказательство:	
Предполагаем противное	Предполагаем противоположное заключение данной теоремы, т.е. условие теоремы выполняется, но заключение не выполняется: ***Если имеет место A, то не имеет место B.***
Предполагаем противополож-ное	Проводим логические умозаключения, опираясь на ранее доказанные теоремы или аксиомы.
Приходим к про-тиворечию	Приходим к выводу, который явно противоречит ранее доказанным теоремам или аксиомам.
Делаем заключение	Следовательно, предположение неверно, т. е. данная теоре-ма верна.
Теорема доказана.	

Метод доказательства от противного часто применяется и в жизни. Например, врач может определить, что больной не заразился гриппом. Предположим, что у больного грипп. Тогда у него должна болеть голова и температура повысится. Но у больного нет таких симптомов. Следовательно, это не грипп.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Активизирующие упражнения

Сформулируйте утверждения, противоположные приведённым ниже:

a) отрезок CD пересекает прямую a;

b) точки A и B лежат по одну сторону от прямой a;

c) длина отрезка CD равна 15;

d) угол AOB не является прямым;

e) $\angle ABC > \angle MNL$;

f) длина наклонной AB больше длины перпендикуляра AC.

Теорема. **Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не пересекаются.**

Прямые AA_1, BB_1 и CD, $AA_1 \perp CD$ и $BB_1 \perp CD$ *(рис. 15)* ⇒ Прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются

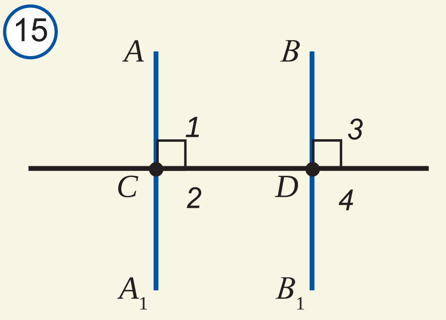
Доказательство. Для того, чтобы доказать теорему, применим метод от противного: несмотря на выполнение условия теоремы, заключение не выполняется, то есть прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M.

В таком случае, перегибая чертёж по прямой CD *(рис. 15)*, совместим верхнюю и нижнюю полуплоскости, тогда точка M совпадёт с некоторой точкой M_1 нижней полуплоскости, также принадлежащей прямым AA_1 и BB_1. Так как углы 1 и 2 равны, то совпадут и лучи CA и CA_1. Точно так же совпадут лучи DB и DB_1.

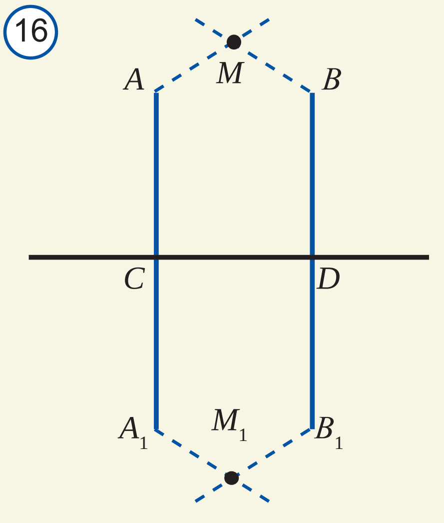
Тогда точка M – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 в верхней полуплоскости совпадёт с некоторой точкой M_1 нижней полуплоскости. Это означает, что точка M_1 – точка пересечения прямых AA_1 и BB_1.

Получается, что две точки M и M_1 являются точками пересечения прямых AA_1 и BB_1. Но через две (различные) точки проходит одна и только одна прямая (аксиома о принадлежности точек и прямых). Итак, предположив, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются, мы пришли к противоречию. Значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

15



16

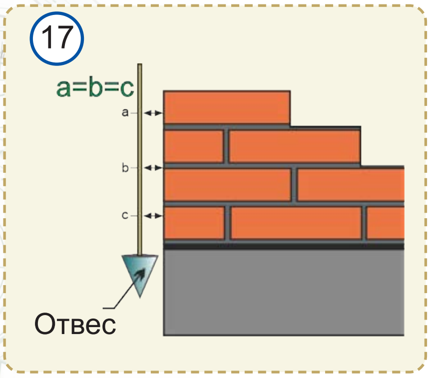


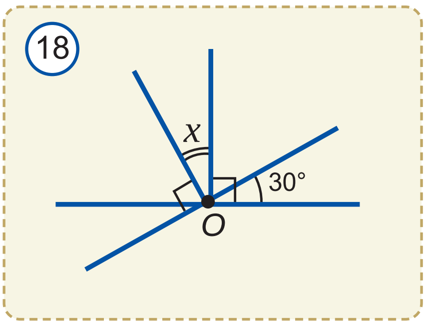
Теорема. **Через точку, не лежащую на прямой, нельзя провести больше одной прямой, перпендикулярной данной.**

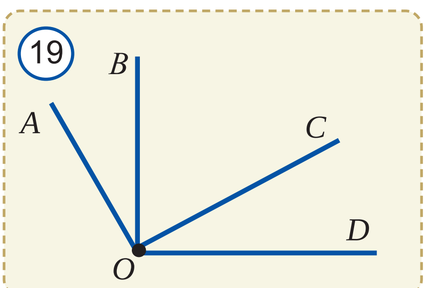
Предположив противоположное, докажите это свойство самостоятельно методом от противного.

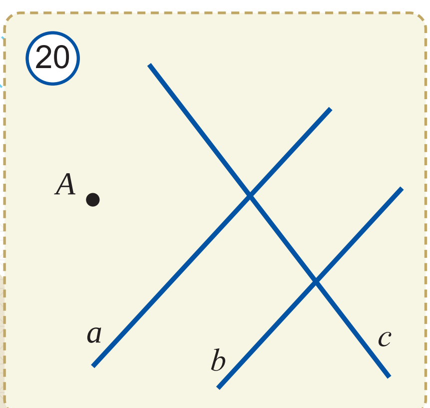
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

17


18


19


20


21


Вопросы к теме

1. *Какие прямые называются взаимно перпендикулярными? Приведите пример на чертеже.*
2. *Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на прямую? Обоснуйте свой ответ.*
3. *Что называется: a) перпендикуляром, опущенным из данной точки на прямую? b) наклонной, проведённой из точки к прямой?*
4. *Рассмотрев рисунок 17, объясните, как в строительстве используют отвес.*
5. *Сколько наклонных можно провести из точки A к прямой a?*
6. *На каком правиле основан метод доказательства от противного?*
7. *Какова градусная мера угла, вертикального к прямому углу?*
8. *Прямая a пересекает стороны угла A в точках B и C. Могут ли прямые AB и AC быть перпендикулярными прямой a?*
9. *При пересечении двух прямых образуются четыре равных угла. Будут ли эти прямые взаимно перпендикулярными?*
10. *Что называют расстоянием от точки до прямой?*

Практические упражнения

1. С помощью линейки и чертёжного угольника проведите перпендикуляр к прямой из точки, лежащей на этой прямой.

2. На прямой a заданы точки A, B, C. С помощью транспортира через каждую из этих точек проведите прямые, перпендикулярные прямой a.

3. Найдите неизвестный угол x на рисунке 18.

4. Покажите, что на рисунке 19 $\angle AOB = \angle COD$, если $OB \perp OD$ и $OA \perp OC$.

5. Найдите с помощью угольника расстояния от точки A до прямых a, b и c. *(рис. 20)*.

6. С помощью транспортира и линейки найдите кратчайший путь от дома отдыха до железной дороги *(рис. 21)*. Масштаб 1 : 10000.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7. Пусть точки A, B, C лежат на одной прямой и: a) $AB=3{,}6$; $BC=5{,}4$; $AC=9$; b) $AB=2{,}4$; $BC=4{,}2$; $AC=1{,}8$. Докажите, что точка C не может лежать между точками A и B. Какая из этих точек лежит между двумя другими?

8*. Найдите угол между биссектрисами двух смежных углов.

9*. Докажите теорему о равенстве двух вертикальных углов методом доказательства от противного.

10*. Какой из лучей OA, OB и OC проходит между двумя другими лучами, если $\angle AOB=58°$; $\angle BOC=17°$ и $\angle AOC=41°$?

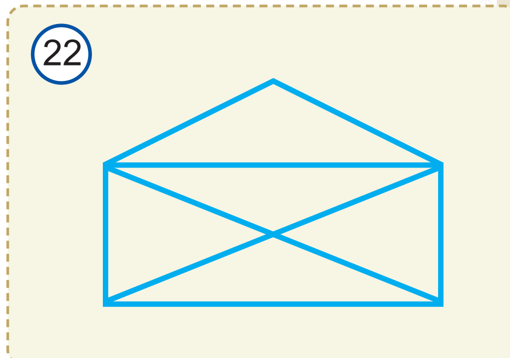
11. Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 120°. Найдите эти углы.

12. Разность двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 20°. Найдите эти углы.

13*. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

14*. На плоскости даны три точки: A, B, C и $AB=2{,}6$; $AC=8{,}3$; $BC=6{,}7$. Докажите, что эти точки не могут лежать на одной прямой.

15*. Сумма двух углов, образующихся при пересечении двух прямых, не равна 180°. Докажите, что эти углы являются вертикальными.



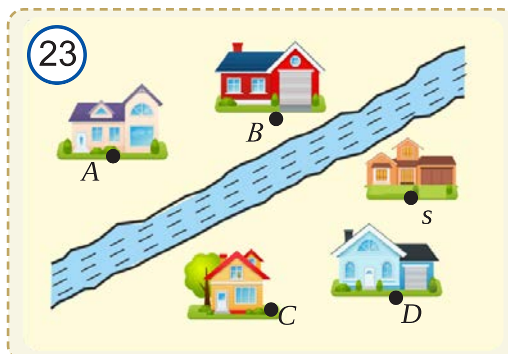
Геометрические головоломки

1. Постройте 3 равных квадрата из: a) 10; b) 11 спичек.

2. Из 12 спичек, не ломая их, постройте: a) 4; b) 6 равных квадратов.

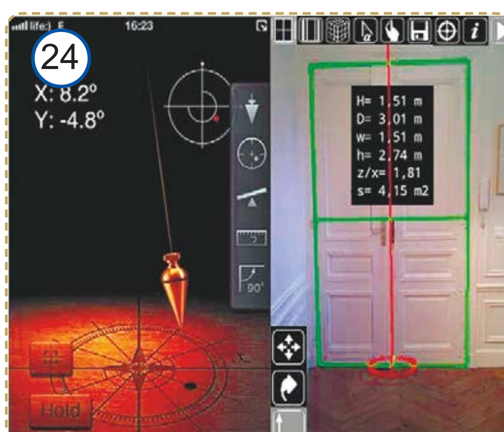
3. Обведите фигуру на рисунке 22, не отрывая карандаш от бумаги и не проходя ни по одному отрезку дважды.

4. На берегу реки расположены 5 сёл, три из них на одном берегу реки, а оставшиеся два – на другом *(рис. 23)*. Каждое село непосредственно связано дорогами с оставшимися сёлами. Сколько дорог пересекают реку?



ИКТ в геометрии

Приложение для мобильных телефонов «iHandy Carpenter», разработанное для строителей, может определить, насколько ровно относительно горизонта расположено любое здание. Для этого достаточно запустить данное приложение и направить камеру на нужное здание *(рис. 24)*.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

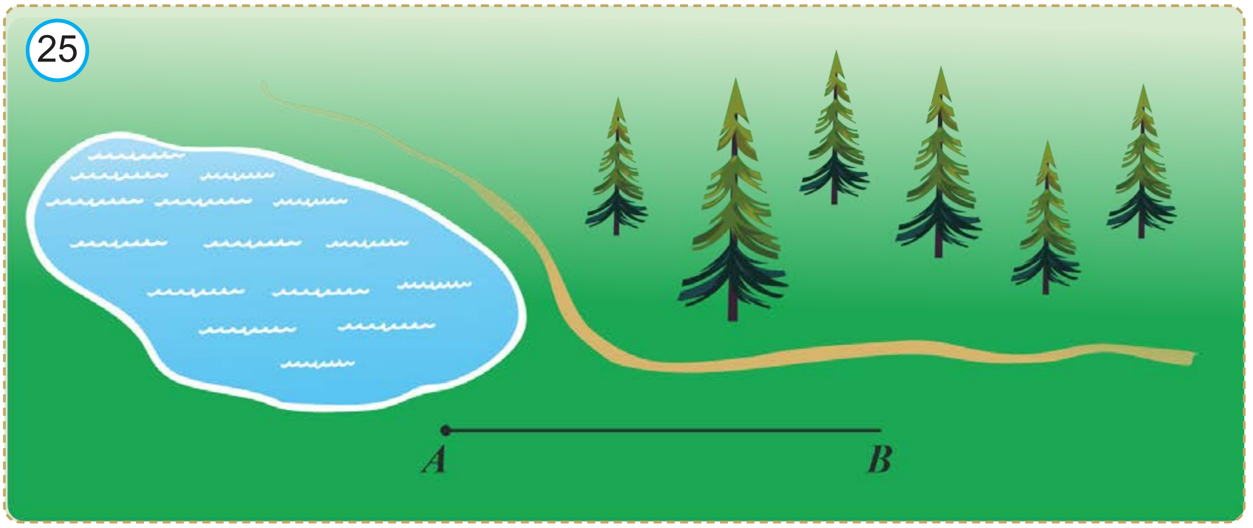
Практические упражнения и приложения

1. Найдите клад

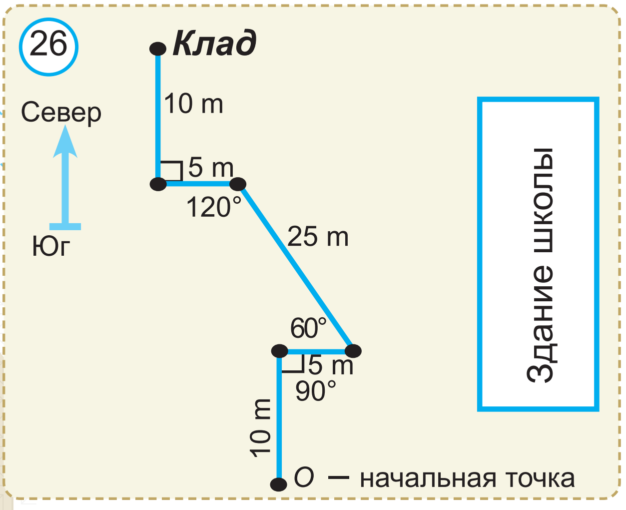
На рисунке 25 изображены карта и луч AB. Отложите от этого луча в полуплоскость, на которой нарисовано озеро, угол, равный 60°. От вершины построенного угла по стороне, отличной от стороны AB, пройдите 60 *m* и попадёте в точку C. От луча CA в полуплоскость, где нарисовано озеро, отложите угол 120°. От вершины построенного угла по стороне, отличной от стороны CA, пройдите еще 120 *m*. Здесь под вершиной высокого карагача и закопан клад.

Масштаб карты 1:2000. Скопируйте карту и укажите точку, где спрятан клад.

25



26



2. Геометрический конкурс на открытом воздухе

В соревновании могут принять участие две или более групп. Каждой группе разрешается пользоваться рулеткой и большим транспортиром.

Класс, разбитый на группы, трудится в разных уголках школьной площадки. «Клад» (например, шарик, письмо в конверте, ...) вначале прячут где-то на площадке.

План, ведущий к кладу, готовится учителем заранее и передаётся группам. (Образец плана показан на рисунке 2). Группы начинают поиски клада, руководствуясь своими планами. Группа, которая первой пройдёт вдоль всей ломаной, показанной на плане, и найдёт клад, будет объявлена победителем.

Домашнее задание. Составьте план пути, подобный изображённому на рисунке 3, по которому вы идёте из дома в школу. Определите примерную длину пути.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

1. Верны ли следующие предложения? Ответьте «да» или «нет".

1. Для каждого угла можно построить только один вертикальный угол.
2. Для каждого угла можно построить только один смежный угол.
3. Если углы вертикальные, то они равны.
4. Если углы не равны, то они не могут быть вертикальными.
5. Если углы не являются вертикальными, то они не могут быть равными.
6. Если два угла смежные, то один из них тупой, а другой острый.
7. Если два угла смежные, то один из них больше другого.
8. Если сумма углов равна 180°, то они смежные.
9. Если сумма углов не равна 180°, то они не смежные.
10. Если углы равны, то смежные им углы также равны.
11. Если смежные углы равны, то они прямые.
12. Если два угла имеют общую вершину, то они вертикальные.
13. Если два угла имеют общую сторону, то они смежные.

2. Заполните пропуски в предложениях в соответствии со смыслом:

1. Углом называется фигура, состоящая из точки и ... , исходящих из этой точки.
2. На плоскости через две точки можно провести ... и только одну прямую.
3. Градусная мера развёрнутого угла равна ... .
4. Две различные прямые пересекаются только в ... точке.
5. Биссектрисой угла называется ... , исходящий из вершины угла, и .... .
6. Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой её точки, называется ... .
7. Два угла, одна сторона которых общая, а две другие образуют прямую линию, называются ... .
8. Прямая разбивает плоскость ... .
9. Биссектрисы вертикальных углов образуют... .
10. Серединой отрезка называется ... на равные отрезки.
11. Если смежные углы ... , то они являются прямыми углами.
12. У равных отрезков равны и ... .

3. Если в следующих фразах имеется ошибка, найдите и исправьте её:

1. Углы, сумма которых равна 180°, – это смежные углы.
2. Две произвольные прямые на плоскости имеют только одну общую точку.
3. Прямая, исходящая из вершины угла и делящая угол пополам, называется биссектрисой угла.
4. Через произвольную точку можно провести только две прямые.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5. Угол, обе стороны которого лежат на лучах, называется развёрнутым углом.
6. Две прямые, лежащие на плоскости, делят её на две полуплоскости.
7. Углы, получающиеся при пересечении двух прямых, называются вертикальными.
8. Точка, делящая отрезок надвое, называется серединой отрезка.
9. От начала данного луча можно отложить только один прямой угол.
10. Для произвольных точек A, B, C имеет место равенство $AB + BC = AC$.
11. Сумма вертикальных углов равна 180°.

4. Впишите в соответствующую строку правого столбца название геометрической фигуры, обладающей данным свойством:

1	Сумма равна 180°	
2	Стороны являются лучами	
3	Угловая величина равна 180°	
4	Имеет определённую длину	
5	Делит отрезок пополам	
6	Истина, принимаемая без доказательства	
7	Делит угол пополам	
8	Образуется при пересечении прямых	
9	Необходимо доказать истинность	
10	Не имеет измерений	

5. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование, взятое из второго столбца:

Геометрическое понятие	*Толкование, свойство*
1. Точка 2. Прямая 3. Измерение земли 4. Отрезок 5. Луч 6. Длина отрезка 7. Равные фигуры 8. Полуплоскость 9. Планиметрия 10. Угол 11. 1 градус 12. Градусная мера развёрнутого угла 13. Вертикальные углы 14. Смежные углы 15. Теорема 16. Аксиома 17. Биссектриса	(A) Толкование слова «Геометрия» (B) Сумма равна 180°. (C) Углы, равные между собой. (D) Точка на прямой и точки, лежащие по одну сторону от неё. (E) 180°. (F) Два луча с общим началом. (G) Невозможно измерить длину. (H) 1/90 часть прямого угла. (I) Истина, принимаемая без доказательства. (J) Истина, требующая доказательство. (K) Две точки прямой и точки, лежащие между ними. (L) Изучает свойства фигур на плоскости. (M) Делит угол пополам. (N) Одна из частей, на которые прямая разбивает плоскость. (O) Не имеет частей. (P) Положительное число. (Q) Можно совместить наложением.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

6. Тесты.

1. Укажите основное геометрическое понятие, принятое без определения: а) плоскость; b) точка; с) отрезок; d) луч; е) прямая; f) полуплоскость.

A) $a;\ b;\ c;\ d$ B) $b;\ c;\ e;\ f$ C) $a;\ b;\ c;\ e$ D) $a;\ b;\ e$

2. Найдите меньший из смежных углов, если их разность равна 24°.

A) 72° B) 76° C) 78° 82°

3. В какой стране геометрия сформировалась как наука?

A) Древний Египет; B) Вавилон; C) Греция; D) Китай

4. Сумма трёх углов, образующихся при пересечении двух прямых, равна 200°. Найдите меньший из углов:

A) 20° B) 40° C) 60° D) 80°

5. Даны 4 точки, три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две из этих точек проведены прямые. Найдите их число.

A) 1 B) 4 C) 5 D) 6

6. Биссектриса данного угла образует с его стороной угол 60°. Найдите угол, смежный с данным углом:

A) 30° B) 60° C) 90° D) 120°

7. Каково наибольшее число отрезков, на которые делится отрезок AB двумя пересекающими его прямыми?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

8. Какова градусная мера угла, образованного стрелками часов в 4 часа?

A) 60° B) 75° C) 105° D) 120°

9. $AB = 6,\ C\in AB,\ AC = 3BC,\ BC = ?$

A) 1 B) 1,5 C) 2 D) 3

10. На какой угол повернётся часовая стрелка за 30 минут?

A) 180° B) 15° C) 60° D) 30°

11. $AB = 18,\ C\in AB,\ AC - BC = 4,\ BC = ?$

A) 7 B) 8 C) 10 D) 11

12. Сумма вертикальных углов 180°. Найдите эти углы.

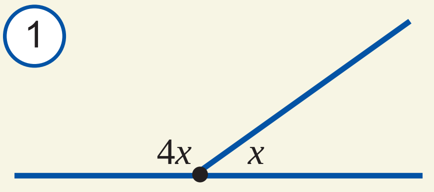
A) 60° и 120° B) 45° и 135°

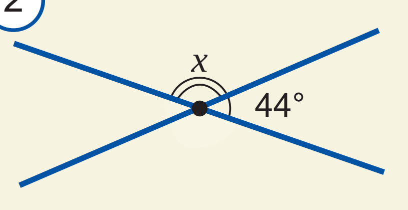
C) 90° и 90° D) 45° и 45°

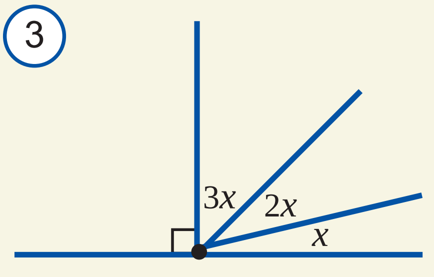
13. Каково наибольшее число частей, на которые три прямые разбивают плоскость?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

14. Найдите величину угла x на рисунке 1.

1


2


3


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

A) 30° B) 36° C) 45° D) 60°

15. Найдите величину угла x на рисунке 2.

A) 136° B) 72° C) 56° D) 96°

16. Найдите величину угла x на рисунке 3.

A) 15° B) 30° C) 45° D) 60°

17. Найдите верное высказывание:

A) На плоскости через данную точку можно провести только одну прямую.

B) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих по одну сторону от некоторой её точки, называется лучом.

C) Часть прямой, состоящая из точек, лежащих между двумя её точками, называется отрезком.

D) От каждого луча можно отложить только один угол.

18. Найдите верное высказывание.

A) Смежные углы – это развёрнутый угол.

B) Если AB = 5 см, BC = 6 см, то AC = 11.

C) Если углы равны, то они являются вертикальными.

D) Если два угла равны, то углы, смежные с ними, также равны.

7. Задачи.

1. Постройте с помощью транспортира углы 10°, 20°, 40°, 60°, 90°, 130°, 170°, имеющие общую сторону.

2. Какие углы образует биссектриса развёрнутого угла с его сторонами?

3. Какова градусная мера угла, если его биссектриса составляет угол, равный 30° с его стороной?

4. Может ли биссектриса угла составлять тупой угол с его стороной?

5. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и BOC, если $\angle AOB$=50°, $\angle BOC$=80°. Сколько решений имеет задача?

6. Сколько градусов составит наблюдаемый угол 15°, если посмотреть на него в лупу с десятикратным увеличением?

7. Постройте с помощью транспортира биссектрисы углов: a) 90°; b) 60°; c) 50°; d) 20°.

8*. Постройте с помощью транспортира биссектрису OK угла $\angle AOB$=120°. Затем постройте биссектрисы получившихся углов AOK и KOB и найдите угол между ними.

9*. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AB = 1{,}8\ m$, $AC = 1{,}3\ m$ и $BC = 3\ m$?

10. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AB = 2{,}7\ m$, $AC = 3{,}2\ m$? Сколько решений имеет задача?

11. На отрезке AB длиной 15 m обозначена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если:

a) отрезок AC на 3 m длиннее отрезка BC;

b) точка C лежит в середине отрезка AB;

c) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

12. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Покажите, что $AB = BC = CD$, если точка B – середина отрезка AC, а точка C – середина отрезка BD.

13. Сколько прямых можно провести через а) 6; б) 7; в) 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

14. Когда лучи OA и OB совместятся при наложении?

15. На луче B выбрана точка C, на луче BA – точка D так, что AC = 0,7 и BD = 2,1. Найдите CD, если AB = 1,5.

16. Сколько пар вертикальных углов представлено на рисунке 4?

17*. Сколько времени на часах, если угол между часовой и минутной стрелками равен 45°, а минутная стрелка стоит на цифре 6?

18. Из точки O, не лежащей на прямой, проведены к прямой наклонная OA и перпендикуляр OB. Найдите расстояние от точки O до прямой, если сумма их длин 13, а разность равна 1.

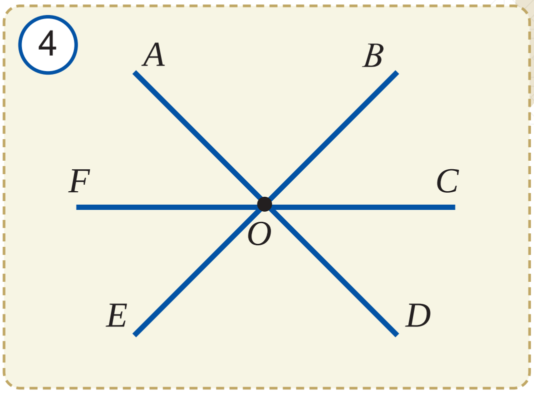
19. Известно, что углы AOB и BOC являются смежными. Найдите эти углы, если:

a) угол AOB больше угла AOB на 40°;

b) угол AOB в 4 раза меньше угла BOC;

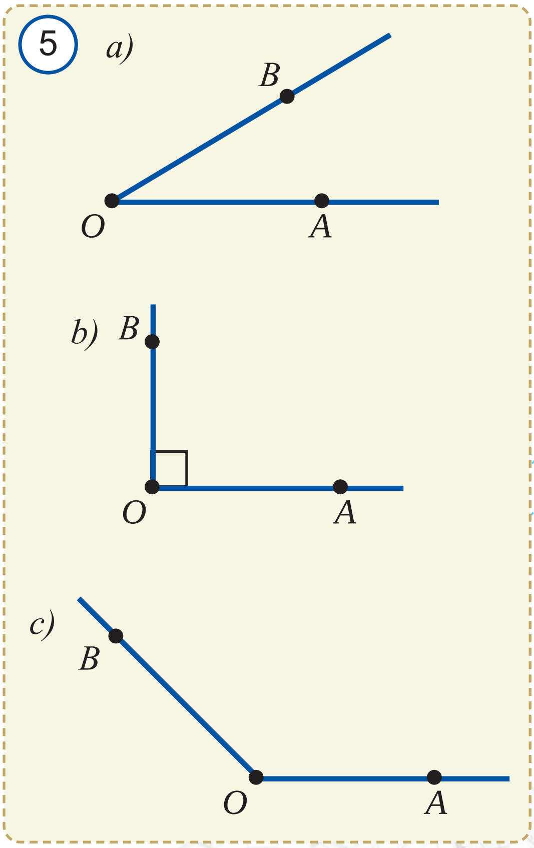
c) $\angle AOB = \angle BOC + 44°$;

d) $\angle AOB = 5 \cdot \angle BOC$.



20. При пересечении двух прямых получилось 4 угла. Найдите градусную меру каждого угла, если сумма величин двух из них равна 100°.

21*. Точки A, B и C расположены на плоскости так, что: a) $AC+CB=AB$; b) $AB+AC=BC$. Какая точка лежит между двумя другими?



22. На рисунке 5 через точки A и B к сторонам угла проведите перпендикулярные прямые. Какие углы образуют эти прямые в точке пересечения?

23*. Из вершины угла в её внутренней области проведены: a) 2; b) 3; c) n лучей. Сколько всего углов вместе с данным получилось?

24*. Толщина листа газеты 0,1 mm. Лист сложили пополам. Затем ещё раз пополам и так далее. Этот процесс повторили 50 раз. Какова толщина получившегося буклета?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

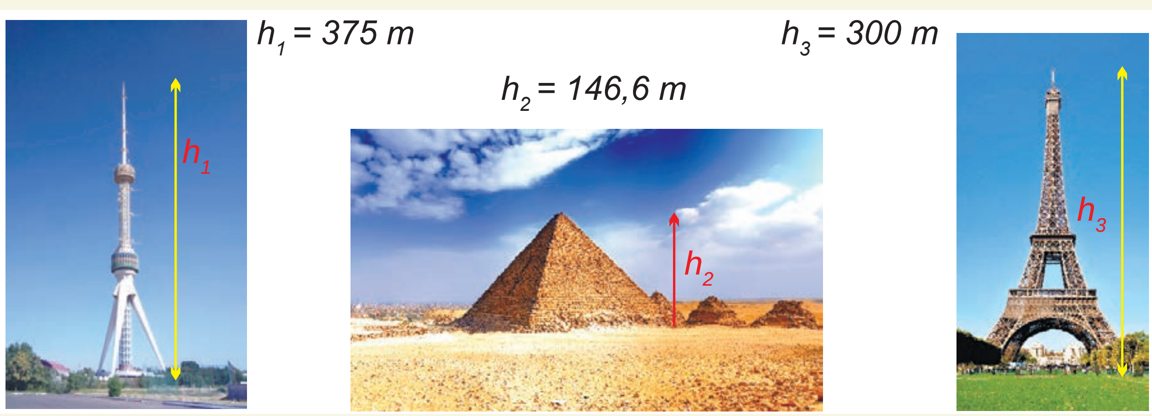
Практические упражнения и приложения

1. Подумайте и найдите способ измерения толщины одной страницы учебника «Геометрия 7».

2. Определите длину перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки некоторого здания на плоскость его основания. Если нет возможности провести такой перпендикуляр, то рассматривают отрезок соответствующей длины *(рис. 6)*. Например, высота здания, пирамиды, минарета или глубина колодца и тому подобное. Иногда также определяют высоты плоских фигур на плоскости.

Подумайте, как можно определить высоту чайника, пиалы, касы, вазы, кастрюли и тому подобной домашней утвари, и вычислите её.

6



Образец контрольной работы 2

Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей. В первую часть входят пять тестов из приведённых на страницах 50–51. Во второй части предлагаются три задачи, подобные данным ниже (задача 4 для желающих получить оценку «отлично»):

1. Сумма вертикальных углов MOL и KON, образующихся при пересечении прямых MN и KL, равна 148°. Найдите угол MOK.

2. Разность смежных углов равна 60°. Найдите меньший из этих углов.

3. Биссектриса угла образует с его стороной угол 66°. Найдите угол, смежный с этим углом.

4*. Докажите, что биссектрисы смежных углов пересекаются под прямым углом.

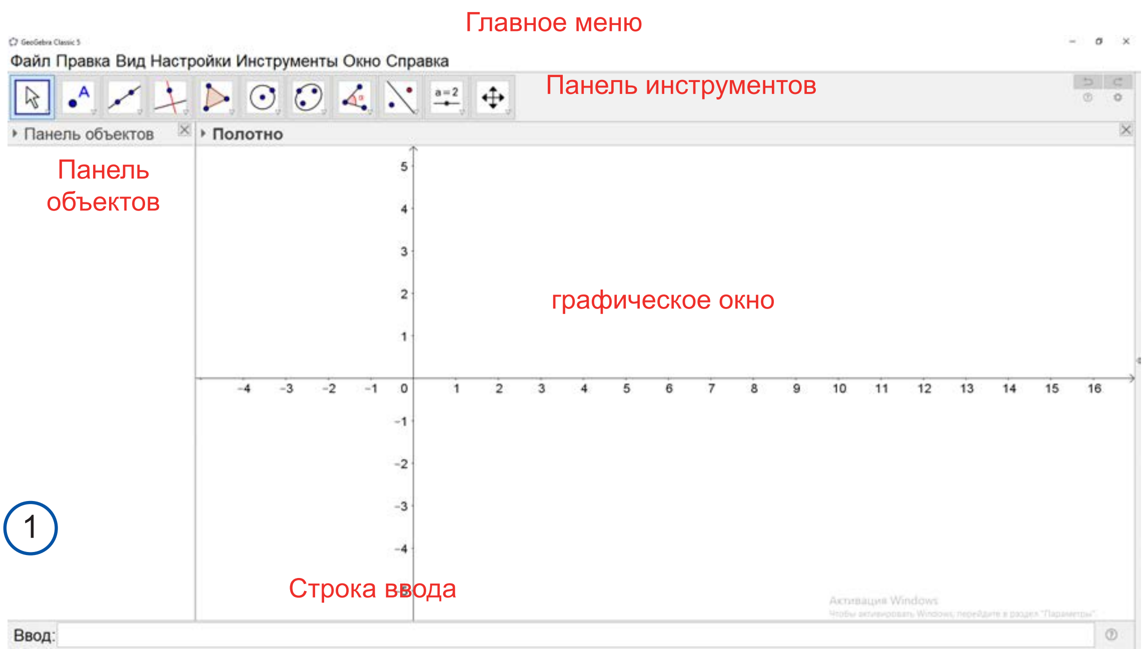
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Основы использования программы GeoGebra

Интерфейс GeoGebra

При включении программы на экране появляется окно – интерфейс программы GeoGebra *(рис. 1)*:



1

Главное меню – меню ввода функций, представленных программой GeoGebra.

Панель инструментов – при помощи различных инструментов можно создавать различные графики.

Графическое окно – окно для построения и изображения геометрических чертежей.

Панель объектов – панель ввода координат и уравнений геометрических объектов.

Строка ввода – панель ввода команды, алгебраических уравнений, значений переменных.

Вы можете построить различные геометрические фигуры с помощью мышки, используя геометрические инструменты на Панели инструментов. При этом на панели объектов отобразятся соответствующие чертежу координаты и уравнения. С другой стороны, вы можете с клавиатуры в строке **Ввод...** ввести алгебраические данные, команды и функции. Все чертежи отображаются в **графическом окне**, а их алгебраическое описание – на **панели объектов**. GeoGebra работает, связывая алгебру и геометрию.

Интерфейс GeoGebra можно настроить под себя. Кроме алгебраических и графических видов, в GeoGebra есть такие виды как 3D, электронные таблицы, отобразить или скрыть которые можно при помощи меню **«Вид»**.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

- Активируйте необходимую функцию нажатием на соответствующую кнопку.
- Нажмите на нижний угол кнопки, откроется дополнительное окно, в котором можно выбрать нужную функцию.
- На панели инструментов справа можно нажать на знак ? и получить информацию об активном в данный момент инструменте.

Сохранение файлов GeoGebra

- Откройте меню **«Файл»** и выберите команду **Сохранить**.
- Выберите нужную папку из открывшегося диалогового окна.
- Введите название файла.
- Нажмите кнопку **«Сохранить»** и закончите операцию.

Памятка. *Создается файл с расширением «.ggb», и его можно открыть только в программе GeoGebra.*

Открытие файлов в GeoGebra

Откройте новое окно (**«Файл» – «Новый окно»**).

В открывшемся окне откройте файл из памяти компьютера. Для этого выберите команду **«Файл»** – **«Открыть»**.

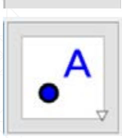
Откройте папку с сохранёнными файлами и выберите файл с расширением **.ggb**. Нажмите кнопку «**Открыть»**.

Указание по использованию панели инструментов GeoGebra

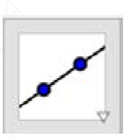
Даже если вы не обладаете сведениями о некоторых инструментах программы, по их внешнему виду легко догадаться об их предназначении. Для этого есть учебные файлы и для каждого инструмента отдельный файл (.ggb).

Предназначение основных инструменов на Панели инструменов GeoGebra

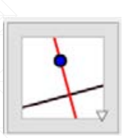
Перемещать – перемещение различных объектов (точки, прямой, многоугольника и других).



Точка – построение точки на плоскости.



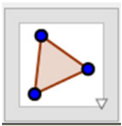
Прямая – построение прямой на плоскости по двум заданным точкам.

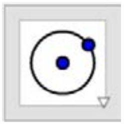


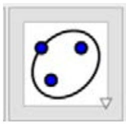
Перпендикулярная прямая – построение перпендикуляра, проходящего через данную точку прямой.

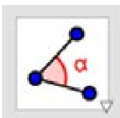
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

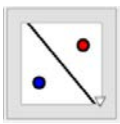
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

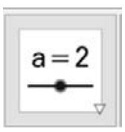

Многоугольник – построение многоугольника произвольной формы.


Окружность по центру и точке – построение окружности с центром в данной точке.


Эллипс – построение эллипса с фокусами в данных точках.


Угол – построение угла по трём точкам или по двум прямым.


Отражение относительно прямой – отображение нужного объекта относительно заданной прямой.



Ползунок – анимационный инструмент, позволяющий непрерывно изменять длину или величину угла как переменную на определённом промежутке.

1. Построение прямой

Прямая линия – это самая простая бесконечная геометрическая фигура.

Чтобы её построить, нужно:

1) открыть группу «Прямые линии» на панели инструментов *(рис. 2)*;

2) щёлкнуть левой кнопкой мыши на инструмент «Прямая»;

3) отметить левой кнопкой мыши на рабочей области две точки A и B;

4) на экране появится прямая, проходящая через эти точки *(рис. 3).*

Нажимая левую кнопку мыши на изображение прямой, можно прямую сдвигать или перемещать. Также можно изменять цвет, стиль и обозначение прямой.

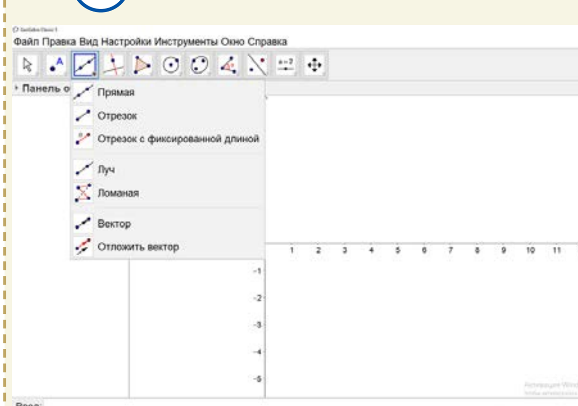
2. Составление алгоритма построения луча

Составьте алгоритм построения луча по предыдущему алгоритму и постройте луч.

3. Составление алгоритма построения отрезка

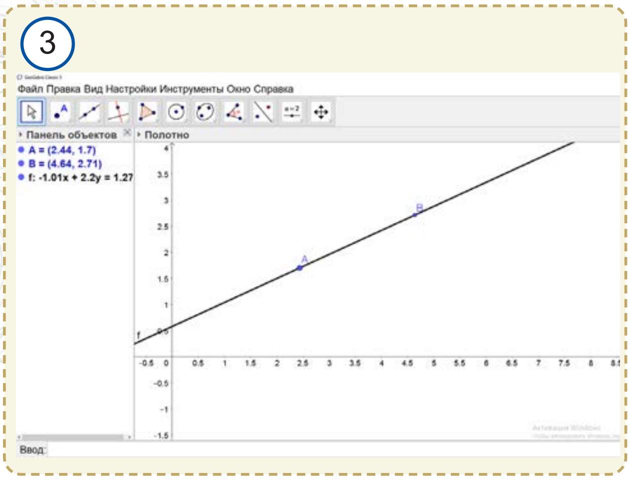
Составьте алгоритм построения отрезка по предыдущему алгоритму и постройте отрезок.

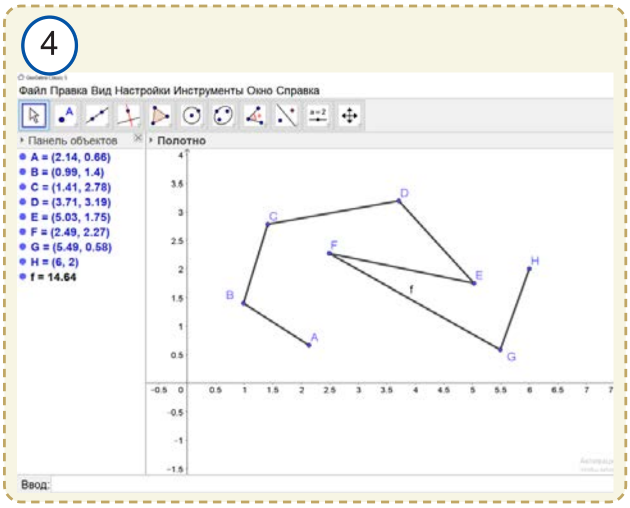
2



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE





4. Построение ломаной

Ломаная – геометрическая фигура, состоящая из точек, соединённых отрезками. Точки называются вершинами ломаной, а отрезки звеньями:

1) откроем группу «Прямые линии» на панели инструментов;

2) щёлкнув левой кнопкой мыши выбираем в меню «Ломаная»;

3) щёлкнув левой кнопкой мыши, отмечаем вершины ломаной;

4) на экране появляется ломаная с вершинами в этих точках *(рис. 4.)*

Щёлкнув левой кнопкой мыши на изображение прямой, можно поменять её положение, т. е. сдвинуть. Точно так же можно поменять цвет, стиль и обозначения.

5. Построение перпендикулярных прямых

Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными, если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Для их изображения нужно:

1) открыть на панели инструментов группу «Специальные прямые»;

2) щёлкнув левой кнопкой мыши, выбрать в меню группу «Перпендикуляр»;

3) построить прямую;

4) отметить точку (точка может лежать на отрезке или на прямой);

5) щёлкнув левой кнопкой мыши, получить в рабочей области изображение перпендикулярных прямых.

6. Составление алгоритма построения параллельных прямых и их построение

Подобно написанному выше, составьте алгоритм построения параллельных прямых и постройте их.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Глава II

ТРЕУГОЛЬНИКИ

После изучения этой главы вы должны обладать следующими знаниями и практическими навыками:

Знания:

– определение многоугольника;
– определение треугольника, его основные элементы и виды;
– определения медианы, биссектрисы и высоты треугольника;
– признаки равенства треугольников;
– свойство равнобедренного треугольника;
– свойство равностороннего треугольника;
– свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

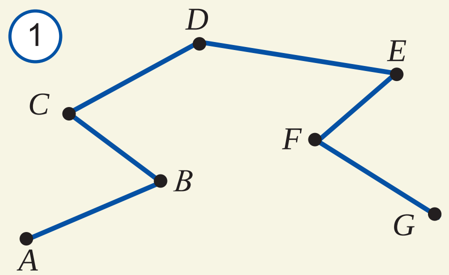
Практические навыки:

– уметь определять равные треугольники в соответствии с признаками равенства треугольников;
– уметь применять признаки равенства треугольников при решении задач и выполнении практических работ.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

8 ТРЕУГОЛЬНИК, ЕГО ВИДЫ И ЭЛЕМЕНТЫ



$ABCDEFG$ – *ломаная*
A, B, C, D, E, F, G – *вершины*
$AB, BC, CD,$ DE, EF, FG – *звенья (стороны)*

8.1. Ломаная. Многоугольники

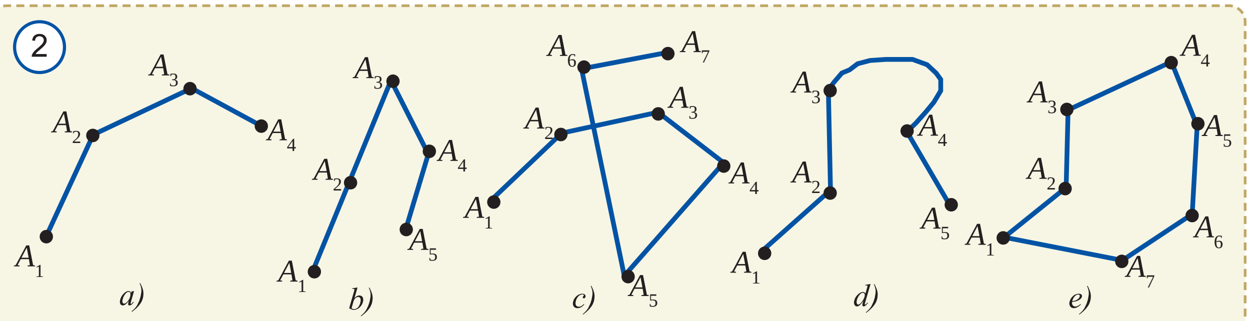
Ломаной называется фигура, состоящая из отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, таких, что любые два последовательных отрезка не лежат на одной прямой. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *вершинами ломаной*, отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – *звеньями* или *сторонами ломаной*. На рисунке 1 изображена ломаная $ABCDEFG$.

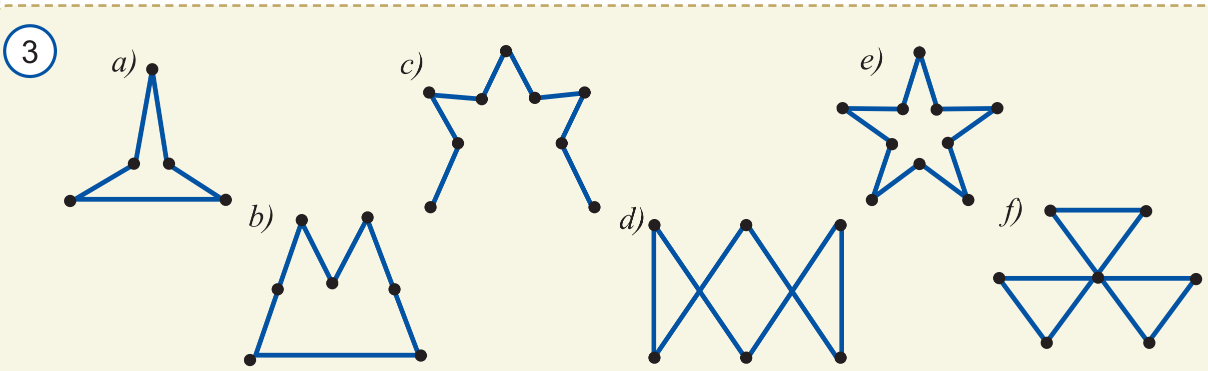
Если начальная и конечная вершины ломаной совпадают, она называется *замкнутой ломаной*. Замкнутая ломаная без самопересечений называется *многоугольником*.

Активизирующие упражнения

1. Определите, какая из линий на рисунке 2 является ломаной, и обоснуйте свой ответ.

2. Перечислите, в соответствии с определением многоугольника, его свойства и определите, являются ли фигуры, данные на рисунке 3, многоугольниками.





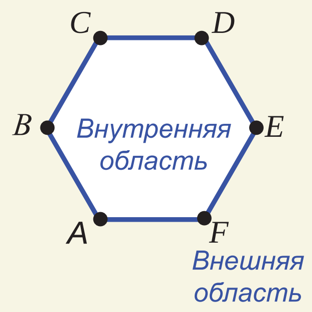
По числу вершин (сторон) многоугольник называется треугольником, четырёхугольником, шестиугольником, в общем случае *n-угольником*. С примерами многоугольников вы познакомились в младших классах.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Каждый многоугольник делит плоскость на две области. Конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником, называется его *внутренней областью*, бесконечная – *внешней областью*. На рисунке 4 показаны внутренняя и внешняя области шестиугольника.

4



8.2. Треугольник и его виды

Фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и соединяющих их отрезков, называется *треугольником*.

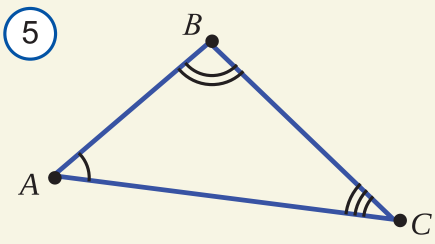
Обозначим на плоскости три точки, не лежащие на одной прямой – A, B и C (*рис. 5*). Если соединить их между собой отрезками, то получится треугольник. Данные точки называют его *вершинами*, отрезки – его *сторонами*.

Обычно вместо слова «треугольник» используется значок Δ. Запись ΔABC читается «треугольник ABC». Углы $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ называются *углами* треугольника (*рис. 5*). Иногда их точнее называют *внутренними углами* треугольника.

Углы треугольника можно обозначать и в виде $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Стороны и углы треугольника называются его *основными элементами*. Сумма длин всех трёх сторон треугольника называется его *периметром* (P).

5



ΔABC – *треугольник* ABC

точки A, B, C – *вершины*

отрезки AB, BC, AC – *стороны*

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – *углы*

$P = AB + BC + AC$ – *периметр*

Также используют следующие выражения:

Угол BAC – *угол, лежащий между сторонами* AB *и* AC;

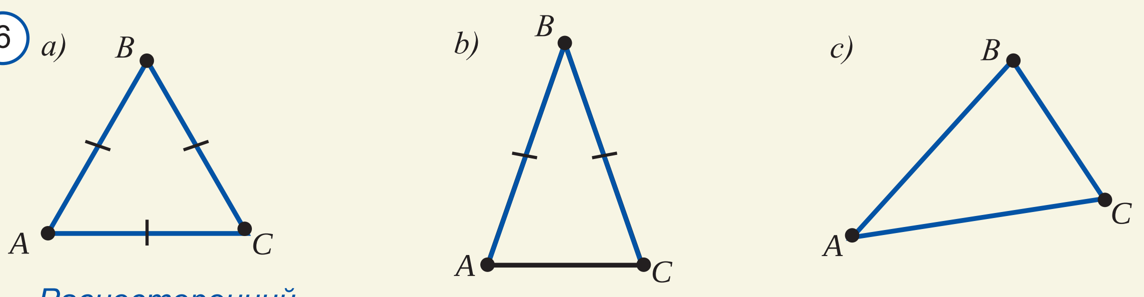
Углы BAC и BCA – *углы прилежащие к стороне* AB *и* AC;

Угол BAC – *угол, лежащий против стороны* BC.

В зависимости от сторон треугольники делятся на следующие виды: *равносторонние, равнобедренные и разносторонние.*

У равностороннего треугольника длины всех сторон равны, у равнобедренного треугольника равны длины двух сторон, а длины всех сторон разностороннего треугольника различны.

6



Равносторонний треугольник

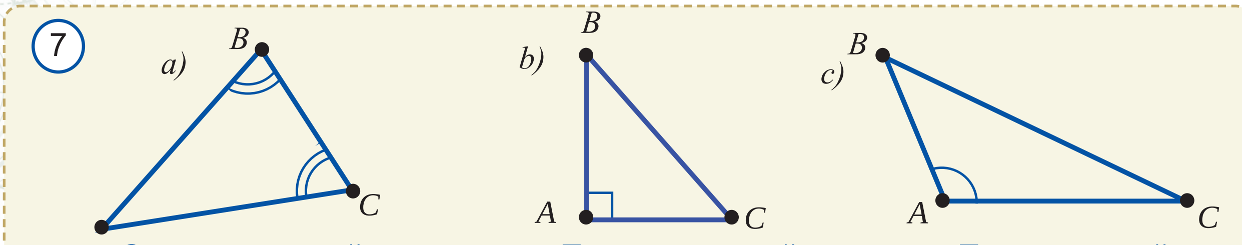
Равнобедренный треугольник

Разносторонний треугольник

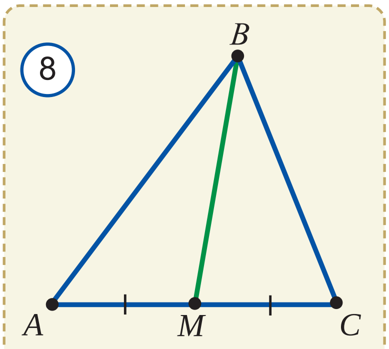
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

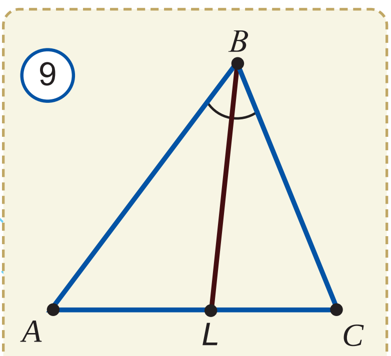
В зависимости от углов треугольники делятся на следующие виды: *остроугольные, прямоугольные и тупоугольные*. У остроугольного треугольника все три угла острые, у прямоугольного треугольника один угол прямой, а у тупоугольного треугольника один угол тупой.



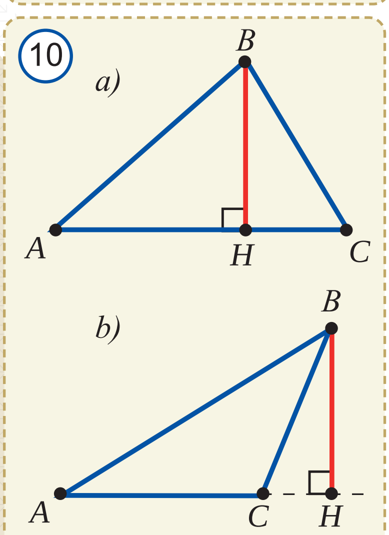
Остроугольный *Прямоугольный* *Тупоугольный*



BM - *медиана*



BL – *биссектриса*



BH – *высота*

8.3. Медиана, высота и биссектриса треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называют *медианой треугольника*.

Соединим вершину B треугольника ABC с серединой M противоположной ей стороны AC *(рис. 8)*. Полученный отрезок BM будет медианой треугольника ABC. О ней говорят «медиана, проведённая из точки B».

Часть (отрезок) бисектрисы угла, лежащую во внутренней области треугольника, называют *биссектрисой треугольника*.

Провёдем биссектрису угла B треугольника ABC *(рис. 9)*. Обозначим точку пересечения её со стороной AC буквой L. Полученный отрезок BL будет биссектрисой треугольника ABC.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, которая содержит противоположную его сторону, называется *высотой треугольника*.

Построим перпендикуляр, опущенный из вершины B треугольника ABC к стороне AC *(рис. 10)*. На рисунке представлены два возможных случая. Обозначим основание перпендикуляра буквой H. Отрезок BH будет *высотой треугольника* ABC.

Так как у треугольника три вершины, то он имеет три медианы, три высоты и три биссектрисы. На рисунках 11–13 начерчены медианы AM_1, BM_2 и CM_3, биссектрисы AL_1, BL_2 и CL_3 и высоты AH_1, BH_2 и CH_3 треугольника ABC. На следующих уроках познакомимся со свойствами этих важных элементов треугольника.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Геометрические исследования

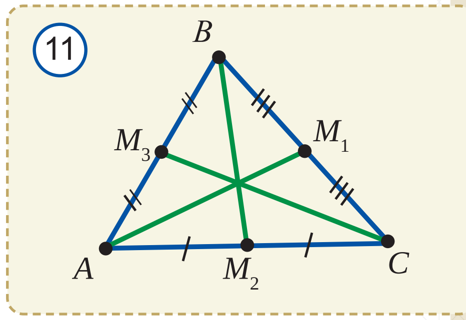
1. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его медианы (рис. 11). Что вы заметили? Повторите эксперимент ещё для двух треугольников и сформулируйте свойство в виде предположения.

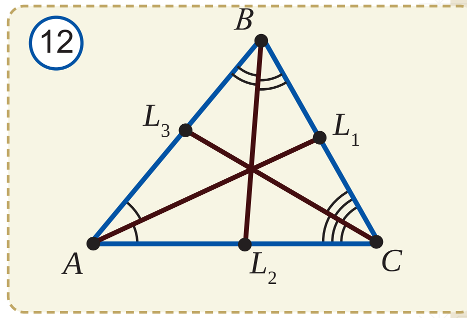
2. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его биссектрисы (рис. 12). Что вы заметили? Повторите эксперимент ещё для двух треугольников и сформулируйте свойство в виде предположения.

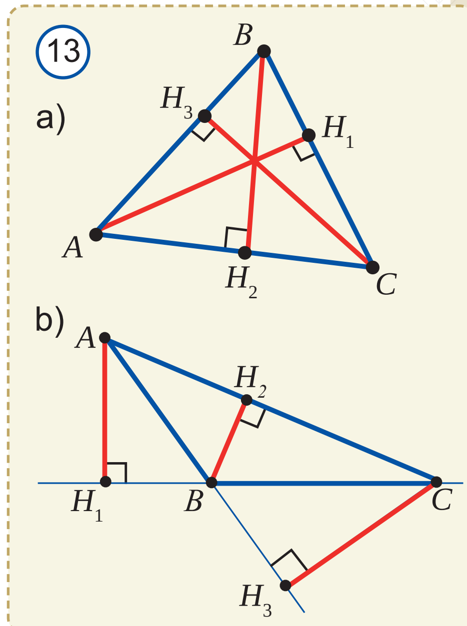
3. Начертите произвольный треугольник. Проведите все его высоты (рис. 13). Что вы заметили? Повторите эксперимент ещё для двух треугольников и сформулируйте свойство в виде предположения. Можно ли на основании проведённых исследований считать эти свойства теоремами? Почему?

Упражнение. Проведите все высоты тупоугольного треугольника.

Выполнение. У треугольника, в частности, тупоугольного треугольника, имеются три высоты. Рассмотрим треугольник ABC *(рис. 13b)*. Высота BH_2, проведённая из вершины тупого угла, проходит внутри треугольника. Для того чтобы опустить высоту из вершины A, надо продолжить противоположную сторону BC за точку B и из вершины A опустить перпендикуляр AH_1 на продолжение стороны BC. Полученный отрезок AH_1 будет перпендикуляром треугольника ABC, опущенным из вершины A. Точно так же можно опустить перпендикуляр CH_3 на продолжение стороны AB.







Бермудский треугольник

Область в Атлантическом океане в виде треугольника с вершинами на островах Флорида, Бермуды и Пуэрто Рико называют Бермудским треугольником (рис. 14). Это место получило свою известность из-за таинственных исчезновений морских и воздушных судов и прочих аномальных явлений.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вопросы к теме

1. *Начертите ломаную, обозначьте её вершины и покажите на чертеже её звенья.*
2. *Что такое многоугольник? Приведите примеры.*
3. *Какая фигура называется треугольником?*
4. *Что такое вершина, сторона и угол треугольника?*
5. *Что такое периметр треугольника?*
6. *В треугольнике PQR: a) какая сторона лежит против $\angle P$; b) какие углы прилежат к стороне PQ; c) какой угол лежит между сторонами PQ и QR; d) против какого угла лежит сторона PR? Постарайтесь ответить на эти вопросы, не глядя на фигуру.*
7. *Дайте определение: a) медианы; b) высоты; c) биссектрисы треугольника.*
8. *В чём сходство и в чём различие между биссектрисой угла и биссектрисой треугольника?*

Практические задания и приложения

1. Начертите ломаную с семью звеньями. Обозначьте и запишите её вершины и звенья.

2. Начертите ломаную с пятью звеньями, у которой каждые два соседних звена перпендикулярны. Может ли быть замкнутой такая ломаная?

3. Обозначьте вершины треугольника буквами M, N и L. Напишите его стороны и углы.

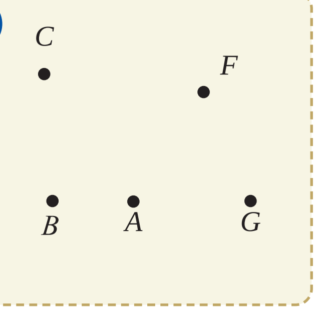
4. Напишите углы и стороны треугольника CDE.

5. Могут ли точки: a) C, F и A; b) A, B и G; c) F, B и G на рисунке15 быть вершинами треугольника? Почему?

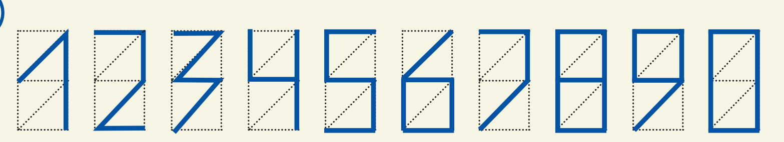
6. Являются ли фигуры цифр на рисунке16 ломаными?

7*. Определите, какие из фигур, изображённых на рисунке 17, являются: a) ломаными; b) замкнутыми ломаными; c) многоугольниками.

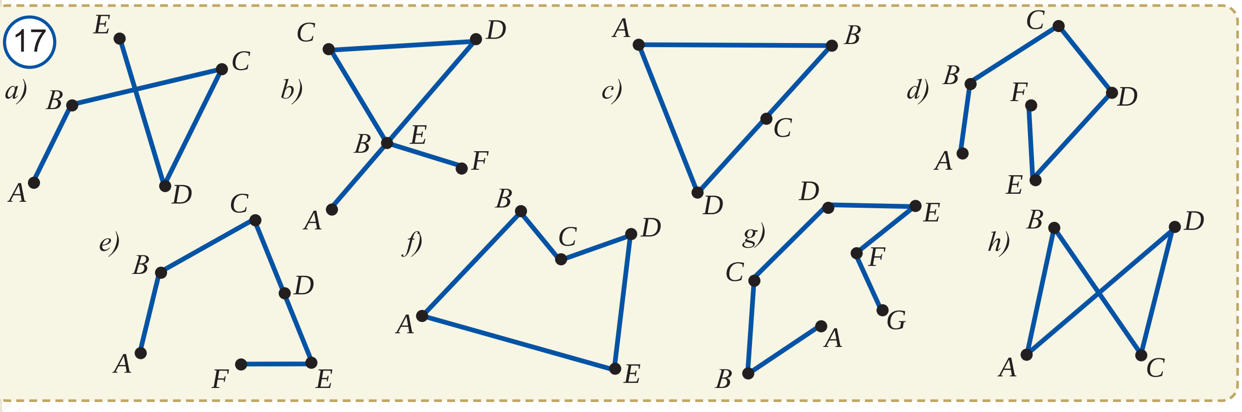
15



16

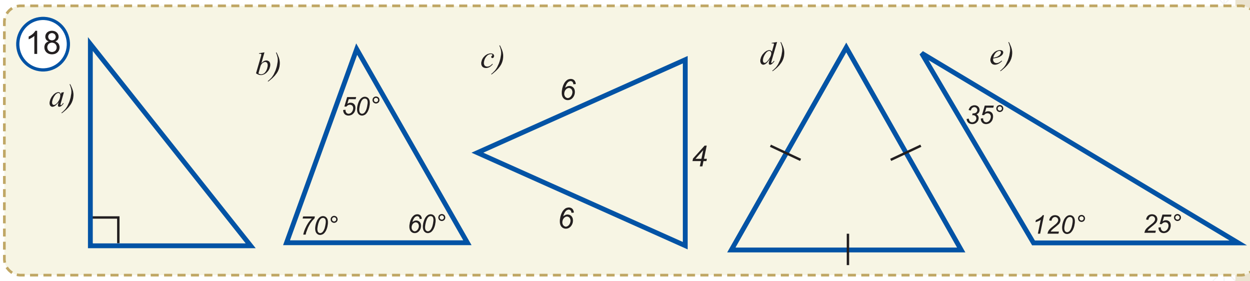


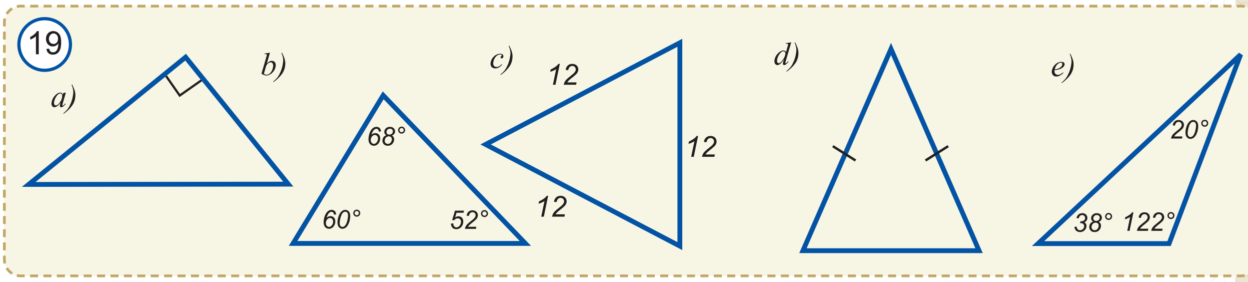
17



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE





8. Какие виды треугольников вы знаете? Начертите треугольник каждого вида. Обозначьте их. Исходя из определения вида треугольников, определите их особенности.

9. Определите виды треугольников на рисунке 18.

10. Определите виды треугольников на рисунке 19.

11. Вычислите периметр треугольника со сторонами: а) 2,3 dm; 4,6 dm и 5,3 dm; b) 32,3 m; 54,8 m и 25,3 m.

12. Вычислите периметр треугольника со сторонами: а) 25 mm; 64,6 mm и 5 cm; b) 7,3 dm; 5,8 dm и 350 mm.

13. Постройте «на глаз» равносторонний треугольник. Затем измерьте его стороны и проверьте, равны ли они.

14. Начертите равносторонний треугольник, измерьте его углы и сделайте вывод.

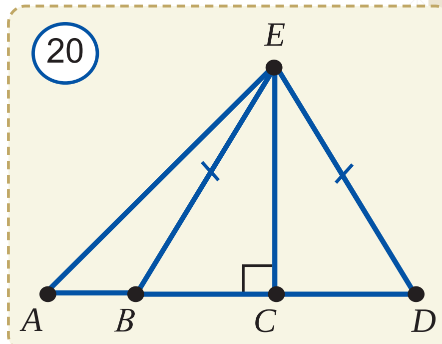
15. Сколько треугольников на рисунке 20 имеют вершину: а) в точке A; б) в точке B; в) в точке C?

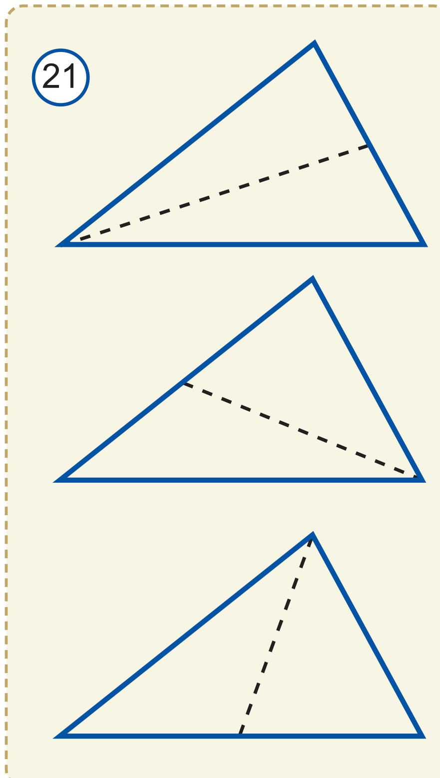
16. Треугольники каких видов вы видите на рисунке 20? Запишите их в тетрадь в соответствии с видами.

17. Начертите остроугольный треугольник. Линейкой измерьте длины его сторон и найдите периметр.

18. Начертите тупоугольный треугольник. Линейкой измерьте длины его сторон и найдите периметр.

19. (Практическое упражнение). Разрежьте три равных треугольника по их разным медианам. *(рис. 21)*. Составьте один треугольник из шести получившихся треугольничков.





*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

20. Какие из рассмотренных элементов треугольника всегда проходят внутри треугольника?

21*. В каком треугольнике все высоты пересекаются в одной из вершин?

22*. Может ли высота треугольника быть меньше любой из его сторон?

23. Найдите высоту треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 18 и 24.

24. Найдите биссектрису треугольника с периметром, равным 36, если она разбивает его на два треугольника с периметрами 24 и 30.

25. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а медиана BD равна 4 cm. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 12 cm.

26. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник ABC, для которого: AB = 8 cm, AC= 5 cm и $\angle A$ = 60°.

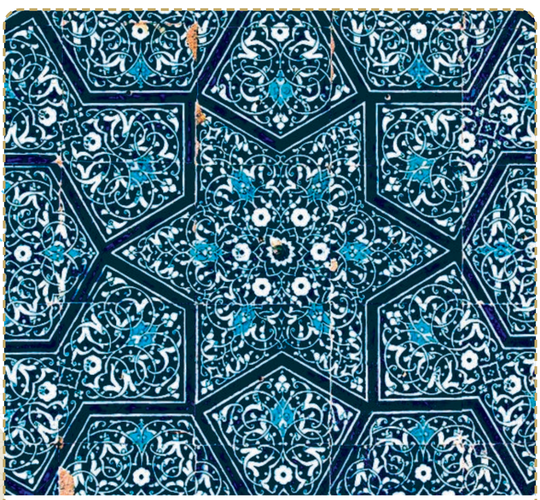
27. С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, для которого: KL = 4 cm, KM= 3 cm и $\angle K$ = 90°. Какой это треугольник? Измерьте его третью сторону и запишите.

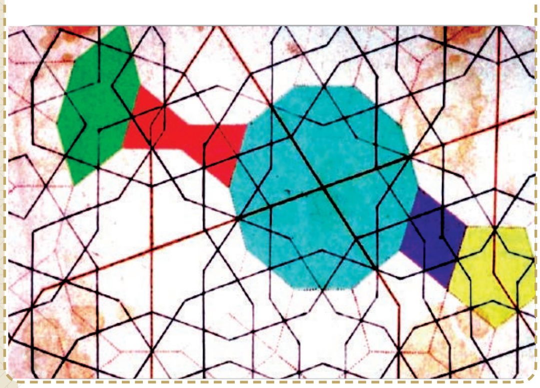
28*. Периметр треугольника 72 cm. Найдите его стороны, если они относятся как 3:4:5. Измерьте его углы. Какой это треугольник?

29*. Периметр треугольника 126 mm. Найдите его стороны, если они относятся как 3:4:5.

Историческая страница

Наши зодчие, которые опередили своё время на пять веков.





Научная статья об архитектуре, изданная в Америке в феврале 2007 года, стала причиной для шумихи. Дело в том, что аспирант Гарвардского университета Питер Лу, посетивший в 2005 году медресе Абдуллахана в Самарканде, был поражён узорами на плитках, которыми были украшены стены. Он увидел сложные геометрические узоры, именуемые мозаикой Пенроуза, которые считались появившимися в 1970-х годах. Получается, что наши древние зодчие опередили своё время на пять веков, они не только знали о недавно внедрённых в науку геометрических узорах, но и искусно применяли свои знания на практике. На рисунке изображён узор с этого архитектурного сооружения. Этот рисунок был взят из средневековой рукописи, на нём изображены многоугольники, ставшие основой для данной мозаики.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

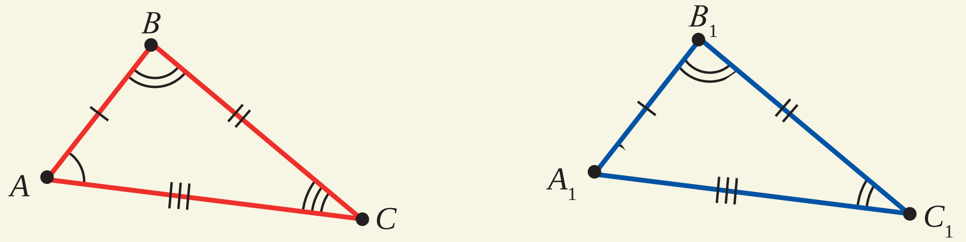
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

9 ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Согласно определению равенства геометрических фигур, два треугольника будут *равны*, если их можно совместить, накладывая друг на друга. На рисунке 1 треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Выбрав любой из них, можно совместить его с другим. При этом три вершины A, B, C и три стороны AB, BC, CA одного совпадут с соответствующими вершинами A_1, B_1, C_1 и сторонами A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 второго. Очевидно, при этом углы одного треугольника совместятся с соответствующими углами второго.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ записывается в виде $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. На чертеже равные углы отмечаются равным числом дужек, равные стороны – равным числом чёрточек, как это показано на рисунке 1.

1



$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1: \begin{cases} AB = A_1B_1, \\ BC = B_1C_1, \\ CA = C_1A_1 \end{cases}$$

три соответствующие стороны равны

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1,$$
$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1,$$
$$\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$$

три соответствующих угла равны

Активизирующее упражнение

Как можно проверить на практике, что два участка земли треугольной формы равны? Их ведь нельзя наложить один на другой. Надо ли накладывать один треугольник на другой, чтобы убедиться в их равенстве? В этом нет необходимости. Эту задачу можно решить, сравнивая некоторые их элементы. Теоремы, носящие название «признаки равенства треугольников», именно об этом?

Причина, по которой эти теоремы называются «признаками», состоит в том, что с их помощью можно заключить, равны треугольники или нет. В общем, «признак» в геометрии позволяет определять некоторые свойства фигуры с помощью теоремы, описывающей вспомогательные условия для их реализации.

Следующая теорема называется «Теоремой о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними». Мы её кратко будем называть «признак СУС».

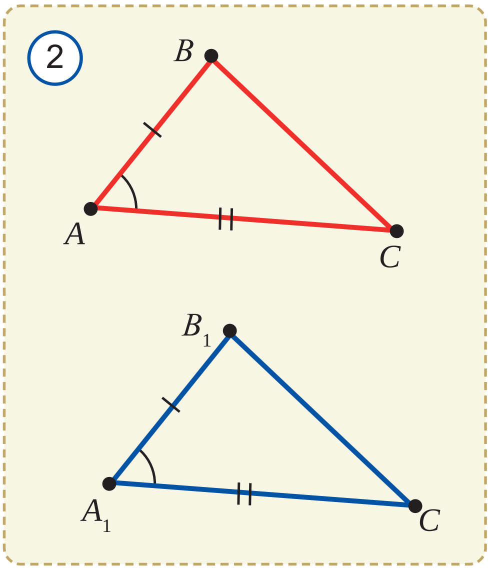
(СУС – это заглавные буквы слов: «Сторона», «Угол», «Сторона", указывает, что угол расположен между сторонами).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Теорема. ***(Признак СУС равенства треугольников).*** **Если две стороны одного треугольника и угол между ними соответственно равны двум сторонам другого треугольника и углу между ними, то такие треугольники равны** *(рис. 2).*

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$
$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ \angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ ⇒ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

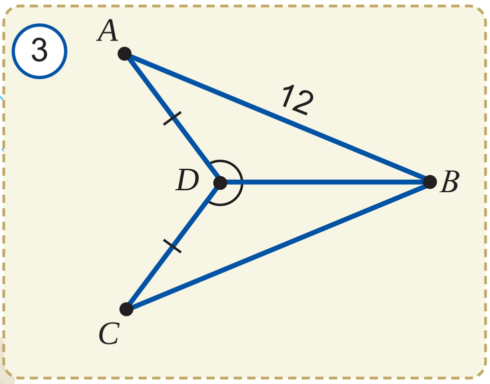


Доказательство. Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, а лучи AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Так как $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC со стороной A_1C_1. Тогда точка B совместится с точкой B_1, точка C – с точкой C_1. Но в таком случае, стороны B_1C_1 и BC также совместятся. Следовательно, совместятся все три вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Таким образом, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Задача. Найдите отрезок BC, используя сведения, приведённые на рисунке 3.



Решение. Рассмотрим треугольники ADB и CDB. По условию $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$, а BD – общая сторона.

Так как две стороны и угол между ними треугольника ADB соответственно равны двум сторонам и углу между ними треугольника CDB, то по признаку СУС равенства треугольников: $\Delta ADB = \Delta CDB$.

Следовательно, $CB = AB = 12$.

Ответ: 12.

Вопросы к теме

1. Какие треугольники называются равными?
2. С помощью каких элементов устанавливается по признаку СУС равенство треугольников?
3. Сформулируйте признак СУС равенства треугольников.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Практические упражнения и приложения

1. $\Delta ABC = \Delta DEF$. Определите и запишите соответствующие вершины, стороны и углы этих треугольников.

2. Треугольники MNL и RST равны. Определите и запишите соответствующие вершины, стороны и углы этих треугольников.

3. Какие стороны треугольника ABC равны, если известно, что $\Delta ABC = \Delta BAC$?

4. $\Delta MNL = \Delta LMN$. Какие углы треугольника MNL равны?

5. $\Delta ABC = \Delta DEF$, $\angle A=52°$, $\angle E= 80°$ и $\angle C= 48°$. Найдите остальные углы треугольников.

6. $\Delta ABC = \Delta LMN$. $AB=5$, $MN= 8$ и $AC= 9$. Найдите остальные стороны треугольников.

7. Найдите неизвестный отрезок x на рисунке 4.

8. Докажите, что на рисунке 5 $AD=BC$, если $\angle CAB = \angle ABD$.

9. Докажите, что на рисунке 6 $\angle BAE = \angle BCD$.

10. Докажите, что на рисунке 7 $\Delta ABC= \Delta CDA$.

11. Докажите, что на рисунке 8 $\Delta ABC= \Delta ABD$.

12. Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам *(рис. 9)*. Докажите, что: a) $\Delta AOB = \Delta DOC$; b) $BD = AC$; c) $\Delta ABD = \Delta DCA$;

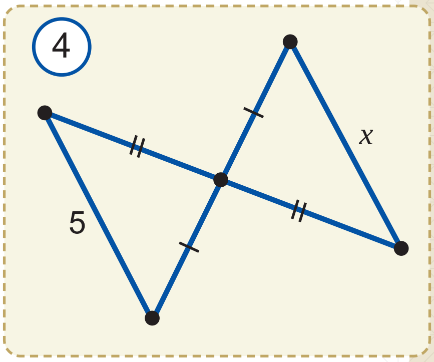
d) Найдите $\angle ODC$ и $\angle DCO$, если $\angle OAB = 35°$, $\angle OBA= 62°$.

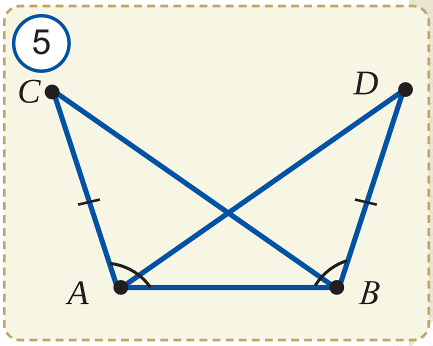
13. Найдите неизвестный угол x на рисунке 10.

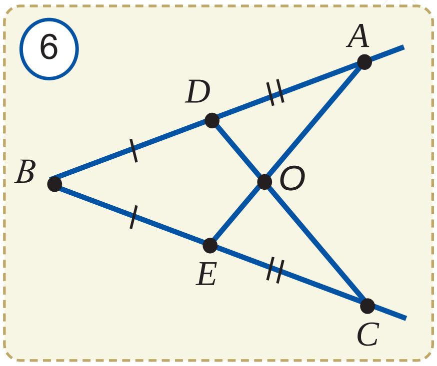
14. Периметр одного треугольника равен периметру другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

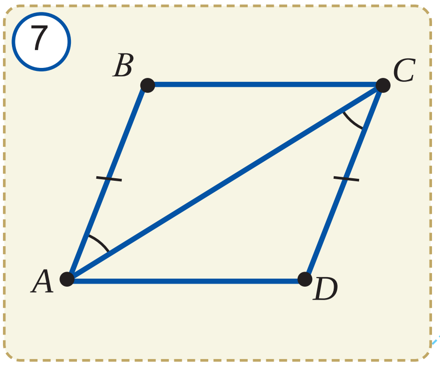
15. Могут ли быть равными треугольники, если периметр одного больше периметра другого?

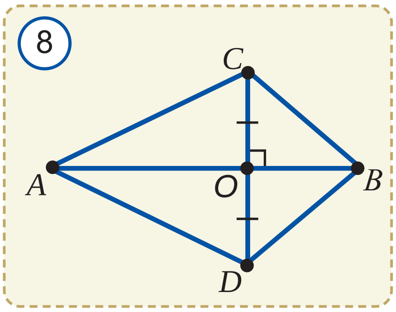
16. На стороне AB треугольника ABC взята точка D, на стороне A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взята точка D_1. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\Delta ADC = \Delta A_1D_1C_1$ и $BD = B_1D$.

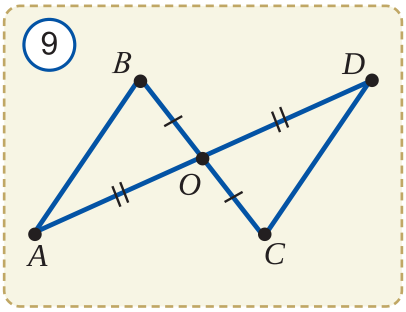


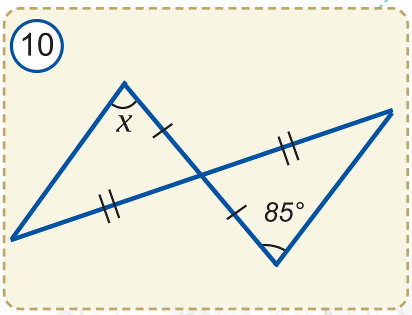










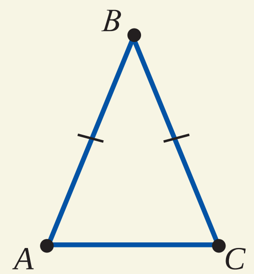


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

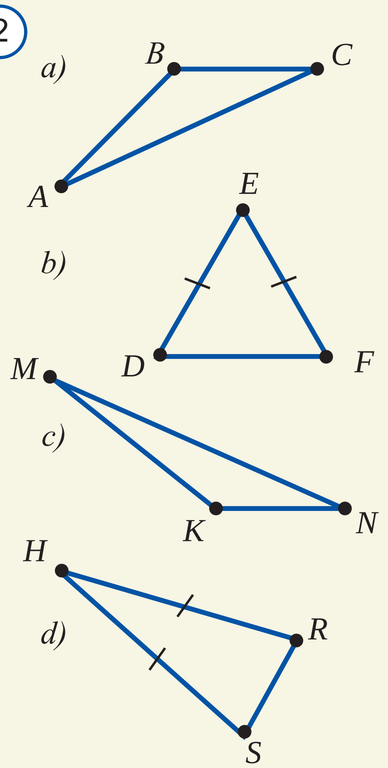
10 СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1

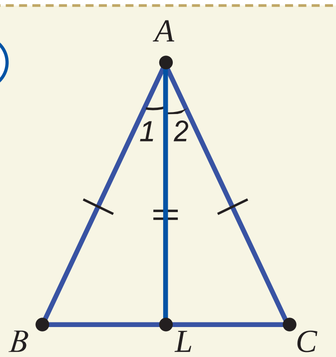


ABC – равнобедренный
AB, *BC* – боковые стороны
AC – основание
B – вершина

2



3



Треугольник, две стороны которого равны, называется, как было сказано, *равнобедренным треугольником* (*рис.1*). Равные стороны равнобедренного треугольника называются его *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием*.

Активизирующее упражнение

Какие треугольники на рисунке 2 равнобедренные? Назовите их основания и боковые стороны.

Геометрическое исследование

Начертите произвольный равнобедренный треугольник. Измерьте его углы, прилежащие к основанию, и сравните их. Повторите опыт ещё с 2–3 другими равнобедренными треугольниками и свою догадку выразите в виде утверждения. Можно ли утверждать, что это свойство, найденное в результате опыта, присуще всем равнобедренным треугольникам?

Теорема. **Углы при основании равнобедренного треугольника равны.**

$\Delta ABC,\ AB = AC$ ⇒ $\angle B = \angle C$

Доказательство. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC, проведённая из вершины A (*рис. 3*).

Рассмотрим треугольники ABL и ACL. У них сторона AL – общая. С другой стороны, по условию теоремы, $AB = AC$ (ΔABC – равнобедренный). Наконец, $\angle 1 = \angle 2$, так как AL – биссектриса. Итак, две стороны и угол между ними треугольника ABL равны двум сторонам и углу между ними треугольника ACL. Следовательно, по признаку СУС равенства треугольников, $\Delta ABL = \Delta ACL$.

Тогда, для соответствующих углов данного треугольника $\angle B = \angle C$.

Теорема доказана.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Геометрическое исследование

Начертите равнобедренный треугольник. Проведите биссектрису его угла при вершине. Сравните длины отрезков, на которые точка пересечения биссектрисы с основанием разбила основание. Какой вывод можно сделать? Затем измерьте углы, которые биссектриса образует с основанием. Какой вывод из этого следует? Сформулируйте выводы в виде предположения. Можно ли утверждать, что этими свойствами обладает любой равнобедренный треугольник?

Теорема. **Биссектриса, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также его медианой и высотой.**

ΔABC, $AB = AC$, AL – биссектриса ⇒ AL – медиана и высота

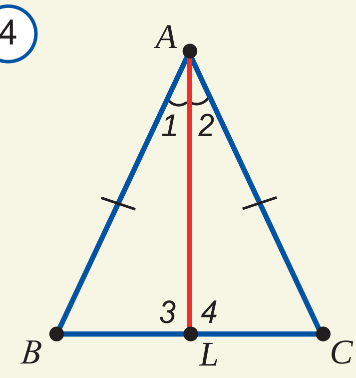
Доказательство. 1. Если AL – биссектриса треугольника ABC *(рис. 4)*, то, по доказанной выше теореме, $\Delta ABL = \Delta ACL$. Из равенства треугольников следует, что $BL = LC$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Значит, точка L – середина стороны BC, а AL – медиана треугольника ABC.

2. Так как $\angle 3 = \angle 4$ и эти углы – смежные, то они являются прямыми углами.

Таким образом, отрезок AL будет также и высотой треугольника ABC. ***Теорема доказана.***

4



Вывод. **Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является также его медианой и высотой.**

Задача. К боковым сторонам равнобедренного треугольника ABC проведены медианы AD и CF. Докажите, что $\Delta ADC = \Delta CFA$ и $\Delta ADB = \Delta CFB$.

ΔABC, $AB = BC$, AD и CF – медианы *(рис.5)* ⇒ $\Delta ADC = \Delta CFA$, $\Delta ADB = \Delta CFB$

Доказательство. Так как $AB = BC$, то отрезки, на которые эти стороны разбиваются медианами AD и CF, равны: $AF = FB = BD = CD$. (1)

а) В треугольниках ADC и CFA:

1. $\angle ACD = \angle FAC$, так как ΔABC – равнобедренный;

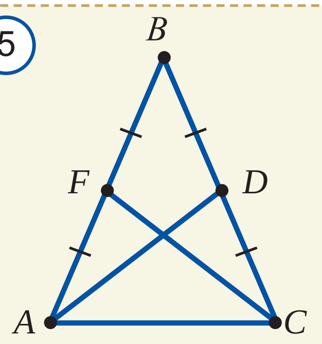
2. AC – общая сторона;

3. $AF = CD$ – согласно равенству (1).

Следовательно, по признаку СУС равенства треугольников: $\Delta ADC = \Delta CFA$.

b) Докажите самостоятельно, что $\Delta ADB = \Delta CFB$.

5



Вопросы к теме

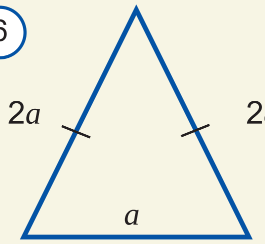
1. Дайте определение равнобедренного треугольника и сформулируйте его свойство.

2. Будет ли биссектрисой медиана, опущенная на основание равнобедренного треугольника?

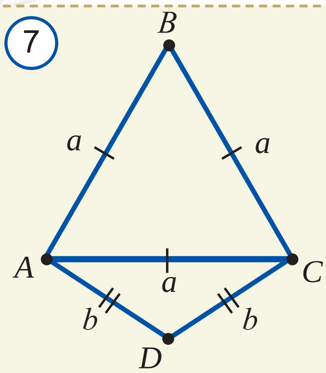
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

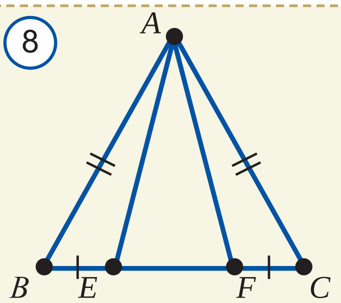
6



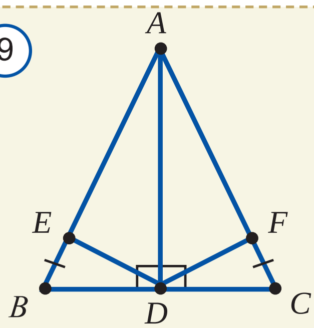
7



8



9



Практические упражнения и приложения

1. Найдите a на рисунке 6, если P = 50 cm.

2. Найдите a и b на рисунке 7, если $P_{ABC} = 36$ и $P_{ADC} = 28$.

3. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведённые к боковым сторонам.

4. На рисунке 8: $AB=AC$, $BE=FC$. Докажите, что: a) $\Delta ABE=\Delta ACF$; b) $AE=AF$; c) $\Delta ABF=\Delta ACE$.

5. На рисунке 9: $AB=AC$, $BE=CF$. Докажите, что: a) $\Delta AED=\Delta AFD$; b) $\Delta BED=\Delta CFD$.

6. Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

7*. Докажите, что если в двух равнобедренных треугольниках равны основания и высоты, опущенные на основания, то эти треугольники равны.

8. В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 3 cm, но меньше суммы боковых сторон на 5 cm. Найдите стороны треугольника.

9*. Докажите, что если соединить середины сторон равнобедренного треугольника, то получится равнобедренный треугольник.

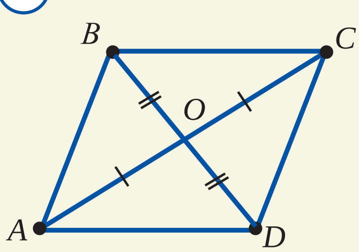
10*. Будут ли равны треугольники, если две стороны и один угол в одном треугольнике равны двум сторонам и одному углу в другом треугольнике?

11*. Начертите два таких неравных треугольника, для которых две стороны и угол в одном треугольнике были бы равны двум сторонам и углу в другом треугольнике.

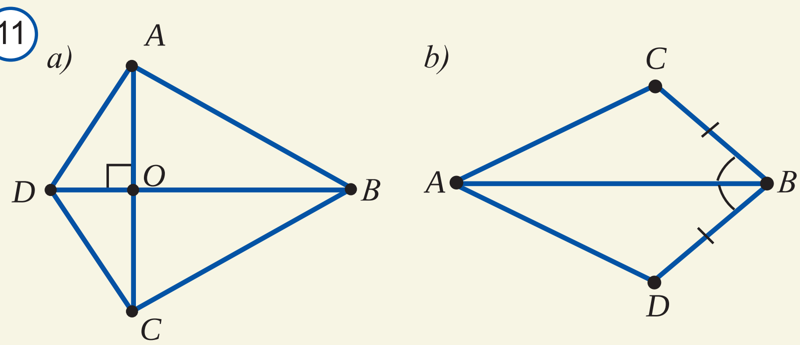
12. На рисунке 10: $AO=OC$ и $BO=OD$. Докажите, что $AB=CD$ и $BC=AD$.

13*. Докажите, что на рисунке 11: a) $\Delta AOD=\Delta COD$, $\Delta ABD=\Delta CBD$; b) $\Delta ABD = \Delta ABC$.

10



11



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

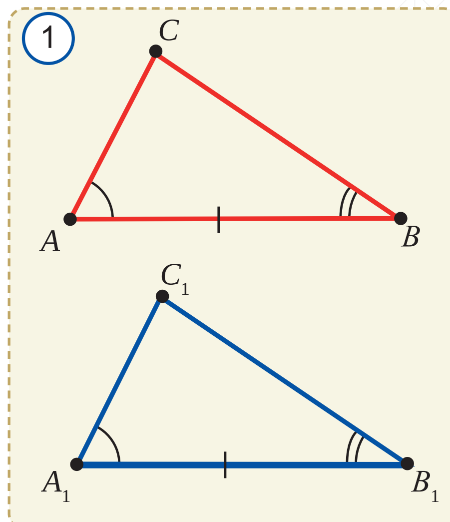
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

11 ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Рассмотрим признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам. В дальнейшем этот признак будем называть «признак УСУ».

Теорема. **(Признак УСУ равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.**

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ (рис 1),
$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ ⇒ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



Доказательство. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы совместились вершины A и A_1, стороны AB и A_1B_1, и вершины C и C_1 лежали по одну сторону от прямой A_1B_1.

Тогда сторона AC пойдёт по лучу A_1C_1, так как $\angle A = \angle A_1$, сторона BC пойдёт по лучу B_1C_1, так как $\angle B = \angle B_1$.

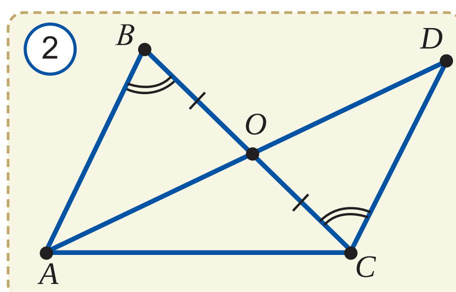
Поэтому точка C, будучи общей точкой лучей AC и BC, будет также и общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1.

В таком случае точка C совместится с точкой C_1 – общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1.

В результате совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ совпадут, что и означает их равенство.

Теорема доказана.



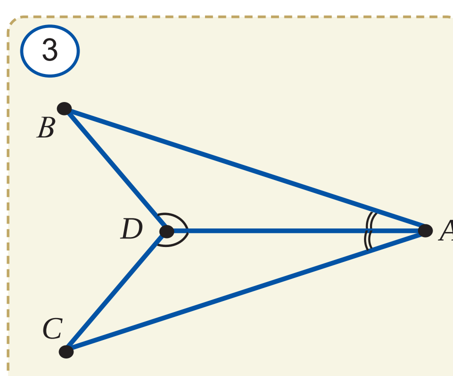
Задача. Используя данные рисунка 2, докажите, что $\Delta AOB = \Delta DOC$.

Доказательство. Углы $\angle AOB$ и $\angle DOC$ равны как вертикальные.

Таким образом, $BO = OC$, $\angle ABO = \angle DCO$ и $\angle AOB = \angle DOC$.

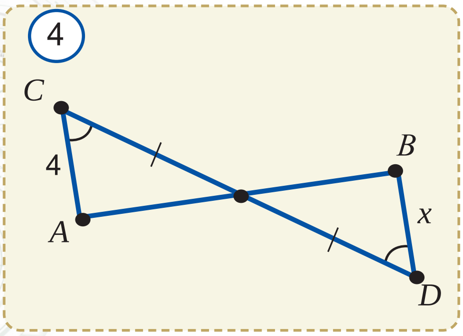
Следовательно, сторона и два прилежащих к ней угла треугольника AOB соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам треугольника DOC.

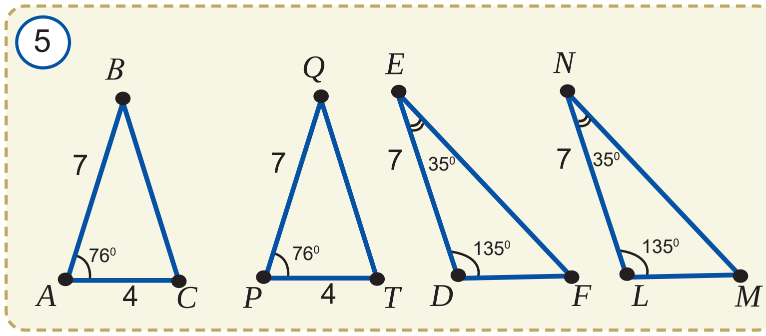
Тогда треугольники AOB и DOC будут равны по признаку УСУ равенства треугольников.

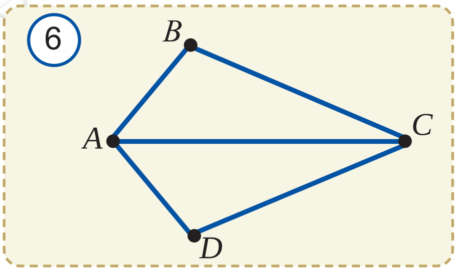


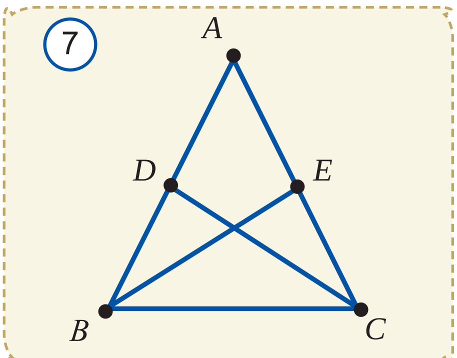
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

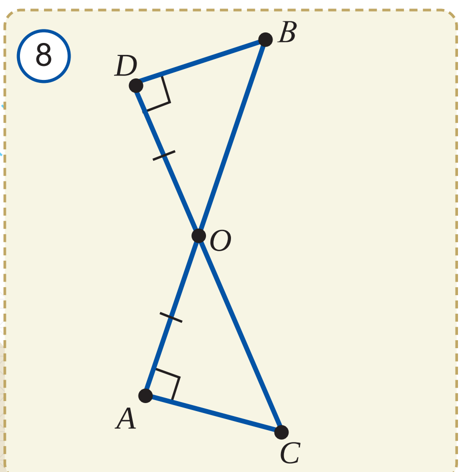
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

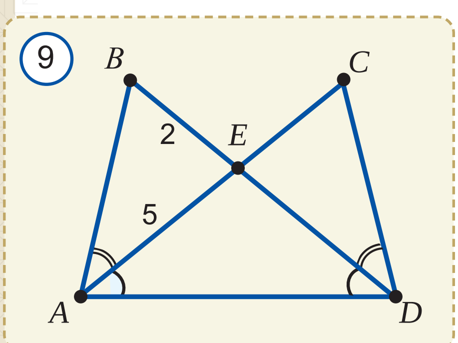












Вопросы к теме

1. Сравнением каких элементов устанавливается равенство треугольников по признаку УСУ?

2. Сформулируйте признак УСУ равенства треугольников.

3. Почему признак УСУ равенства треугольников так называют?

Практические упражнения и приложения

1. Докажите, что $\Delta ABD=\Delta ACD$ на рисунке 3.

2. Найдите неизвестный отрезок x на рисунке 4.

3. Какие треугольники на рисунке 5 равны друг другу? Почему?

4. Докажите, что на рисунке 6 $\Delta ABC=\Delta ADC$, если отрезок AC лежит на биссектрисах углов BAD и BCD.

5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $\angle B=\angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 соответственно выбраны точки D и D_1 так, что $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$.

6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ACO и DBO равны, если $BO=CO$ и $\angle ACO=\angle DBO$.

7. Докажите, что если в треугольнике ABC на рисунке 7 $AB = AC$ и BE и CD – его биссектрисы, то $BE = CD$.

8. Докажите, что $\Delta OAC=\Delta ODB$ *(рис. 8).*

9. Треугольники ABC и ADC равны. Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Докажите, что треугольники ABD и BCD равнобедренные.

10*. На основе данных рисунка 9 найдите отрезки AC и BD.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

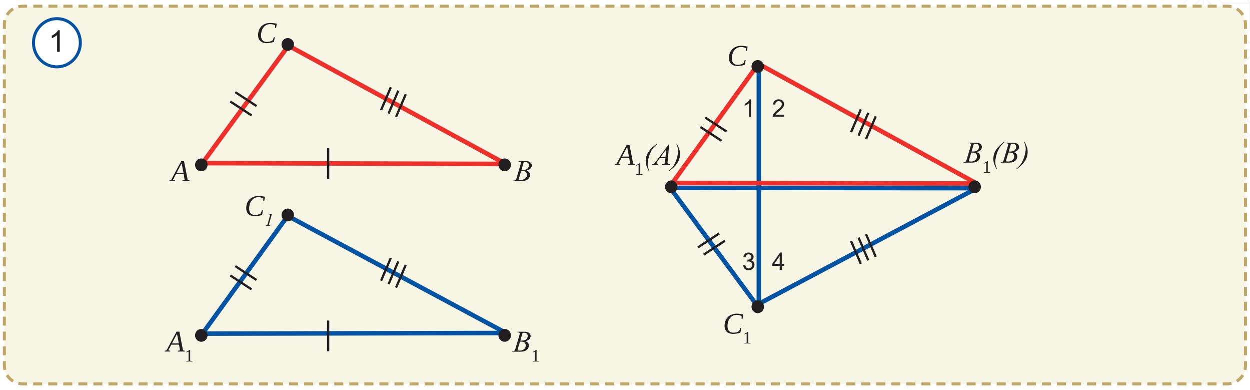
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

12 ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Познакомимся теперь с признаком равенства треугольников по трём сторонам. В дальнейшем мы будем называть его «признак ССС».

Теорема. **(Признак ССС равенства треугольников). Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.**

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. $\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$



Доказательство. Пусть AB – наибольшая сторона треугольника ABC. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона AB совместилась со стороной A_1B_1 и вершины C и C_1 лежали по разные стороны от прямой A_1B_1 *(рис. 1)*.

Тогда, так как по условию $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$, треугольники A_1C_1C и B_1C_1C будут равнобедренными.

По свойствам равнобедренных треугольников, будут выполняться равенства: $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Поэтому $\angle ACB = \angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$.

Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Откуда по признаку СУС равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

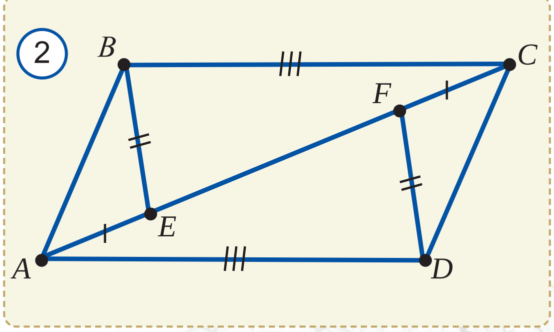
Теорема доказана.

Вывод. Если в двух треугольниках соответствующие стороны равны, то равны и их соответствующие углы.

Задача. Используя данные на рисунке 2, докажите, что: a) $\Delta AFD = \Delta CEB$;
b) $\Delta AEB = \Delta CFD$.

Доказательство. По данным рисунка 2, имеем: $AE = FC$, $BE = FD$ и $AD = BC$.

1) Так как $AF = AE + EF$, то
$EC = EF + FC = EF + AE = AF$.
Тогда в ΔAFD и ΔCEB соответствующие



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

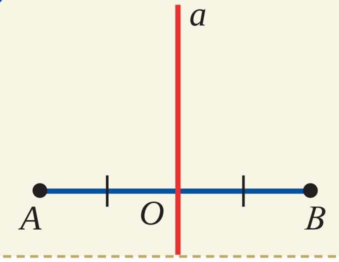
стороны равны и, по признаку ССС равенства треугольников, $\Delta AFD = \Delta CEB$.

2) Из равенства $\Delta AFD = \Delta CEB$ следует, что $\angle BEF = \angle EFD$. Тогда, так как углы BEF и AEB, EFD и CFD смежные, то $\angle AEB = \angle CFD$.

Итак, в треугольниках AEB и CFD: 1. $AE = FC$; 2. $BE = FD$; 3. $\angle AEB = \angle CFD$.

Тогда $\Delta AEB = \Delta CFD$ по признаку СУС равенства треугольников.

3



Свойство серединного перпендикуляра

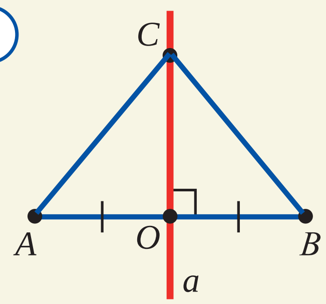
Научимся применять признаки равенства треугольников при доказательстве теорем.

Пусть дан отрезок AB. Через точку O – середину этого отрезка проведём прямую a, перпендикулярную к отрезку AB *(рис. 3)*. Эта прямая называется *серединным перпендикуляром* к отрезку AB.

Теорема. **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.**

AB – отрезок, C – любая точка серединного перпендикуляра к отрезку AB (рис. 4) ⇒ $AC = BC$

4



Доказательство. В треугольниках ACO и BCO *(рис. 4)*:

1) OC – общая сторона;

2) $AO = BO$ – по условию;

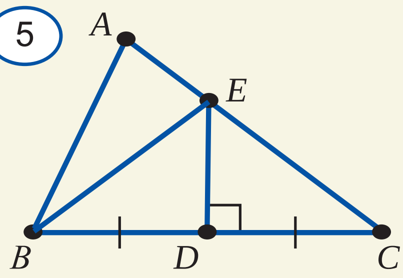
3) $\angle AOC = \angle BOC = 90°$ – по условию.

Значит, по признаку СУС равенства треугольников $\Delta AOC = \Delta BOC$.

В частности, $AC = BC$.

Задача. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке E. Найдите отрезки AE и CE, если BE = 6 cm, AC = 8,4 cm.

5



Решение. Пусть AC – серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC *(рис. 5)*.

По свойству серединного перпендикуляра: $CE = BE$ = 6 cm.

Так как $AE+EC=AC$,

то $AE=AC–EC$= 8,4 – 6 = 2,4 (cm).

Ответ: AE = 2,4 cm, CE = 6 cm.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вопросы к теме

1. *На рисунке 6 найдите сооружения в форме треугольника. Почему они имеют форму треугольника?*
2. *Какие элементы треугольников сравниваются в признаке ССС равенства треугольников?*
2. *Сформулируйте признак ССС равенства треугольников.*
3. *Что такое серединный перпендикуляр к отрезку?*
4. *Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра.*
5. *Начертите треугольник и проведите серединные перпендикуляры к каждой его стороне. Что вы заметили? Сравните свой чертёж с чертежом одноклассника и сформулируйте замеченное свойство.*
6. *В каком треугольнике серединный перпендикуляр,проведённый к стороне треугольника, совпадёт с его высотой?*

6

Практические упражнения

1. По данным на рисунке 7 докажите, что $\Delta ABC=\Delta CDA$.

2. По данным на рисунке 8 докажите, что: а) $\Delta ABC=\Delta ABD$; b) $\Delta BOC=\Delta BOD$.

3. По данным на рисунке 8 докажите, что: а) $\Delta AOC=\Delta AOD$; b) $AB\perp CD$.

4. Докажите, что $\Delta ACD=\Delta BCD$, если AB – основание треугольников ABC и ABD.

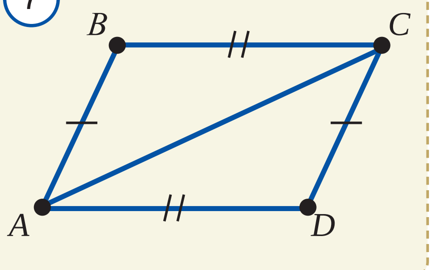
5. Найдите на рисунке 9 все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, K и N, если $BA=AK$, $AC=AN$, $\angle BAC=\angle NAK$.

6. Покажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если $AB=A_1B_1$ и $BC=B_1C_1$ и периметры треугольников равны.

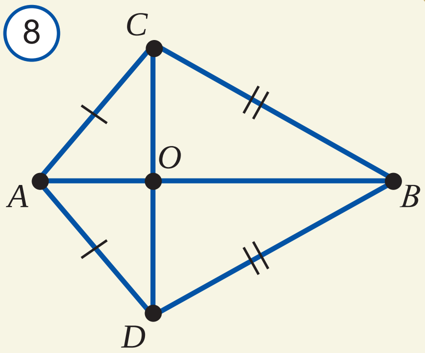
7.* Отрезки AB и CD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\Delta ACD=\Delta BDC$.

8. Определите, сколько пар равных треугольников имеется на рисунке 10.

7



8



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

9*. Покажите, что на рисунке 11 выполняется равенство: $\Delta ABD = \Delta DCA$, если а) $\angle 1 = \angle 2$, $AC = BD$; b) $\angle 1 = \angle 2$, $BO = OC$, $AB = CD$.

10. К стороне BC треугольника ABC проведён серединный перпендикуляр, который пересекает сторону AC в точке D. Чему равна длина AC, если: BD = 7,2 cm, AD = 3,2 cm?

11. Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD– серединный перпендикуляр стороны AB.

12*. Серединный перпендикуляр к боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Найти основание AC, если периметр ΔABC равен 24 cm и AB = 16 cm.

13*. Докажите, что серединные перпендикуляры, проведённые к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке.

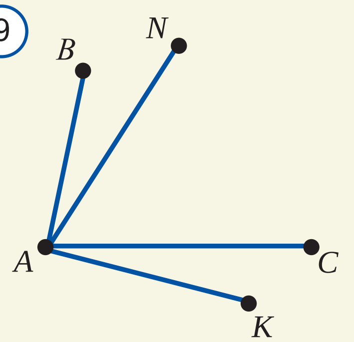
14. На биссектрисе BF, проведённой к основанию равнобедренного ΔABC, взята точка E *(рис. 12)*. Докажите, что $\Delta ABE = \Delta CBE$: а) по признаку ССС; б) не используя его.

15. Известно, что у треугольников ABC и $A_1C_1B_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A$= 30°, $\angle B$= 60° и $\angle C_1$= 90°. Найдите остальные углы треугольников.

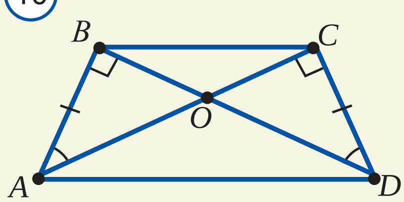
16. Равнобедренные треугольники ABC и DEF равны. В треугольнике ABC: $AC = BC$ и AB = 2 cm. Найдите периметр каждого треугольника, если DE = 4 cm.

17. Определите, сколько пар равных треугольников имеется на рисунке 13. Почему?

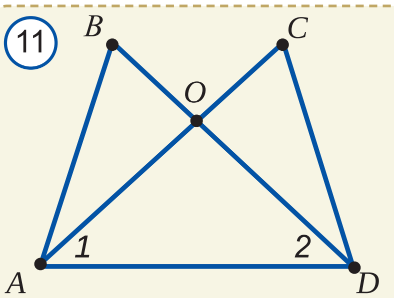
9



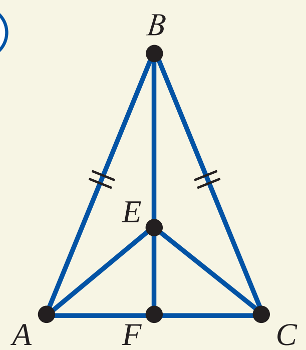
10



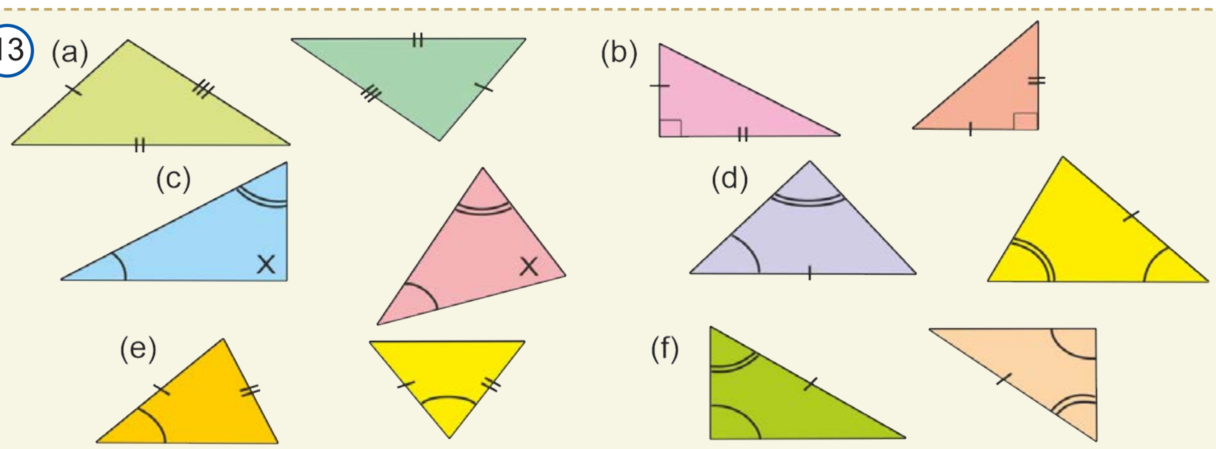
11



12



13



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

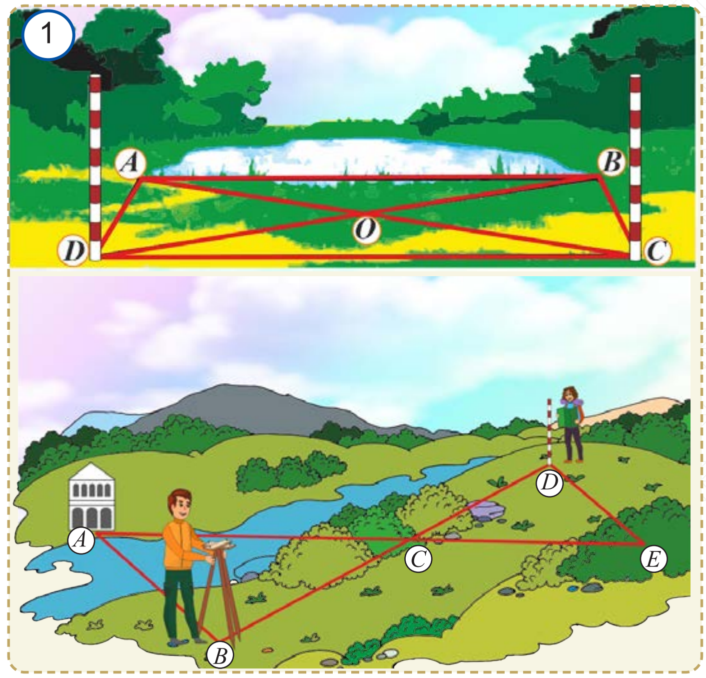
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

13 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

Измерение ширины озера

Пусть точки A и B находятся на самом берегу озера *(рис. 1)*. Ясно, что отрезок AB нельзя измерить непосредственно. Какие действия надо предпринять на суше, чтобы найти расстояние AB?

Решение. Выберем на берегу точку O так, чтобы отрезки OA и OB по суше вели к точкам A и B. Продолжив стороны AO и BO за точку O, построим отрезки $OC = AO$ и $OD = BO$. Соединим точки C и D. Тогда согласно признаку СУС имеем $\Delta AOB = \Delta COD$. В частности, $AB = DC$.



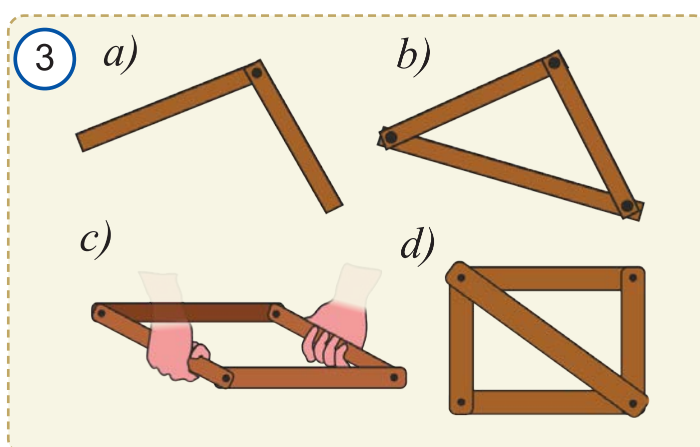
Таким образом, измерив построенный отрезок DC, найдём длину отрезка AB, а значит, и искомое расстояние. Докажите самостоятельно случай, изображенный на рисунке 2.

Обоснование «жёсткости» треугольника

Соединим две рейки так, как показано на рисунке 3a, например, с помощью гвоздика. Полученная фигура не будет жёсткой, так как, двигая свободные концы реек, мы сможем изменять углы между ними.

Но если теперь к свободным концам реек прибить третью рейку так, как показано на рисунке 3b, то полученный треугольник будет жёстким, потому что нам не удастся сдвинуть или раздвинуть рейки, меняя углы между ними.

1. Докажите «жёсткость» фигуры с помощью признака ССС равенства треугольника.
2. Прокомментируйте в соответствии с рисунками 3c и 3d примеры использования жёсткости треугольника. За счёт чего четырёхугольник 3d стал жестким?
3. Свойство «жёсткости» треугольника широко применяется в строительстве. Объясните, почему в сооружениях и конструкциях, изображённых на рисунке 6 на странице 89, использованы устройства треугольной формы.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

13.2. Проверьте свои знания

1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений.

1. Если у треугольника равны две стороны, то он будет ... .
2. В равнобедренном треугольнике ... будет также медианой и высотой.
3. Фигура, образованная замкнутой ломаной без самопересечений, называется ... .
4. У треугольника, все стороны которого равны, все ... будут равными.
5. У ... равны все медианы, биссектрисы и высоты.
6. У ... углы, прилежащие к основанию, равны.
7. Равносторонний треугольник будет также и ... треугольником.

2. Если в приведённых ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их.

1. Углы равнобедренного треугольника равны между собой.
2. Если углы двух треугольников соответственно равны, то эти треугольники равны.
3. В равнобедренном треугольнике его медиана будет также биссектрисой и высотой.
4. Биссектрисой треугольника называется луч, исходящий из его вершины и делящий угол пополам.
5. Медиана – это прямая, делящая пополам сторону треугольника.
6. Если у двух треугольников сторона и два угла соответственно равны, то эти треугольники равны.
7. Если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу второго треугольника, то эти треугольники равны.
8. Треугольники с равными периметрами равны.
9. Высота треугольника является перпендикуляром, проведённым из середины стороны треугольника.
10. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.

3. Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа.

1	Все медианы равны.	
2	Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.	
3	Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противолежащую сторону.	
4	Сумма длин сторон треугольника.	
5	Замкнутая ломаная без самопересечений.	

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование из второго столбца.

Геометрические понятия	Свойство или толкование
1. Ломаная 2. Многоугольник 3. Периметр треугольника 4. Остроугольный треугольник 5. Равнобедренный треугольник 6. Прямоугольный треугольник 7. Медиана треугольника 8. Биссектриса треугольника 9. Высота треугольника 10. Серединный перпендикуляр к отрезку	(A) один угол прямой. (B) отрезок, соединяющий вершины треугольника с серединой противоположной стороны. (C) две стороны равны. (D) замкнутая ломаная без самопересечений. (E) последовательность отрезков A_1A_2, A_2A_3, ... , $A_{n-1}A_n$ таких, что никакие два последовательных отрезка не лежат на одной прямой. (F) сумма трёх его сторон. (G) все углы острые (H) часть биссектрисы угла, лежащая во внутренней области треугольника. (I) перпендикуляр, опущенный из вершины угла треугольника на прямую, содержащую его сторону, противолежащую этому углу. (J) перпендикуляр, проведённый к середине отрезка.

5. Тесты.

1. Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны 8 и 3. Найдите его третью сторону.

A) 5 B) 8 C) 11 D) 9

2. Периметр равнобедренного треугольника 36 cm, и одна из его сторон меньше другой на 3 cm. Найдите его боковую сторону.

A) 11 B) 12 C) 14 D) 18

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, а боковая сторона 18. Найдите его основание.

A) 18 B) 12 C) 16 D) 14

4. Периметр равнобедренного треугольника равен 48. Найдите его остальные стороны, если одна из сторон равна 12.

A) 12; 12 B) 16; 16 C) 18; 24 D) 18; 18

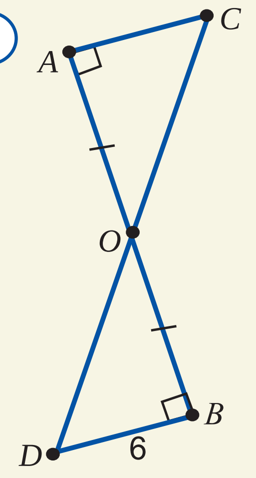
5. Периметр равнобедренного треугольника 36, одна из его сторон равна 16. Найдите остальные стороны.

A) 16 и 4 B) 10 и 10 C) 10 и 10 или 16 и 4
D) Такой треугольник не существует.

6. Найдите длину отрезка AC (рис. 4).

A) 6 B) 8 C) 12 D) 10,5

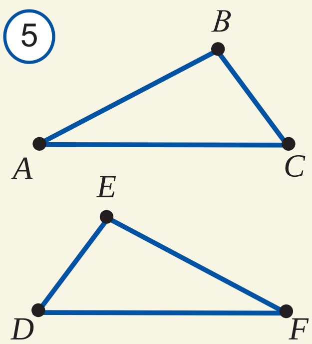
4



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

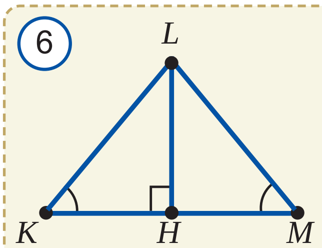
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5

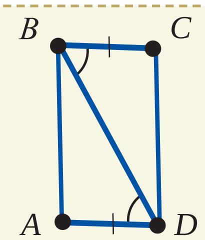


$AC = DF$, $\angle A = \angle F$, $AB = FE$

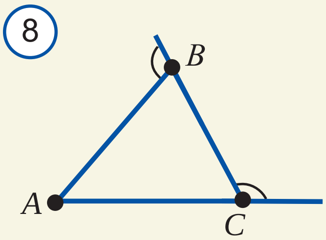
6



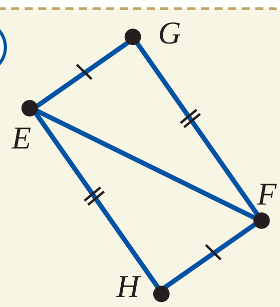
7



8



9



7. Сколько медиан у треугольника?

A) одна B) две C) три D) шесть

8. Какой фигурой является биссектриса треугольника?

A) отрезок B) луч C) прямая D) точка

9. Какой из элементов треугольника может лежать во внешней области треугольника?

A) медиана B) высота

C) биссектриса D) диагональ

10. Как можно назвать утверждение: «Треугольник будет равнобедренным, если равны два его угла»?

A) определение B) свойство

C) признак D) аксиома

11. Равны ли треугольники ABC и FED на рисунке 5?

A) да B) нет

12. Какие треугольники на рисунке 6 равны?

A) $\Delta KLM = \Delta LMH$ B) $\Delta KLH = \Delta MLH$

C) $\Delta KLM = \Delta KLH$ D) Никакие

13. На основании какого признака равны треугольники ABD и CDB на рисунке 7?

A) на основании признака равенства СУС;

B) на основании признака равенства УСУ;

C) на основании признака равенства ССС;

D) эти треугольники не равны.

14. По рисунку 8 определите вид треугольника.

A) равносторонний B) равнобедренный

C) тупоугольный D) невозможно определить

15. Найдите неверное равенство, опираясь на данные рисунка 9.

A) $\angle GEF = \angle HFE$ B) $\angle EGF = \angle FHE$

C) $\angle EHF = \angle FEG$ D) $\angle EFH = \angle GEF$

16. Найдите длину высоты треугольника с периметром, равным $12\ cm$, если она разбивает его на два треугольника с периметрами $7\ cm$ и $9\ cm$.

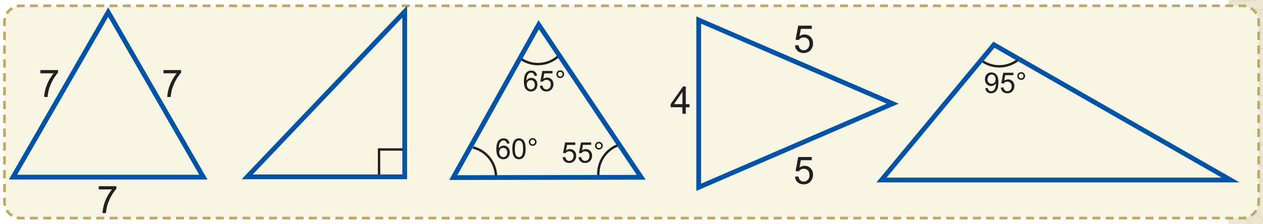
A) $2\ cm$ B) $3\ cm$ C) $1\ cm$ D) $4\ cm$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

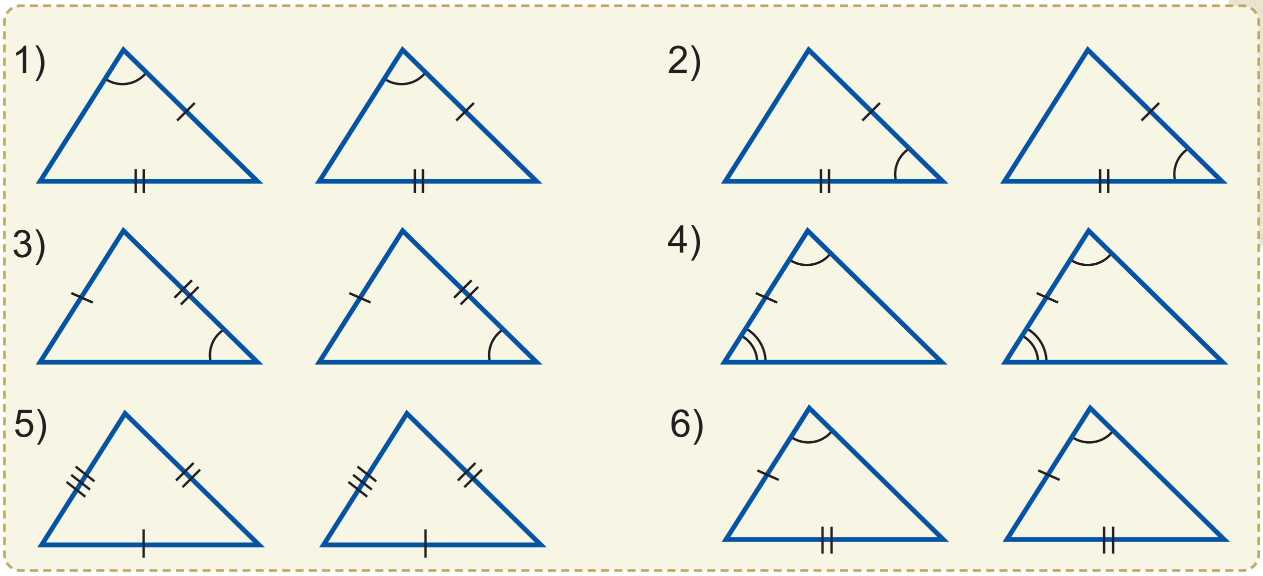
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

6. Задачи

1. По данным на рисунках определите вид треугольника.



2. Какие из пар треугольников, приведённых ниже, равны между собой? По какому признаку?



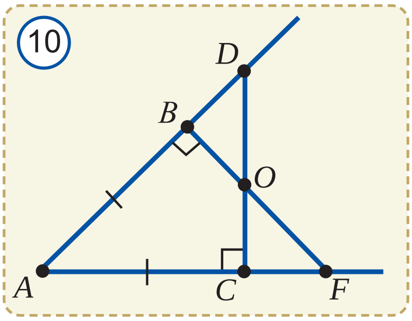
3. Докажите, что $\Delta ACD = \Delta ABF$ на рисунке 10.

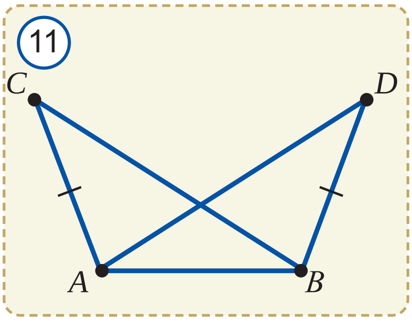
4. Докажите, что $AD = BC$, если $\angle CAB = \angle ABD$ (рис 11).

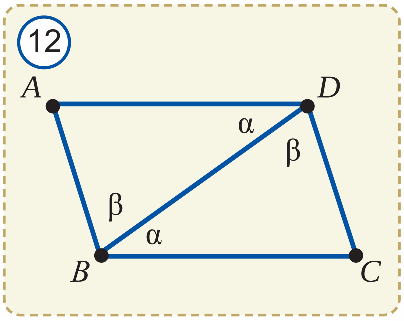
5. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta BCD$ на рисунке 12.

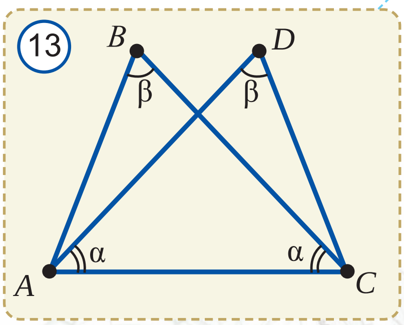
6. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$ на рисунке 13.

7. Будут ли равны ΔABC и ΔPQR, если $AB = PQ$, $AC = PR$ и $BC = QR$?



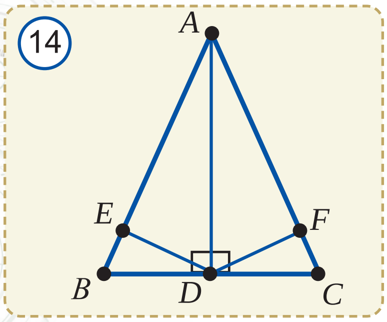






*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



8. Определите все пары равных треугольников на рисунке 14, если $BD=DC$, $AE=AF$. Обоснуйте свой ответ.

9. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta EFD$ на рисунке 15.

10. Докажите, что $AD=CE$ на рисунке 16.

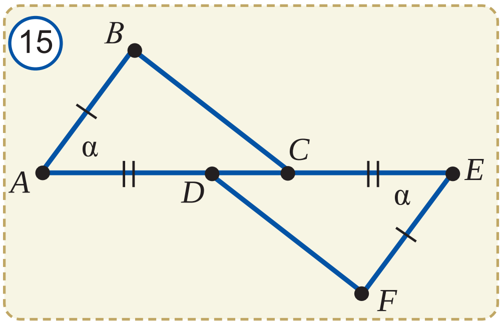
11. Найдите неизвестное x по данным на рисунке 17.

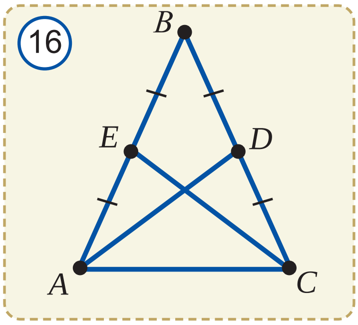
12. Отрезки AE и BD пересекаются в точке C. Найдите $\angle CED$, если $DC=DE$, $AB=BC$ и $\angle BAC=48°$.

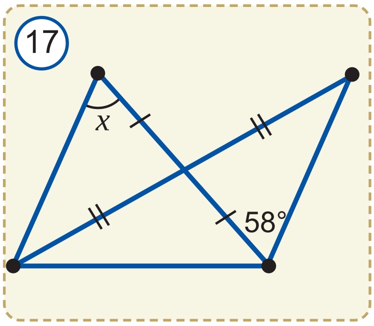
13. Во внутренней области треугольника ABC взята точка D. Найдите $\angle ADC$, если $AC=AB$, $CD=BD$ и $\angle BDA=120°$.

14. Докажите, что если одна из биссектрис треугольника является также и его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

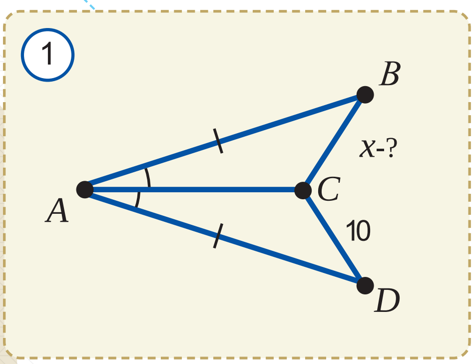
15. Докажите, что если одна из высот треугольника является также и его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.







Образец контрольной работы 3



Контрольная работа состоит из двух частей:

1) 5 тестов, подобных тестам на странице 93–94;

2) три задачи, подобные приведённым ниже (4-я – дополнительная задача для учащихся, которые хотят получить оценку «отлично»).

1. Найдите неизвестный отрезок по данным на рисунке 1.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ACO=\angle BDO$, если $\angle CAB=\angle ABD$ и $AO=BO$.

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 18,4 m, а основание на 3,6 m короче боковой стороны. Найдите стороны этого треугольника.

4*. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из них.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Выполнение практических упражнений на GeoGebra

Необходимые компоненты

- Прежде чем начать построение, вспомните свойства равностороннего треугольника.
- Откройте новое окно в ***GeoGebra***.
- Переведите интерфейс ***GeoGebra*** в положение ***Настройки*** – ***Геометрия***.

Необходимые инструменты на панели инструментов GeoGebra

	Окружность с центром через точку **Напоминание.** При одном нажатии кнопки мыши отметьте центр окружности, при втором – её радиус.
	Показывать объект **Напоминание.** Выберите объект, который нужно провести скрытно.
	Угол **Напоминание.** Отметьте три точки, двигаясь против часовой стрелки, и получите нужный угол.

Алгоритм построения равностороннего треугольника

1		Постройте отрезок AB.
2		Начертите окружность с центром в точке B.
3		Начертите окружность, проходящую через точку A, с центром в точке B.
4		Отметьте точку пересечения двух окружностей.
5		Постройте многоугольник ABC, двигаясь против часовой стрелки.
6		Приведите обе окружности в невидимое положение.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7		Отметьте оба внутренних угла треугольника, нажав на его стороны. **Напоминание.** Найдите внутренние углы треугольника, двигая мышку по часовой стрелке.
8	Сохранить	Сохраните изменения.
9	Перемещать	Пользуясь инструментом ***Перемещать,*** проверьте правильность построения.

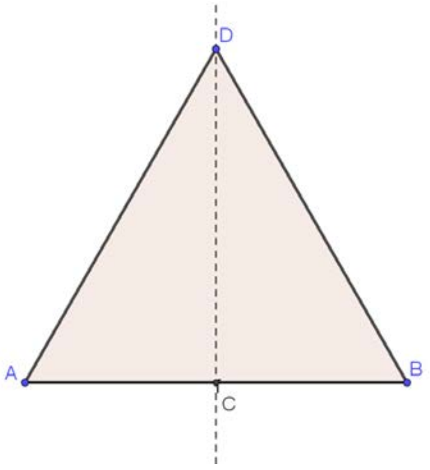
Задания для самостоятельного решения

Построение равнобедренного треугольника

Постройте равнобедренный треугольник, у которого с помощью мыши можно менять длины основания и высоты.

Для выполнения этого задания вам потребуются следующие инструменты:

Отрезок	Построение отрезка.
Середина или центр	Нахождение середины отрезка или двух точек.
Перпендикулярная прямая	Построение перпендикуляра в данной точке прямой или отрезка.
Точка	Построение точки на плоскости.
Многоугольник	Построение многоугольника.
Перемещать	Динамично измените график объекта, двигая его при помощи мыши.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Глава III

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

После изучения этой главы вы должны обладать следующими знаниями и практическими навыками:

Знания:

– определения параллельных прямых и их свойства;
– виды углов, полученных при пересечении двух прямых секущей;
– признак параллельности двух прямых.

Практические навыки:

– уметь чертить параллельные прямые с помощью угольника и простой линейки;
– уметь показать углы, полученные при пересечении двух прямых секущей;
– уметь использовать свойства параллельных прямых и признак параллельности двух прямых при решении задач;
– уметь формулировать теорему, обратную данной.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

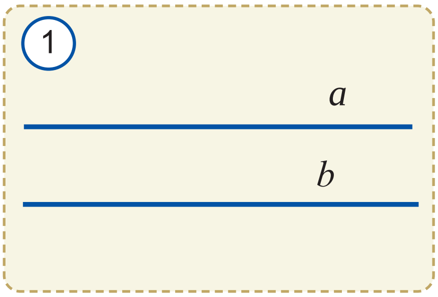
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

14 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

14.1. Параллельность прямых

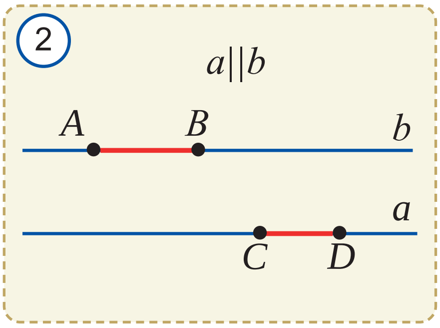
Активизирующее упражнение

Могут ли пересекаться две прямые, если они перпендикулярны одной и той же прямой? Обоснуйте свой ответ.



Две прямые на плоскости называются *параллельными прямыми*, если они не пересекаются. На рисунке 1 изображены параллельные прямые. Если прямые a и b параллельны, то пишут $a||b$ и говорят «*прямая a параллельна прямой b*».

Отрезки (лучи), лежащие на параллельных прямых, называются *параллельными отрезками (лучами)*. На рисунке 2 изображены параллельные отрезки.



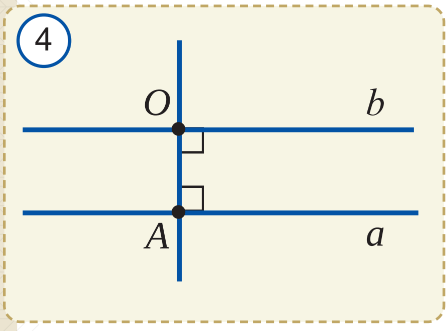
Вы часто встречаетесь в жизни с параллельными отрезками. Например, железнодорожные рельсы, противоположные рёбра стола прямоугольной формы, горизонтальные или вертикальные линии на листе из тетради в клетку и т. д.

Итак, согласно определению, для того чтобы прямые были параллельны, они должны лежать в одной плоскости и не должны иметь общей точки, т. е. не должны пересекаться.

Теорему, доказанную на странице 57, теперь можно сформулировать в следующем виде:

Теорема. **Две прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.**

Задача. Покажите, что через точку O, не лежащую на прямой a, можно провести параллельную ей прямую.



Решение. Согласно теореме на странице 57, проведём через точку O прямую OA, перпендикулярную прямой a (*рис. 4*). Затем через точку O проведём прямую b, перпендикулярную прямой OA. В результате, $a \perp OA$ и $OA \perp b$, т. е. имеем две прямые a и b, перпендикулярные прямой OA. Тогда по теореме, приведённой выше, прямые a и b будут параллельны, т. е. прямая b – искомая.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

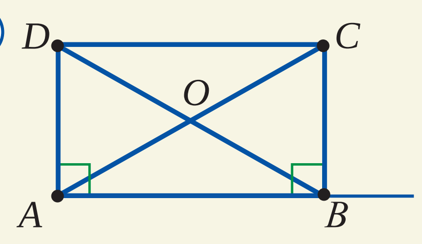
Геометрическое исследование

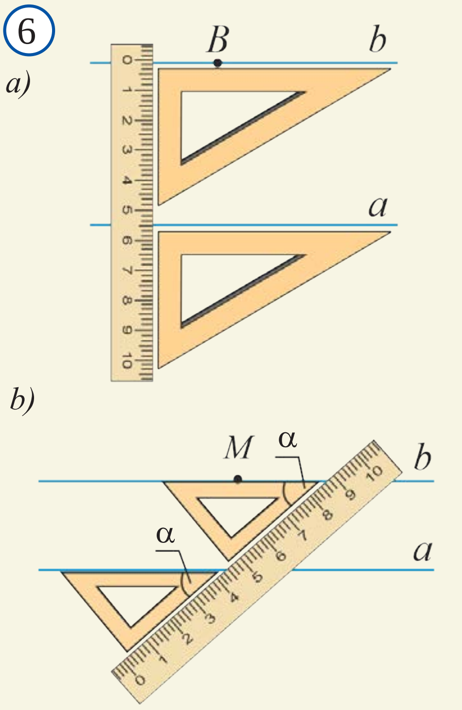
Отложите отрезок AB на луче A *(рис. 5)*. На луче A отложите прямые углы A и B в одну и ту же полуплоскость. Затем отложите на сторонах этих углов равные отрезки AD и BC и проведите отрезок DC. В результате получим четырёхугольник, который называют «*четырёхугольником Саккери*». Какими свойствами обладает этот четырёхугольник? Докажите, что этот четырёхугольник является прямоугольником и сделайте вывод.

Известно, что в четырёхугольнике Саккери: a) диагонали AC и BD равны; b) углы $\angle ADC$ и $\angle DCB$ также равны. Самостоятельно докажите эти свойства и запомните их.

Однако доказать, что углы $\angle ADC$ и $\angle BCD$ равны 90°, невозможно. Чтобы доказать это, вводится «аксиома параллельности». Сколько прямых параллельных данной можно провести через точку, не лежащую на ней?

На этот вопрос также отвечает «аксиома параллельности». Ниже речь пойдет об этой аксиоме.

5


6


> *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

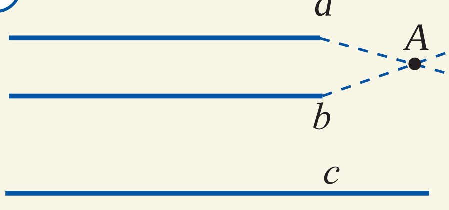
Это утверждение принимается как аксиома без доказательства. Мы будем использовать её в дальнейшем. На практике параллельные прямые можно строить с помощью линейки и угольника, как показано на рисунке 6.

Теорема. **Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.**

a, b и c прямые и $a \| c$, $b \| c$. ⇒ $a \| b$

Доказательство. *Предположим, что* $a \| c$ *и* $b \| c$, *но* a *и* b *не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке* A *(рис. 7), и через точку* A *проходят две прямые* a *и* b, *параллельные прямой* c. *Но это противоречит аксиоме параллельности, значит, наше предположение неправильно – прямые* a *и* b *параллельны.*

Теорема доказана.

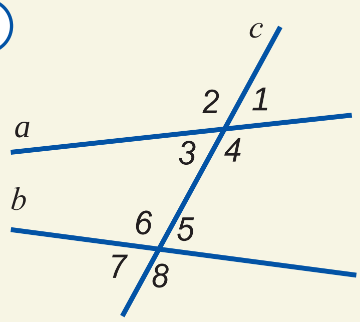
7


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

14.2. Углы, образованные при пересечении двух прямых третьей прямой

Если на плоскости две прямые a и b пересекаются с третьей прямой c, то при этом образуются 8 углов. Обозначим их цифрами как на рисунке 8. Следующие пары этих углов получают специальные названия:

8



$\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — **накрест лежащие углы**

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — **односторонние углы**

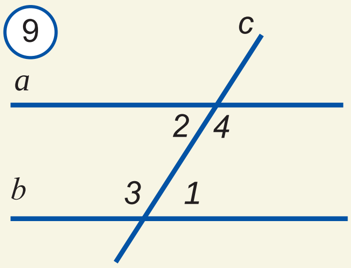
$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — **соответственные углы**

Приведём следующие свойства этих углов:

Свойство 1. **Если при пересечении двух прямых секущей два накрест лежащих угла одной пары равны, то накрест лежащие углы второй пары также равны.**

a, b прямые и c секущая: $\angle 1 = \angle 2$ *(рис. 9)* $\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$

9



Доказательство. Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные углы, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Откуда $\angle 4 = 180° - \angle 2$.

Но $\angle 1$ и $\angle 3$ – также являются смежными и $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Откуда $\angle 3 = 180° - \angle 1$.

Учитывая, что по условию $\angle 1 = \angle 2$, имеем:

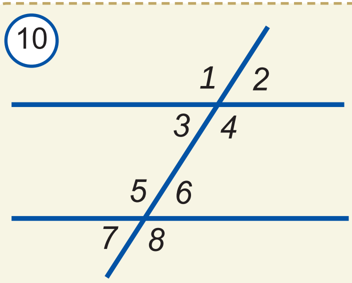
$\angle 3 = 180° - \angle 1 = 180° - \angle 2 = \angle 4$.

Следовательно, $\angle 3 = \angle 4$.

Свойство доказано.

Свойство 2. **Если соответственные углы равны, то сумма односторонних углов равна 180°.**

10



Доказательство. Пусть равны углы одной пары соответственных углов, например, $\angle 2 = \angle 6$ *(рис. 10)*. Докажем, что $\angle 6 + \angle 4 = 180°$. Так как $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные углы, то $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Учитывая, что по условию $\angle 2 = \angle 6$, получим $\angle 6 + \angle 4 = 180°$.

Точно так же доказывается, что сумма других односторонних углов также равна 180°.

Свойство доказано.

Свойство 3. **Если накрест лежащие углы равны, то соответственные углы также равны.**

Доказательство. Углы $\angle 3$ и $\angle 6$ – накрест лежащие, и пусть $\angle 3 = \angle 6$ (рис. *10*).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Тогда, так как $\angle 3$ и $\angle 2$ – вертикальные углы, то $\angle 3=\angle 2$.

Тогда получим, что равны и соответственные углы $\angle 6$ и $\angle 2$. Точно так же доказывается равенство других пар соответственных углов.

Свойство доказано.

Вопросы к теме

1. Какие прямые называются параллельными?

2. Сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку, не лежащую на прямой?

3. Обратите внимание на классную комнату и найдите в ней параллельные отрезки.

4. Какие пары углов образуются при пересечении прямых a и b третьей прямой – c?

5. Можно ли назвать параллельными два непересекающихся отрезка? А два непересекающихся луча?

6. Сформулируйте свойства углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей.

7. Определите параллельные рёбра куба на рисунке 11.

8. Пользуясь клетками на рисунке 12, определите, через какие точки пройдёт прямая:

a) перпендикулярная прямой a и проходящая через точку A?

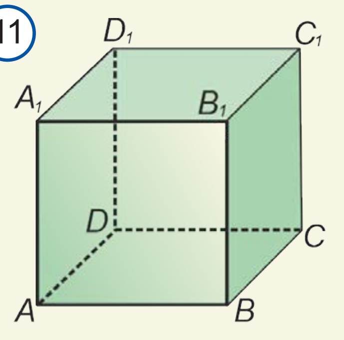
b) параллельная прямой a и проходящая через точку F?

c) параллельная прямой a и проходящая через точку K?

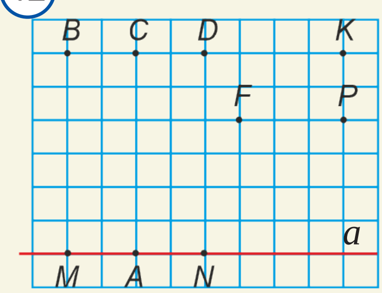
9. Пользуясь клетками на рисунке 12, определите верность следующих утверждений: a) $AB\perp a$; b) $BM\perp a$; c) $KP\perp a$; d) $FK\parallel a$; e) $BC\parallel a$; f) $KP\parallel a$.

10. Как используют столяры инструмент, называемый «уровнем» ?

11

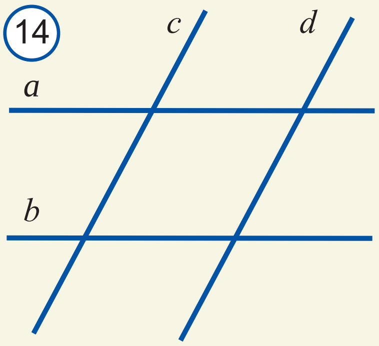


12



13

14



Практические упражнения и приложения

1. Начертите прямую и отметьте на ней точки A, B и C. С помощью линейки или угольника через точку A, точку B и точку C проведите прямые, параллельные между собой.

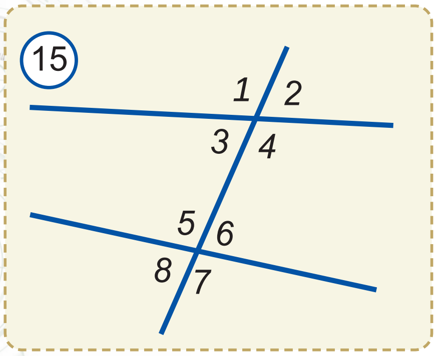
2. Выпишите параллельные прямые на рисунке 14.

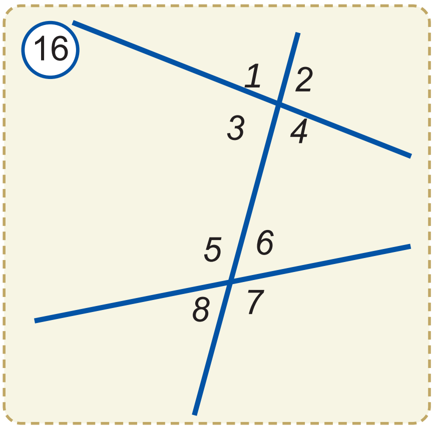
3. Покажите, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

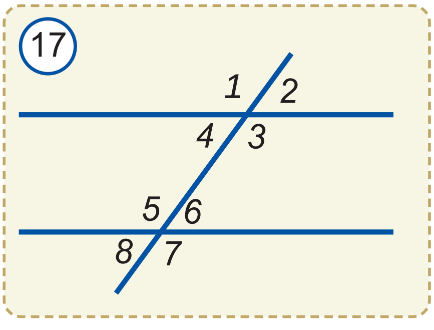
4. Пусть прямая пересекает одну из двух параллельных прямых. Пересечёт ли она вторую прямую? Обоснуйте ответ.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE







5. Покажите, что противолежащие стороны прямоугольника параллельны.

6. На листе начертили две прямые. Сколько получится частей, если разрезать его по этим прямым?

7. На листе начертите две прямые так, чтобы при разрезании листа по прямым получить три части.

8. Какие из углов на рисунке 15 вертикальные и какие смежные?

9. На рисунке 16: a) $\angle 4 = \angle 8 = 63°$; b) $\angle 1 = \angle 6 = 63°$. Найдите остальные углы.

10. На рисунке 17: $\angle 2 = \angle 6 = 63°$. Найдите остальные углы.

11. На рисунке 17: $\angle 1 = \angle 7 = 122°$. Найдите остальные углы.

12. Пусть при пересечении двух прямых третьей один из образующихся углов равен 82°, а ещё один равен 110°. Найдите остальные углы.

13*. Пусть при пересечении двух прямых третьей один из образующихся углов равен 32°, а ещё один равен 134°. Найдите остальные углы.

14*. Верно ли, что на рисунке 17 $\angle 2 = \angle 8$ и $\angle 4 = \angle 6$, если $\angle 3 = \angle 5$? Обоснуйте ответ.

15. Верно ли, что на рисунке 17 $\angle 3 = \angle 5$ и $\angle 4 = \angle 6$, если $\angle 1 = \angle 7$? Обоснуйте ответ.

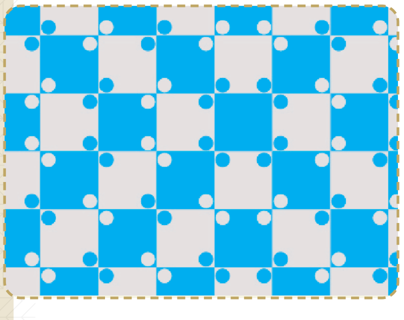
16.* Могут ли быть равными односторонние углы?

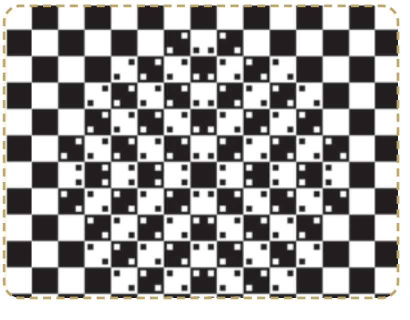
17*. Покажите, что если равны накрест лежащие углы, то сумма односторонних углов равна 180°.

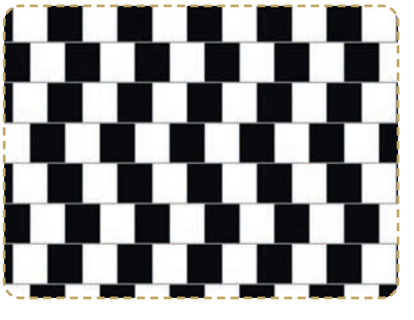
18.* Будут ли равны накрест лежащие углы, если сумма односторонних углов равна 180°?

19. Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей равны углы одной пары соответственных углов, то равны также и углы другой пары соответственных углов.

Геометрическая иллюзия. Параллельны ли горизонтальные и вертикальные линии на следующих рисунках? Вы удивитесь, если проверите это с помощью линейки!







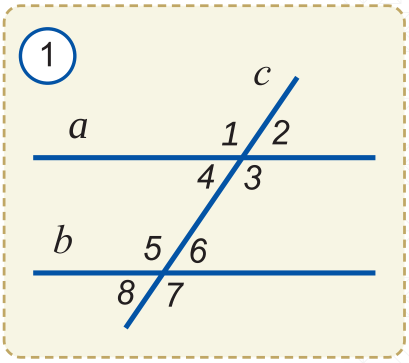
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

15 ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Активизирующее упражнение

На рисунке 1 изображены параллельные прямые a и b и секущая c. Выполните следующие задания и ответьте на вопросы:



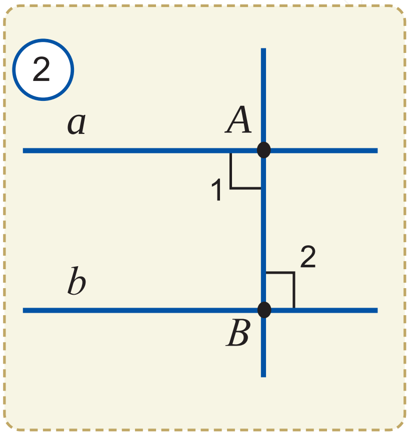
1. Выпишите все пары накрест лежащих углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?

2. Выпишите все пары односторонних углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?

3. Выпишите все пары соответственных углов и измерьте их транспортиром. Что вы можете сказать о градусной мере каждой пары этих углов?

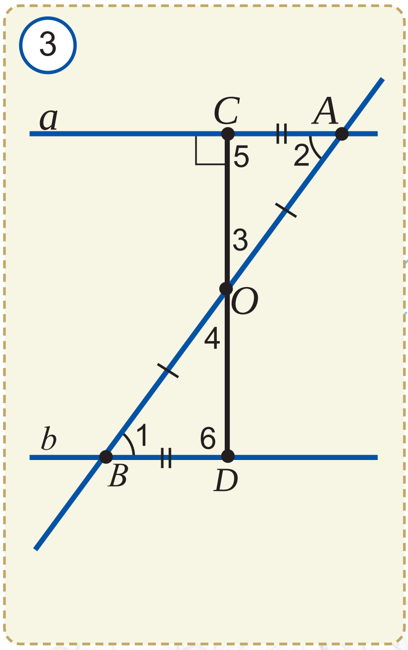
4. Всегда ли будут иметь место сформулированные выше свойства?

Каким способом можно установить параллельность двух прямых? Следующие две теоремы – «признаки параллельности прямых» – дают ответ на этот вопрос.



Теорема. **Если при пересечении двух прямых секущей равны накрест лежащие углы, то эти две прямые параллельны.**

Доказательство. 1) Вначале рассмотрим случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ являются прямыми *(рис. 2)*. В этом случае прямая AB будет перпендикулярна прямым a и b. Тогда по теореме о двух прямых, перпендикулярных одной прямой, прямые a и b будут параллельны (см. теорему на с. 100).



2) Рассмотрим теперь случай, когда $\angle 1$ и $\angle 2$ не являются прямыми: из точки O – середины отрезка AB $(AO = BO)$ опустим на прямую a перпендикуляр OC *(рис. 3)*. На прямой b отложим от точки B отрезок BD, равный отрезку AC. Рассмотрим треугольники AOC и BOD.

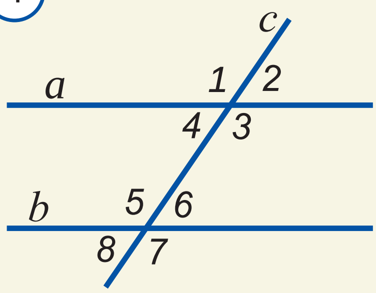
В них по условию $\angle 1 = \angle 2$, по построению $AC=BD$ и $AO=BO$.

Тогда по признаку СУС равенства треугольников $\Delta AOC = \Delta BOD$. В частности, $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$.

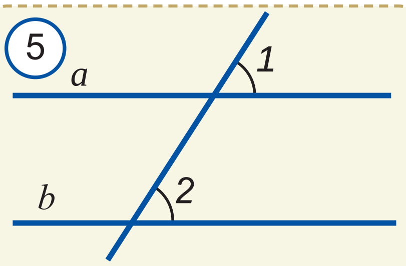
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4

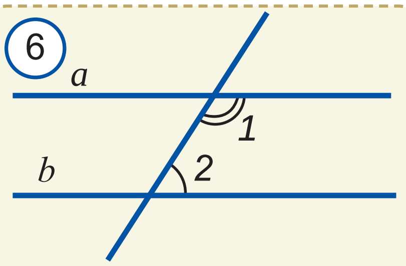


5



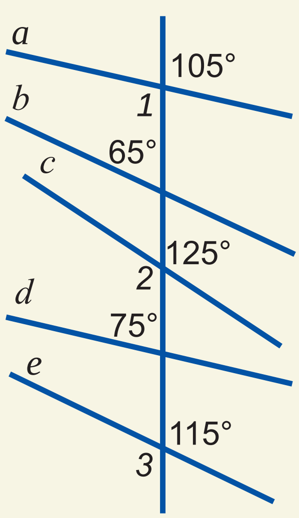
$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow a \| b$

6



$\angle 1 + \angle 2 = 180° \Rightarrow a \| b$

7



Так как $\angle 3 = \angle 4$, то точка D лежит на продолжении луча CO, т. е. точки C, O и D лежат на одной прямой.

Так как $\angle 5 = \angle 6$, то $\angle 6$ также является прямым, как и $\angle 5$. Таким образом, прямые a и b перпендикулярны одной и той же прямой CD.

Следовательно, они параллельны.

Теорема доказана.

Задача. Будут ли прямые a и b на рисунке 4 параллельны, если $\angle 2 = 55°$ и $\angle 5 = 125°$?

Решение. $\angle 2$ и $\angle 4$ – вертикальные, поэтому $\angle 4 = \angle 2 = 55°$. $\angle 5$ и $\angle 6$ – смежные, значит, $\angle 6 = 180° - \angle 5 = 180° - 125° = 55°$. В результате получаем, что накрест лежащие углы равны: $\angle 4 = \angle 6$.

Следовательно, по доказанному выше признаку параллельности прямые a и b параллельны.

Ответ: Да.

Свойство, непосредственно следующее из теоремы, называется *следствием*. Исходя из теоремы, доказанной на предыдущем уроке *(с. 102)*, и из свойств 1, 2 и 3 приходим к следующим выводам.

Следствие 1. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны *(рис. 5).*

Следствие 2. Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то эти прямые параллельны *(рис. 6).*

Задача. Какие из прямых, изображённых на рисунке 7, параллельны?

Решение. Из равенства вертикальных углов следует, что $\angle 1 = 105°$, $\angle 2 = 125°$, $\angle 3 = 115°$. Прямые a и b не параллельны, так как $\angle 1 + 65° = 105° + 65° \neq 180°$.

$a \| d$, так как $\angle 1 + 75° = 105° + 75° = 180°$ (по следствию 2).

Точно так же $b \| e$, так как

$65° + \angle 3 = 65° + 115° = 180°$.

Прямые a, c и e не параллельны, так как их соответственные углы не равны (см. следствие 1).

Точно так же прямые b и d также не параллельны, так как не равны соответственные углы: $65° \neq 75°$.

Ответ: $a \| d$, $b \| e$.

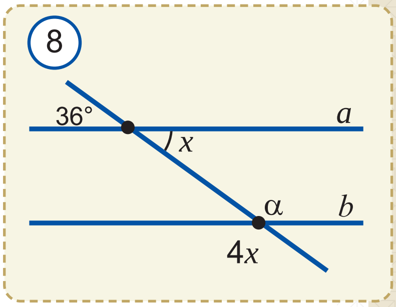
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача. Верно ли, что $a||b$ на рисунке 8?

Решение. По свойству вертикальных углов x=36°. Отсюда $\alpha = 4x = 4 \cdot 36° = 144°$. Сумма односторонних углов $x + \alpha = 36° + 144° = 180°$.

Значит, по следствию 2 $a||b$.



Вопросы к теме

1. Каким способом можно проверить параллельность двух прямых?

2. Что такое признак? Приведите пример.

3. Сформулируйте признак параллельности двух прямых.

4. Что такое следствие? Приведите пример.

Практические упражнения и приложения

1. Найдите неизвестный угол, если прямые a и b на рисунке 9 параллельны.

2. Покажите, что $a||b$ на рисунке 10.

3. По рисунку 10 составьте подобную задачу и решите её.

4. Покажите, что $a||b$ на рисунке 11.

5. Покажите, что $a||b$ на рисунке 12.

6. По рисункам 11–12 составьте подобные задачи и решите их.

7. Пусть на рисунке 1: а) $\angle 1 = 132°$, $\angle 8 = 48°$; b) $\angle 2 = 36°$, $\angle 5 = 144°$. Будет ли $a||b$?

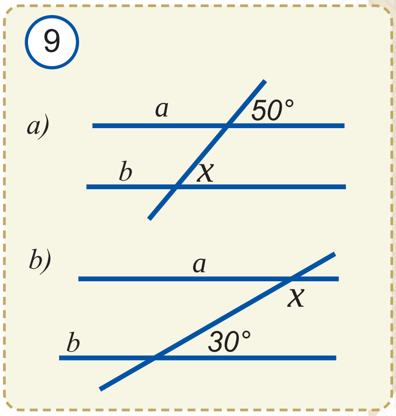
8. Пусть на рисунке 1: а) $\angle 3 = 113°$, $\angle 6 = 77°$; b) $\angle 1 + \angle 7 = 180°$. Будет ли $a||b$?

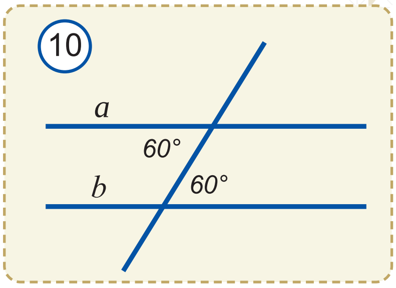
9*. Какие стороны четырёхугольника на рисунке 13 параллельны?

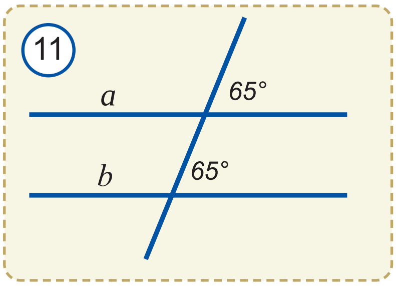
10*. Дана прямая a и точка K, не лежащая на ней. Через точку K проведены 4 прямые. Сколько прямых пересекают прямую a?

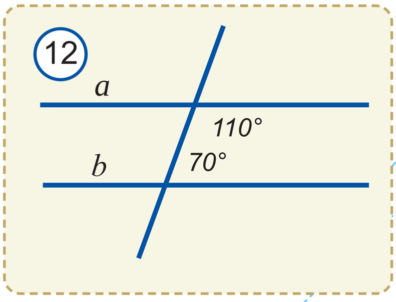
11. Пусть на рисунке 14: а) $\angle 3 = \angle 4$, $BD = CE$, $AB = EF$; b) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $BD = CE$; c) $AB = EF$, $BD = EC$, $AC = FD$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta EFD$.

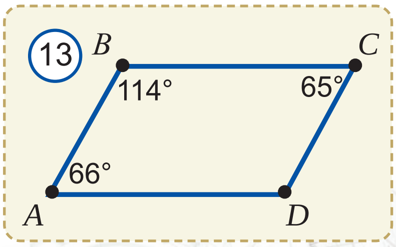
12. При пересечении двух прямых секущей один из углов был равен: а) 32°, соответственный ему угол, 33°; b) 47°, а соответствующий ему односторонний угол, 133°. Будут ли эти прямые параллельными?











*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

13. Найдите неизвестный угол на рисунке 15.

14. На рисунке 16: ∠1=∠5=105°. Найдите остальные углы.

15. На рисунке 17: ∠3=60°, ∠8=120°. Найдите остальные углы.

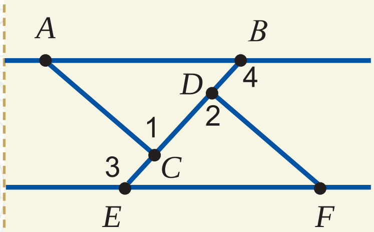
16*. Покажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, полученных при пересечении параллельных прямых a и b секущей c, параллельны *(рис. 18)*.

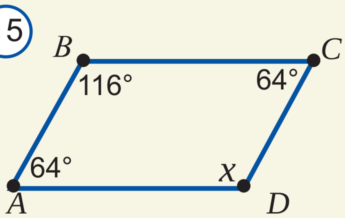
17. Найдите параллельные прямые на рисунке 19.

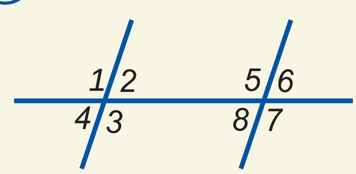
18. Найдите параллельные прямые на рисунке 20.

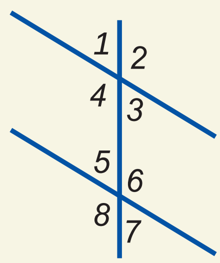
19. Найдите параллельные прямые на рисунке 21.

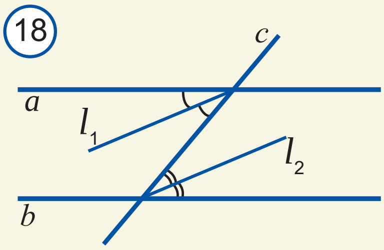
20*. Составьте задачи на применение признаков параллельности прямых и решите их.

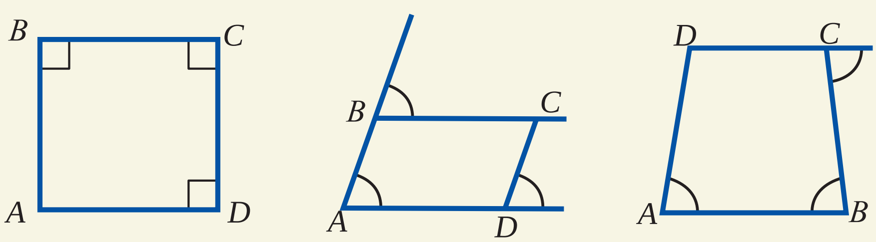
14


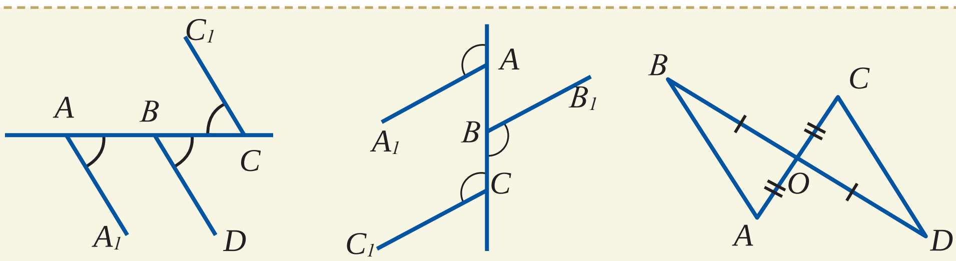
15


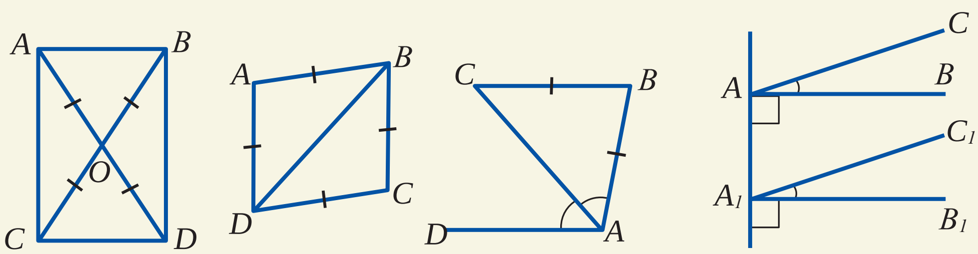
16


17


18


19


20


21


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

16 УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ

16.1. Обратная теорема

Если поменять местами условие и заключение теоремы, получится новое предложение (иначе, новое утверждение). Если оно также будет правильным, то оно называется *обратной теоремой* по отношению к данной теореме. А данную теорему называют *прямой теоремой*.

Прямая теорема:

Если верно предложение A ***, то верно*** предложение B

Коротко: $A \Rightarrow B$.

Обратная теорема:

Если верно предложение B ***, то верно*** предложение A

Коротко: $B \Rightarrow A$.

Пример. Прямая теорема: «Если треугольник равнобедренный, то углы, прилежащие к его основанию, равны». Обратная теорема: «Если углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны, то треугольник равнобедренный».

Упражнение 1. Обратная теорема, данная выше, рассматривается как «признак равнобедренного треугольника». Докажите самостоятельно, что она верна.

Однако надо заметить, что утверждение, сформулированное как обратное к прямой теореме, не всегда будет верно.

Например, утверждение «Если углы равны, то они вертикальные», обратное к теореме «Если углы вертикальные, то они равны», является неверным.

Если и прямая и обратная теоремы верны, то говорят, что эти утверждения *равносильны*. И коротко пишут: $A \Leftrightarrow B$

Упражнение 2.

1. Составьте утверждение, обратное к предложению «Если идёт дождь, то на небе тучи». Выясните, всегда ли верно это обратное утверждение.

2. Сформулируйте теоремы, обратные к приведённым ниже. Проверьте, будет ли верным обратное утверждение.

a) Два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются.

b) Если два треугольника равны, то равны и их соответствующие стороны.

c) Если смежные углы равны, то они прямые.

d) Две прямые, параллельные одной и той же прямой, параллельны.

3. Приведите примеры равносильных утверждений.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

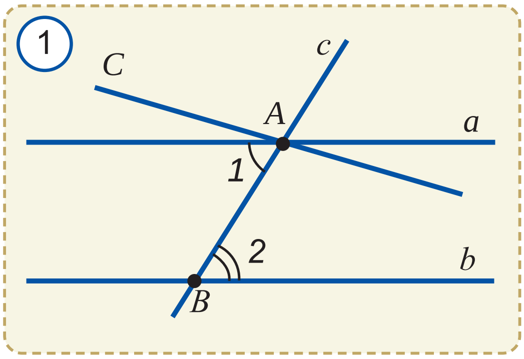
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

16.2. Углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей

Ниже мы остановимся на теоремах, обратных признакам параллельности.

Теорема 1. **Накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**

$a||b$, c – секущая *(рис. 1)* ⇒ $\angle 1 = \angle 2$



Доказательство. Предположим противное: пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча AB угол CAB, равный $\angle 2$. В таком случае, при пересечении прямых CA и b с прямой AB получим равные (по построению) накрест лежащие углы $\angle CAB$ и $\angle 2$.

Значит, прямые CA и b параллельны. Итак, через точку A, не лежащую на прямой b, проходят две прямые (CA и b), параллельные прямой b.

Но это противоречит аксиоме параллельности. Значит, наше предположение неверно и $\angle 1 = \angle 2$.

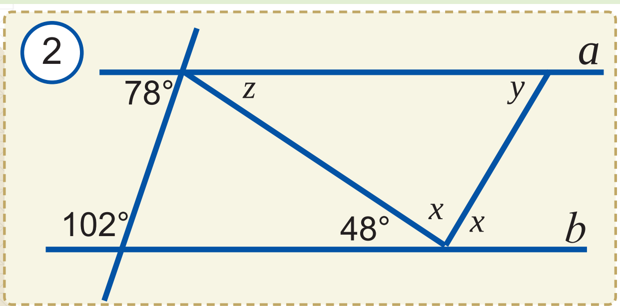
Теорема доказана.

Следствие. **Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и ко второй прямой.**

Докажите самостоятельно утверждение, приведённое в следствии.

Теорема 2. **Соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, равны.**

Теорема 3. **Сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 180°.**



Попытайтесь самостоятельно доказать эти теоремы.

Задача. Найдите неизвестные углы на рисунке 2.

Решение. Так как сумма односторонних углов $78° + 102° = 180°$, то $a||b$. Значит, по теореме 1 угол $z = 48°$ и $x = y$. Но $x + x + 48° = 180°$ (как смежные), откуда угол $x = 66°$. Тогда и угол $y = 66°$.

Ответ: $x = 66°$; $y = 66°$; $z = 48°$.

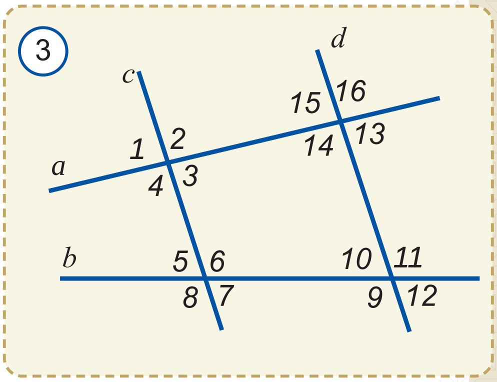
Задача. $a \nparallel b$, $c||d$ на рисунке 3. Какое из следующих равенств верно?

1) $\angle 1 = \angle 15$; 2) $\angle 3 = \angle 13$; 3) $\angle 4 = \angle 16$; 4) $\angle 4 = \angle 8$; 5) $\angle 1 = \angle 12$; 6) $\angle 7 = \angle 10$;
7) $\angle 8 = \angle 16$; 8) $\angle 8 = \angle 11$; 9) $\angle 4 + \angle 13 = 180°$; 10) $\angle 6 + \angle 14 = 180°$;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

11) $\angle 7+\angle 12=180°$; 12) $\angle 8+\angle 9=180°$.



Решение: 3) $\angle 4=\angle 2$ (как вертикальные). Так как $\angle 2$ и $\angle 16$ – соответственные, то $\angle 2=\angle 16$. Значит, равенство $\angle 4=\angle 16$ верно.

5) $\angle 12=\angle 7$ (по свойству соответственных углов при параллельных прямых) и $\angle 7=\angle 5$ (как вертикальные).

$\angle 5$ и $\angle 1$ – соответственные, поэтому $a \nparallel b$, отсюда $\angle 1 \neq \angle 5=\angle 7=\angle 12$, т.е. равенство $\angle 1=\angle 12$ не верно.

9) $\angle 4=\angle 2$, $\angle 13=\angle 15$ (как вертикальные), $c||d$, так как $\angle 2$ и $\angle 15$ – односторонние, то $\angle 2+\angle 15=180°$. Значит, равенство $\angle 4+\angle 13=180°$ верно.

11) Так как $c||d$, то $\angle 7=\angle 10$ (как накрест лежащие углы при параллельных) и $\angle 10=\angle 12$ (как вертикальные). Значит, $\angle 7=\angle 12$.

Поэтому равенство $\angle 7+\angle 12=180°$ верно только при $\angle 7=\angle 12=90°$. Подобным же образом самостоятельно проверьте остальные равенства.

Вопросы к теме

1. Что такое обратная теорема? В чём разница между прямой и обратной теоремами?

2. Всегда ли теорема, обратная к прямой теореме, верна?

3. Можно ли, доказав прямую теорему, принять обратную к ней без доказательства?

4. Как называется теорема, обратная к обратной теореме?

5. Что можно сказать о накрест лежащих, соответственных и односторонних углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей?

Практические упражнения и приложения

1. Составьте утверждение, обратное следующему, и определите, верно оно или нет.

a) Если число является нечётным, то оно натуральное.

b) Если число делится на 9, то оно делится на 3.

c) Если треугольники равны, то равны их соответствующие углы.

d) Если у ученика высокая температура, значит он болеет.

e) Если футболист получил красную карточку, то он выйдет из игры.

f) Если стороны треугольника равны 3, 4 и 5, то его периметр равен 12.

g) Если у автомобиля нет бензина, он не может ехать.

2. Составьте теорему, обратную следующей, и проверьте её верность.

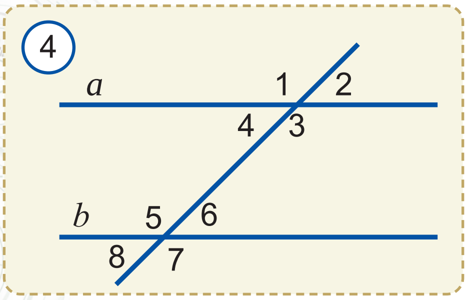
a) Если соответственные углы, полученные при пересечении двух прямых секущей, равны, то эти прямые параллельны.

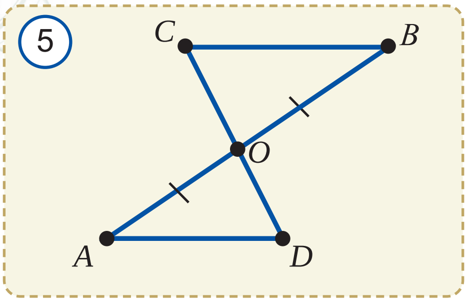
b) Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.

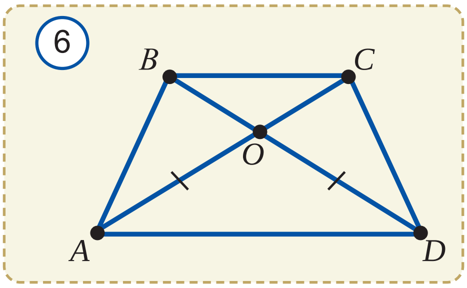
c) Если треугольник равносторонний, то все его углы равны между собой.

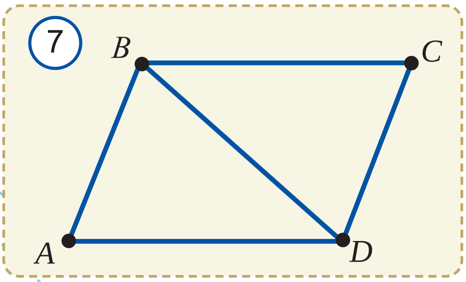
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

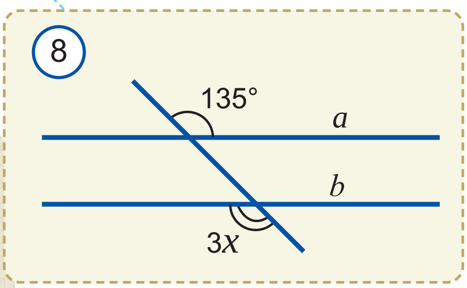
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

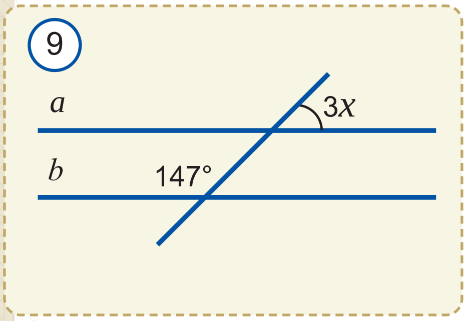












3. Составьте теоремы, обратные признакам равенства треугольников. Верны ли они?

4. На рисунке 4 $a||b$, $\angle 1=135°$. Найдите остальные углы.

5. На рисунке 4 $a||b$, $\angle 2=49°$. Найдите остальные углы.

6. Известно, что $BC||AD$, $AO=OB$ на рисунке 5. Докажите равенства:
a) $DO=OC$; b) $\Delta AOD=\Delta COB$.

7. Известно, что $BC||AD$, $AO=OD$ на рисунке 6. Докажите равенства: a) $BO=OC$; b) $AC=BD$; c) $\Delta AOB=\Delta COD$; d) $\Delta ABD=\Delta ACD$.

8. Известно, что $BC||AD$ и $AB||CD$ на рисунке 7. Докажите , что $\Delta ABD=\Delta CDB$.

9. Найдите неизвестное x, если $a||b$ на рисунке 8.

10. Найдите неизвестное x, если $a||b$ на рисунке 9.

11*. Даны острые углы ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$, если $AB||A_1B_1$ и $BC||B_1C_1$.

12*. Один из двух углов с соответственно параллельными сторонами острый, а другой тупой. Докажите, что сумма этих углов равна 180°.

***Напоминание**. Это утверждение называется «теоремой об углах с соответственно параллельными сторонами».*

13. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$, если $a||b$, $c||d$ и $\angle 1 = 55°$ на рисунке 10.

14. Найдите $\angle 1$ и $\angle 2$, если $a||b$, $c||d$ и $\angle 3 = 73°$ на рисунке 10.

15*. Найдите углы с соответственно параллельными сторонами, если их разность равна 40°.

16*. Дано: острый угол ABC и тупой угол $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\angle ABC + A_1B_1C_1= 180°$, если $AB\perp A_1B_1$ и $BC\perp B_1C_1$.

17*. Один из двух углов с соответственно перпендикулярными сторонами острый, другой тупой. Докажите, что их сумма равна 180°.

***Напоминание**. Это утверждение называется «теоремой об углах с соответственно перпендикулярными сторонами».*

18*. Стороны углов ABC и ADC на рисунке 11 соответственно перпендикулярны. Найдите неизвестные углы.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

19. Угол ABC равен 118°. Угол BCD равен 62°. Могут ли быть прямые AB и CD: a) параллельными; b) пересекающимися?

20. Угол ABC равен 53°. Угол BCD также равен 53°. Могут ли быть прямые AB и CD: a) параллельными; b) пересекающимися?

21*. Докажите, что четырёхугольник Саккери, приведённый на странице 101, является прямоугольником.

22. Найдите неизвестный угол x на рисунке 12.

23. Найдите неизвестный угол x на рисунке 13.

24*. Один из двух односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, больше другого на 24°. Найдите остальные углы.

25*. Сумма соответственных углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 128°. Найдите остальные углы.

26*. Будут ли прямые AB и CD на рисунке 14 параллельными?

27*. Чему должен равняться x, чтобы прямые AB и CD на рисунке 15 были параллельны?

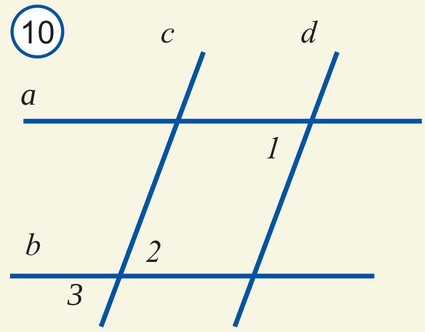
28*. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если пять из них не являются острыми.

29*. Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если сумма шести из них равна 620°.

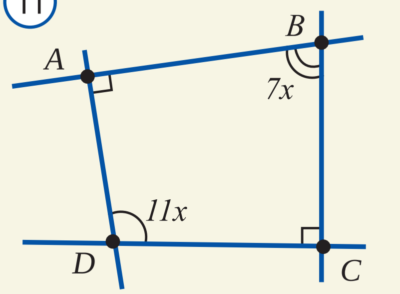
30*. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Докажите, что треугольник A_1BC_1 равнобедренный, если прямая, параллельная AC, пересекает сторону AB в точке A_1 и сторону BC в точке C_1.

31. Угол ABC равен 98°. Прямые, параллельные его сторонам, пересекают их в точках A и C. Найдите угол ADC.

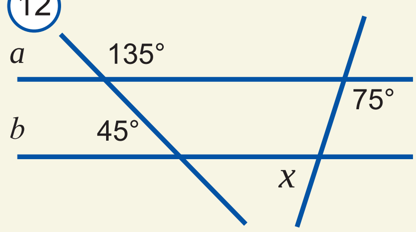
10



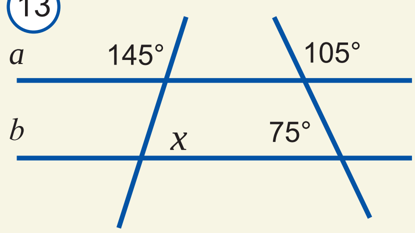
11



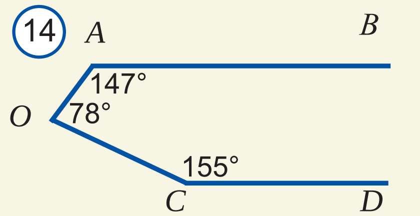
12



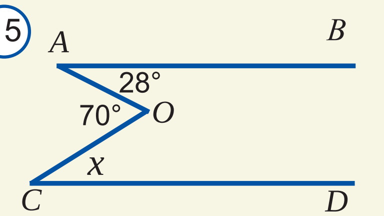
13



14



15

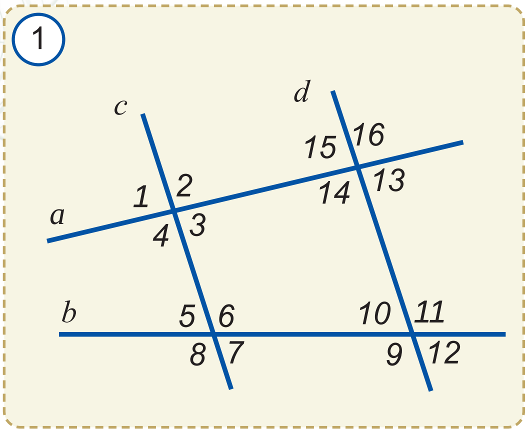


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

17 ПРАКТИЧЕСКОЕ УПРАЖНЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

17.1. Работа в малых группах



На рисунке 1 $a \nparallel b$, $c || d$. Составим четыре маленькие группы:

1-я группа ∠1, ∠2, ∠3 и ∠4;

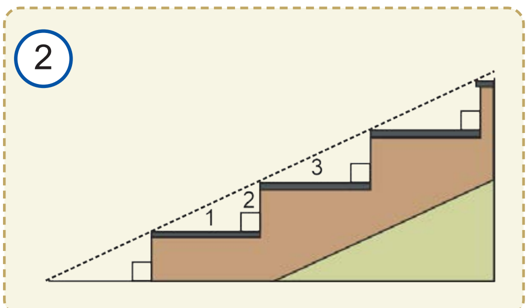
2-я группа ∠5, ∠6, ∠7 и ∠8;

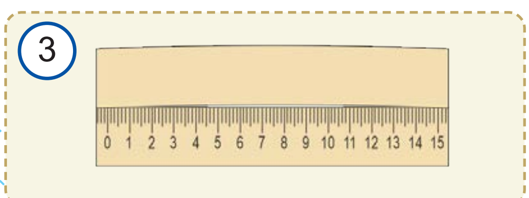
3-я группа ∠9, ∠10, ∠11 и ∠12;

4-я группа ∠13, ∠14, ∠15 и ∠16.

Группы по очереди объявляют величины своих углов. Остальные группы называют соответствующие значения своих углов.

17.2. Практическое исследование





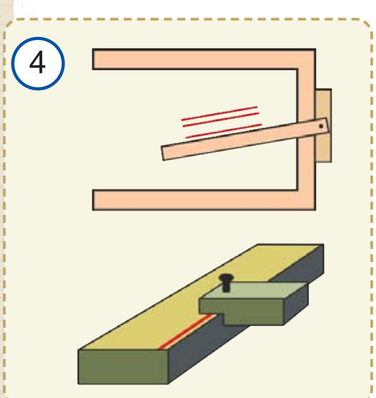
1. Ступеньки лестницы должны быть горизонтальными *(рис. 2)*. Определите и объясните, исходя из этого, взаимосвязь между углами на рисунке, опираясь на свои знания по геометрии.

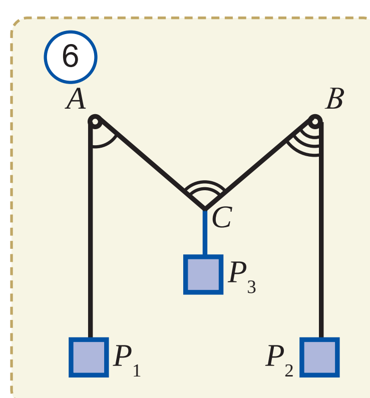
2. Ровность двух линеек проверяется так, как показано на рисунке 3. Какое свойство прямых здесь используется?

3. Объясните, пользуясь рисунком 4 и своими знаниями, как наносят прямые линии плотники, используя изображённые инструменты.

4. Каким свойством треугольника воспользовались при изготовлении прочной книжной полки на рисунке 5?

5. На нити, проходящей через блоки, висят грузы P_1 и P_2, закреплённые в точках A и B *(рис. 6)*. А груз P_3 висит в точке C этой же нити и держит в равновесии грузы P_1 и P_2. Покажите, что $\angle ACB = \angle A + \angle B$, если известно, что $AP_1 || BP_2 || CP_3$.





*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

17.3. Проверьте свои знания

1. Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений.

1. Через точку, лежащую на прямой, можно провести перпендикулярную к ней ... .
2. Если при пересечении двух прямых секущей равны ... , то эти прямые параллельны.
3. Если на плоскости две прямые ... , то они называются параллельными прямыми.
4. Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, ...
5. Через точку, не лежащую на прямой, проходит ... параллельная ей прямая.
6. Через произвольную точку прямой можно провести только одну прямую, ...
7. Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются ... .
8. Две прямые, ... одной и то же прямой, параллельны.
9. Если при пересечении двух прямых секущей односторонние углы ... , то прямые параллельны..
10. Соответственные углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых, ...
11. Накрест лежащие углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых, ...

2. Если в приведённых ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их.

1. Только через одну точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую.
2. Только из одной точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить перпендикуляр на данную прямую.
3. Прямая, перпендикулярная к одной из параллельных прямых AB и AK, будет перпендикулярна и к другой.
4. Накрест лежащие углы, которые образуются при пересечении двух прямых секущей, равны.
5. Если два отрезка не пересекаются, то они называются параллельными.
6. Углы с соответственно параллельными сторонами равны.
7. Если $a \perp b$, $b \perp c$, то $a \perp c$.
8. Сумма углов с соответственно перпендикулярными сторонами, равна 180°.
9. Если равны односторонние углы, полученные при пересечении двух параллельных прямых секущей, то эти прямые будут параллельны.
10. Прямые, параллельные двум перпендикулярным прямым, параллельны.
11. Если $a || b$, $b || c$, то $a \perp c$.
12. Если $a || b$, $b \perp c$, то $a || c$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

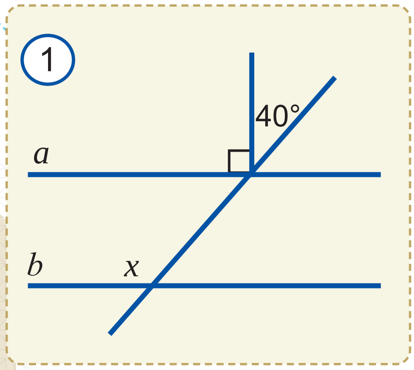
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

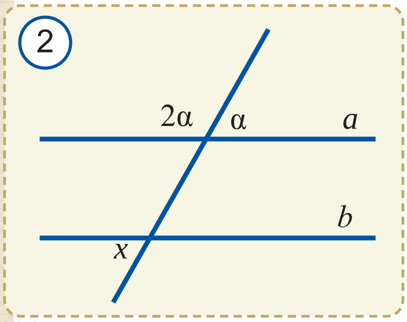
3.Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа.

1	Прямые, не имеющие общей точки	
2	Пересекаются под прямым углом	
3	Из точки на прямую можно опустить только один	
4	Из точки на прямую можно опустить сколько угодно	
5	Условие и заключение поменяли местами	
6	Углы, получающиеся при пересечении двух прямых секущей	

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование из второго столбца:

Геометрическое понятие	***Свойство, толкование***
1. Параллельные прямые 2. Перпендикулярные прямые 3. При пересечении двух прямых секущей 4. Накрест лежащие углы 5. Обратная теорема 6. Односторонние углы	(A) верна не всегда. (B) не пересекаются. (C) образуют при пересечении прямой угол. (D) получаются накрест лежащие, соответственные и односторонние углы. (E) лежат в одной полуплоскости. (F) если они равны, то прямые параллельны.





5. Тесты.

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через точку, не принадлежащую ей?

A) 1; B) 2; C) 4; D) сколько угодно.

2. Какой из ответов правильный, если $a||b$, $b\perp c$, $c\perp d$?

A) $a\perp d$, $b\perp d$; B) $a\perp c$, $b||d$; C) $a||c$, $a\perp d$; D) $a\perp c$, $a\perp d$, $b\perp d$.

3. Сколько перпендикуляров можно опустить на прямую, лежащую в плоскости, из точки, не принадлежащей прямой?

A) 1 B) 2 C) 4 D) сколько угодно

4. Найдите угол x, если $a||b$ на рисунке 1.

A) 100° B) 110° C) 130° D) 140°

5. Найдите угол x, если $a||b$ на рисунке 2.

A) 30° B) 45° C) 60° D) 36°

6. Найдите угол x *(рис. 3).*

A) 96° B) 108° C) 112° D) 78°

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7. Найдите угол α, если $a||b$ и $\alpha-\beta$ =70° на рисунке 4.
A) 30° B) 125° C) 75° D) 36°

8. Сколько равных тупых углов может получиться при пересечении двух прямых третьей?
A) 3 B) 8 C) 6 D) 4

9. Один из углов, полученный при пересечении двух параллельных прямых третьей, равен 97°. Найдите наименьший из получившихся углов.
A) 97° B) 83° C) 77° D) 7°

10. Сколько равных острых углов может получиться при пересечении двух прямых третьей?
A) 3 B) 4 C) 6 D) 5

11. Сколько прямых углов может получиться при пересечении двух параллельных прямых третьей?
A) 2 B) 6 C) 8 D) 5

12. Сумма трёх углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равна 290°. Найдите четвёртый накрест лежащий угол.
A) 145° B) 110° C) 36° D) 70°

13. Найдите угол x, если $a||b$ на рисунке 5.
A) 100° B) 80° C) 110° D) 90°

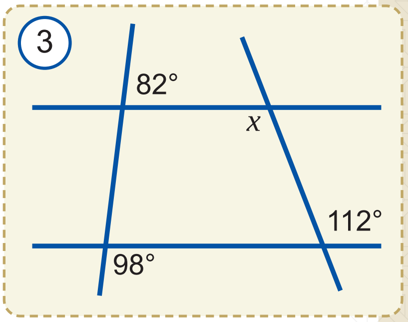
14. Найдите угол x на рисунке 6.
A) 105° B) 95° C) 85° D) 75°

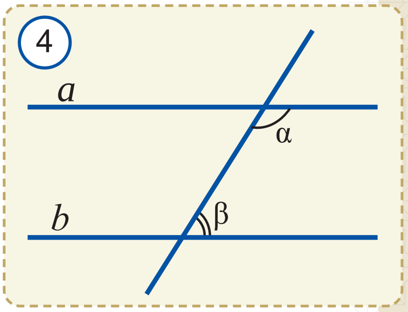
15. Какие прямые на рисунке 7 параллельны?
A) $a||b$ B) $a||c$ C) $c||b$ D) $c||d$

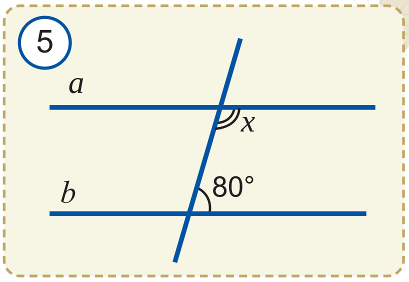
16. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$, если $a||b$, $c||d$ и $\angle 1$ = 122° на рисунке 8.
A) $\angle 2$ = 122°, $\angle 3$ = 58° B) $\angle 2$ = 130°, $\angle 3$ = 58°
C) $\angle 2$ = 122°, $\angle 3$ = 68° D) $\angle 2$ = 130°, $\angle 3$ = 50°

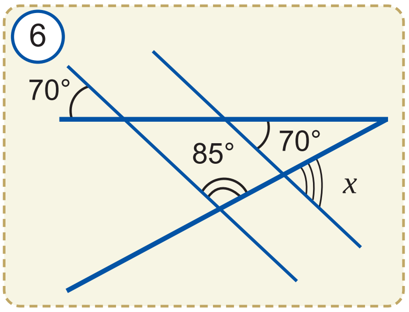
6. Задачи.

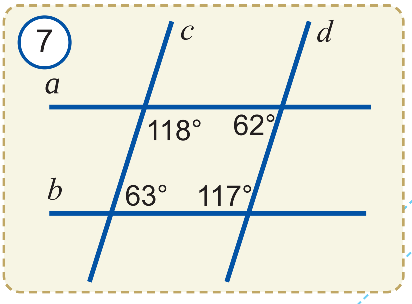
1. Если $\angle 4 + \angle 5$ =180° на рисунке 9, то будет ли $a||b$?
2. Если $\angle 2 = \angle 6$ на рисунке 9, то будет ли $a||b$?
3. Найдите остальные углы на рисунке 9, если $\angle 1 = \angle 5$ = 118°.
4. Если $\angle 2$ = 71° и $\angle 7$ = 119° на рисунке 9, то будет ли $a||b$?

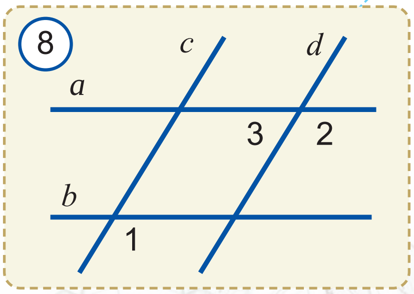






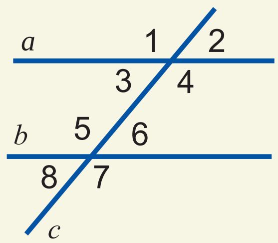


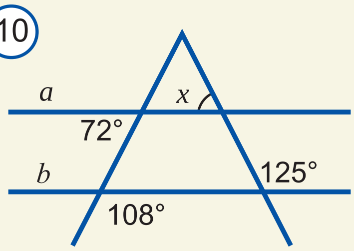


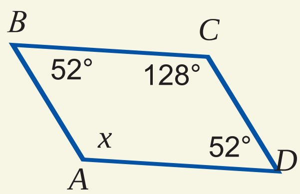


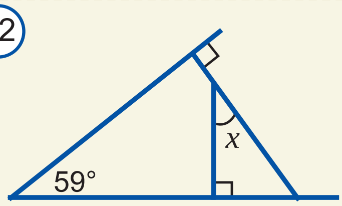
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

9


10


11


12


5. Найдите угол x на рисунке 10.

6. Найдите неизвестный угол на рисунке 11.

7. Один из углов, полученный при пересечении двух прямых третьей, равен 47°. Чему должна равняться градусная мера соответственного ему угла, чтобы данные две прямые были параллельны?

8. Сумма накрест лежащих углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 84°. Найдите остальные углы.

9. Один из углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 8 раз больше второго. Найдите все получившиеся углы.

10. Разность односторонних углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 30°. Найдите эти углы.

11. Найдите неизвестный угол на рисунке 12.

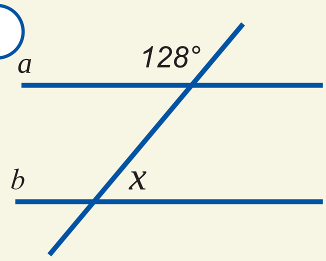
12. Разность углов с соответственно параллельными сторонами равна 36°. Найдите эти углы.

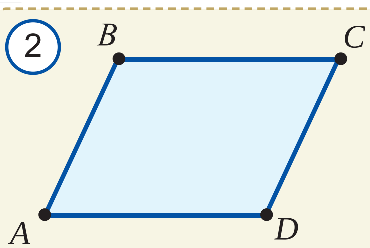
Образец контрольной работы 4

Образец контрольной работы состоит из 2 частей:

1) 5 тестов, подобных тем, что на страницах 116–117;

2) 3 задачи, подобные данным ниже (задача 4 предназначена для успевающих учеников).

1


2


1. Один из углов, полученных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 34°. Найдите остальные углы.

2. Сколько градусов должен составлять неизвестный угол на рисунке 1, чтобы были параллельны прямые a и b?

3. Докажите, что $AB=CD$, если $BC||AD$ и $AB||CD$ на рисунке 2.

4. Биссектриса треугольника ABC, проведённая из вершины A, пересекает сторону BC в точке D. Прямая, проведённая из точки D, пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что $DE||AB$, если $AE=DE$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Выполнение практических заданий на GeoGebra

1. Построение угла заданной величины

Если две прямые пересекаются под прямым углом, то они называются «перпендикулярными прямыми». Чтобы получить их изображение, нужно:

1) открыть на панели инструментов группу «**Прямые линии**» щелчком левой кнопки мыши;

2) нажав на левую кнопку мыши, выбрать в меню «**Прямая**»;

3) отметить на прямой две точки;

4) открыть группу «**Измерения**» щелчком левой кнопки мыши;

5) выбрать щелчком левой кнопки мыши инструмент «**Угол заданной величины**»;

6) в открывшееся окно ввести величину угла и нажать на кнопку «**Enter**». В результате получим третью точку;

7) нажатием левой кнопки мыши инструмента «**Прямая**» провести через вершину и точку прямую. Получим искомый угол.

2. Составление алгоритма построения биссектрисы угла и её построение

Аналогично приведённому выше, составьте алгоритм построения биссектрисы угла и постройте её.

3. Построение многоугольника

Чтобы получить изображение многоугольника, нужно:

1) открыть на панели инструментов группу «**Многоугольник**» щелчком левой кнопки мыши;

2) на плоскости последовательно отметить вершины многоугольника и возвратиться к первой точке;

3) в результате получится многоугольник.

4. Построение алгоритма правильного многоугольника и его построение

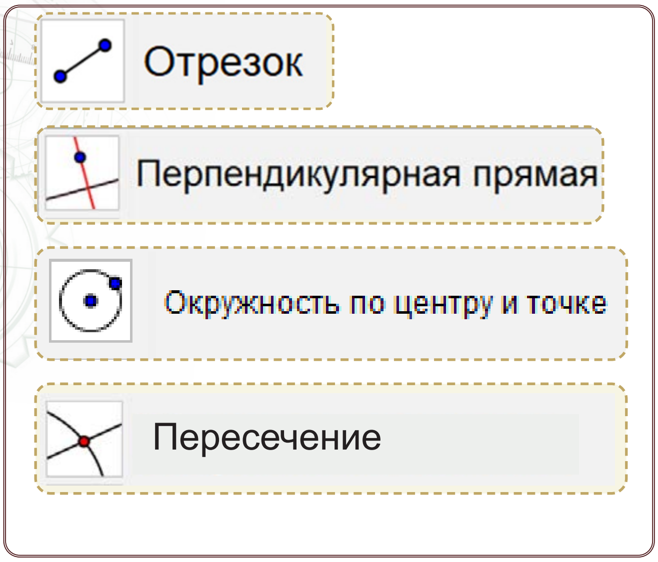
Для построения правильного многоугольника составьте алгоритм, подобный приведённому выше, и постройте его.

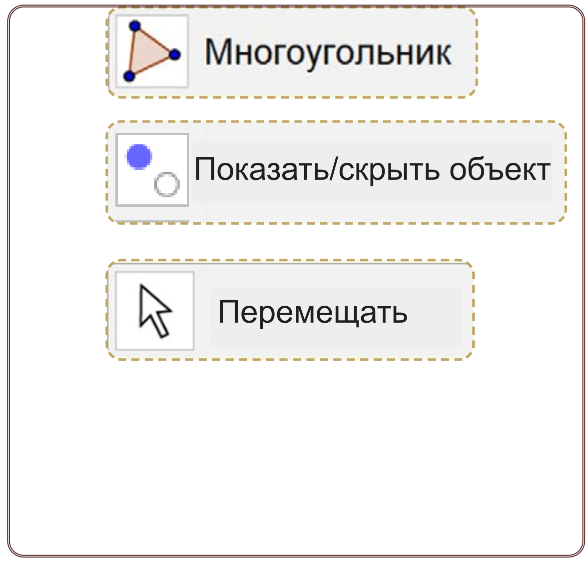
5. Построение квадрата

Прежде чем построить квадрат, повторим возможности использования каждого инструмента.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

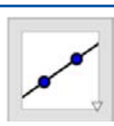
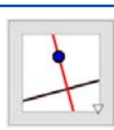
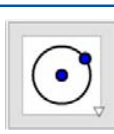
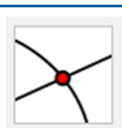
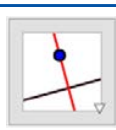
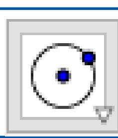




Необходимые компоненты:

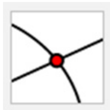
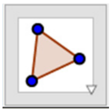
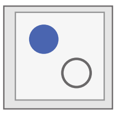
- **Откройте новое окно в GeoGebra**.
- Интерфейс «**Настройки**» программы **GeoGebra** переведите в вид –  «**Геометрия**».
- Введите параметры для новой точки.

Алгоритм построения квадрата

1		Постройте отрезок $a=AB$.
2		Постройте перпендикуляр b, проходящий через точку B отрезка AB.
3		Постройте окружность с, проходящую через точку A с центром в точке B.
4		Постройте точки пересечения C и D перпендикуляра b и окружности c.
5		Постройте перпендикуляр d, проходящий через точку A отрезка AB.
6		Постройте окружность e, проходящую через точку B с центром в точке A.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7		Постройте точки пересечения E и F перпендикуляра d и окружности e.
8		Постройте многоугольник $ABCE$.
9		Скройте обе окружности и перпендикуляр.
10		Проверьте правильность построения квадрата.
11		Измените цвет и вид квадрата.

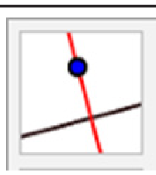
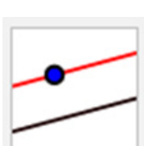
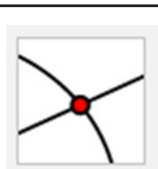
6. Составьте другой алгоритм построения квадрата.

7. Построение прямоугольника.

Необходимые компоненты:

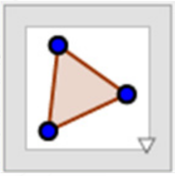
- До начала построения вспомните свойства прямоугольника.
- Откройте новое окно ***GeoGebra***.
- Интерфейс «**Настройки**» программы **GeoGebra** переведите в вид – «**Геометрия**». 
- Введите параметры для новой точки.

Необходимые инструменты на панели ***GeoGebra***

	***Перпендикулярная прямая*** ***Примечание.*** Нажав на точку и прямую, проведите через эту точку прямую, перпендикулярную этой прямой.
	***Параллельные прямые*** ***Примечание.*** Нажав на точку и прямую, проведите через эту точку прямую, параллельную этой прямой.
	***Пересечение*** ***Примечание.*** Нажав на две точки пересекающихся прямых, отметьте точку их пересечения или, последовательно нажав на две прямые, найдите их точку пересечения.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

	***Многоугольник*** ***Примечание.*** Нажав на графический вид или на получившиеся точки, получите прямоугольник. Каждый раз объединяйте первую и последнюю точки, чтобы многоугольник был замкнутым.

Алгоритм построения прямой

1	Отрезок	Постройте отрезок AB.
2	Перпендикулярная прямая	Проведите перпендикуляр AB, проходящий через точку B.
3	Точка	На перпендикулярной прямой активируйте новую точку C.
4	Параллельная прямая	Проведите прямую, параллельную прямой AB и проходящую через точку C.
5	Перпендикулярная прямая	Проведите перпендикуляр, проходящий через точку A отрезка AB.
6	Пересечение	Отметьте точку пересечения буквой D .
7	Многоугольник	Постройте многоугольник $ABCD$.
8	Сохранить	Сохраните изменения.
9	Перемещать	Пользуясь инструментом **«Перемещать»,** проверьте правильность построения прямоугольника.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Глава IV

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Изучив материал этой главы, вы приобретёте следующие знания и практические навыки:

Знания

– теорема о сумме внутренних углов треугольника и её доказательство;
– определение внешнего угла треугольника и его свойство;
– свойства прямоугольного треугольника;
– признаки равенства прямоугольных треугольников;
– свойство биссектрисы угла;
– соотношения, выражающие связь между углами и сторонами треугольника;
– неравенство треугольника.

Практические навыки:

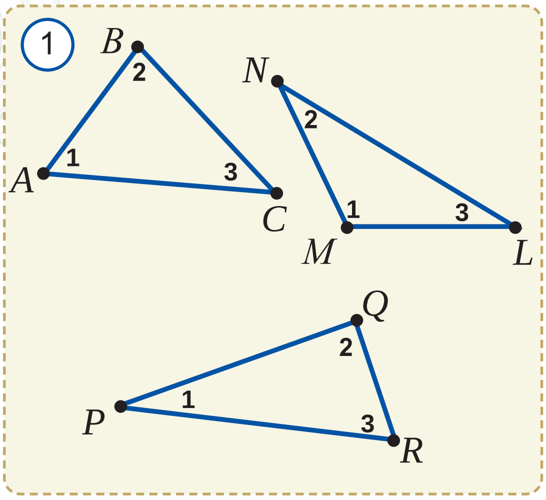
– практический способ нахождения суммы углов треугольника;
– применение полученных теоретических знаний при решении задач и выполнении практических работ.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

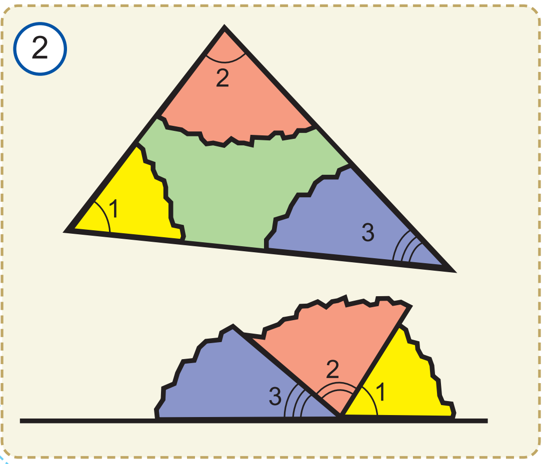
18 СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

Активизирующее упражнение



1. Измерьте транспортиром все три угла треугольника ABC, изображённого на рисунке 1, и найдите их сумму. Такую же работу выполните и для треугольников MNL и PQR. Заполните таблицу по результатам вычислений. Какое свойство вы заметили? Выразите его в одном предложении.

Треугольники	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$\angle 1+\angle 2+\angle 3$
ΔABC				
ΔMNL				
ΔPQR				



2. На листе бумаги начертите треугольник ABC, вырежьте его и, обозначив его углы цифрами 1, 2, 3, оторвите их. Затем сложите, как показано на рисунке 2. Какой вывод можно сделать?

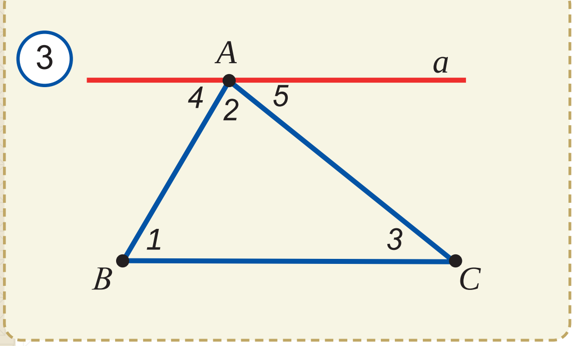
Теперь мы докажем одну из важнейших теорем геометрии – теорему о сумме углов треугольника.

18.1. Сумма внутренних углов треугольника

Теорема. **Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.**

ΔABC ⇒ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Доказательство. Обозначим внутренние углы треугольника ABC $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$ соответственно (*рис. 3*). Через вершину A проведём прямую a, параллельную стороне BC, и обозначим $\angle 4$ и $\angle 5$.



$\angle 1 = \angle 4$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных a и BC и секущей AB.

$\angle 3 = \angle 5$, так как эти углы накрест лежащие при параллельных a и BC и секущей AC.

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$, так как эти углы имеют одну вершину и образуют развёрнутый угол.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Из этого равенства следует, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, т. е. получаем равенство $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема доказана.

Следствие 1. **В любом треугольнике хотя бы два угла острые.**

Доказательство. Предположим противоположное, пусть в треугольнике только один угол острый. Тогда, так как два оставшихся угла тупые, то их сумма будет больше $180°$. Однако по теореме о сумме внутренних углов треугольника, доказанной выше, такого быть не может.

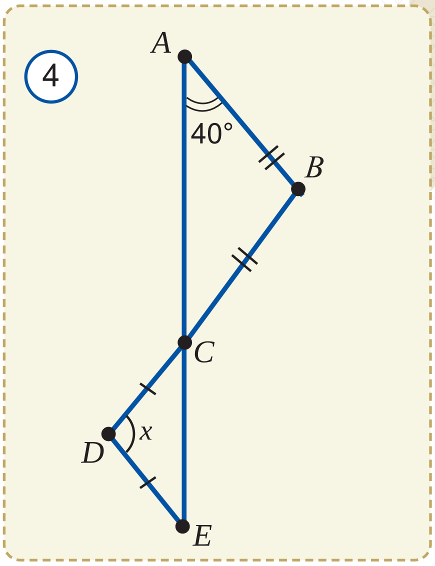
Значит предположение неверно.

Следствие доказано.

Следствие 2. **В любом треугольнике не может быть больше одного прямого или тупого угла.**

Это доказательство выполните самостоятельно.

Задача 1. Используя сведения, данные на рисунке 4, найдите неизвестный угол x.



Решение. Так как ΔABC – равнобедренный, то $\angle ACB = \angle A = 40°$. По свойству вертикальных углов, $DCE = \angle ACB = 40°$.

По условию ΔCED также равнобедренный. Поэтому $\angle DCE = \angle DEC = 40°$. Значит, по теореме о сумме углов треугольника в ΔCDE: $40° + 40° + x = 180°$ или $x = 100°$.

Ответ: $100°$.

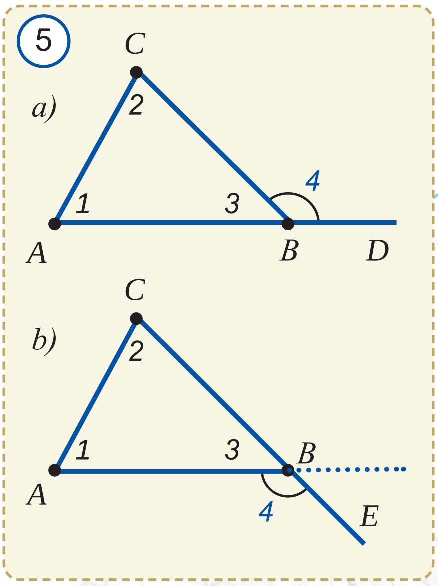
Задача 2. Найдите градусную меру углов треугольника, если они относятся как $2 : 3 : 7$.

Решение. Углы треугольника обозначим, следуя условию: $2x$, $3x$ и $7x$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника получим уравнение: $2x+3x+7x=180°$. Откуда находим $x=15°$:

Значит, градусные меры углов треугольника: $2x = 2 \cdot 15° = 30°$, $3x = 3 \cdot 15° = 45°$ и $7x = 7 \cdot 15° = 105°$.

Ответ. Внутренние углы треугольника равны: $30°$, $45°$ и $105°$.

18.2. Свойство внешних углов треугольника



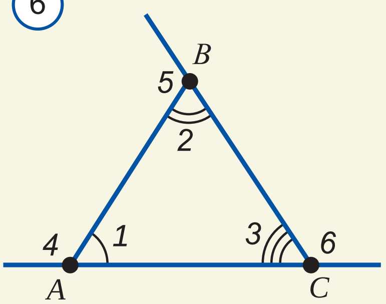
Углы, смежные внутренним углам треугольника, называют *внешними углами* треугольника.

На рисунке 5 изображены внешние углы CBD и ABE треугольника ABC при вершине B. Очевидно, что эти углы равны как вертикальные. Начертите и покажите на чертеже внешние углы при вершинах A и C.

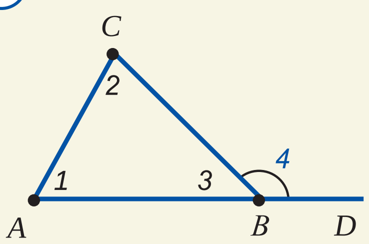
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

6



7



Углы треугольника, чтобы отличать их от внешних, называют также *внутренними углами* треугольника.

Геометрическое исследование

Измерьте с помощью транспортира все внутренние и внешние углы треугольника ABC на рисунке 6 и сравните величины каждого внешнего угла треугольника с суммой двух внутренних углов, не смежных с ним: a) $\angle 4$ и $\angle 2 + \angle 3$; b) $\angle 5$ и $\angle 1 + \angle 3$; c) $\angle 6$ и $\angle 1 + \angle 2$.

К какому выводу вы пришли в результате сравнения? Сформулируйте его в виде предположения.

Теорема. **Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.**

ΔABC, $\angle 4$ – внешний угол (рис. 7) ⇒ $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$

Доказательство. Обратимся к рисунку 7. По свойству смежных углов $\angle 3 + \angle 4 = 180°$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Из этих двух равенств следует $\angle 1 + \angle 2 + \cancel{\angle 3} = \cancel{\angle 3} + \angle 4$, Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.

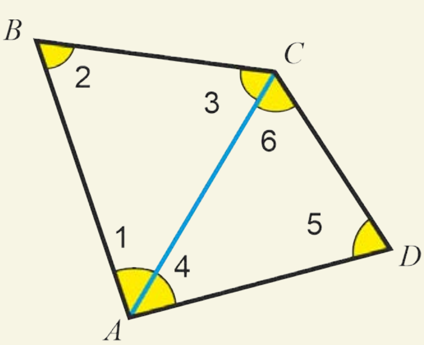
Теорема доказана.

Из этой теоремы следует вывод.

Следствие. Внешний угол треугольника больше каждого из внутренних углов, не смежных с ним.

Проверьте его правильность самостоятельно.

8



Задача. Докажите, что сумма углов четырёхугольника равна 360°.

Решение. Начертим произвольный четырёхугольник $ABCD$. Соединив точки A и C, разделим его на два треугольника.

Сумма внутренних углов каждого из треугольников ABC и ADC равна 180° (рис. 8):

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180°$.

Так как $\angle A = \angle 1 + \angle 4$ и $\angle C = \angle 3 + \angle 6$, то $\angle A + \angle B + \angle C + D = (\angle 1 + \angle 4) + \angle 2 + (\angle 3 + \angle 6) + \angle 5 =$
$= (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180° + 180° = 360°$.

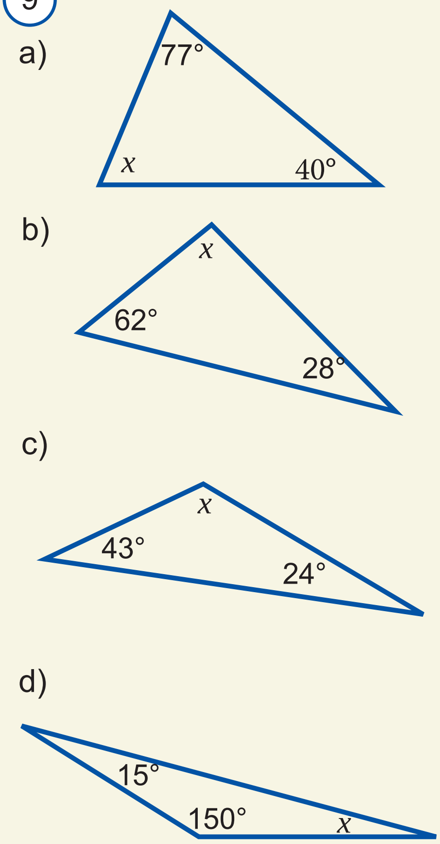
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вопросы к теме

1. *Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника и поясните на чертеже.*
2. *Сколько прямых углов может быть у треугольника?*
3. *Могут ли две стороны треугольника быть перпендикулярными третьей стороне?*
4. *Сколько тупых углов может иметь треугольник?*
5. *Существуют ли треугольники с углами: a) 5°, 55°, 120°; b) 46°, 150°,4°; c) 100°, 20°, 50°; d) 25°, 35°, 100°?*
6. *Что такое внешний угол треугольника?*
7. *Сколько тупых внешних углов может быть у треугольника: a) 1; b) 2; c) 3?*
8. *Могут ли быть равными внутренний и внешний углы треугольника при одной его вершине?*
9. *Сколько внешних углов треугольника могут быть острыми?*

9



Практические задачи и приложения

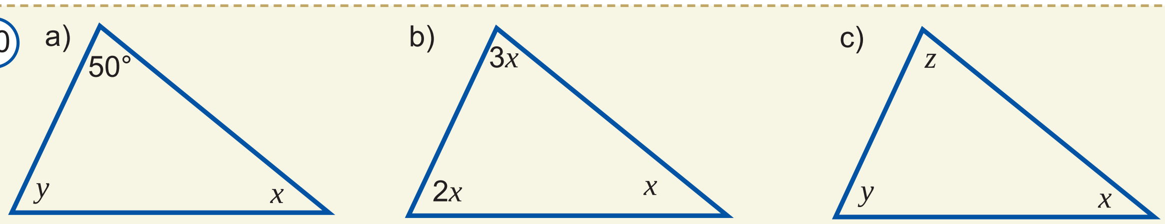
1. Найдите третий угол треугольника, если два угла треугольника равны: a) 60° и 40°; b) 70° и 85°; c) 90° и 45°; d) 105° и 30°.

2. Найдите неизвестный угол на рисунке 9.

3. Сумма двух углов треугольника равна 78°. Найдите его третий угол.

4. Найдите неизвестные углы на рисунке 10.

10

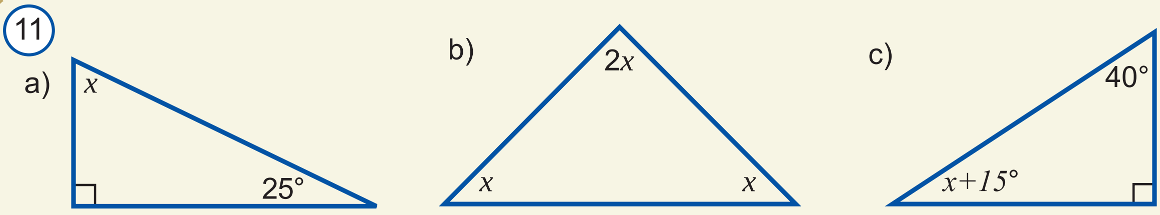


a) $x : y = 8 : 5$

c) $x : y : z = 5 : 6 : 7$

5. Найдите неизвестные углы на рисунке 11.

11

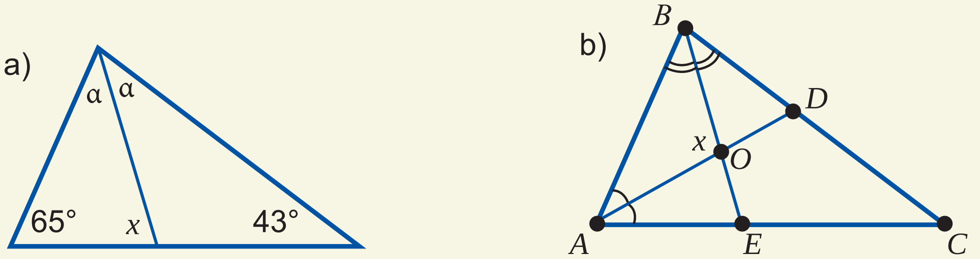


*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

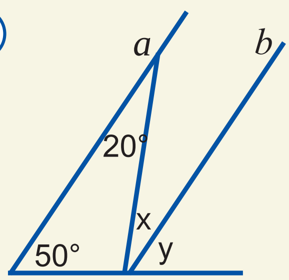
6. Найдите неизвестные углы на рисунке 12.

12

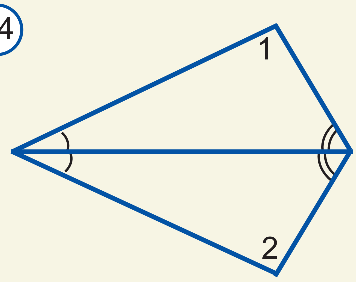


$\angle BAC = 74°$, $\angle ABC = 76°$

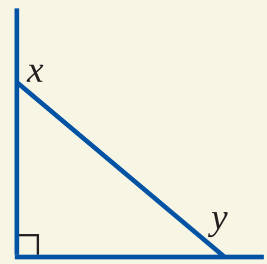
13



14



15



7. Найдите x и y на рисунке 13, если $a||b$.

8. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$ на рисунке 14.

9. Найдите $x+y$ на рисунке 15.

10*. Найдите угол α, если α, β, γ – углы треугольника и $\alpha = (\beta+\gamma)/2$.

11. Найдите углы равностороннего треугольника.

12. Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

13. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них: a) 50°; b) 60°; c) 105°.

14. Найдите внутренние углы треугольника, если два его внешних угла равны 120° и 135°.

15. Один из внутренних углов треугольника равен 30°, один из внешних углов равен 60°. Найдите оставшиеся внутренние углы треугольника.

16. Найдите неизвестный угол на рисунке 16.

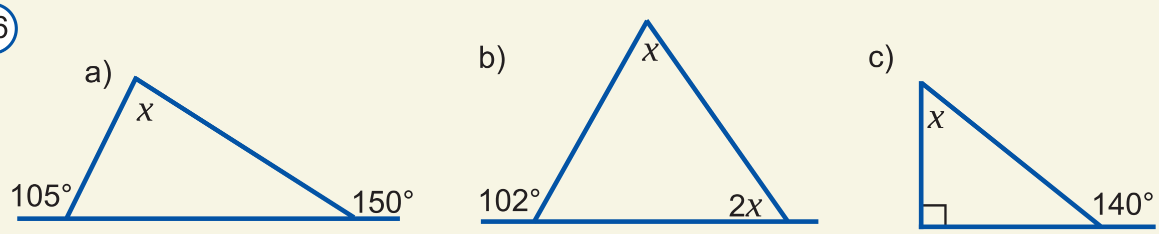
17. Найдите неизвестный угол на рисунке 17.

18.* Найдите сумму всех внешних углов треугольника.

19. Градусные меры двух углов треугольника относятся как 5 : 9, третий угол на 10° меньше меньшего из них. Найдите углы треугольника.

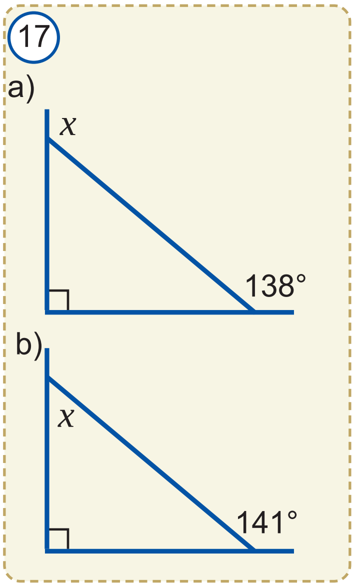
20. Найдите x на рисунке 18, если $a||b$.

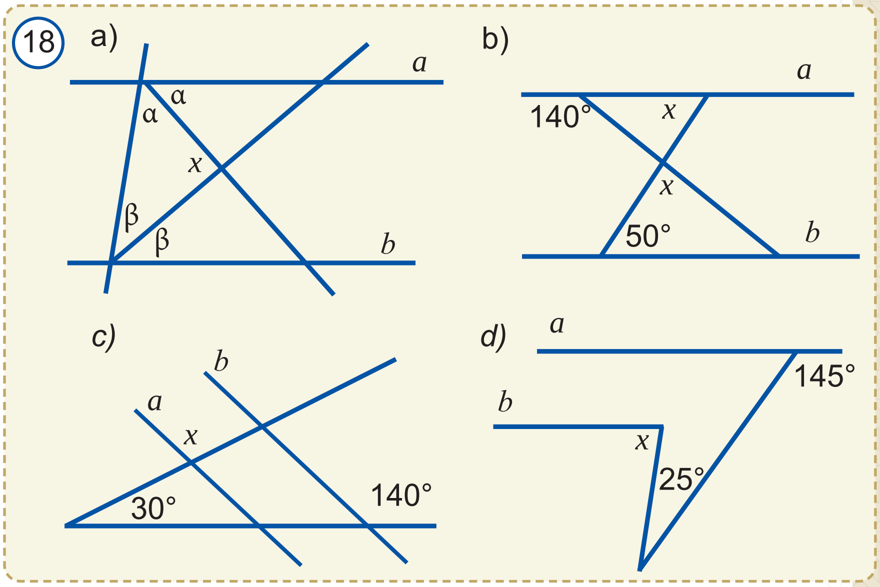
16



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE





21. Внутренние углы треугольника, не смежные с его внешним углом, равным 108°, относятся как 5 : 4. Найдите эти внутренние углы.

22*. Найдите сумму углов пятиугольника на рисунке 19.

23. Найдите неизвестные углы на рисунке 20.

24. Докажите, что треугольник с двумя равными углами является равнобедренным.

25. Один из углов равнобедренного треугольника равен: а) 120°; б) 70°. Найдите два других угла.

26. Угол при основании равнобедренного треугольника равен: а) 15°; б) 75°? Найдите его остальные углы.

27. Докажите, что если соответствующие стороны двух треугольников параллельны, то прилежащие к ним углы равны.

28. Найдите углы AOB и EOC, если $AB=BC$, $\angle ABC=50°$, AE и CF – биссектрисы на рисунке 21.

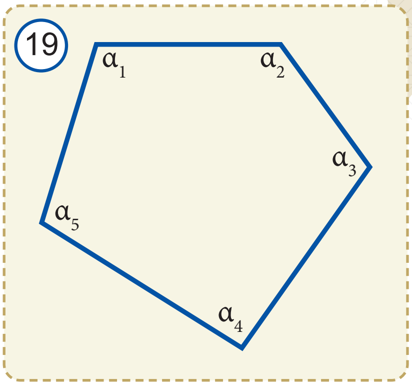
29. Найдите неизвестный угол x на рисунке 22.

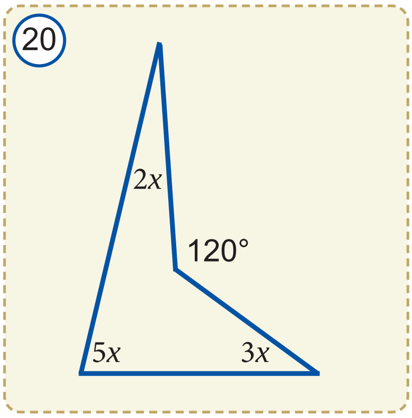
30. Найдите неизвестный угол x на рисунке 23.

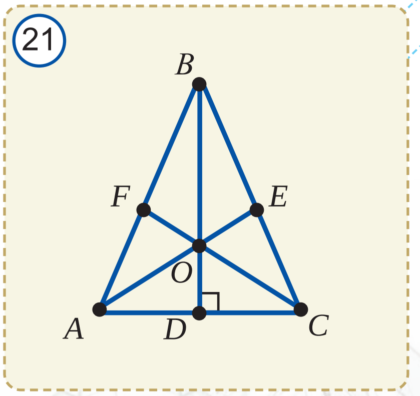
31. Пусть соответствующие стороны двух треугольников перпендикулярны. Будут ли равны соответствующие им углы? Обоснуйте ответ.

32. Можно ли из какого-нибудь треугольника получить два остроугольных треугольника с помощью одного разреза по прямой? Обоснуйте свой ответ.

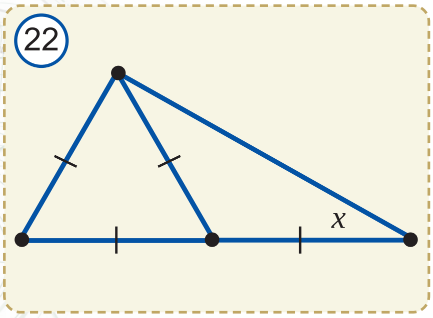
33. Найдите внутренние углы треугольника ABC, если: $\angle A+\angle B = 110°$ и $\angle B+\angle C = 100°$.

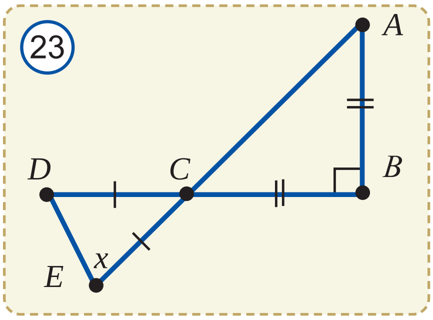


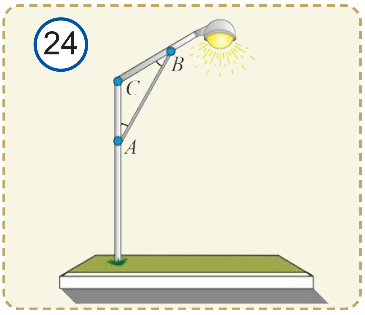




*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

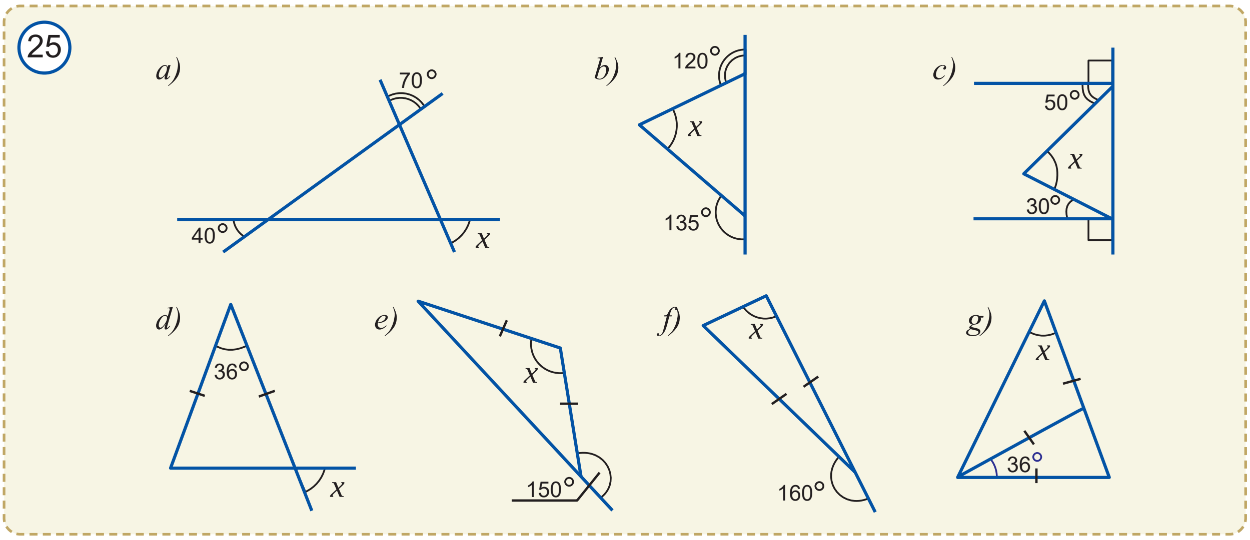




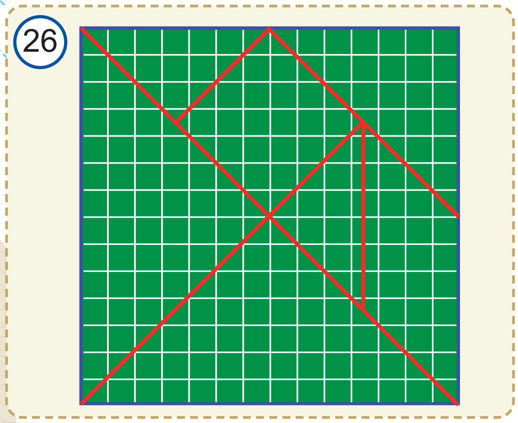


34. Настольная лампа, изображённая на рисунке 24, устроена так, что: $\angle C = 110°$ и $\angle A = \angle B$. Найдите градусную меру углов A и B. Как вы думаете, почему она так устроена?

35. Найдите неизвестный угол на рисунке 25.

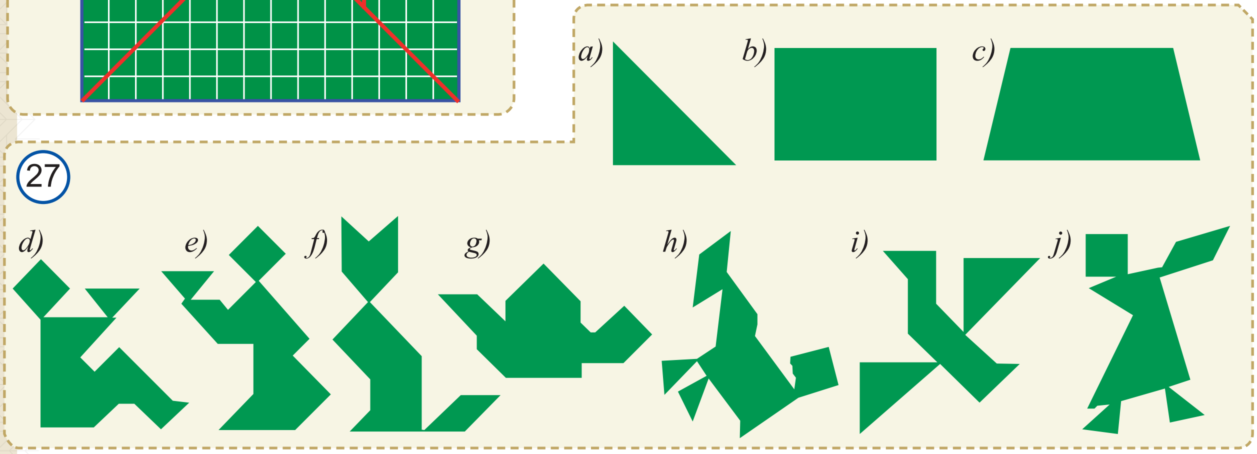


Геометрическая головоломка



Соберите китайскую игрушку «Танграм». Для этого скопируйте на плотную бумагу квадрат и, разделив его на семь частей так, как показано на рисунке 26, вырежьте их.

После этого соберите фигурки, изображённые на рисунке 27, используя при этом все без исключения части игрушки.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

19 ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

19.1. Свойства прямоугольных треугольников

Напомним, что у прямоугольного треугольника один угол прямой (90°), а два других острые. В прямоугольном треугольнике сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, а каждая из двух оставшихся сторон называется *катетом*. Рассмотрим теперь некоторые свойства прямоугольного треугольника.

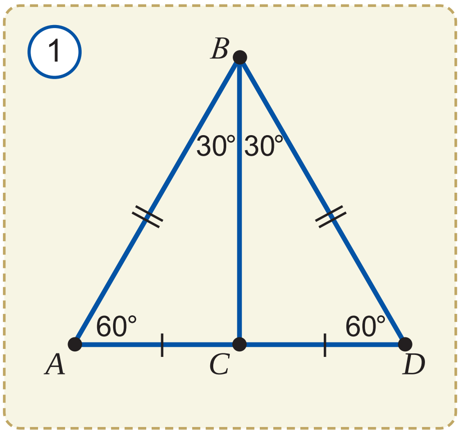
Свойство 1. **Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

На самом деле, сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Но один из углов прямоугольного треугольника равен 90°. Поэтому сумма двух оставшихся углов также равна 180° – 90° = 90°.

Свойство 2. **В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.**

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC, изображённом на рисунке 1:

$\angle ACB = 90°$ и $\angle ABC = 30°$. Тогда $\angle BAC = 60°$. Покажем, что $AC = \dfrac{AB}{2}$.



Построим треугольник DBC, равный данному, как показано на рисунке 1. В результате получим треугольник ABD, все углы которого равны 60°.

Значит, треугольник ABD равносторонний. В частности, $AB = AD$. Однако:

$AD = AC + CD = 2AC.$

Следовательно, $AB = 2AC$, т. е. $AC = \dfrac{AB}{2}$.

Свойство доказано.

Свойство 3. **Если один из катетов прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то этот катет лежит против угла в 30°.**

Это свойство – обратное свойству 2. Докажите его самостоятельно.

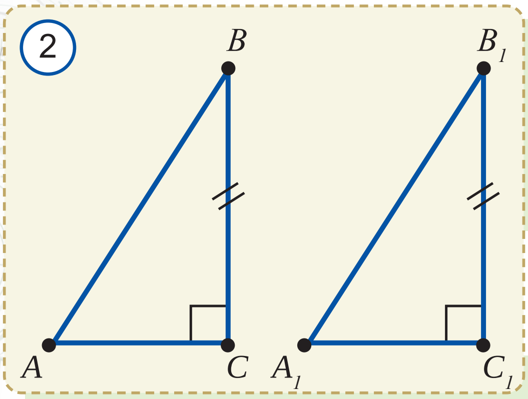
19.2. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Пусть даны прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Эти треугольники имеют по одному равному (прямому) углу. Поэтому для прямоугольных треугольников признаки равенства значительно упрощаются.

Приведём признаки равенства прямоугольных треугольников по двум катетам (КК признак), катету и острому углу (КУ признак), гипотенузе и острому углу (ГУ признак) и гипотенузе и катету (ГК признак).

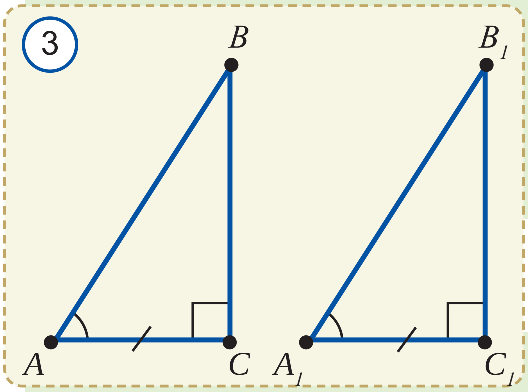
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



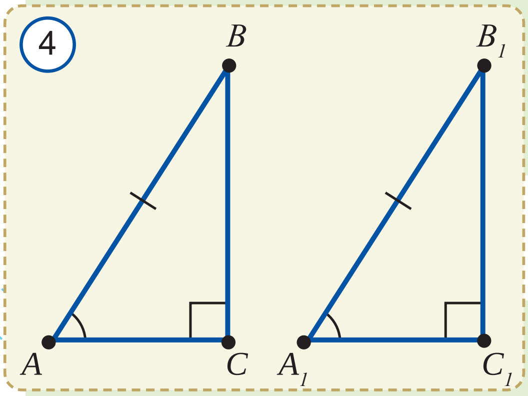
Теорема.* *Признак КК. **Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники равны** *(рис. 2)***.**

Этот признак непосредственно следует из признака СУС равенства треугольников.



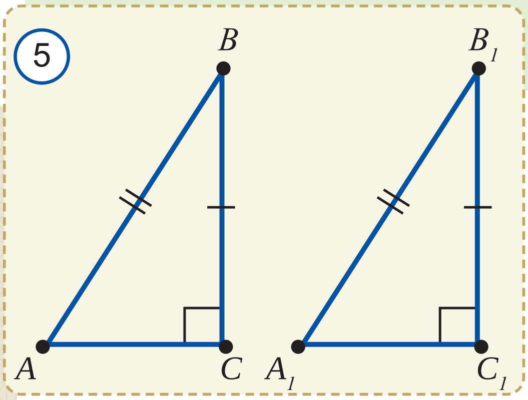
Теорема.* *Признак КУ. **Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 3)***.**

Этот признак непосредственно следует из признака УСУ равенства треугольников.



Теорема.* *Признак ГУ. **Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу второго прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 4)***.**

Этот признак непосредственно следует из признака УСУ равенства треугольников.



Теорема.* *Признак ГК. **Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету второго треугольника, то такие треугольники равны** *(рис. 5).*

Этот признак надо доказать. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и пусть у них: $\angle C = 90°$, $\angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Надо доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны две стороны: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Если удастся показать, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы ABC и $A_1B_1C_1$ также равны, то равенство треугольников будет следовать из СУС признака равенства треугольников.

Для доказательства приложим к треугольнику $A_1B_1C_1$ треугольник ABC,

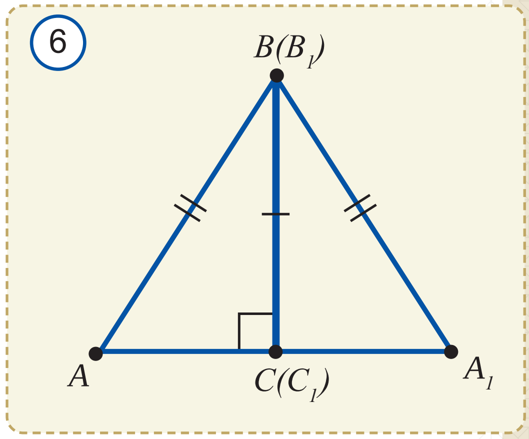
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

совместив катет BC с равным ему катетом B_1C_1 *(рис. 6)*. Тогда лучи CA и C_1A_1 составят развёрнутый угол, так как углы $\angle C$ и $\angle C_1$ прямые, т. е. точки A, C, C_1 и A_1 будут лежать на одной прямой.

В результате треугольник ABA_1 будет равнобедренным. Но высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, будет биссектрисой (согласно заключению теоремы на стр. 83). Значит, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.



Вопросы к теме

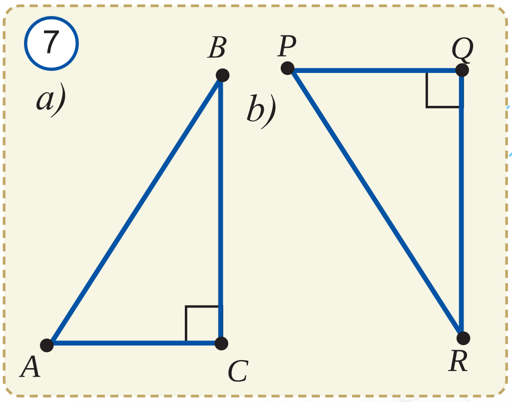
1. *Как называются стороны прямоугольного треугольника?*
2. *Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?*
3. *Может ли какой-нибудь из углов прямоугольного треугольника быть тупым?*
4. *Сколько высот у прямоугольного треугольника?*
5. *Может ли сумма острых углов прямоугольного треугольника равняться 120°? Почему?*
6. *Какая имеется связь между катетом, лежащим против угла в 30°, и гипотенузой?*
7. *Назовите и сформулируйте свойства углов прямоугольного треугольника.*
8. *Назовите и сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.*
9. *Будут ли равны прямоугольные треугольники, если катет и угол одного треугольника соответственно равны катету и углу второго?*
10. *Назовите катет и гипотенузу ΔABC, если $\angle A + \angle B = \angle C$.*

Практические задачи и приложения

1. Запишите гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника ABC на рисунке 7*a*. Какая сторона этого треугольника длиннее: а) AB или BC; *b)* AB или AC?

2. Запишите гипотенузу и катеты прямоугольного треугольника PQR на рисунке 7*b*. Какая сторона этого треугольника длиннее: а) PR или PQ; *b)* PR или QR?

3. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 23°. Найдите третий угол этого треугольника.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

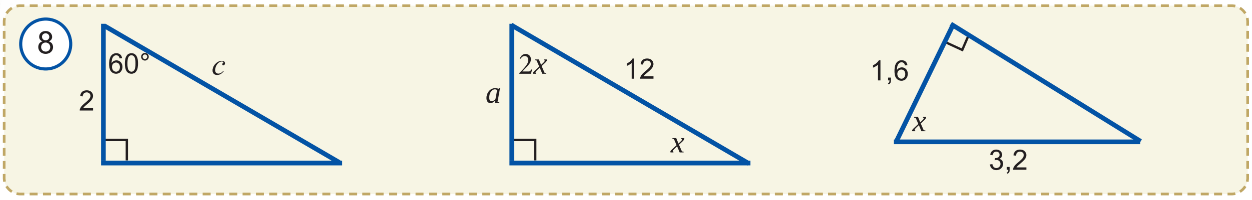
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен: a) 78°; b) 43°. Найдите третий угол этого треугольника.

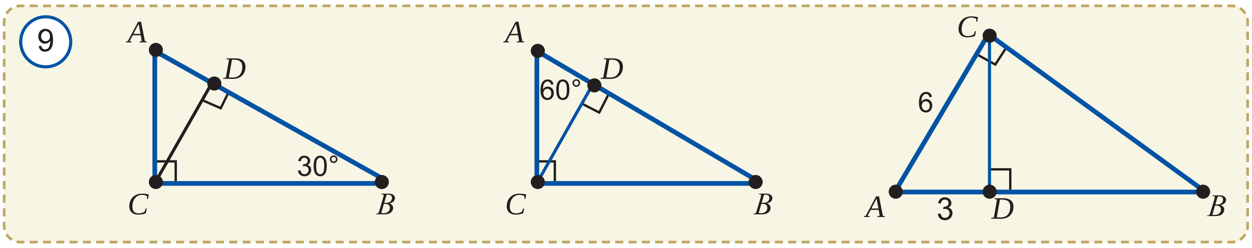
5. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 30°, гипотенуза 34. Найдите углы этого треугольника и один из катетов.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 14, а один из катетов 7. Найдите углы этого треугольника.

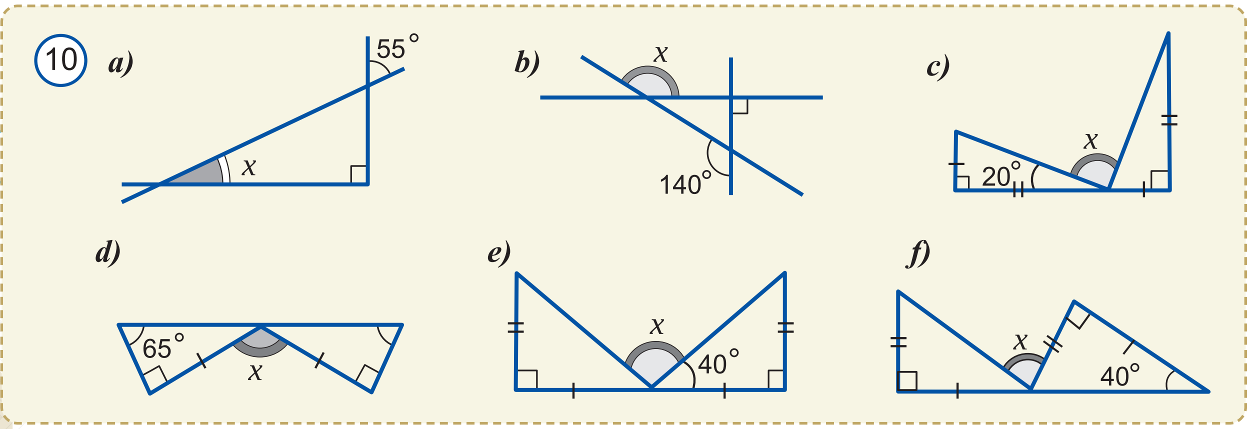
7. На рисунке 8: a) $c=?$; b) $a=?$; c) $x=?$

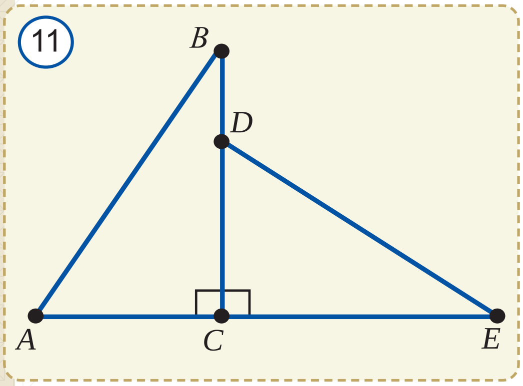


8. На рисунке 9: a) $AB=20$, $AD=?$; b) $AB=18$, $BD=?$; c) $BD=?$



9. Найдите неизвестные углы на рисунке 10.





10. Равны ли треугольники ACB и DCE на рисунке 11, если: a) $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$; b) $BC=DE$, $AB=CE$; c) $AC=CD$, $BC=CE$; d) $AB=DE$?

11. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 прямые. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если BD и BD_1 биссектрисы и $\angle B=\angle B_1$, $BD=B_1D_1$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

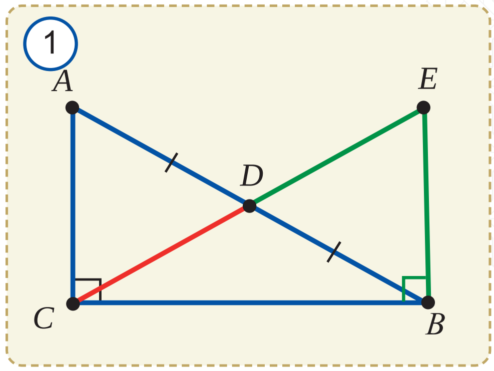
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

20 СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ УГЛА

Теорема. **В прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.**

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC: AB – гипотенуза, а CD– медиана, т. е. $AD=DB$ *(рис. 1)*. Докажем, что $CD = \frac{AB}{2}$.

Доказательство. Сделаем дополнительные построения: в точке B стороны CB построим перпендикуляр. Отметим на нём точку E так, чтобы $AC=EB$, и проведём отрезок CE.



Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и EBC. У них CB – общий катет и $AC=EB$ по построению. Тогда эти треугольники равны по признаку KK равенства прямоугольных треугольников. Таким образом, $\angle ABC = \angle ECB$.

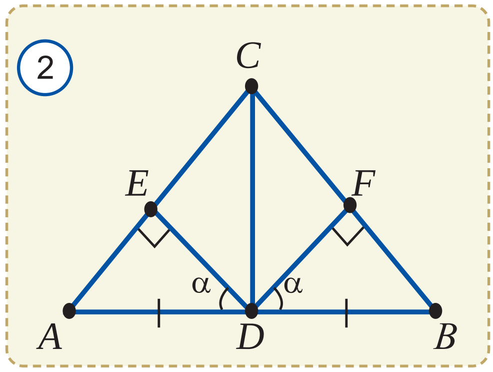
Это значит, что треугольник CDB равнобедренный и $CD=DB$.

Но по условию, $DB = \frac{AB}{2}$.

Откуда следует, что $CD = \frac{AB}{2}$.

Теорема доказана.

Задача. Докажите, что треугольник ABC, изображённый на рисунке 2, равнобедренный.



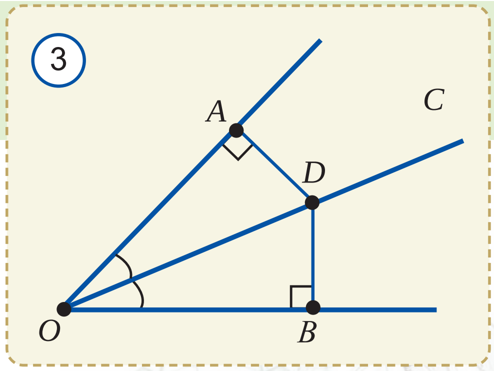
Решение. $\Delta AED = \Delta BFD$, так как равны их гипотенузы и по одному острому углу. Треугольники CED и CFD – прямоугольные. Тогда по признаку ГК равенства прямоугольных треугольников $\Delta CED = \Delta CFD$, так как $ED = FD$ и CD – их общая гипотенуза.

Значит, $\Delta ADC = \Delta BDC$, т. е. $AC=BC$ и ΔABC – равнобедренный.

Свойство биссектрисы угла

Напомним, что расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

Теорема. **Расстояния от любой точки биссектрисы неразвёрнутого угла до его сторон равны.**

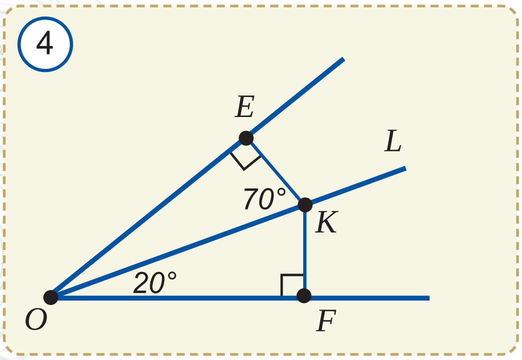


Доказательство. Пусть даны угол O и его биссектриса OC *(рис. 3)*. Отметим на биссектрисе OC произвольную точку D и опустим на стороны угла перпендикуляры DA и DB.

В прямоугольных треугольниках OAD и OBD:

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



1) $\angle AOD = \angle BOD$ по условию;

2) OD – общая гипотенуза.

По признаку ГУ равенства прямоугольных треугольников $\Delta OAD = \Delta OBD$. В частности, $DA = DB$.

Теорема доказана.

Задача. На биссектрисе OL угла EOF взята точка K (рис. 4). Найдите углы: а) EOK и OKF, если $EK \perp OE$, $KF \perp OF$ и $\angle KOF = 20°$.

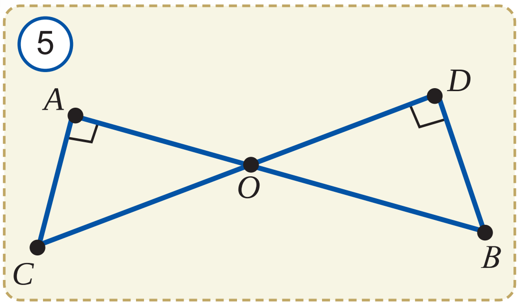
Решение. 1. Как было показано выше, $\Delta EOK = \Delta FOK$, поэтому $\angle EOK = \angle FOK = 20°$ и

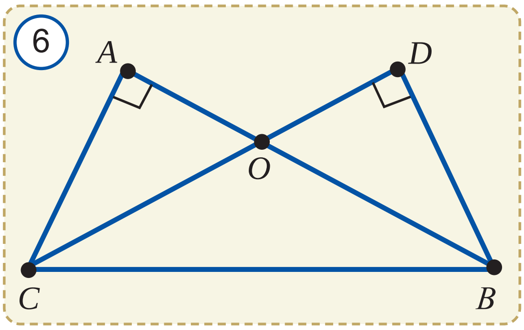
$\angle OKF = \angle OKE = 90° - 20° = 70°$.

2. $\angle EOF = 2 \cdot \angle KOF = 40°$,

$\angle FKE = \angle FKO + \angle OKE = 70° + 70° = 140°$.

Ответ: а) 20° и 70°; b) 40° и 140°.





Вопросы к теме

1. *Чему равна медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника?*

2. *Сформулируйте и разъясните свойство биссектрисы.*

Практические упражнения и приложения

1. Будут ли равны треугольники OAC и ODB на рисунке 5, если: а) $OC=OB$; b) $AC=BD$; с) $AO=OD$; d) $AC=OD$; e) $\angle OCA=\angle OBD$?

2. Будут ли равны треугольники BAC и CDB на рисунке 6, если: а) $AC=BD$; b) $OA=OD$; с) $\angle OCB=\angle OBC$; d) $BC=OD$; e) $\angle ACB = \angle DBC$?

3. В треугольнике ABC проведена высота BD. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если $AD = DC$.

4. В остроугольном треугольнике ABC равны высоты AA_1 и CC_1. Докажите равенство $\angle BAC = \angle BCA$.

5. Докажите, что произвольная точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.

6. Пусть расстояние от точки на биссектрисе угла AOB до луча OA равна 7 cm. Найдите расстояние от этой точки до луча OB.

7. Дан угол O и точка C на его биссектрисе. Найдите расстояние от точки C до сторон угла, если $\angle O=60°$ и $OC = 14$ cm.

8*. Докажите, что в прямоугольном треугольнике высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, равна её половине.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

9. Во внутренней области угла AOB выбрана точка N. Докажите, что точка N лежит на биссектрисе угла AOB, если $AN=BN$, $OA\perp AN$ и $OB\perp BN$.

10*. На листе бумаги в клетку изображена часть угла. Кусок бумаги, на котором помещалась вершина угла, оторван. Известно, что точки A и B равноудалены от сторон угла. Как построить биссектрису угла *(рис. 7)*?

11. Найдите сумму углов пятиугольника, изображённого на рисунке 8.

12. Углы треугольников на поверхности куба, изображённого на рисунке 9, обозначены цифрами. Найдите сумму этих углов.

13. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Найдите CD, если $AB=12$ и $CD=DB$ *(рис. 10)*.

14. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 8 cm. Пусть один из углов треугольника равен 60°. Найдите стороны, прилежащие к этому углу.

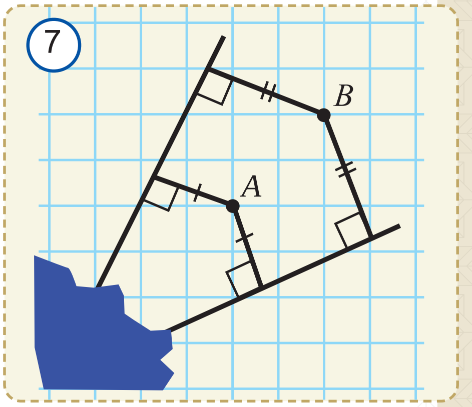
15*. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон.

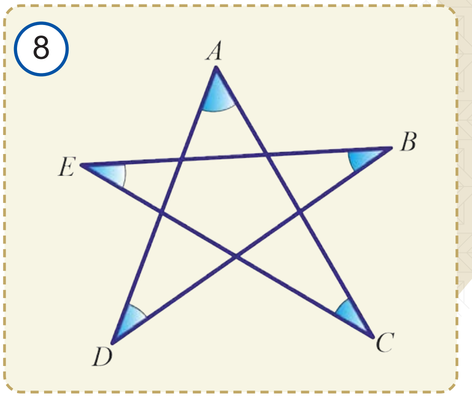
16*. У равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AC и A_1C_1 и высоты BD и B_1D, опущенные на эти основания. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

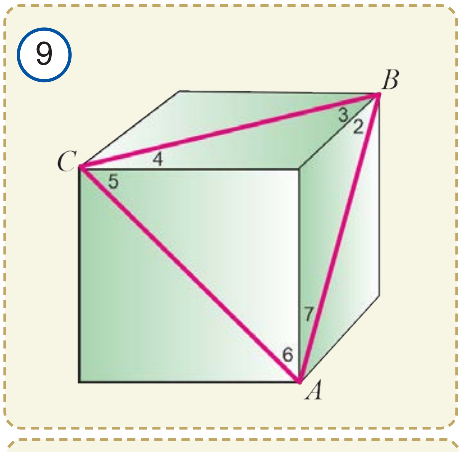
17*. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты AD и BE пересекаются под углом 50°. Найдите углы треугольника.

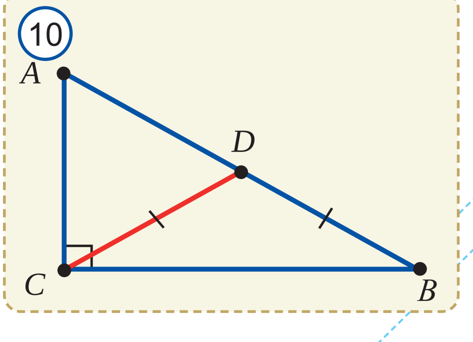
18*. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, опущенной на гипотенузу.

19*. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, опущенной на гипотенузу.









Точность и краткость в геометрии

Известно, что математические предложения должны быть точными, достаточно полными и в то же время краткими, без лишних слов. Определите в следующих предложениях лишние слова.

1. В прямоугольном треугольнике сумма двух острых углов равна 90°.
2. Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол равен 30°.
3. a) Многоугольник с наименьшим числом сторон; b) хорда, проходящая через центр окружности; c) равнобедренный треугольник, основание которого равно боковой стороне.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

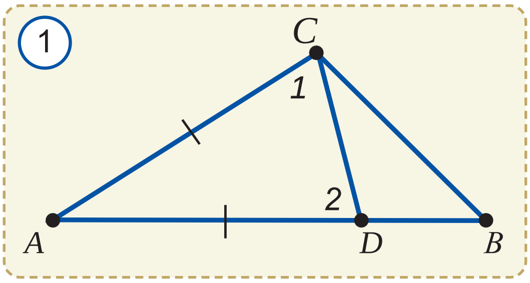
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

21 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

21.1. Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема. **Против большей стороны треугольника лежит больший угол.**

ΔABC, $AB > AC$ (рис. 1) ⇒ $\angle C > \angle B$



Доказательство. На луче AB отложим $AD = AC$. Так как $AB>AD$, то точка D принадлежит отрезку AB. Значит, луч CD лежит во внутренней области угла C и делит угол C на два угла. Поэтому $\angle C > \angle 1$.

Так как треугольник ACD по построению является равнобедренным, то $\angle 1 = \angle 2$.

Так как $\angle 2$ — внешний угол треугольника CDB, то $\angle 2 > \angle B$.

Из этих соотношений следует, что $\angle C > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, т. е. $\angle C > \angle B$.

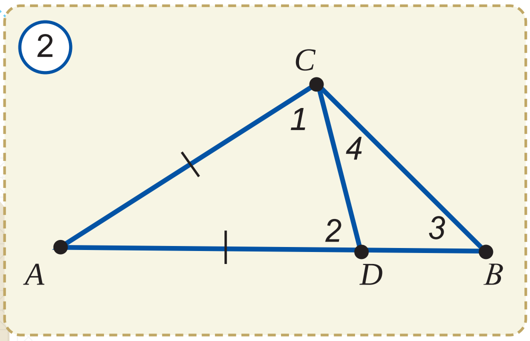
Теорема доказана.

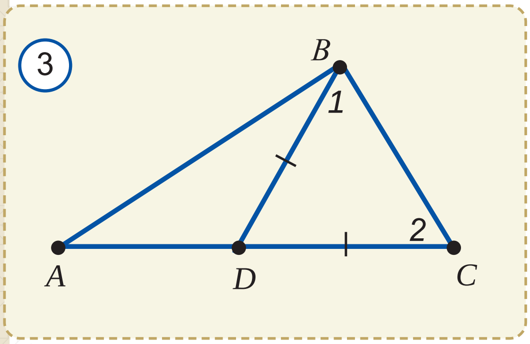
Справедлива теорема, обратная этой теореме.

.

Обратная теорема. **Против большего угла треугольника лежит большая сторона.**

Эту теорему докажите самостоятельно.





Следствие 1. **В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы.**

Эта теорема была доказана ранее.

Задача 1. Пользуясь сведениями, данными на рисунке 2, докажите, что $\angle 1 > \angle 3$.

Решение. Ясно, что $\angle 2 > \angle 3$, так как $\angle 2$ – внешний угол ΔBDC и по свойству внешнего угла: $\angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ и $\angle 4 > 0$.

Так как ΔACD – равнобедренный, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, $\angle 1 > \angle 3$.

Задача 2. Пользуясь сведениями, данными на рисунке 3, докажите, что $AB < AC$.

Решение. ΔBDC – равнобедренный (так как $BD = DC$), тогда $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 < \angle ABC$, то $\angle 2 < \angle ABC$. Значит, $AB < AC$, так как против большего угла лежит большая сторона.

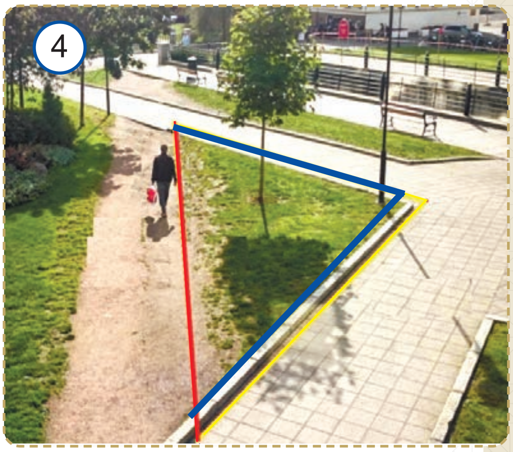
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

21.2. Неравенство треугольника

Активизирующие упражнения.

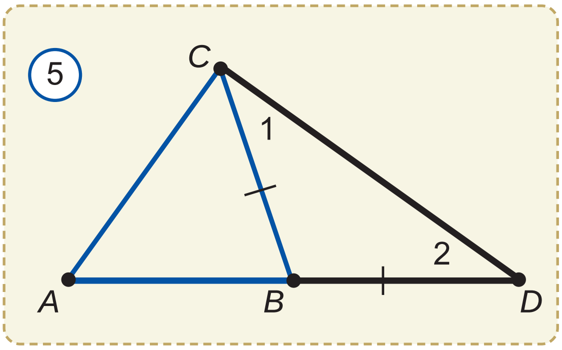
Вы, конечно, видели следы людей на газоне *(рис. 4)*. Обычно они ходят не по тротуарам, чтобы сократить путь и, сами того не зная, пользуются свойством треугольника, называемым «неравенство треугольника». Что это за свойство?



Теорема. **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.**

ΔABC *(рис. 1)* ⇒ $AC < AB + BC$

Доказательство. Отложим на прямой AB отрезок BD, равный отрезку BC и соединим точки C и D *(рис. 5)*. В результате получим равнобедренный треугольник BCD. Тогда $\angle 1 = \angle 2$, так как $BC = BD$. Из построения следует, что $\angle ACD > \angle 1$. В этом случае $\angle ACD > \angle 2$, так как $\angle 1 = \angle 2$.



Получили неравенство, связывающее углы треугольника ACD. Так как против большего угла лежит большая сторона, то приходим к неравенству $AC < AD$. Тогда из равенства $AD = AB + BD$ следует, что $AC < AB + BD$. Откуда, учитывая, что $BD = BC$, получим $AC < AB + BC$.

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. **Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$ и $BC < AB + AC$.**

Каждое из этих неравенств называется *неравенством треугольника*.

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, одно из неравенств обратится в равенство, а другие остаются неравенствами.

Например, если эти точки лежат на одной прямой и точка A лежит между точками B и C, то выполняются соотношения $AC = AB + BC$, $AB < AC + BC$ и $BC < AB + AC$.

Следствие 3. **Каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон**.

На самом деле, выбрав одно из неравенств $AB < AC + BC$, перепишем его в виде: $AB - AC < BC$ или $BC > AB - AC$.

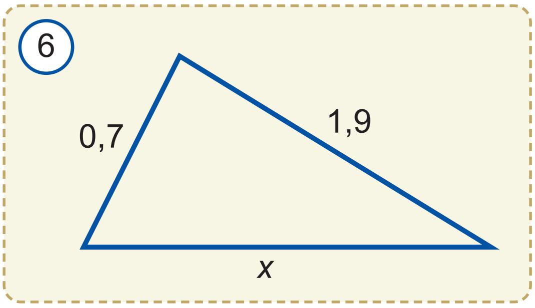
Точно так же из неравенства $AC < AB + BC$ получаем неравенство $BC > AC - AB$. А из неравенств $BC > AB - AC$ и $BC > AC - AB$ следует $BC > |AB - AC|$.

Таким образом, **каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и больше модуля их разности .**

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача. Длины двух сторон треугольника 0,7 и 1,9. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом (рис. 2).



Решение. Известны длины двух сторон: 0,7 и 1,9. Длину третьей стороны треугольника найдем, исходя из неравенств треугольника: *1)* $x + 0{,}7 > 1{,}9$ или $x > 1{,}2$; 2) $1{,}9 + 0{,}7 > x$ или $x < 2{,}6$.

Из этих двух неравенств получим $1{,}2 < x < 2{,}6$.

Так как x – целое число, то только значение $x = 2$ удовлетворяет этому двойному неравенству. Итак, длина неизвестной стороны треугольника равна 2.

Ответ: 2.

Вопросы к теме

1. *Может ли больший угол треугольника быть меньше 60°? Может ли меньший угол треугольника быть больше 60°?*
2. *Сравните углы треугольника ABC, если a) $AB < BC < AC$; b) $AB = AC < BC$. Может ли угол A быть тупым углом?*
3. *Может ли в треугольнике меньшая сторона лежать против тупого угла?*
4. *В чем смысл неравенства треугольника?*
5. *Какие задачи решаются с применением неравенства треугольника?*
6. *Какая сторона прямоугольного треугольника больше: гипотенуза или катет?*

Практические упражнения и приложения

1. Определите наибольшую сторону треугольника ABC, если $\angle A > \angle B > \angle C$.

2. Определите наименьшую сторону треугольника ABC, если $\angle A = \angle B < \angle C$.

3. Определите: a) наибольшую; b) наименьшую сторону треугольника ABC, если $AB = BC > AC$.

4. Определите: a) наибольшую; b) наименьшую сторону треугольника ABC, если $AB > BC > AC$.

5. Можно ли построить треугольник из отрезков: a) 2 m, 2 m и 3 m; b) 1 dm, 2 dm и 3 dm?

6. Можно ли построить треугольник из отрезков: a) 12 cm, 23 cm и 35 cm; b) 45 m, 22 m и 33 m?

7. Существуют ли треугольник со сторонами: a) 2; 3; 4; b) 2; 2; 4; c) 3,6; 1,8; 5; d) 56; 38; 19?

8. Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если длины двух других сторон равны: a) 7 и 3; b) 10 и 5; c) 8 и 5.

9. Периметр треугольника равен 34 dm. Может ли одна из сторон быть равной: a) 16 dm; b) 17 dm; c) 18 dm? Почему?

10. Периметр треугольника равен 12. Может ли одна из сторон быть равной: a) 5; b) 6; c) 8? Почему?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

11*. Найдите наибольшую и наименьшую сторону треугольника ABC, если: a) $BC= 9$, $AC = 8$, $AB = 7$; b) $BC = 9$, $AC = 8$; $AB = 8$; c) $BC =9$, $AC = 9$, $AB = 8$.

12. Сравните стороны треугольника ABC, если: a) $\angle A = 25°$, $\angle B = 100°$; b) $\angle A=40°$, $\angle B = 100°$; c) $\angle A = 60°$, $\angle B = 60°$.

13. Докажите, что любая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

14. Периметр равнобедренного треугольника равен 25 cm, одна из его сторон больше другой на 4 cm. Найдите стороны треугольника.

15.* Сколько можно построить различных треугольников из отрезков с длинами 2; 3; 4; 5 и 6?

16. Какую геометрическую фигуру составляют отрезки AB, BC и AC, если для трёх точек плоскости A, B, C выполняется неравенство $AB+BC \geq AC$?

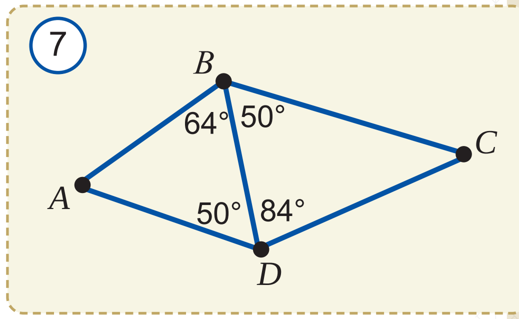
17.* Докажите, что медиана треугольника меньше половины его периметра (полупериметра).

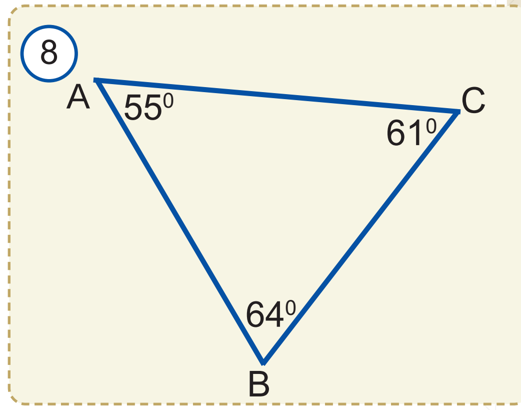
18. Какой из углов треугольника ABC наибольший и какой наименьший, если $AB= 12$ cm, $BC= 10$ cm, $CA= 7$ cm?

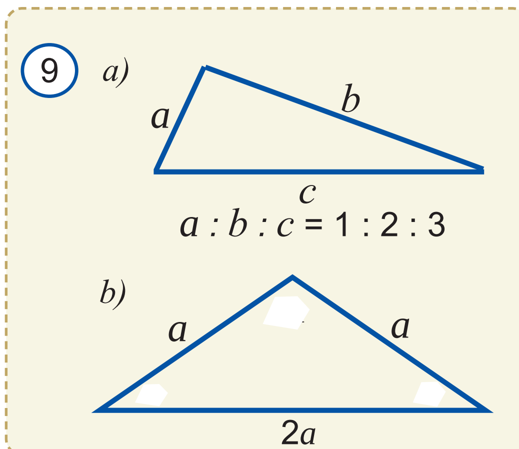
19. Какая сторона равнобедренного треугольника наибольшая, если угол при его вершине равен 62°? А если он равен 58°?

20. Сравните стороны треугольника ABC, если: a) $\angle A>\angle B>\angle C$; b) $\angle A=\angle B<\angle C$.

21. Найдите угол, который образуется при пересечении двух биссектрис равностороннего треугольника.







22*. Пусть $AB>BC$ в треугольнике ABC и $\angle A= 60°$. Какие значения может принимать угол B?

23.* Пусть для углов α, β и γ треугольника имеют место соотношения: $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$. Каким будет этот треугольник?

24.* На рисунке 7 укажите наибольший и наименьший отрезки. Обоснуйте свой ответ.

25. На рисунке 8 укажите наименьшую сторону треугольника.

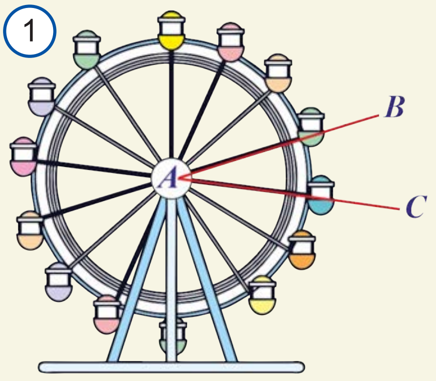
26. Существуют ли треугольники с такими данными (рис. 9)? Верны ли данные задачи?

27. Существует ли треугольник с периметром 20 cm, одна сторона которого на 2 cm длиннее второй, а третья на 4 cm короче её?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

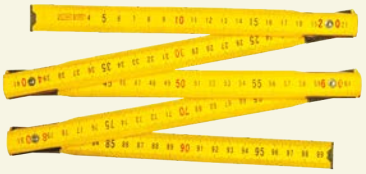
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

22 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

1


2


3


4


22.1. Практические упражнения и приложения

1. На сколько градусов повернётся человек, если он, обойдя площадку треугольной формы, вернётся в начальную точку? А если это будет квадратная площадка?

2. На рисунке 1 изображена водяная мельница. Найдите $\angle B$ и $\angle C$, если одна часть мельницы имеет вид треугольника ABC, в котором $\angle A=30°$, $AB=AC$.

3. Длина куска проволоки выражается целым числом сантиметров. Из неё нужно сделать треугольник, одна сторона которого равна 1 cm, а вторая 10 cm. Чему равна третья сторона треугольника?

4. На листе бумаги начерчен угол, вершина которого оторвана. Можно ли построить биссектрису этого угла?

5. Можно ли, сгибая лист бумаги, получить параллельные прямые?

6. На рисунке 2 изображён знак «Stop» в виде равностороннего многоугольника. Найдите сумму его внутренних и внешних углов.

7. Найдите градусную меру одной секции колеса автомобиля, изображённого на рисунке 3.

8. Какие треугольники можно построить с помощью складного метра – прибора для измерения длины *(рис. 4)* ?

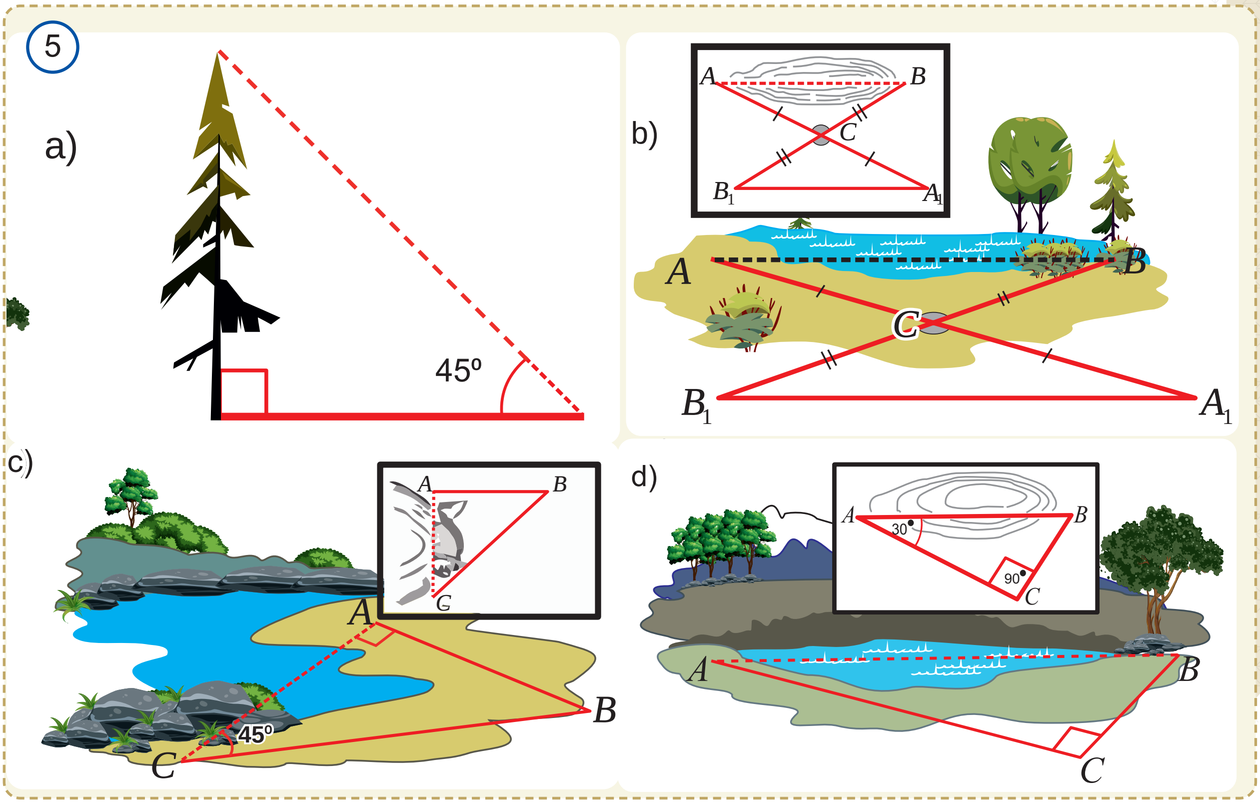
9. Постройте алгоритм вычисления таких длин как высота дерева, ширина озера или оврага и других, изображённых на рисунке 5, применяя знания, полученные в этой главе, и обоснуйте его.

10. Объясните способ вычисления ширины реки, изображённой на рисунке 6, пользуясь признаком равенства прямоугольных треугольников и необходимыми построениями.

11. Строители начинают прокладку прямолинейного тоннеля сразу с двух сторон горы *(рис. 7)*. Правильно ли рассчитали инженеры, если при измерении получили следующие данные: $\angle A_1 = 50°10'$, $\angle B_1 = 48°20'$ и $\angle C = 80°5'$?

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



Занимательная геометрия

1. Используя линейку, изображённую на рисунке 8, обе стороны которой можно использовать для построения прямой (школьная линейка):

a) поделите данный угол пополам;

b) поделите данный отрезок пополам;

c) постройте угол, вдвое больший данного;

d) постройте отрезок, вдвое больший данного;

e) проведите перпендикуляр в данную точку прямой;

f) через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой;

g) через данную точку проведите прямую, перпендикулярную данной прямой.

2. Как построить квадрат:

a) по стороне;

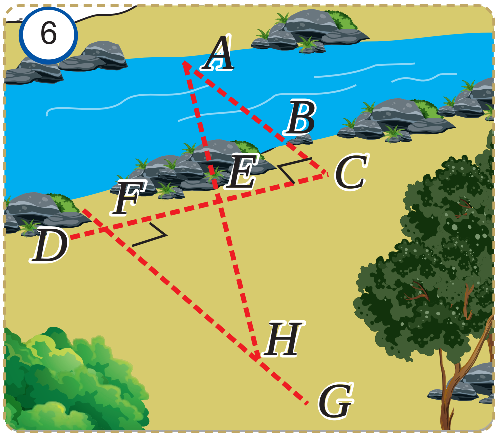
b) по диагонали;

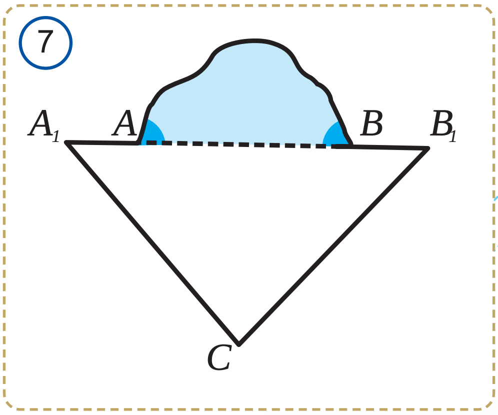
c) по серединам двух противоположных сторон;

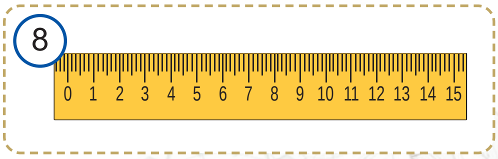
d) двум смежным сторонам;

e) одной стороне и центру;

f) центру и двум точкам на одной стороне?







*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

22.2. Проверьте свои знания

1.Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений.

1. Угол, ... внутреннему углу треугольника, называется его внешним углом.
2. ... углов треугольника равна 180°.
3. Треугольник, сумма двух углов которого равна 90°, будет ... .
4. Внешний угол треугольника равен ..., не смежных с ним .
5. Если один из углов треугольника тупой, то два остальных угла ... .
6. Углы прямоугольного треугольника не могут быть... .
7. Каждая сторона треугольника ... суммы остальных сторон.
8. Если у двух прямоугольных треугольников равны гипотенуза и ..., то эти треугольники равны.
9. Если у прямоугольных треугольников равны катеты, то ... .
10. Если в прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена ..., то она равна половине этой гипотенузы.
11. Если катет прямоугольного треугольника ..., то он лежит против угла 30°.
12. Точки, равноудалённые от сторон угла, лежат ... .

2. Если в приведённых ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их.

1. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы и по одному острому углу, то эти треугольники равны.
2. Сумма внутренних и внешних углов треугольника равна 180°.
3. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов.
4. В треугольнике против большей стороны лежит меньший угол, против большего угла лежит меньшая сторона.
5. Каждая сторона треугольника меньше разности остальных сторон.
6. Прямоугольный треугольник имеет только одну высоту.
7. Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы.
8. Высота прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы.
9. Если у прямоугольных треугольников равны гипотенузы, то эти треугольники также равны.
10. Внутренний угол треугольника всегда меньше суммы двух оставшихся углов.
11. Внешние углы треугольника всегда тупые.
12. Высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла.
13. Точки, равноудалённые от сторон угла, лежат на биссектрисе этого угла.
14. Биссектриса угла – это геометрическое место точек, равноудалённых от его сторон.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

3. Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа.

1	Сумма внутренних углов равна 180°	
2	Сумма острых углов равна 90°	
3	Стороны состоят из отрезков	
4	Соотношение между сторонами	
5	Равна половине гипотенузы	
6	Все три высоты пересекаются в одной вершине	
7	Всегда больше катетов	
8	Точки равноудалены от сторон угла	

4. Тесты.

1. Найдите углы треугольника, если они относятся как 2 : 3 : 4.

A) 20°, 30°, 40° B) 40°, 60°, 80° C) 36°, 54°, 90° D) 18°, 27°, 36°

2. Определите вид треугольника, если его углы относятся как 3 : 2 : 1.

A) остроугольный B) тупоугольный

C) прямоугольный D) невозможно определить

3. Определите вид треугольника, если один из его внешних углов острый.

A) остроугольный B) тупоугольный

C) прямоугольный D) невозможно определить

4. Определите вид треугольника, если один из его углов больше суммы двух других его углов.

A) остроугольный B) тупоугольный

C) прямоугольный D) невозможно определить

5. Высоты какого треугольника пересекаются в одной из его вершин?

A) равнобедренный треугольник

B) равносторонний треугольник

C) прямоугольный треугольник

D) такой треугольник не существует.

6. В треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен 120°, внутренний угол при вершине C равен 80°. Найдите внешний угол при вершине B.

A) 120° B) 140° C) 160° D) 40°

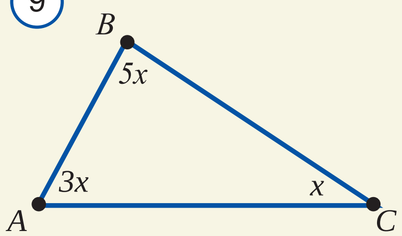
7. Один из внешних углов треугольника равен 120°, разность двух несмежных с ним внутренних углов равна 30°. Найдите больший из внутренних углов.

A) 70° B) 75° C) 85° D) 90°

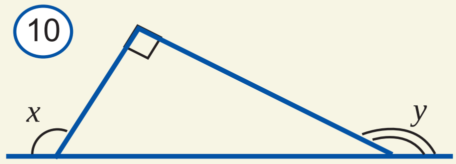
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

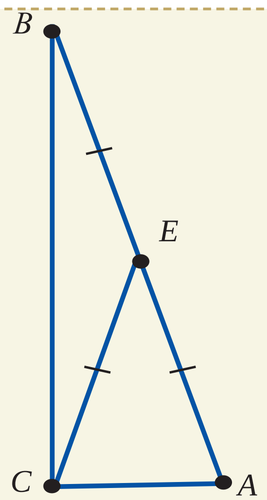
9



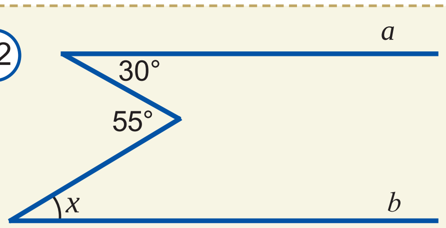
10



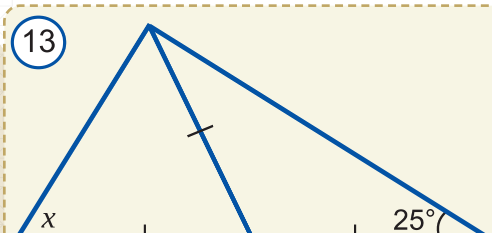
11



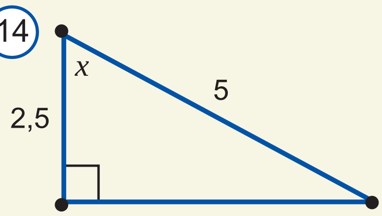
12



13



14



8. Величины двух внутренних углов относятся как 1 : 2. Третий угол на 40° больше, чем меньший из этих углов. Найдите больший угол треугольника.

A) 105° B) 75° C) 80° D) 90°

9. Периметр равнобедренного треугольника равен 48, одна из его сторон равна 12. Найдите остальные стороны.

A) 18; 12 B) 16; 16 C) 18; 24 D) 18; 18

10. Угол между биссектрисой и высотой, исходящих из вершины прямого угла, равен 24°. Найдите меньший угол треугольника.

A) 21° B) 24° C) 36° D) 16°

11. Найдите $\angle A$ на рисунке 9.

A) 10° B) 20° C) 60° D) 100°

12. Сколько разносторонних треугольников можно построить из отрезков с длинами 3, 5, 7 и 11?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 6

13. Найдите $x + y$ на рисунке10.

A) 90° B) 180° C) 270°
D) невозможно определить.

14. Найдите $\angle BCA$ на рисунке11.

A) 90° B) 96° C) 144° D) 84°

15. Найдите x на рисунке 12, если $a||b$.

A) 35° B) 45° C) 25° D) 20°

16. Найдите x на рисунке 13.

A) 60° B) 55° C) 65° D) 70°

17. Найдите x на рисунке 14.

A) 30° B) 45° C) 15° D) 75°

18. Сколько разносторонних треугольников можно построить из отрезков с длинами 2 cm, 3 cm, 4 cm и 5 cm?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

19. Каждая сторона треугольника будет:

A) больше B) меньше C) равна

D) больше или равна

разности двух других его сторон.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5. Задачи.

1. Можно ли построить замкнутую ломаную, длины звеньев которой равны 1 m, 2 m, 4 m, 8 m и 16 m?

2. Найдите стороны треугольника, длины которых выражаются целыми числами, если его периметр равен 15.

3. Всегда ли высота треугольника меньше его сторон?

4. Углы треугольника, большая сторона которого равна 36, относятся как 1 : 2 : 3. Найдите меньшую сторону треугольника.

5. Высота треугольника, опущенная на его основание, образует с боковыми сторонами углы 27° и 36°. Найдите углы треугольника.

6. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$, если углы A и A_1 прямые, $\angle B=\angle B_1$ и равны биссектрисы BD и B_1D_1 $(BD=B_1D_1)$.

7. Найдите x на рисунке 15.

8. Найдите $\angle ABC$ на рисунке 16.

9. Докажите, что $AB||CD$ на рисунке 17.

10. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите остальные углы треугольника.

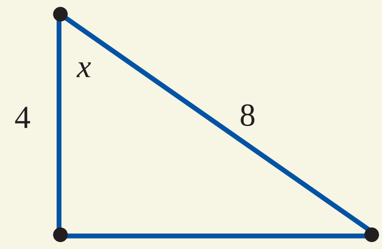
11. Будет ли равнобедренный треугольник равносторонним, если один из его углов равен 60°?

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом B = 36° проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB равнобедренные.

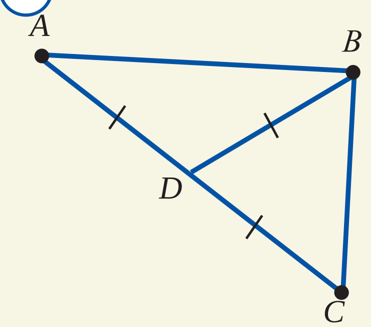
13. Два угла одного треугольника 60° и 38°, а второго 38° и 82°. Могут ли эти треугольники быть равными?

14. Найдите AB на рисунке18, если BD = CD = 10.

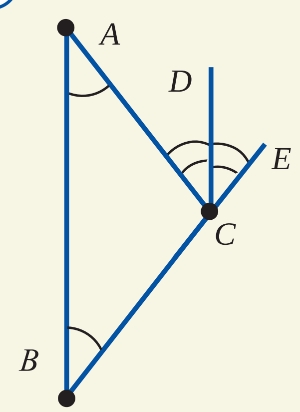
15



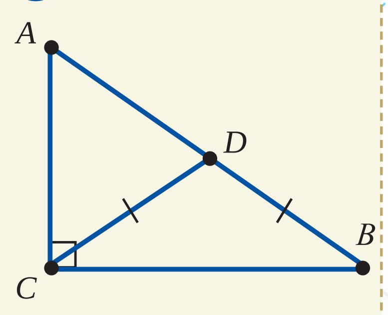
16



17



18



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

15. Найдите наибольшую сторону треугольника, если его периметр больше сторон треугольника на 14 cm, 16 cm и 24 cm.

16. Из вершины прямого угла треугольника ABC опущена высота CD. Найдите угол CDB, если: a) $\angle A = 24°$; b) $\angle A = 70°$.

17. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70°. Найдите его внутренние углы.

18. Высоты, опущенные из вершин A и C треугольника ABC, пересекаются в точке N. Найдите угол ANC, если $\angle A = 50°$ и $\angle C = 84°$.

19. Медиана BD треугольника ABC равна половине стороны AC. Найдите угол B треугольника.

20. Существует ли треугольник с периметром 23 m, одна сторона которого на 2 m короче второй и на 1 m длинее третьей?

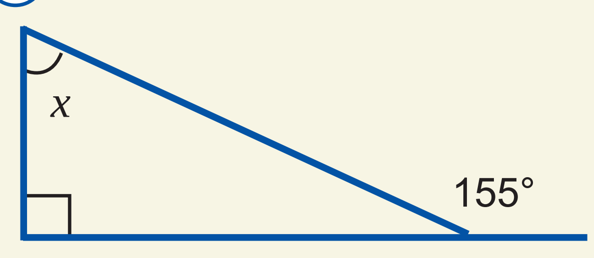
21. В треугольнике ABC угол A в 3 раза меньше угла B и на 15° больше угла C. Найдите углы этого треугольника.

22*. Докажите, что в треугольнике точка пересечения двух высот не может делить каждую из них пополам.

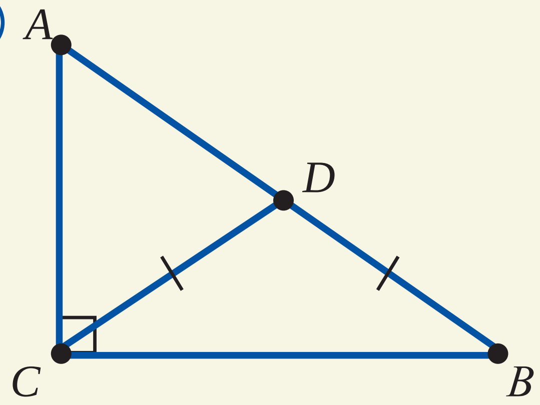
23*. Треугольник пересекает четыре различные параллельные прямые. Докажите, что хотя бы одна из них не может пройти через вершину треугольника.

Образец контрольной работы 5

1



2



Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей:

1. 5 тестов, подобных приведённым на с.145;
2. 3 задачи, подобные данным ниже (задача 4 предназначена для успевающих учеников).

1. Найдите неизвестный угол *(рис. 1)*.

2. Найдите углы треугольника, если один из его внешних углов равен 120°, а несмежные с ним углы относятся как 1 : 2.

3. Найдите CD на рисунке 2, если: $\angle ACB=90°$, $CD=BD$ и $AB=$ 24 cm.

4. Биссектриса BD треугольника ABC пересекает сторону AC под углом 100°. Найдите углы треугольника, если $BD=DC$.

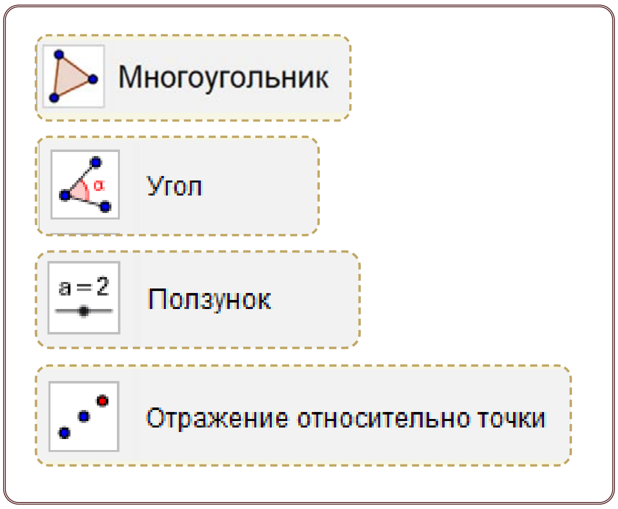
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

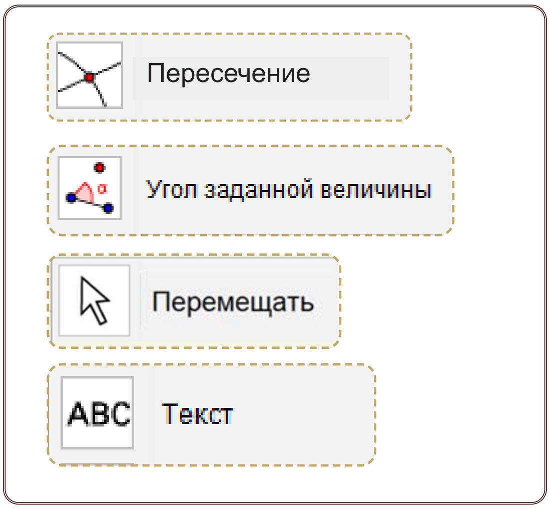
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Практическое задание

Визуалирование суммы двух внутренних углов треугольника

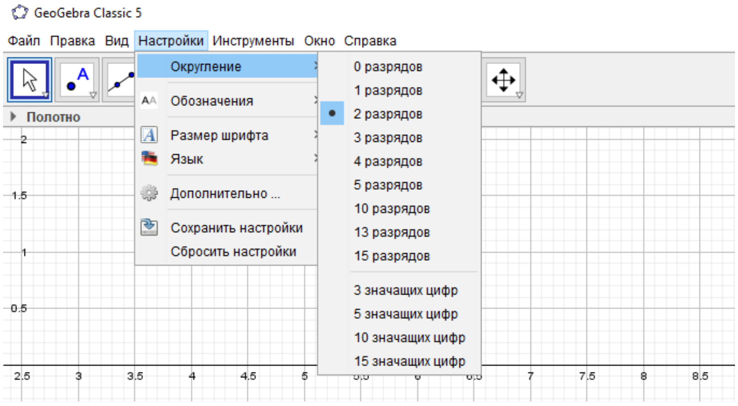
Для визуалирования суммы двух внутренних углов треугольника нужны следующие инструменты.



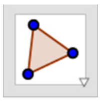
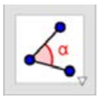
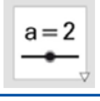


Необходимые компоненты:

- Откройте новое окно в ***GeoGebra***.
- Приведите интерфейс **«Настройки»** ***GeoGebra*** к виду **«Геометрия»**.
- При помощи меню **«Вид»** активируйте область **«Строка ввода»**.
- В меню **«Настройки»** при помощи инструмента **«Округление – 0 разрядов»** округлите десятичную часть числа.

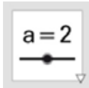
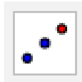
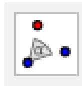
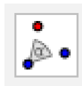
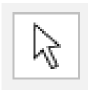
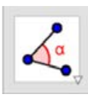
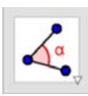
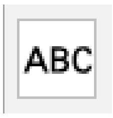
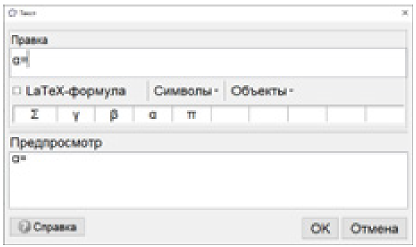
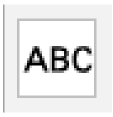
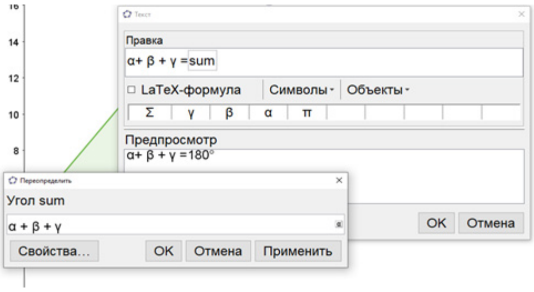


Алгоритм визуализации суммы двух внутренних углов треугольника

1		Постройте произвольный треугольник ABC, двигая мышь против часовой стрелки.
2		Обозначьте углы треугольника ABC буквами α, β и γ.
3		Создайте ползунок а для угла δ с интервалом 0° до 180° и с шагом 10°.

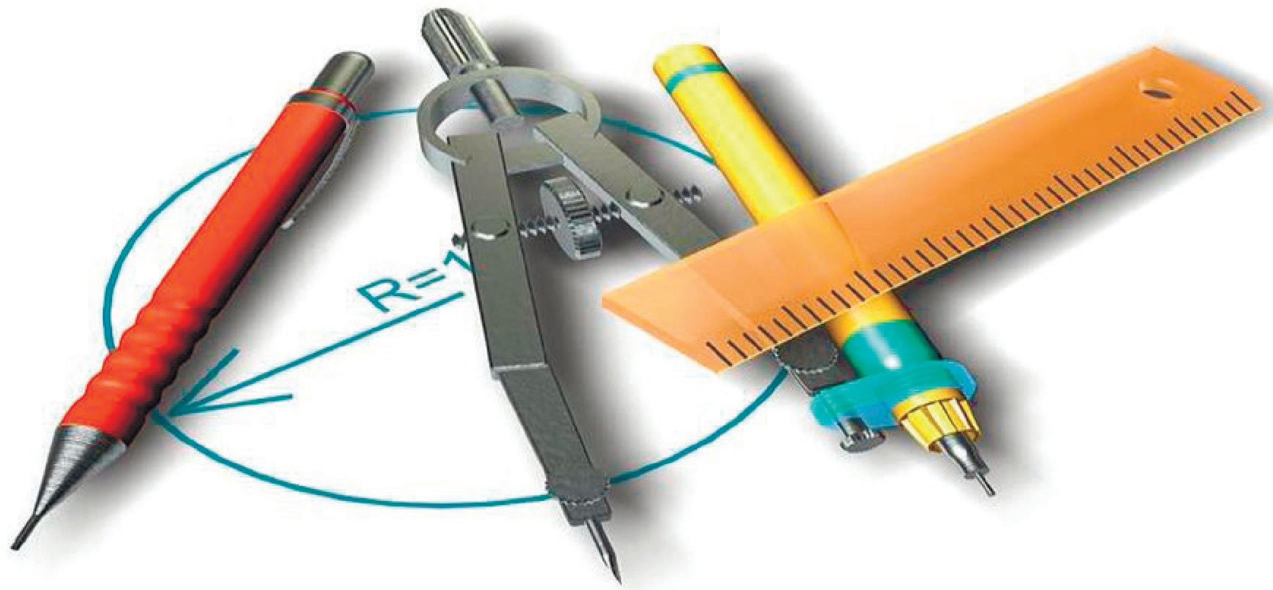
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4		Создайте ползунок a для угла ε с интервалом 0˚ до 180˚ и с шагом 10˚.
5		Создайте середину D отрезка AC и середину E отрезка AB
6		Поверните треугольник на угол δ вокруг точки D (по часовой стрелке).
7		Поверните треугольник на угол ε вокруг точки E (по часовой стрелке).
8		Переместите оба ползунка δ и ε, чтобы показать 180˚.
9		Создайте угол ζ в точках $A'\ C'\ B'$.
10		Создайте угол η в точках $C'_1\ B'_1\ A'_1$.
11		Нажмите на объект правой кнопкой мыши и выберите из контекста меню команду **«Свойства»**. Измените цвет, вид, толщину линии и т. д. объекта.
12		Создайте динамическое отображение текста внутренних углов и их значения, например, $\alpha =$ и выберите α из Объектов. 
13		**Ввод** – Вычислите сумму внутренних углов треугольника с помощью введения в строку ввода формулы sum. Вычислите сумму углов, используя sum $= \alpha + \beta + \gamma$
14		Создайте сумму углов как динамический текст: $\alpha + \beta + \gamma =$, затем щелкните sum=180° в области **Панель объектов**. 
15		Измените цвет и вид углов треугольника и их названий.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE



Глава V

ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

После изучения этой главы вы должны обладать следующими знаниями и практическими навыками:

Знания:

– специальные правила решения задач на построение с помощью циркуля и простой линейки;
– ступени решения задач на геометрические построения.

Практические навыки:

– уметь правильно пользоваться линейкой и циркулем;
– уметь строить угол, равный данному углу;
– уметь строить биссектрису угла;
– уметь строить перпендикуляр к прямой;
– уметь делить отрезок пополам;
– уметь строить треугольник по заданным элементам.

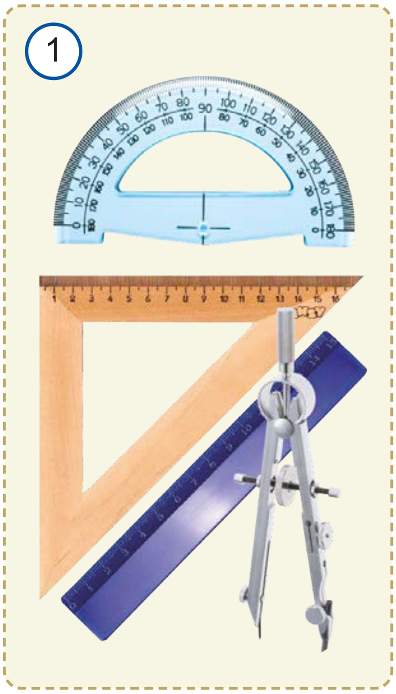
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

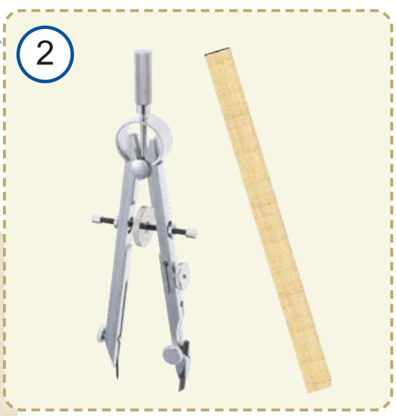
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

23 ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

23.1. Правила геометрических построений

Решение задач на построение с помощью только линейки и циркуля достигло в Древней Греции уровня искусства. На практике геометрические построения можно и удобно выполнять с помощью любых инструментов. Но решение задач с помощью линейки и циркуля воспитывает способность к логической наблюдательности.


1


2

До сих пор с помощью линейки строились прямая, луч, отрезок и другие фигуры, с помощью линейки и транспортира строились различные углы. С помощью циркуля проводили окружности и дуги *(рис. 1)*.

Установлено, что многие геометрические фигуры можно строить только с помощью *простой линейки и циркуля* *(рис. 2)* (простая линейка – линейка без шкалы).

По этой причине в геометрии специально выделены задачи на построение с помощью этих инструментов.

Имеются особые правила использования этих инструментов – при их помощи разрешается выполнять только следующие работы:

С помощью простой линейки разрешается:

- *чертить любые прямые;*
- *чертить прямую, проходящую через заданную точку;*
- *чертить прямую, проходящую через две точки.*

С помощью циркуля разрешается:

- *чертить любую окружность;*
- *из данной точки, как из центра, чертить окружность произвольного радиуса;*
- *чертить окружности данного радиуса из произвольно заданного центра;*
- *чертить окружность из данного центра с заданным отрезком как радиусом;*
- *откладывать отрезок, равный данному, на данной прямой от данной точки в каждом из двух направлений на прямой.*

Любые другие построения нужно сводить к этим действиям. Но не разрешается измерять длины отрезков с помощью шкалы, даже если она имеется на линейке, и откладывать отрезки известной длины на любой прямой.

При построении требуется не только построить фигуру, но и указать метод построения, обосновать, что построенная фигура удовлетворяет заданным условиям, т. е. необходимо доказать это.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

По этой причине при решении задач на построение требуется найти способ и правила построения фигуры и обосновать их.

23.2. Основные задачи на построение

Построение угла, равного данному

Построение. Дан угол A. От луча O *(рис. 3)* отложим угол, равный углу A.

1-й шаг. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Пусть эта окружность пересечёт стороны угла A в точках B и C *(рис. 3–4)*.

2-й шаг. Из точки O как из центра радиусом, равным радиусу построенной окружности, начертим окружность *(рис. 4)*. Точку пересечения этой окружности с лучом O обозначим через D.

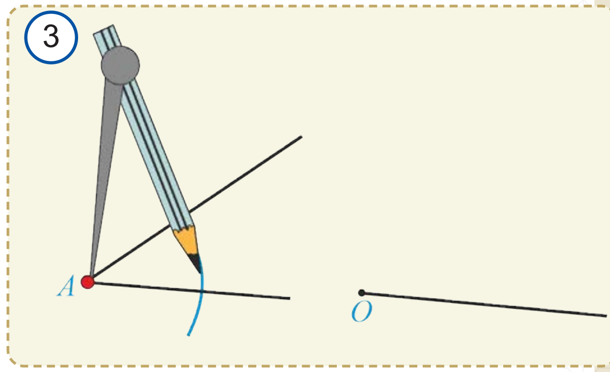
3-й шаг. Из точки D как из центра радиусом BC начертим третью окружность *(рис. 5)*. Одну из точек её пересечения со второй окружностью, лежащую, например, в верхней полуплоскости, обозначим E *(рис. 6)*.

4-й шаг. Проведём луч OE *(рис. 6)*. Полученный угол EOD отложен от луча O и равен данному углу A.

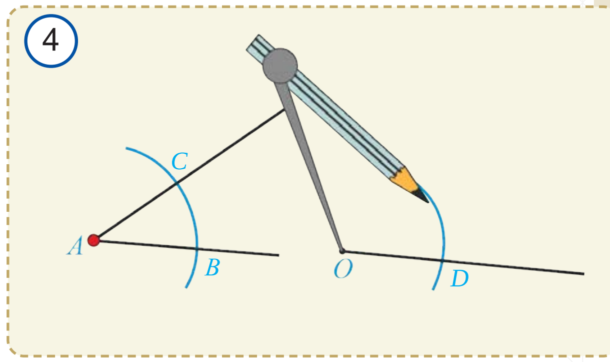
Обоснование. Из построения углов ABC и ODE, изображённых на рисунке 7, имеем: $AB=OD$, $AC=OE$ и $BC=DE$.

Следовательно, по признаку ССС равенства треугольников имеем:
$\Delta ABC=\Delta ODE$. В частности, $\angle DOE=\angle A$.

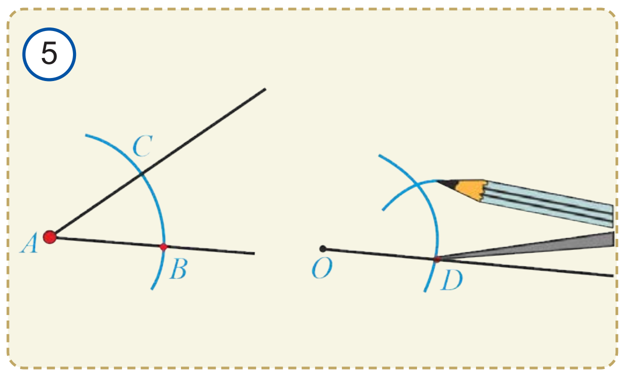
Примечание: *Эта задача имеет два решения в зависимости от того, в какой полуплоскости от прямой, содержащей луч O, выбрана точка.*



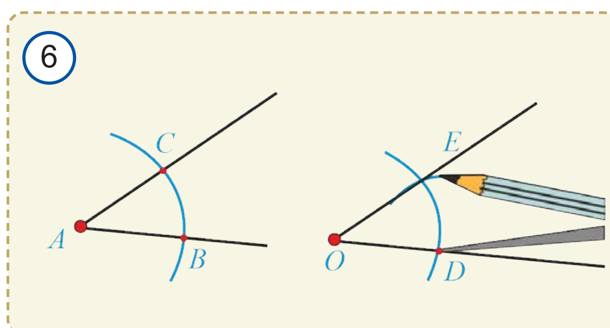
3



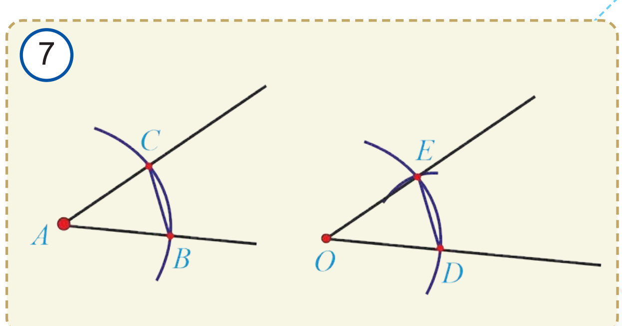
4



5



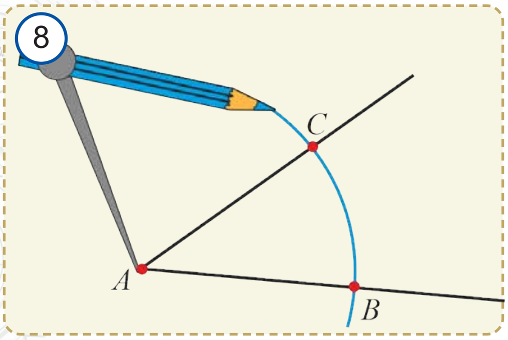
6

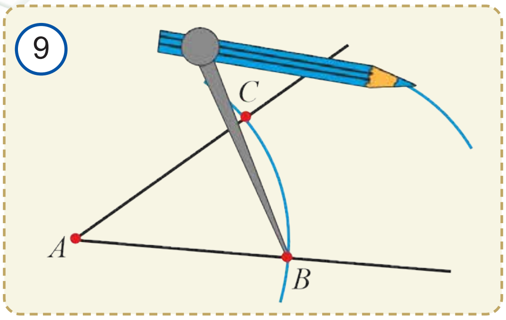


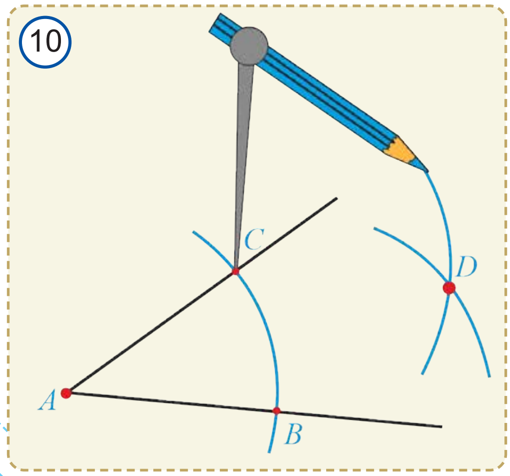
7

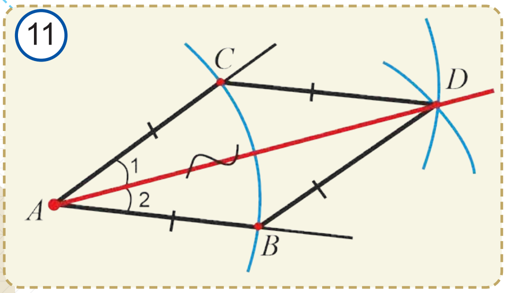
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

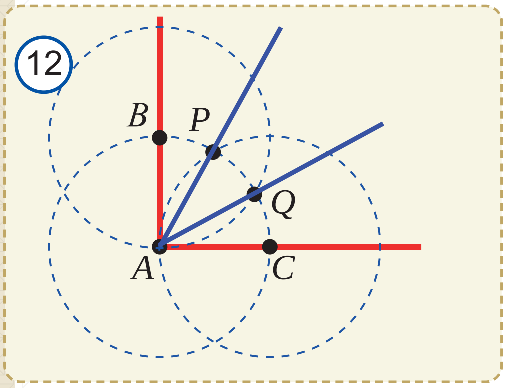
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE











2. Построение биссектрисы угла

Пусть задан угол A. Чтобы разделить угол на две равные части, т. е. построить биссектрису угла, предлагается следующий способ:

Построение.

1-й шаг. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в точке A (рис. 8) и точки пересечения окружности со сторонами угла обозначим через B и C.

2-й шаг. Построим, не меняя радиуса, две окружности с центрами в точках B и C. Точку пересечения этих окружностей обозначим через D *(рис. 10)*.

3-й шаг. Через точки A и D проведём луч AD *(рис. 11)*.

Луч AD – биссектриса данного угла.

Обоснование. В треугольниках ABD и ACD *(рис. 11)*

1) $AB = AC$ – по построению;

2) $BD = CD$ – по построению;

3) AD – общая сторона.

По признаку ССС равенства треугольников, $\Delta ABD = \Delta ACD$. В частности, $\angle BAD = \angle CAD$.

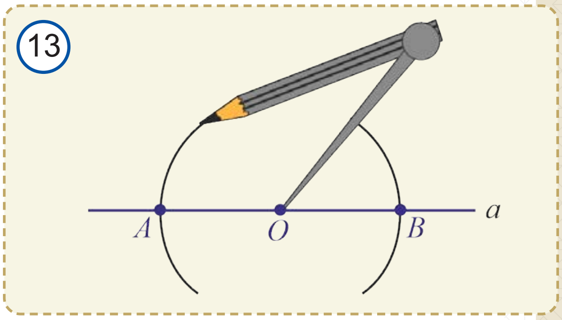
Задача. Разделить данный прямой угол на три равные части.

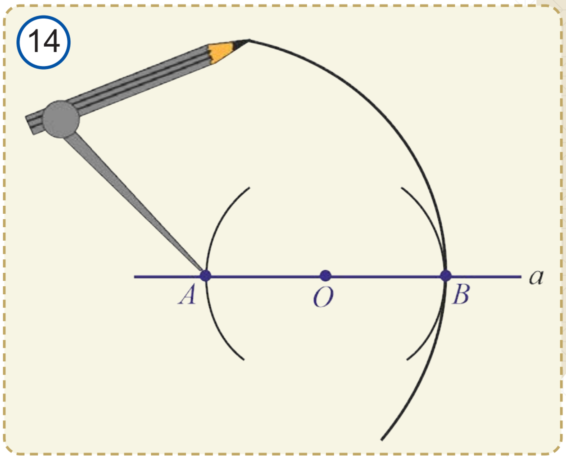
Решение. Пусть дан прямой угол $\angle A$. Начертим окружность произвольного радиуса с центром в его вершине *(рис. 12)*. Пусть окружность пересекает стороны прямого угла в точках B и C. Не меняя радиуса, начертим две окружности с центрами в точках B и C. Точки пересечения этих окружностей с первой окружностью, лежащие во внутренней области прямого угла, обозначим через P и Q. Проведём лучи AP и AQ. Эти лучи разделят данный прямой угол на три равных угла. Самостоятельно обоснуйте это построение.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Примечание. *Задача деления данного угла на три равных угла (трисекция угла) с помощью простой линейки и циркуля была одной из знаменитых задач древности, над решением которой ломали головы многие учёные. Только в XIX веке было доказано, что произвольно выбранный угол нельзя разделить на три равных угла. Таков, например, угол 60°. Для точного решения задачи трисекции угла нужно применить другие инструменты.*





3. Построение прямой, перпендикулярной к данной прямой

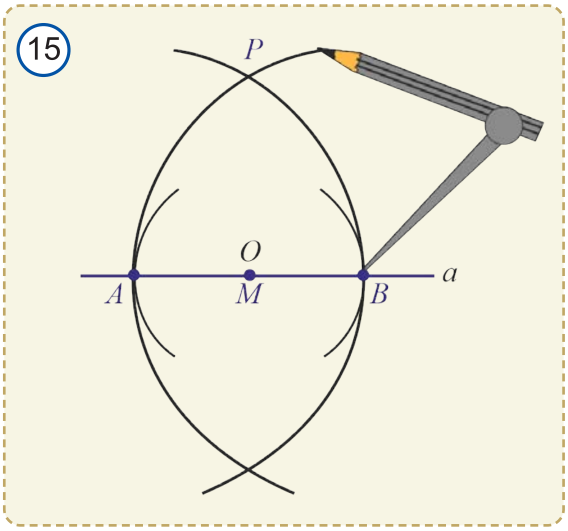
Построить перпендикуляр к данной прямой a, проходящий через её точку O.

Построение.

1-й шаг. Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке O. Пусть она пересекает данную прямую в точках A и B *(рис. 13)*.

2-й шаг. Из точек A и B как из центров проведём окружности с радиусом AB *(рис. 14-15)*. Одну из точек пересечения этих окружностей обозначим через P.

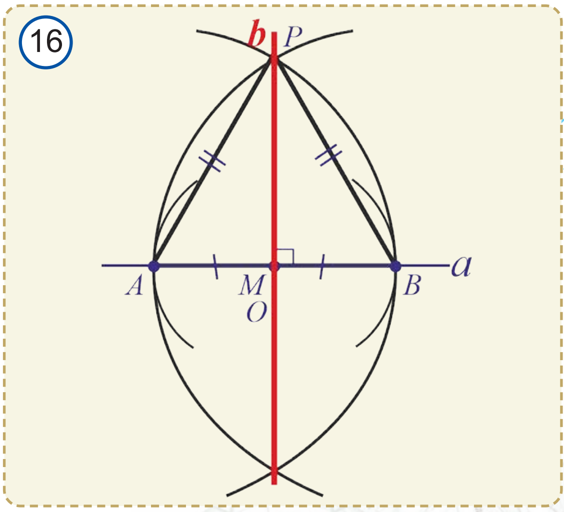
3-й шаг. Построим прямую OP *(рис. 15–16)*.



Прямая OP будет прямой, перпендикулярной прямой a и проходящей через её точку O.

Обоснование. Рассмотрим треугольники AOP и BOP. Для них, по построению:

1) $AO = BO$;
2) $AP = BP$;
3) PO – общая сторона.



Значит, по признаку ССС равенства треугольников: $\Delta AOP = \Delta BOP$. В этом случае, $\angle AOP = \angle BOP$.

Но $\angle AOP + \angle BOP = 180°$.

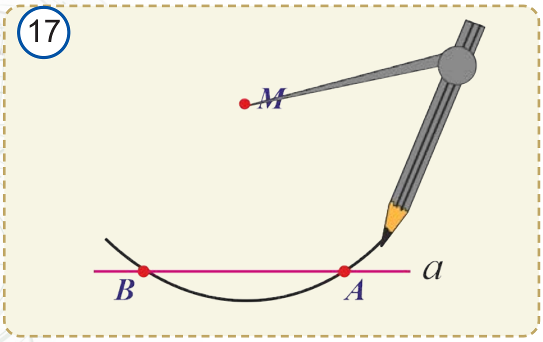
Отсюда следует, что

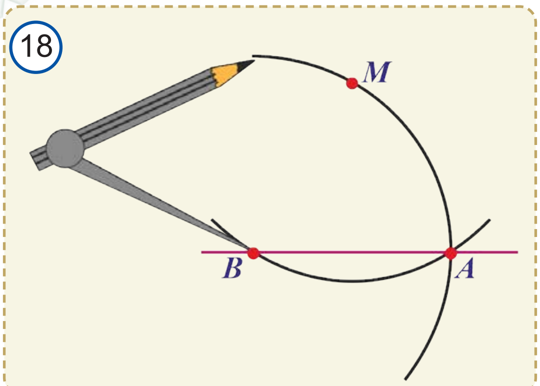
$\angle AOP = \angle BOP = 90°$.

Итак, действительно, $OP \perp a$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE





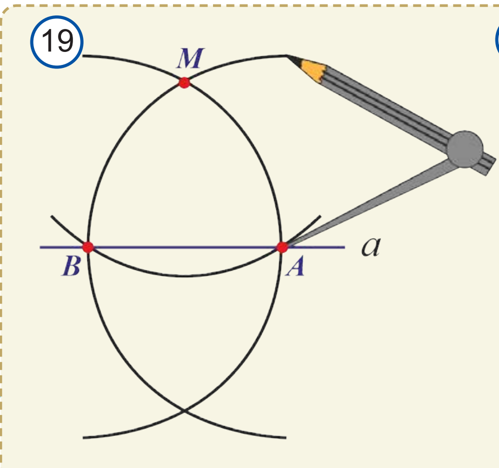
4. К данной прямой через точку, не лежащую на ней, провести прямую, перпендикулярную данной

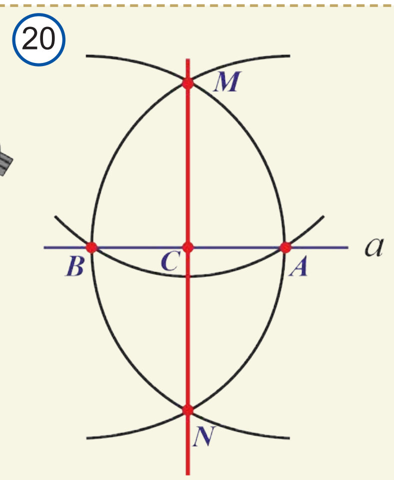
Построим прямую, перпендикулярную данной прямой a и проходящую через точку M, не лежащую на прямой a.

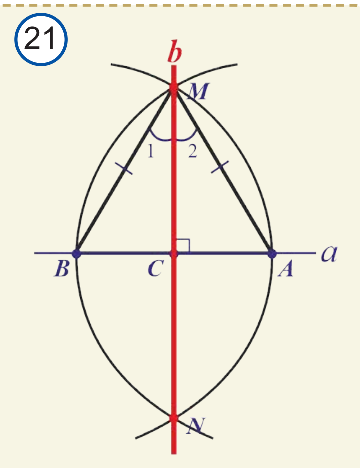
Построение.

1-й шаг. Построим окружность произвольного радиуса с центром в точке M. Пусть она пересечёт данную прямую в точках A и B *(рис. 17)*.

2-й шаг. Из точек A и B как из центров построим две окружности с радиусами, равными радиусу первой окружности *(рис. 18-19)*. Обозначим одну из точек пересечения этих двух окружностей через M, вторую через N *(рис. 20)*.







3-й шаг. Построим прямую, проходящую через точки M и N. Прямая MN перпендикулярна данной прямой a и проходит через точку M, не лежащую на данной прямой.

Обоснование проведите самостоятельно по рисунку 21.

Из решения этой задачи следует, что через точку, не лежащую на данной прямой a, можно провести прямую, перпендикулярную к прямой a.

Теорема. **Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.**

Это теорема была приведена на странице 57.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5. Деление данного отрезка на два равных отрезка

Построение. Пусть дан отрезок AB. Для нахождения середины этого отрезка проводим следующее построение:

1-й шаг. Начертим две окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB *(рис. 23)*.

2-й шаг. Соединим точки пересечения окружностей P и D *(рис. 24)*. Точка пересечения O прямой PD и отрезка AB будет серединой данного отрезка.

Самостоятельно докажите, что точка O действительно середина отрезка AB.

6. Построение серединного перпендикуляра данного отрезка

Построение. Пусть дан отрезок AB. Построим окружности с центрами в точках A и B и радиуса AB *(рис. 24)*. Эти окружности пересекаются в точках P и D и по построению:

$AP=AD=BP=BD$.

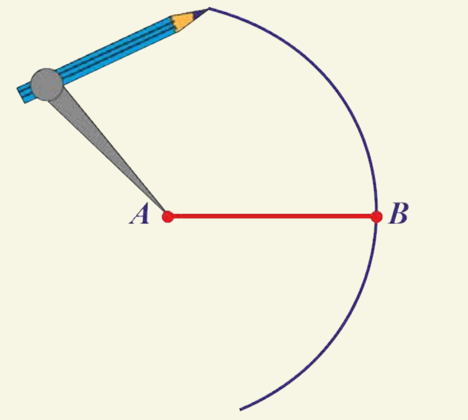
Проведём прямую PD.

Эта прямая является серединным перпендикуляром отрезка AB.

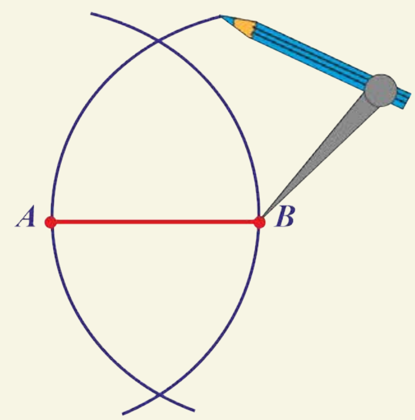
Обоснование. Действительно, так как точки P и D расположены на равных расстояниях от концов отрезка AB, то эти точки лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Следовательно, прямая, проходящая через эти точки, является серединным перпендикуляром данного отрезка.

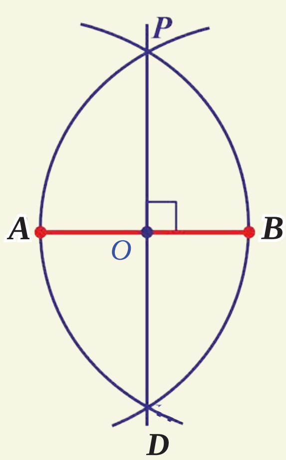
22



23



24



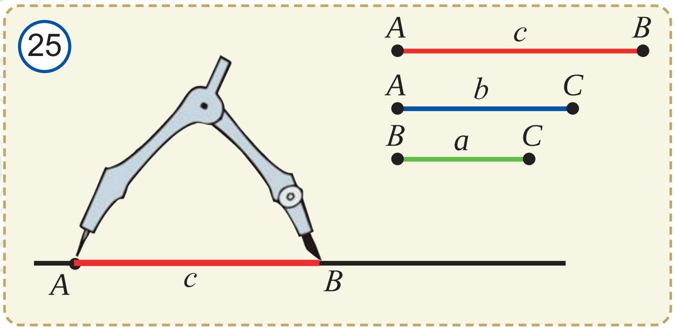
Геометрическая головоломка

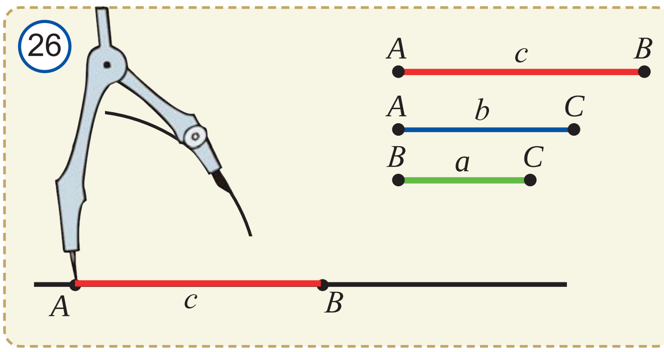
После того, как Сардор построил окружность, он заметил, что забыл отметить карандашом её центр. Как назло, в тетради не осталось и следа от циркуля. Но он помнил, что радиус окружности равнялся 12 *cm*. Можно ли найти центр окружности, построенной с помощью циркуля, если известен только её радиус?

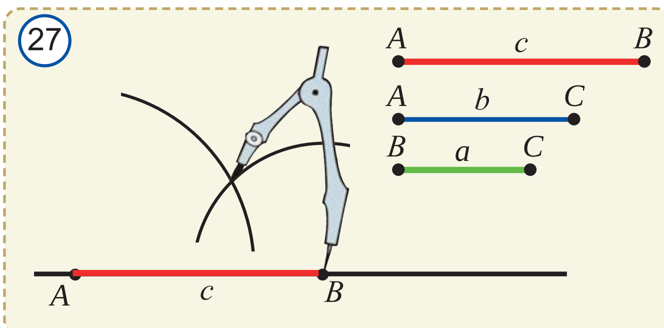
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

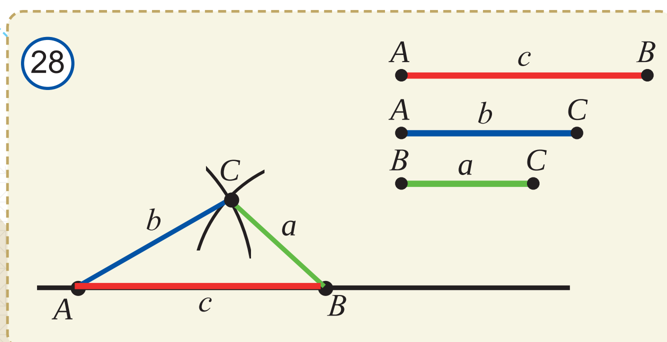
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

7. Построение треугольника по трём сторонам









Пусть даны три отрезка с длинами, соответственно равными a, b и c, и пусть c наибольшая сторона (*рис. 25*). Для того чтобы построить треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $AC=b$, выберем следующий путь:

1-й шаг. Начертим произвольную прямую. На прямой циркулем отложим отрезок AB, длина которого равна c (*рис. 25*).

2-й шаг. Построим окружность с центром в точке A и радиусом b, так как расстояние между точками A и C должно равняться b (*рис. 26*).

3-й шаг. Построим окружность с центром в точке B и радиусом a, так как расстояние между точками B и C должно равняться a (*рис. 27*).

4-й шаг. Точку пересечения C окружностей соединим с точками A и B (*рис. 28*). По построению: $AC = b$ и $BC = a$. Тогда стороны построенного треугольника ABC равны a, b и c.

Анализ. Из построения видно, что если окружности, построенные на 2-м и 3-м шагах, пересекутся, то решение существует. Для этого нужно, чтобы $a + b > c$.

Примечание. *Пользуясь этим способом, можно построить треугольник, равный данному. В этом случае длины отрезков а, b и c определяются с помощью циркуля, концы которого прикладываются к соответствующим вершинам данного треугольника.*

Точно так же, при помощи этого метода, можно построить угол, равный углу из пункта 1. Для этого, выбрав на сторонах угла A соответствующие точки B и C, получают треугольник ABC. Затем, по приведённому выше методу, строят треугольник, равный этому. Так как треугольники равны, то равны их соответствующие углы.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

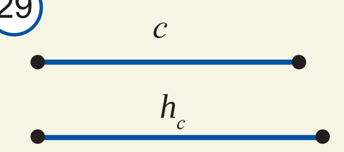
23.3. Решение более сложных задач на построение

Процесс решения задач на построение состоит из *анализа, построения, обоснования и исследования*.

Ступени решения задач на построение	
1. Анализ	Строится приблизительный чертёж фигуры, которую нужно построить. Обозначают его элементы и расстояния между заданными элементами. Составляют план построения фигуры.
2. Построение	По составленному плану строят геометрическую фигуру.
3. Обоснование	Доказывают, что построенная фигура удовлетворяет всем условиям задачи.
4. Исследование	Уточняют существование решения, число решений или невозможность решения, т. е. то, что такую фигуру построить нельзя.

Если задача достаточно проста, то некоторые ступени выполняются устно. В некоторых случаях исследование задачи достаточно сложное, так как предполагается знание тем 8–9-х классов, поэтому его временно опускаем.

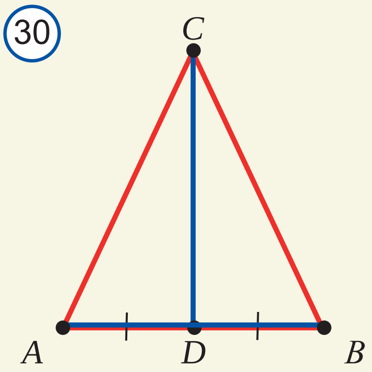
29



Задача. Постройте равнобедренный треугольник по его основанию и высоте, опущенной на основание (*рис. 29*).

Построение. Пусть заданы основание $AB=c$ и высота $CD=h_c$ равнобедренного треугольника ABC (*рис. 30*).

30



1. Анализ. Пусть треугольник ABC построен. Так как задано его основание AB, то положение точек A и B определено. Задача будет решена, если найти положение точки C. Известно, что высота CD равнобедренного труугольника падает в середину его основания.

Значит, найдя точку D – середину основания AB, восстановив в этой точке перпендикуляр и отложив на нём от точки D данную высоту, можно найти положение точки C.

2. Построение: *a)* найдём точку D – середину данного отрезка AB; b) проведём прямую, перпендикулярную отрезку AB и проходящую через точку D; c) на перпендикуляре от точки D отложим отрезок DC, равный высоте h_c; d) соединим точку C с точками A и B.

3. Обоснование. Основание и высота построенного треугольника ABC равны заданным отрезкам, кроме того, он равнобедренный, так как его высота перпендикулярна основанию. Следовательно, построенный треугольник является искомым.

4. Анализ. Задача имеет единственное решение, так как через середину отрезка можно провести только один перпендикуляр.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Вопросы к теме

1. Какие работы можно выполнять при решении задач на построение с помощью простой линейки и циркуля?

3. Почему при решении задач на построение необходимо провести обоснование построений?

4. Сколько основных задач на построение вы знаете?

5. Каковы шаги для решения более сложных задач на построение?

Активизирующие упражнения и приложения

1. Даны углы: a) 30°; b) 60°; c) 15°; d)120°; e) 45°. Постройте равные им углы, пользуясь простой линейкой и циркулем.

2. Даны углы: a) 75°; b) 90°; c) 135°. Постройте равные им углы, пользуясь простой линейкой и циркулем.

3. Даны углы: $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ $(\alpha>\beta)$. Постройте углы, равные: a) 2α; b) $\alpha-\beta$; c) $2\alpha+\beta$.

4. Даны углы 45° и 30°. Постройте углы, равные a) 15°; b) 75°; c) 105°; d) 120°.

5. Начертите угол и разделите его на четыре равных угла.

6. С помощью простой линейки и циркуля разделите пополам углы: a) 90°; b) 60°; c)30°.

7. Угол 45° разделите на три равных угла.

8*. Дан угол 36°. Постройте с помощью простой линейки и циркуля угол 99°.

9*. Дан угол 54°. Разделите с помощью простой линейки и циркуля этот угол на три равных угла

10. Какой способ деления отрезка пополам вы знаете? Начертите отрезок и разделите его на два равных отрезка.

11. На прямой даны точки A и B. На луче BA, начиная от точки B, отложите такой отрезок BC, чтобы $BC=2AB$.

12. Даны точки A и B. Пользуясь только циркулем, постройте точку C такую, чтобы $AC=3AB$.

13. Даны отрезки с длинами a и b $(a>b)$. Постройте отрезки с длинами: a) $a+b$; b) $a-b$.

14. Даны отрезки с длинами 12 cm и 5 cm. Постройте отрезки с длинами: a) 17 cm; b) 7 cm; c) 12 cm; d) 22 cm; e) 29 cm.

15*. Найдите точку, равноудалённую от точек A и B и лежащую на прямой a.

16. Пользуясь только линейкой, проведите через точку M, не лежащую на прямой a, прямую b, параллельную прямой a.

17. Разделите данный отрезок на четыре равных отрезка.

18. Постройте треугольник ABC по следующим данным: a) $AB=3$; $BC=5$; $\angle B=45°$; b) $AB=9$; $BC=5$; $AC=12$; c) $AB=22$; $\angle A=30°$; $\angle B=56°$.

19. Постройте треугольник ABC по следующим данным: a) $AB=7$; $BC=3$; $\angle B=38°$; b) $AB=3$; $BC=8$; $AC=6$; c) $AB=9$; $\angle A=90°$; $\angle B=50°$.

20. Постройте треугольник со сторонами: $a=3$ cm, $b=8$ cm и $c=9$ cm.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

21. a) Можно ли построить треугольник со сторонами: a = 3 cm, b = 4 cm и c = 7 cm?
b) Какому условию должны удовлетворять стороны a, b и c треугольника?

22. Постройте прямоугольный треугольник по большей стороне и острому углу.

23. Начертите треугольник. Постройте его высоты.

24. Постройте медианы заданного треугольника.

25. Как можно построить прямой угол?

26. Постройте прямую, параллельную данной прямой.

27. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и высоте, опущенной на неё.

28*. Постройте треугольник по двум сторонам и углу между ними.

29*. Постройте квадрат по заданной стороне.

30*. Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.

31*. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

32*. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, опущенной на эту сторону.

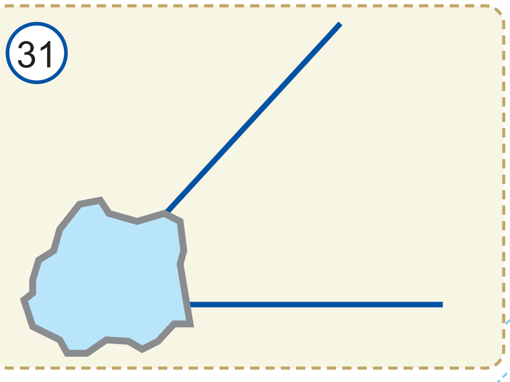
33*. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

34*. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон.

Геометрическая головоломка

В рукописи отца Шохджахон нашёл чертёж, изображённый на рисунке 31. К сожалению, на этом рисунке была большая чернильная клякса. Сумеет ли Шохджахон начертить биссектрису этого угла?

31



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

24 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

1. Тесты.

1. Для каких значений длин отрезков a , b и c, приведённых ниже, нельзя построить треугольник, имеющий эти отрезки своими сторонами?

A) $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ B) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$
C) $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ D) $a = 6$, $b = 4$, $c = 3$

2. Какими инструментами можно пользоваться при решении задач на построение?

A) Транспортир B) Транспортир, линейка

C) Циркуль, линейка D) Циркуль, транспортир

3. Какие задачи можно решать с помощью линейки при выполнении геометрических построений?

A) Измерять отрезки B) Чертить отрезки, прямые

C) Приближенно строить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой

D) Находить середину отрезка измерением его длины

2. Задачи.

1. Даны отрезки с длинами a и b $(a>b)$. Постройте отрезки с длинами: a) $2a + 3b$; b) $2a – b$.

2. Разделите заданный отрезок пополам, выполняя все построения только в одной полуплоскости.

3. Разделите заданный отрезок пополам, пользуясь только угольником.

4. Можно ли построить срединный перпендикуляр к отрезку AB, если невозможно точно определить его середину?

5. Даны углы: $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$, $(\alpha>\beta)$. Постройте углы, равные: a) 3α; b) $\alpha+2\beta$; c) $3\alpha+\beta$.

6. С помощью простой линейки и циркуля разделите пополам углы: a) 124°; b) 68°; c) 46.

7. Найдите радиус окружности, если расстояние до ближайшей точки окружности равно 2 cm, а до наиболее удалённой ее точки 10 cm.

8. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по данной гипотенузе .

9*. Даны отрезки с длинами $a+b$, $b+c$ и $a+c$. Постройте треугольник со сторонами a, b, c.

10*. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам.

11. Даны прямая a и треугольник. Постройте треугольник, равный данному, сторона которого лежит на прямой a.

12. Начертите прямую и отметьте точку, не лежащую на ней. Постройте перпендикуляр к этой прямой, проходящий через эту точку.

13. Начертите прямую и отметьте точку, не лежащую на ней. Постройте прямую, проходящую через эту точку, параллельнно данной прямой.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Образец контрольной работы 6

Образец контрольной работы состоит из двух частей:

1. 5 теоретических тестов.

2. Три задачи, подобные приведённым ниже (задача 4 для желающих получить оценку «отлично»).

1. Постройте угол, равный данному углу в 120°, с помощью циркуля и линейки.

2. Постройте треугольник со сторонами: a= 5 cm, b = 6 cm и c= 7 cm.

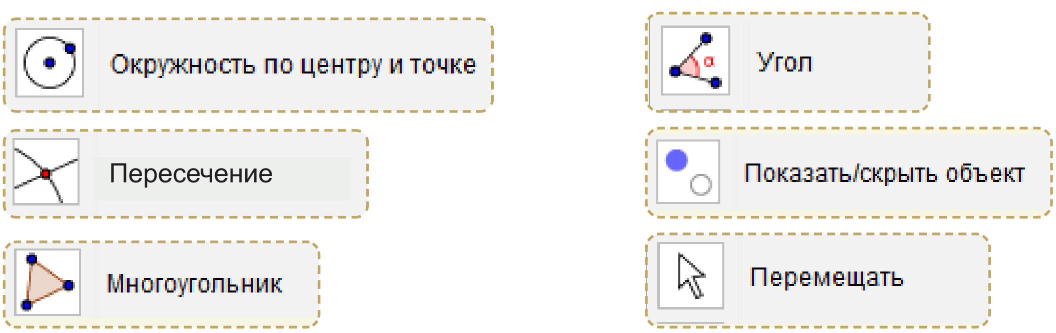
3. Проведите медиану угла a, построенного в задаче 2 треугольника.

4. Постройте треугольник по основанию, одной стороне и высоте, проведённой к основанию.

Выполнение практического задания в GeoGebra

1. Построение правильного треугольника

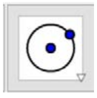
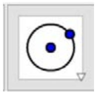
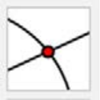
Для построения правильного треугольника нужны следующие инструменты.



Необходимые компненты:

- ***Откройте новое окно в GeoGebra***.
- Приведите интерфейс **«Настройки»** ***GeoGebra*** к виду  **«Геометрия»**.
- **Поменяйте параметры для новой точки.**

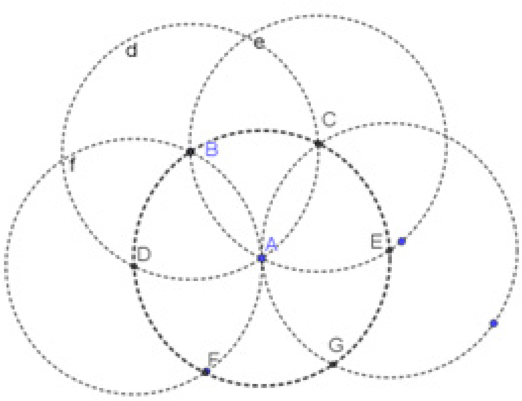
Алгоритм построения правильного треугольника

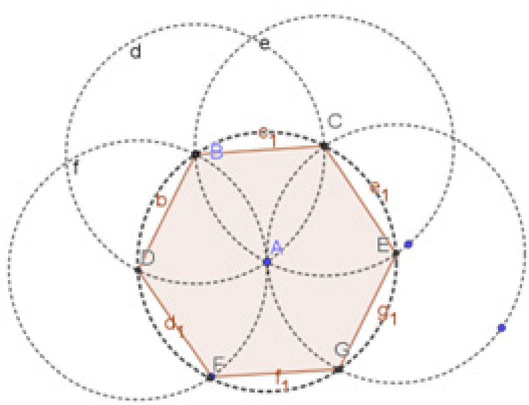
1		Начертите окружность c с центром в точке A и проходящую через точку B.
2		Начертите новую окружность d с центром в точке B и проходящую через точку A.
3		Обозначьте точки пересечения окружностей c и d как вершины C и D правильного шестиугольника.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4		Начертите новую окружность e с центром в точке C и проходящую через точку A.
5		Обозначьте точку пересечения окружностей e и c как вершину E правильного шестиугольника.
6		Начертите новую окружность f с центром в точке D и проходящую через точку A.
7		Обозначьте точку пересечения окружностей f и c как вершину F правильного шестиугольника.
8		Начертите новую окружность g с центром в точке E и проходящую через точку A.
9		Обозначьте точку пересечения окружностей g и c как вершину G правильного шестиугольника.
10		Постройте правильный шестиугольник $FGECBD$.
11		Скройте окружности.
12		Покажите внутренние углы шестиугольника.
13		Проверьте, что шестиугольник построен правильно.





Задание. Попробуйте объяснить процесс построения шестиугольника.

Каким должен быть радиус окружности и почему? Разъясните свой ответ.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

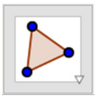
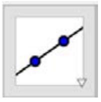
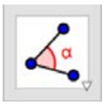
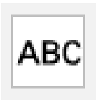
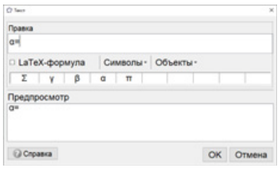
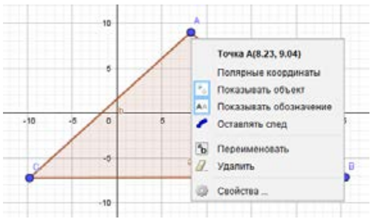
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

2. Визуализация геометрических понятий и данных

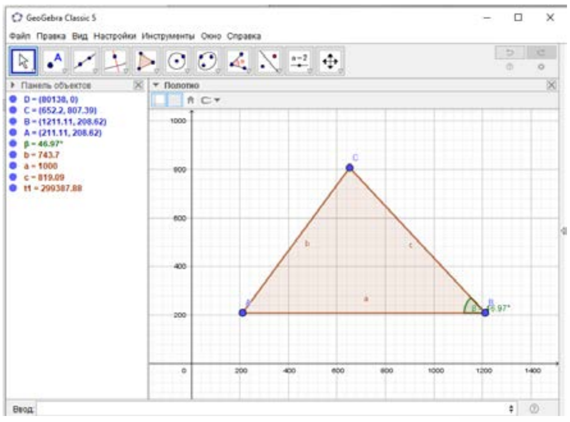
Задание 1

Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, углов.

Визуалируем теорему с помощью ***GeoGebra***. Последовательно выполните следующие действия.

	Постройте треугольник ABC.
	Проведите луч AB.
	Обозначьте внутренние углы треугольника A и C, а внешний угол B.
	$\beta=\alpha+\gamma$ – составьте текст, определяющий сумму двух внутренних углов треугольника. Например, выберите из раздела β = **«Объекты»** α и γ. 
	Измените цвет и вид углов треугольника и их названий. Нажав на объект правой кнопкой мыши, выберите команду «**Свойства**».

В результате получится следующий динамичный чертёж. Здесь можно менять форму треугольника, но при этом внешний угол B всегда будет равен сумме внутренних углов A и C.



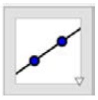
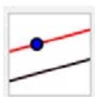
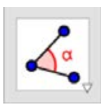
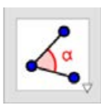
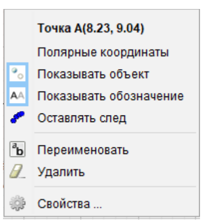
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

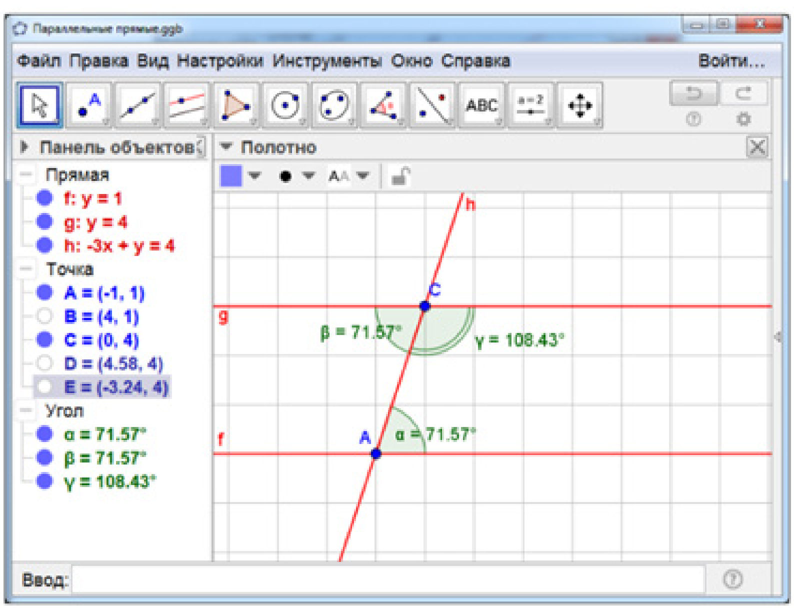
Задание 2

Теорема. Сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных и секущей, равна 180º.

Визуалируем теорему с помощью ***GeoGebra***. Последовательно выполните следующие действия.

	Проведите прямую AB.
	Выберите точку C и проведите через неё прямую, параллельную прямой AB.
	Проведите прямую h, пересекающую прямые в точках A и C.
	Отметьте внутренние односторонние и смежные им углы.
	Измените цвет и вид прямых и углов. Нажав правой кнопкой мыши на объект, выберите команду «**Свойства»**.

В результате получится динамичный чертёж следующего вида. Здесь можно поменять секущую и параллельные прямые, однако каждый раз сумма односторонних углов, полученных при пересечении параллельных прямых секущей, будет равна 180º.



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Глава VI

ПОВТОРЕНИЕ

После изучения этой главы вы должны обладать следующими знаниями и практическими навыками:

Знания:

– ступени решения геометрической задачи;
– виды геометрических задач;
– типичные ошибки, встречающиеся при решении задач.

Практические навыки:

– разделять задачи на виды и организовывать работу в соответствии со ступенями решения задачи;
– предотвращать ошибки, встречающиеся при решении задач;
– быть готовыми к завершающей годовой контрольной работе по планиметрии.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

25 ЗАДАЧИ НА ПОВТОРЕНИЕ

25.1. Ступени решения геометрических задач

При решении геометрических задач следует обратить внимание на следующее:

1) Хорошо знать и помнить основные понятия геометрии и их свойства;

2) Владеть методами доказательства теорем о свойствах различных геометрических фигур;

3) Понимать смысл данной геометрической задачи;

Обычно процесс решения геометрической задачи складывается из следующих ступеней:

1-я ступень. Понять задачу. На этой ступени разделяют содержание задачи на условие и заключение. Что дано, что надо найти, доказать или построить. Строится чертёж, соответствующий задаче. Целесообразно построение большого и точного чертежа. Все данные наносятся на чертёж.

2-я ступень. Планирование. На этой ступени выбирается метод решения задачи. Определяется, какие дополнительные сведения необходимы для его применения. Выполняются вспомогательные построения.

3-я ступень. Решение. На этой ступени задача непосредственно решается на основе данного плана.

4-я ступень. Проверка. На этой ступени проверяется найденное решение задачи. Критически анализируется процесс решения задачи. Если обнаруживается ошибка, то она исправляется. Если нет возможности исправления, возвращаются к начальной ступени решения задачи и вся работа выполняется заново.

Для того чтобы научиться решать задачи, надо побольше их решать. Начертить правильный чертёж к задаче – это значит наполовину решить задачу.

В зависимости от постановки и содержания, геометрические задачи можно разделить на три категории:

1) задачи на вычисление;
2) задачи на доказательство;
3) задачи на построение.

Конечно, решение геометрической задачи состоит не только в применении какого-либо свойства геометрической фигуры. Оно требует серьёзных и логически обоснованных размышлений и принятия на их основе правильных и разумных решений, формирует навыки и умения делать правильные выводы. Такие навыки и умения необходимы не только для математики, но и для преодоления проблем повседневной жизни. Разумеется, решение задач – это не только нахождение правильного ответа. Необходимо использовать известные свойства, теоремы и их следствия, знать, как использовать различные методы решения.

Продемонстрируем, как это делается, на примере.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача. **Доказать, что треугольник с вершинами в серединах сторон равностороннего треугольника также является равносторонним.**

ΔABC – равносторонний, K – середина AB, N – середина BC , L – середина AC ⇒ ΔKNL – равносторонний

1. Ступень понимания задачи.

В соответствии с данными задачи построим чертёж *(рис. 1)*.

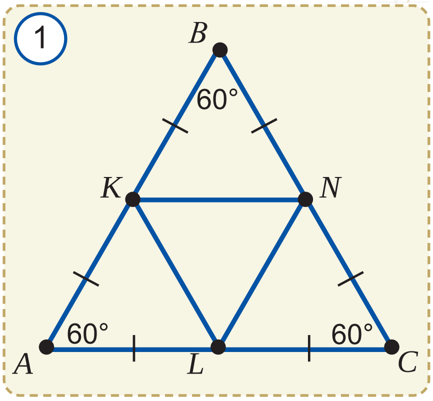
2. Ступень планирования решения. Будем использовать свойства равностороннего треугольника и признак СУС равенства треугольников.

3. Ступень решения. По условию:

$LA=AK=KB=BN=NC=CL$ и $\angle A=\angle B=\angle C=60°$. Тогда стороны AL, AK и угол A ΔLAK равны сторонам BK, BN и углу B ΔKBN, а также сторонам CN, CL и углу C ΔNCL соответственно.

Значит, $\Delta LAK=\Delta KBN=\Delta NCL$ и третьи стороны этих треугольников также равны: $KL=KN=NL$.

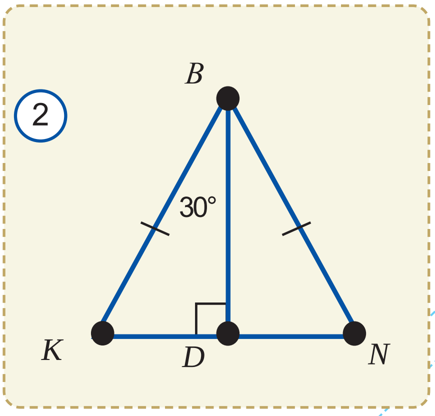
Следовательно, ΔKNL – равносторонний.



4. Ступень проверки.

Просмотрев процесс решения ещё раз, проверяем логическую строгость каждого рассуждения.

Эту задачу можно решить и другим способом. Воспользуемся при этом тем, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°. Опустим высоту BD равностороннего ΔKBN *(рис. 2)*. Так как высота BD является также биссектрисой, то $\angle KBD = 60° : 2 = 30°$ и $\angle BKD = \angle BND = 90° - 30° = 60°$.



Итак, ΔKBN – равносторонний. А отсюда вытекает, что ΔKAL и ΔNCL равносторонние и $BK=KN=NL=LK$. Следовательно ΔKNL также равносторонний, откуда получаем, что $\Delta KNL= \Delta KBN=\Delta NCL = \Delta KAL$.

25.2. Задачи на вычисление

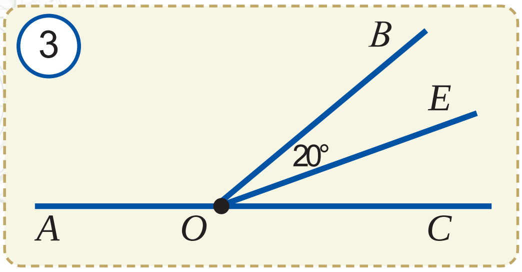
Задачи на вычисления похожи на задачи из арифметики и алгебры. С помощью различных геометрических формул над заданными числовыми величинами выполняют вычислительные работы и находят искомую.

В этих задачах правильный чертёж и нужные обозначения значительно облегчают работу.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача 1. Биссектриса одного из двух смежных углов образует угол 20° с одной из сторон второго угла. Найдите этот угол.



Решение. Построим чертёж, соответствующий условию задачи *(рис. 3)*. Очевидно, что биссектриса OE является биссектрисой острого угла. Значит, $\angle BOC = 2\cdot 20° = 40°$,

$\angle AOB = 180° - 40° = 140°$.

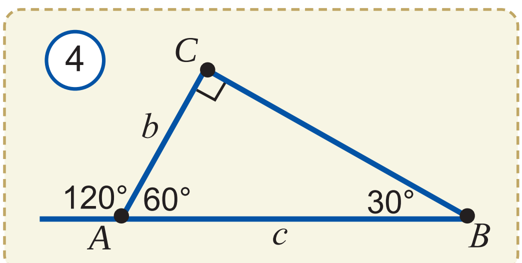
Ответ: 140°.

Задача 2. В треугольнике ABC угол $\angle C$ – прямой, внешний угол при вершине A равен 120°. Найдите гипотенузу треугольника, если $AC+AB= 18$ *см*.

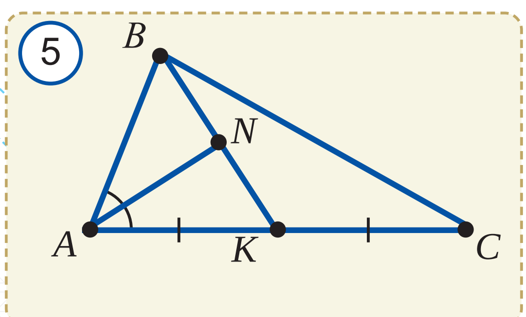
Решение. Построим чертёж в соответствии с условием задачи *(рис. 4)*. По определению внешнего угла треугольника, находим $\angle A=180°-120°=60°$, $\angle B=90°-\angle A=30°$. Пусть $AC=b$, $AB=c$. Тогда $b+c=18$. Так как по свойству прямоугольного треугольника с острым углом 30°, катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы, находим, что $c=2b$. Откуда $b+c=b+2b = 18$, т. е. $b=6$.

Тогда $c=12$

Ответ: 12.



Задача 3. В треугольнике ABC сторона $AB = 1$, биссектриса угла A перпендикулярна медиане, проведённой из вершины B. Найдите периметр треугольника, если длина стороны BC выражается целым числом.



Решение. Отобразим условие задачи на чертеже *(рис. 5)*: $AK = KC$, $AN \perp BK$.

Имеет место равенство $\Delta ANB = \Delta ANK$, так как катет AN – общий и прилежащие к катету углы равны (признак КУ по катету и прилежащему к нему углу).

Откуда $AB=AK=KC=1$, т. е. $AC=1+1=2$.

$BC=x$ – целое число и по неравенству треугольника 2+1>x и x+1>2, т. е. $1<x<3$. Между числами 1 и 3 заключено единственное целое число 2. Значит, $BC=2$ и $P_{ABC}= 1+2+2=5$.

Ответ: 5

25.3. Задачи на доказательство

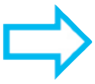
Задачи на доказательство сами по себе являются небольшими теоремами. В них требуется доказать приведённое утверждение. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Задача 1. Докажите, что биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.

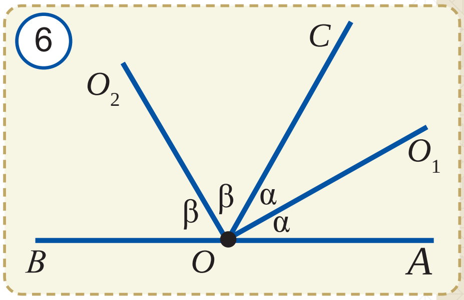
$\angle AOC$ и $\angle BOC$ – смежные углы, OO_1 и OO_2 – биссектрисы *(рис. 6)*



$OO_1 \perp OO_2$.

Доказательство. Обозначим углы, которые биссектрисы OO_1 и OO_2 делят пополам, через α и β *(рис.7)*. Тогда $2\alpha + 2\beta = 180°$, или $\alpha + \beta = 90°$, т. е. $\angle O_1OO_2 = \alpha + \beta = 90°$.

Значит, $OO_1 \perp OO_2$. Что и требовалось доказать.

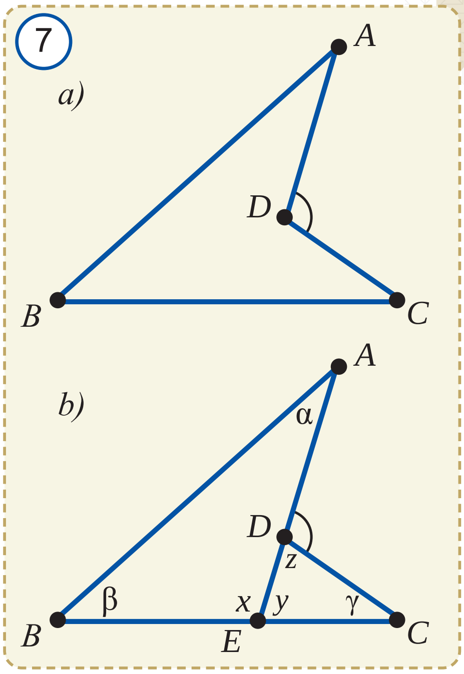


Задача 2. Докажите, что в четырёхугольнике $ABCD$, изображённом на рисунке 7а, $\angle D = \angle A + \angle B + \angle C$.

Доказательство. Продолжим сторону AD и обозначим точку пересечения прямой AD со стороной BC через E. Обозначим углы (рис. 7б). Известно, что $\alpha + \beta + x = 180°$ и $y + z + \gamma = 180°$. Сложив эти равенства, получим: $\alpha + \beta + \gamma + x + y + z = 360°$. По свойству смежных углов $x + y = 180°$, поэтому $\alpha + \beta + \gamma + 180° + z = 360°$ или $\alpha + \beta + \gamma = 180° - z = \angle D$:

$$\angle D = \alpha + \beta + \gamma = \angle A + \angle B + \angle C.$$

Утверждение доказано.



Две вышеприведённые задачи мы решили на основе готовых чертежей, в задаче 2 потребовались дополнительные построения и обозначения, что облегчило решение задачи.

Практические упражнения и приложения

1. Отрезок AB разбит на части отрезками, длины которых относятся как 1:2:3:4 и которые следуют в том же порядке. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между серединами крайних отрезков равно 15 cm.

2. Из вершины угла $\angle ABC = 160°$ проведены лучи BO и BE. Найдите угол OBE, если луч BO делит данный угол пополам, а луч BE делит его в отношении 3:5.

3. Угол AOB разбит лучом OC на два угла, один из которых больше второго на 30°. Найдите угол между биссектрисой данного угла и лучом OC.

4. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°. Найдите угол между высотами, опущенными на боковые стороны этого треугольника.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5. Один из внешних углов треугольника равен 100°, а несмежные с ним углы относятся как 2:3. Найдите углы треугольника.

6. Точки A, B, C, D лежат в указанном порядке на прямой и $AB= BC=$ 1, $CD=$ 2. Точка K расположена на луче BC и делит отрезки BC и AD в одном и том же отношении: BK: $KC= AK$: KD. Найдите это отношение.

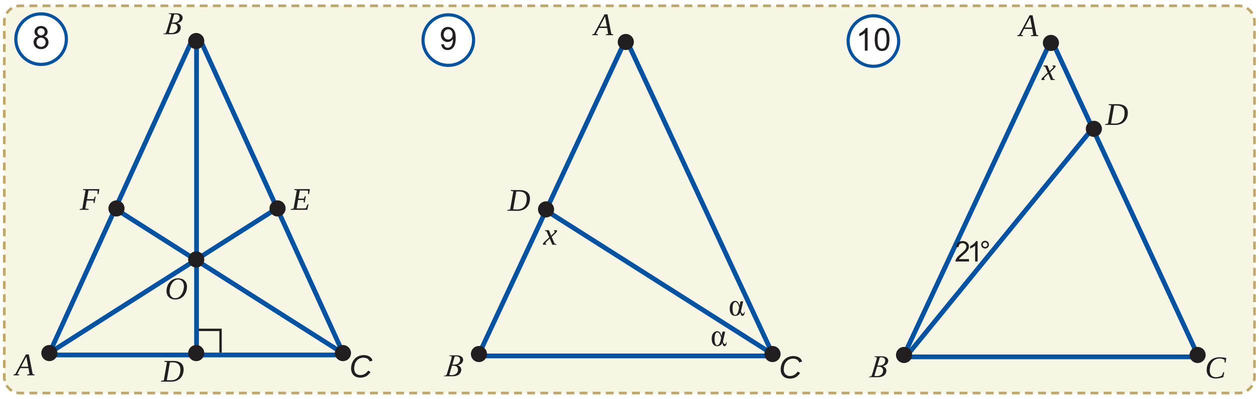
7. Угол, полученный при пересечении двух биссектрис треугольника, равен 128°. Найдите третий угол треугольника.

8. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 96°. Найдите острый угол, под которым пересекаются биссектрисы углов при основании треугольника.

9. В прямоугольном треугольнике биссектриса и высота, исходящие из вершины прямого угла, образуют угол, равный 24°. Найдите остальные углы треугольника.

10. Найдите углы AOB, EOC, если $AB= BC$, $\angle ABC=$ 50°, AE и FC – биссектрисы на рисунке 8.

11. Найдите угол x на рисунке 9, если $AB=AC$, $AD=DC$.



12. Найдите угол x на рисунке 10, если $AB=AC$, $BD=BC$.

13. Один из углов треугольника равен разности двух несмежных с ним внешних углов. Докажите, что этот треугольник – прямоугольный.

14. Докажите, что высоты, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника с углом 150° при вершине, равны.

15. Докажите, что медианы равностороннего треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины.

16. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

17. Сформулируйте теорему, обратную теореме задачи 16, и докажите её.

18. Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.

19*. Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

20*. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены медианы BM и B_1M_1. Докажите, что $\Delta ABC= \Delta A_1B_1C_1$, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $BM=B_1M_1$.

21*. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы AD и A_1D_1. Докажите, что $\Delta ABC= \Delta A_1B_1C_1$, если $AB= A_1B_1$, $BD= B_1D_1$ и $AD= A_1D_1$.

22. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены высоты BH и B_1H_1. Докажите, что $\Delta ABC= \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$ и $BH=B_1H$.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

23*. Докажите, что треугольник, две высоты которого равны, является равнобедренным.

24*. Докажите, что $\alpha+\gamma=\beta+\delta=90°$ на рисунке 11.

25*. Докажите, что $\alpha<\beta<\gamma$ на рисунке 12.

26. Докажите, что биссектрисы накрест лежащих углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей, параллельны.

27. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

28. Для какого треугольника имеют место неравенства $\alpha<\beta+\gamma$, $\beta<\alpha+\gamma$, $\gamma<\alpha+\beta$, если α, β и γ – углы треугольника?

29. Постройте окружность, проходящую через две данные точки. Сколько решений имеет задача?

30. Биссектрисы AA_1 и BB треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол ACB, если: a) $\angle AOB=136°$; b) $\angle AOB=111°$.

31. В кубе, изображённом на рисунке 13, отрезок BD=6. Найдите отрезки BE, DE, AC и угол $\angle BED$.

32. Медиана треугольника ABC, периметр которого равен 42 cm, разбивает его на два треугольника с периметрами 33 cm и 35 cm. Найдите длину медианы.

33. Под каким углом пересекаются биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника?

34. Докажите, что $\angle 1=\angle 2$ на рисунке 14.

35. Какую фигуру представляет собой общая часть лучей MN и NM?

36. Постройте взаимно перпендикулярные диаметры окружности.

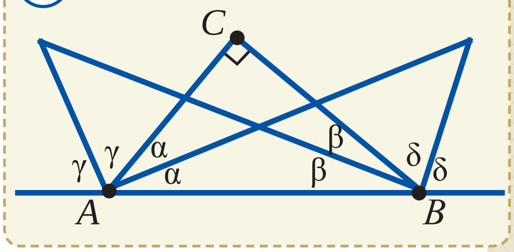
37. Найдите больший из смежных углов, если один из них в 4 раза меньше другого.

38. Отношение величин углов, получившихся при пересечении двух прямых, равно 7:3. Найдите меньший из этих углов.

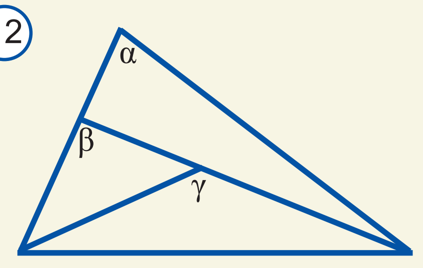
39. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Длина отрезка BC в 3 раза больше длины отрезка AC, длина отрезка AB меньше длины отрезка BC на 3,6 cm. Найдите длину отрезка AC.

40. Пусть при пересечении двух прямых третьей сумма внешних односторонних углов 180°. Докажите, что эти прямые параллельны.

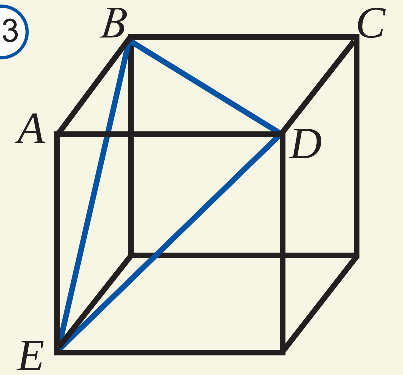
11



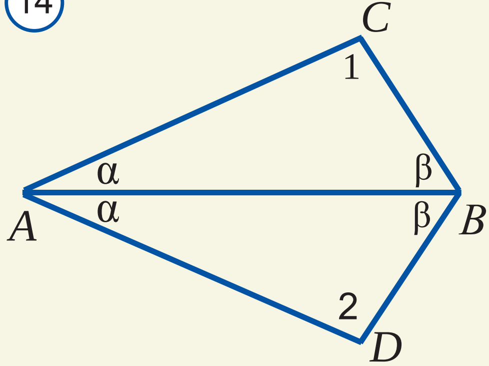
12



13



14



*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

26 ПРАКТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ. ПРОВЕРЬТЕ СВОИ ЗНАНИЯ

1. Геометрический диктант. Заполните пропуски в соответствии со смыслом предложений.

1. На плоскости через ... можно провести одну прямую.
2. ... угла делит угол на два равных угла.
3. Середина отрезка делит его на два ... .
4. На плоскости существуют ... , принадлежащие прямой и ... , не принадлежащие ей.
5. Если треугольник равнобедренный, то углы ... равны.
6. У двух равных треугольников равны соответствующие ... и соответствующие ... .
7. У равностороннего треугольника каждый угол равен ... .
8. ... острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
9. Биссектриса развёрнутого угла делит его на ... .
10. Две прямые, порознь параллельные третьей, ...
11. Две прямые, перпендикулярные одной прямой, ...
12. При пересечении двух параллельных прямых третьей получившиеся внутренние односторонние углы ... .
13. Равноудалённые от концов отрезка ... лежат на серединном перпендикуляре к отрезку.
14. Точки окружности ... на равном расстоянии от её центра.

2. Если в приведённых ниже предложениях имеются ошибки, найдите и исправьте их.

1. На плоскости через две точки можно провести две прямые.
2. Прямой угол равен 180°.
3. Смежные углы равны.
4. Сумма вертикальных углов равна 180°.
5. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны, называется биссектрисой треугольника.
6. Периметром треугольника называется сумма его углов.
7. Сумма сторон треугольника равна 180°.
8. Прямые, пересекающиеся под углом 90°, называются параллельными прямыми.
9. Параллельные прямые пересекаются в одной точке.
10. Диаметр окружности равен радиусу.
11. Если катеты прямоугольного треугольника равны, то один из его углов равен 30°.
12. Каждый угол равнобедренного треугольника равен 60°.
13. Точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от его вершин.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

3. Запишите название геометрической фигуры, имеющей данное свойство, в соответствующую строку справа.

1.	Длина 5 *cm*	
2	Точка и два луча, исходящих из этой точки	
3	Непересекающиеся прямые	
4	Высота, исходящая из вершины, будет также медианой и биссектрисой	
5	Треугольник, все стороны которого равны	
6	Треугольник с двумя равными сторонами	
7	Делит угол на два равных угла	
8	Имеет два катета	
9	Треугольник, у которого сумма двух углов больше 90°	

4. Сопоставьте геометрическому понятию, данному в первом столбце, соответствующее свойство или толкование из второго столбца:

Геометрическое понятие	Толкование, свойство
1. Перпендикулярные прямые	(A) Имеет определённую длину
2. Равносторонний треугольник	(B) Два угла равны
3. Окружность	(C) Равен половине гипотенузы
4. Точка на биссектрисе угла	(D) Соединяет вершину с серединой противолежащей стороны
5. Высота треугольника	(E) Смежный с одним из внутренних углов и равный сумме двух остальных углов
6. Катет против угла в 30°	(F) Не пересекается
7. Медиана	(G)Пересекаются под углом 90°
8. Внешний угол треугольника	(H) Стороны равны
9. Равнобедренный треугольник	(I) Точки равноудалены от центра
10. Отрезок	(J) Лежит на равных расстояниях от его сторон
11. Параллельные прямые	(K) Исходит из вершины и перпендикулярен к одной стороне

5. Тесты.

1. Сколько прямых, параллельных данной прямой, можно провести через данную точку?

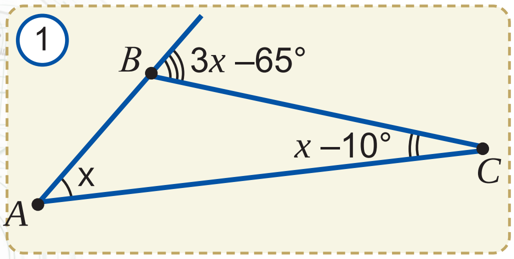
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

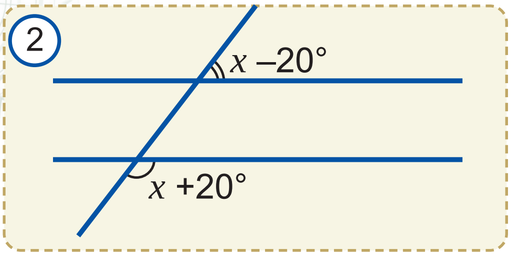
2. Сколько градусов составляет величина развёрнутого угла?

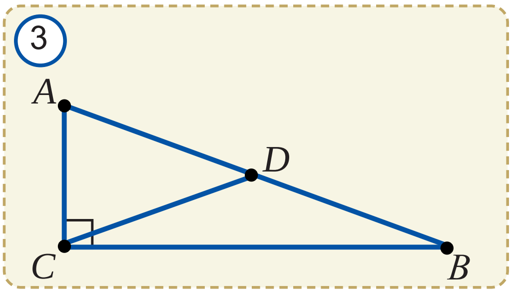
A) 90° B) больше 90° C) меньше 90° D) 180°

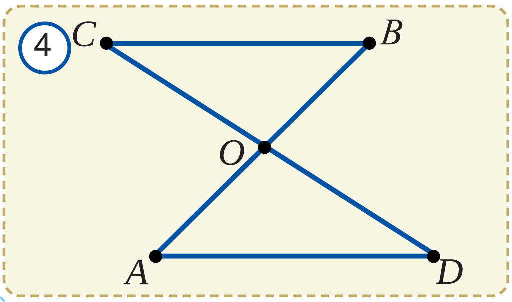
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

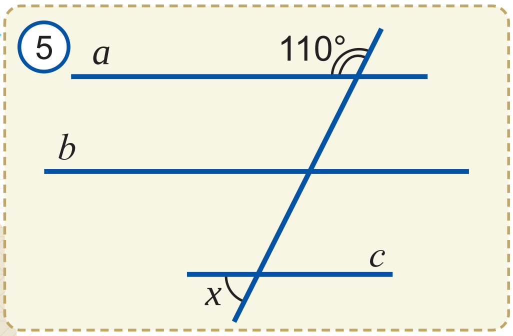
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

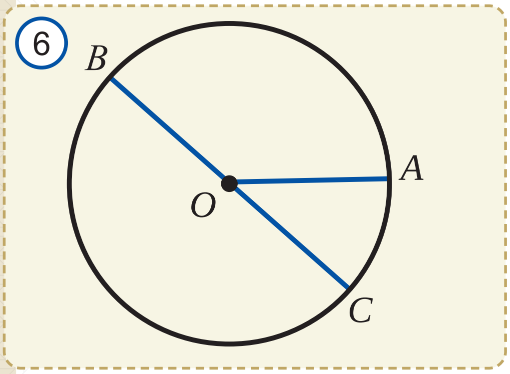












3. Найдите $\angle BCA$ по рисунку 1.

A) 25° B) 35° C) 45° D) 55°

4. Найдите x по рисунку 2.

A) 80° B) 90° C) 100° D) 70°

5. Найдите гипотенузу AB треугольника ABC, если: $\angle B$= 30°, $\angle C$ = 90° и AC = 10 cm.

A) 10 cm B) 12 cm C) 15 cm D) 20 cm

6. Найдите меньшую сторону треугольника ABC, если его периметр равен 23 cm, AB = BC, AB = AC + 7(cm).

A) 3 cm B) 5 cm C) 7 cm D) 9 cm

7. Один из смежных углов больше второго в 3 раза. Найдите разность этих углов.

A) 45° B) 60° C) 75° D) 90°

8. Радиус окружности 3,2 cm. Найдите её диаметр.

A) 3,2 B) 5,2 C) 6,4 D) 1,6

9. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 3) $\angle C$ = 90°, CD – медиана. Найдите $\angle A$, если $\angle BDC$ = 130°.

A) 45° B) 65° C) 75° D) 85°

10. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 80°. Найдите внешний угол при вершине A.

A) 130° B) 120° C) 110° D) 100°

11. Какой из ответов верен, если $a \perp b$, $b \perp c$, $c \perp d$?

A) $a||c$ B) $b \perp d$ C) $a||d$ D) $b||c$

12. Найдите периметр треугольника AOD, если на рисунке 4: $AO = OB$, $OC = OD$, BC = 5 cm и $AO + OC$ = 7 cm.

A) 5 cm B) 7 cm C) 12 cm D) 17 cm

13. На рисунке 5 $a||b$ и $b||c$, x = ?

A) 60° B) 70° C) 80° D) 90°

14. Определите большую сторону треугольника ABC, если $\angle A$= 50° и $\angle B$= 70°.

A) AB B) BC C) AC D) нельзя определить.

15. Найдите длину отрезка BC, если точка O – центр окружности и AO = 4 cm на рисунке 6.

A) 4 cm B) 5 cm C) 2 cm D) 8 cm

16. Найдите меньший угол треугольника, изображённого на рисунке 7.

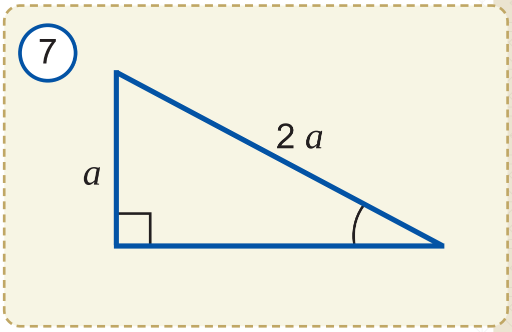
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

A) 30° B) 45° C) 60° D) 90°

17. Одна из высот треугольника разбивает его на треугольники с периметрами 25 cm и 29 cm. Найдите эту высоту, если периметр треугольника 40 cm.

A) 10 cm B) 7 cm C) 5 cm D) 9 cm



18. Найти сумму углов, смежных с углом 120°.

A) 30° B) 45° C) 180° D) 120°

19. Найдите угол между биссектрисами углов A и B треугольника ABC, если угол C равен 70°.

A) 55° B) 60° C) 65° D) 75°.

20. Биссектрисы углов A и D прямоугольника $ABCD$ разбивают сторону BC на 3 равные части. Найдите периметр прямоугольника, если длины его сторон – целые числа и AB = 5.

A) 20 B) 30; C) 40 D) 80.

6. Задачи

1. Биссектриса равнобедренного треугольника ABC, проведённая к основанию AB, разбивает его на два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

2. Одна сторона треугольника с периметром 30 cm больше второй стороны на 2 cm, но меньше третьей стороны на 2 cm. Найдите большую сторону.

3. Медиана, проведённая к основанию треугольника, разбивает его на два треугольника с периметрами 18 cm и 24 cm. Меньшая из боковых сторон данного треугольника равна 6 cm. Найдите большую боковую сторону.

4. Высота треугольника, равная 5, разбивает его на два треугольника с периметрами 18 и 26. Найдите периметр данного треугольника.

5. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,6 cm, основание равно 2 cm. Найдите боковую сторону.

6. Прямые AB и CD пересекаются в точке O. Сумма углов BOC и AOD равна 194°. Найдите угол AOC.

7. В треугольнике ABC угол A равен углу C, высота AD делит сторону BC пополам. Найдите AC, если BD = 7,8 cm.

8. Угол между высотами, опущенными на боковые стороны равнобедренного треугольника, равен 20°. Найдите угол при основании треугольника.

9. Из точки D, лежащей на биссектрисе угла B, на стороны угла опущены перпендикуляры DA и DC. Докажите, что $DA = DC$.

10. Найдите длину отрезка AB, если для точек A, B и C, лежащих на прямой AB, AC = 7 m и BC = 9 m.

11. Один из смежных углов на 18° меньше второго. Найдите эти углы.

12. Один из углов, получившийся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равен 55°. Найдите остальные углы.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

13. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Будет ли точка B принадлежать отрезку AC, если AB = 2 cm, BC = 3 cm и AC=5 cm. Обоснуйте свой ответ.

14. Точка A лежит между точками B и C прямой BC. Найдите длину отрезка AB, если BC = 15 cm, а отрезок AC на 3 cm меньше отрезка AB.

15. Найдите больший из смежных углов, если один из них в 5 раз меньше другого.

16. Отношение величин углов, получившихся при пересечении двух прямых, равно 5 : 4. Найдите меньший из этих углов.

17. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Длина отрезка BC в 2 раза меньше длины отрезка AC, а длина отрезка AB на 5,3 cm больше длины отрезка BC. Найдите длину отрезка AC.

18. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 42°. Найдите острый угол, под которым пересекаются биссектрисы углов при основании треугольника.

19. Один из углов, получившийся при пересечении двух параллельных прямых третьей, равен 109°. Найдите остальные углы.

7. Сложные задачи

1. Расстояние от Земли до Солнца приблизительно 149 500 000 *km*, а расстояние от Земли до Луны 400 000 *km*. Найдите расстояние от Солнца до Луны: a) во время лунного затмения; b) во время солнечного затмения.

2. Точка C – середина отрезка AB. Найдите на отрезке AB такую точку D, чтобы выполнялось равенство: $DA= 1,5\ (DB + DC)$.

3. Один из смежных углов в 4 раза больше их разности. Найдите эти углы.

4. Точка D лежит во внутренней области треугольника ABC. Докажите, что треугольник ABC меньше треугольника ADC.

5. Постройте угол, который на 25° больше данного острого угла.

6. Периметр треугольника больше одной из его сторон на a, другой на b и третьей стороны на c. Найдите периметр треугольника.

7. Докажите, что сумма медиан треугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

8. Докажите, что произвольный треугольник можно разбить на несколько равнобедренных треугольников.

9. Докажите, что, если отрезок BB_1 является биссектрисой треугольника ABC, то $AB > AB_1$ и $BC > B_1C$.

10. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что, если $AC=AO=BO=B$, то $OC=OD$.

11. Может ли точка пересечения высот треугольника делить их на две равные части?

12. Точки A, B, C и D расположены на плоскости так, что $AB=BC=CA$ и $DA=DB=DC$. Найдите градусную меру угла ADB.

13. Будут ли параллельны отрезки AB и CD на рисунке 8?

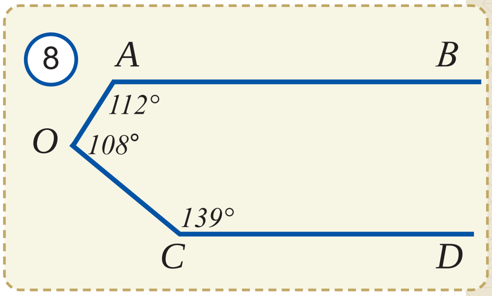
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

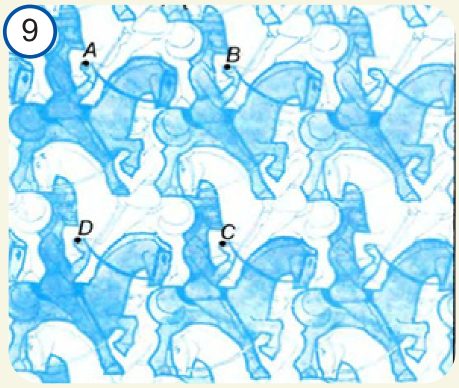
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

14. Градусная мера тупого угла равна α. К его сторонам проведены две перпендикулярные прямые. Градусная мера угла, полученного при пересечении этих лучей, равна β. Докажите, что $\alpha+\beta=180°$.

15. На рисуне 9 изображены одинаковые фигуры скачущих всадников. Найдите площадь одного скачущего всадника, если площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S.

16. В равнобедренном треугольнике ABC: $AB=AC$, точка M – середина отрезка AB, а точка N – середина отрезка AC. Пендикуляр, проведённый в точке N, пересекает прямую AB в точке L, пендикуляр, проведённый в точке M, пересекает прямую AC в точке K: $MK \perp AB$ и $NL \perp AC$. Докажите, что $\angle NLK = \angle MKL$.





Образец итоговой контрольной работы

Контрольная работа, взятая за образец, состоит из двух частей. Первая часть содержит геометрический диктант и 10 тестов, рассмотренных на предыдущих уроках. Во второй части контрольной работы можно предложить 6 задач, подобных нижеприведённым.

Образец итоговой письменной работы

1. Найдите $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ на рисунке 1, если $a||b$ и $\angle 1 = 45°$.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 32°$, угол B на 12° меньше угла A. Найдите угол C.

3. Используя данные на рисунке 2:

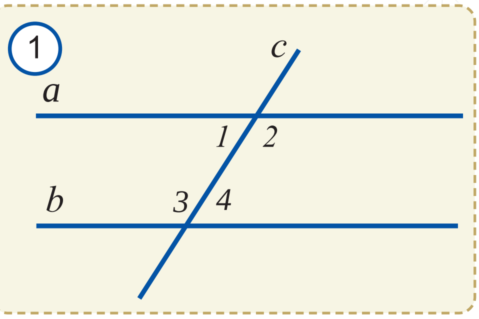
a) докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$;

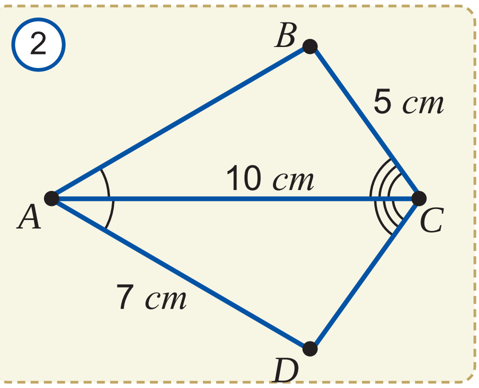
b) найдите периметр треугольника ACD.

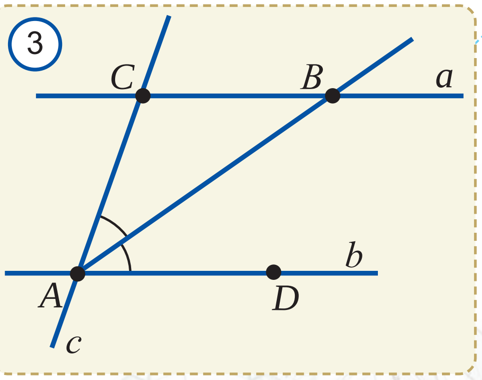
4. На рисунке 3: $a||b$, AB – биссектриса угла CAD и AC = 7 cm. Найдите отрезок BC.

5. Высота, опущенная из вершины прямого угла, является также и биссектрисой. Найдите углы этого треугольника.

6. Начертите угол и постройте его биссектрису.



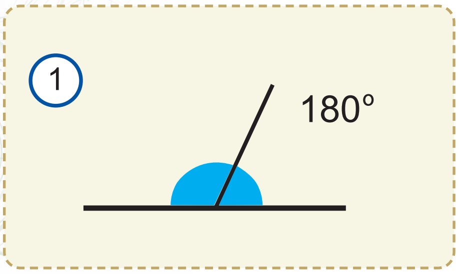


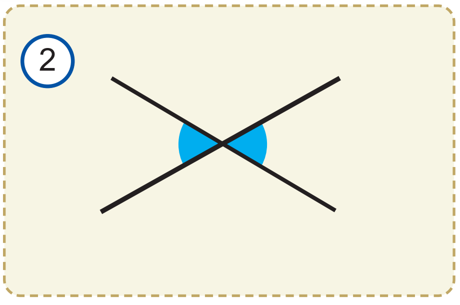


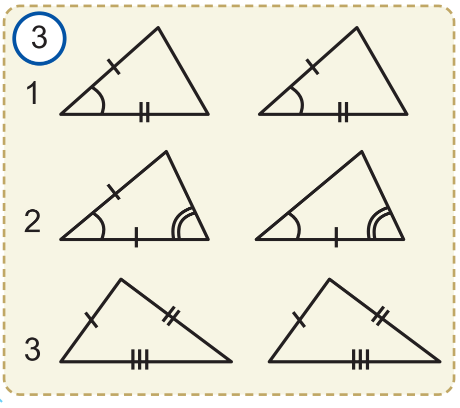
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

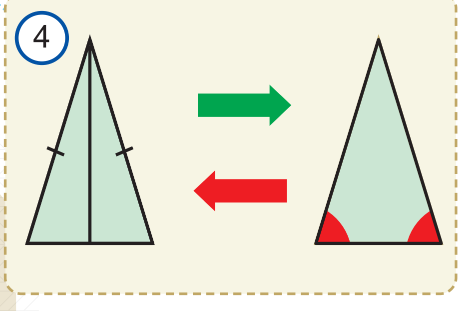
Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

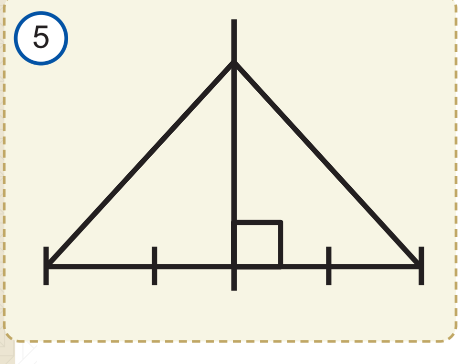
Основные сведения из геометрии 7 класса











Смежные и вертикальные углы

Сумма смежных углов равна 180° *(рис. 1)*.

Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Вертикальные углы равны *(рис. 2)*.

Треугольники

Признаки равенства треугольников *(рис. 3)*:

1) по двум сторонам и углу между ними (СУС);

2) по стороне и двум прилежащим к ней углам (УСУ);

3) по трём сторонам (ССС).

Равнобедренные треугольники

Углы при основании равнобедренного треугольника равны *(рис. 4)*.

Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный *(рис. 4)*.

Биссектриса, опущенная из вершины равнобедренного треугольника к основанию, является также его высотой и медианой.

Если высота треугольника является также его биссектрисой и медианой, то этот треугольник равнобедренный.

Свойство перпендикуляра, проведённого к его середине

Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов *(рис. 5)*.

Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

Серединный перпендикуляр – это геометрическое место точек, равноудалённых от концов отрезка.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Параллельные прямые

Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны и наоборот *(рис. 6).*

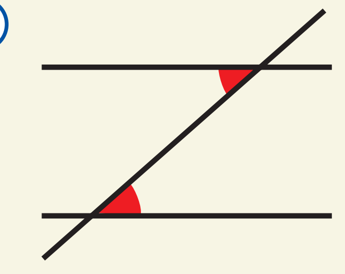
Если соответственные углы равны, то прямые параллельны и наоборот *(рис. 7)*.

Если сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны и наоборот *(рис. 8)*.

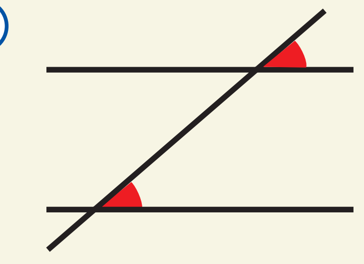
Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны *(рис. 9)*.

Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и второй.

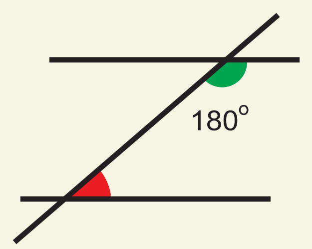
6



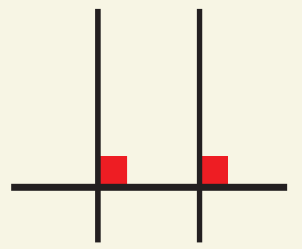
7



8



9



Соотношения между сторонами и углами треугольника

Сумма внутренних углов треугольника равна 180° *(рис. 10)*.

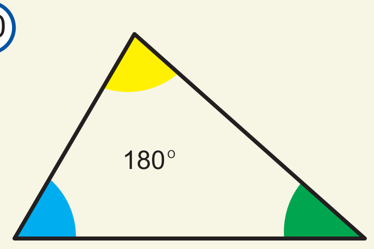
Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних его углов, не смежных с ним *(рис. 11)*.

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего его угла, не смежного с ним.

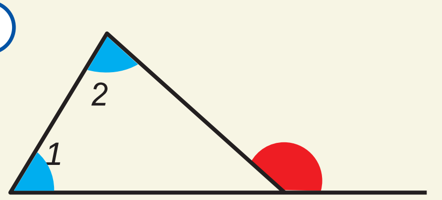
Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол.

10



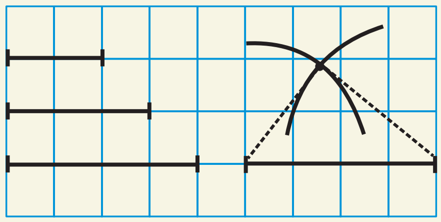
11



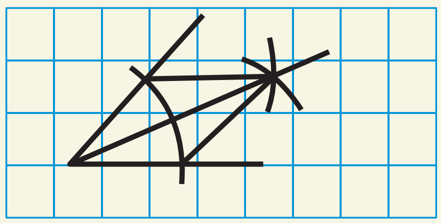
*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

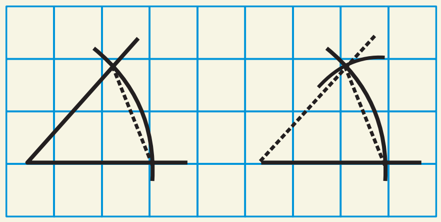
12



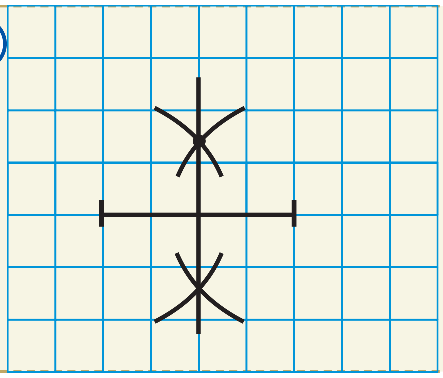
13



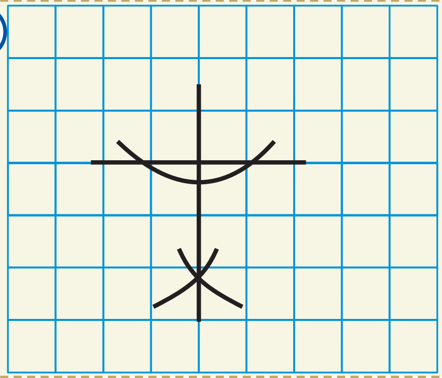
14



15



16



Прямоугольный треугольник

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Катеты прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы.

Признаки равенства прямоугольных треугольников:

1) по двум катетам (КК);

2) по катету и острому углу, прилежащему к нему (КУ);

3) по гипотенузе и острому углу (ГУ);

4) по катету и гипотенузе (КГ).

Свойства биссектрисы угла

Любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

Если точка, расположенная во внутренней области угла, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе угла.

Биссектриса – это геометрическое место внутренних точек угла, равноудалённых от его сторон.

Основные задачи на построение

построение треугольника по трём сторонам *(рис. 12)*;

построение биссектрисы угла *(рис. 13)*;

построение угла, равного данному *(рис. 14)*;

построение центра отрезка *(рис. 15)*;

построение перпендикуляра к данному отрезку *(рис. 16).*

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Десятки / Единицы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100
1	121	441	961	1681	2601	3721	5041	6561	8281
2	144	484	1024	1764	2704	3844	5184	6724	8464
3	169	529	1089	1849	2809	3969	5329	6889	8649
4	196	576	1156	1936	2916	4036	5476	7056	8836
5	225	625	1225	2025	3025	4225	5625	7225	9025
6	256	676	1296	2116	3136	4356	5776	7396	9216
7	289	729	1369	2209	3249	4489	5929	7569	9409
8	324	784	1444	2304	3364	4624	6084	7744	9604
9	361	841	1521	2401	3481	4761	6241	7921	9801

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Греческий алфавит

Написание	Чтение
$A\ \alpha$	альфа
$B\ \beta$	бета
$\Gamma\ \gamma$	гамма
$\Delta\ \delta$	дельта
$E\ \varepsilon$	эпсилон
$Z\ \zeta$	дзета
$H\ \eta$	эта
$\Theta\ \theta$	тета
$I\ \iota$	йота
$K\ \kappa$	каппа
$\Lambda\ \lambda$	ламбда
$M\ \mu$	мю
$N\ \nu$	ню

Написание	Чтение
$\Xi\ \xi$	кси
$O\ o$	омикрон
$\Pi\ \pi$	пи
$P\ \rho$	ро
$\Sigma\ \sigma$	сигма
$T\ \tau$	тау
$Y\ \upsilon$	ипсилон
$\Phi\ \varphi$	фи
$X\ \chi$	хи
$\Psi\ \psi$	пси
$\Omega\ \omega$	омега

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Ответы и указания

1 **4.** a) Точки A, O, E принадлежат прямой a; b) точки D и O принадлежат прямой b; d) точка O принадлежат и прямой a, и прямой b; e) точки A; E принадлежат прямой a, но не принадлежат прямой b; f) точка D принадлежит прямой b, но не принадлежат прямой a; g) точки B и C не принадлежат ни прямой a, ни прямой b. **5**. Точка A принадлежит и прямой AB, и прямой AC. 6. 1 или бесконечно много. **7.** Не лежит. **8.** a) Сколько угодно; b) 1; c) 1 или 3. **9.** 2, 3, 4. **10.** 2, 7. **11.** 6 прямых. Эти прямые делят плоскость на 12 частей. **12.** a) 3; b) 6. **13.** 6; 10. **14***. Невозможно.

2 **1.** 6. **2.** 6: AB, BC, CD; AC; AD; BD. **3.** Дополняющие друг друга лучи: 1) AB и AE; 2) AC и AF; 3) AD и AH. **4.** a) Лучи, исходящие из точки C: CA, CD, CB, CM, CN; дополняющие друг друга лучи: CA и CD или CA и CB; b) лучи, исходящие из точки D: DC, DA, DB, DQ, DP; дополняющие друг друга лучи: DC и DB или DA и DB. **5.** 4, 6. **7.** a) b и d, p и q, n и u; b) 2 и 5; 6 и 9. **8.** 3 и 14; 4 и 10; 6 и 9; 5 и 12. **9*.** a) 2; b) 3; c) 4; d) 11. **10.** 2; 4; 7; 11. **11.** Да. **12.** 5; **13.** На 29 отрезков. **14.** 26,8 cm. **15.** 1; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; **16.** 4 cm; 5 cm; 6,5 cm; 1 cm; 2,5 cm; 1,5 cm. **17.** a) 6,6; b) 1; c) 9. **18.** 12,8 cm. **19.** 0,8. **21.** Возможны 2 случая. Если точка B будет лежать на отрезке AC, то AC=800 m. Если точка C будет лежать на отрезке AB, то AC=400 m. **22.** 5. **23.** 46 cm. **24.** a) 24 cm; b) 14 cm. **25.** 5. **26.** a) 2; b) 1. **27.** a) 4 cm; b) 1,6 cm; c) 0,4 cm; d) 2,6 cm. **28.** 26. **29.** $CD=\frac{AB}{2}+46\ cm$ **31.** a) 5 cm; b) 7,8 m; c) 2,8 km. **32.** a) 70 cm; b) 186 dm; c) 82 m. **33.** a) AC = 5 cm; BC = 4 cm; b) AC = 11 cm; BC = 2 cm; c) AC = 10 cm; BC = 1 cm. **35.** Точка B лежит между точками A и C. **36.** a) 5,9 cm; b) 9,5 cm. **37.** a) 3AB; b) $\frac{3AC}{2}$ c) $\frac{3AE}{4}$ **39.** Для любых трёх точек на прямой только одна лежит между двумя другими. **40.** Через любые две точки проходит только одна прямая.

3 **1.** a) Вершина угла: N; стороны угла: NM и NL; b) вершина угла: B; стороны угла: BA и BO. **2.** Углы: ∠BAC, ∠BAD, ∠CAD; вершина угла: A; стороны угла: AB, AC, AD. **3.** a) ∠AOC, ∠COD, ∠BOD, ∠AOD, ∠AOB, ∠COD. b) ∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOE, ∠AOE, ∠AOC, ∠AOD, ∠BOD, ∠COE, ∠BOE. **4.** a) да; b) нет. **5.** 1) ∠AOC=30°; ∠BOC=30°. 2) ∠AOC=88°; ∠BOC=88°. **6.** 1) 24,5°; 2) 39,5°; 3) 71°. **7.** 1) a и h; 2) c, d, e, g; 3) b и f. **8.** a) Да; b) да; c) нет. **9.** a) 87°56'; b) 128°29' 47''; c) 1°47' 29''. **11.** a) 72°; b) 60°19'; c) 55°45'. **12.** 1) ∠CBF; 2) ∠DBF. **14.** ∠POQ>∠ABC. **15.** a) Да; b) нет; c) нет. **16**. 176°. **17*.** 61°. **18*.** a) 90°; b) 180°. **19.** ∠AOB=60°, ∠AOC=90°, ∠AOD=130°, ∠BOC=30°, ∠BOD=70°; ∠COD=40°. Проходит через биссектрисы углов: 1) 30°; 2) 45°; 3) 65°; 4) 15°; 5) 35°; 6) 20°. **20.** 3) 15°; 2) 22,5°; 5) 30°; 6) 45°; 1) 90°; 4) 135°.

4 **7.** a) Расстояние между Ташкентом и Ферганой 248 km; b) расстояние между Ташкентом и Термезом 444 km; c) расстояние между Ташкентом и Джиззаком 126 km; d) расстояние между Ташкентом и Гулистаном 90 km; e) расстояние между Ташкентом и Самаркандом 183 km; f) расстояние между Ташкентом и Карши 280 km; g) расстояние между Ташкентом и Навои 319 km; h) расстояние между Ташкентом и

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Ургенчем 704 km. i) расстояние между Ташкентом и Нукусом 777 km; **8.** 246 вёрст. **9.** 1) 120°; 2) 6 часов. **10.** 1) 38,1 cm; 2) 43,18 cm; 3) 48,26 cm. **11.** 1) От Земли до Солнца 149 637 000 km. 2) от Венеры до Солнца 107 803 000 km. 3) от Меркурия до Солнца 57 924 000 km. 4) от Марса до Солнца 226 869 000 km. 5) от Юпитера до Солнца 777 147 000 km. 6) от Сатурна до Солнца 1 427 183 000 km. 7) от Урана до Солнца 2 868 847 000 km. 8) от Нептуна до Солнца 4 498 764 000 km. **12.** a) 2235 m; b) 7822,5 m; c) 10 877 m.

Контрольная работа 1: 1. BC = 3 cm. 2. BC = 12 cm. 3. ∠BOC = 35°. 4. ∠O = 150°.

5

3. 45°. **4.** a) 8; b) 8; c) 8; d) 8. **5.** 5 острых; 1 тупой. **6.** Можно, сложив два раза. **7.** 3^00, 9^00. **8.** a) 105°; b) 75°; c) 105°. **9.** a) 30°; b) 180°; c) 1°. **10.** a) 160°; b) 90°; c) 35°; d) 171°. **11.** A) 146°; b) 71°; c) 175°; d) 13°. **12.** ∠AOB=135°, ∠BOC=45°. **13.** ∠AOB=36°, ∠BOC=144°. **14.** a) Нет; b) да; c) нет. **15.** a) 140°; b) 137°. **16.** a) 45°; b) 45°; c) 53°. **17.** Да, если оба угла будут равны 90°. **18.** a) 40°; 140°; b) 55°; 125°; c) 18°; 162°. **19.** 140°, 40°, 140°.

20.

∠1	34°	62°	48°	19°	175°
∠2	146°	118°	132°	161°	5°

21.

∠1	12°	162°	120°	15°	45°
∠2	168°	18°	60°	165°	135°

22. 1) 110°; 2) 50°; 3) 50°. **23.** 149°; 2) 59°; 3) 59°. **24.** a) 45°; 135°; b) 60°; 120°; c) 30°; 60°; 90°. **25.** a) 75°; 105°; b) 100°; 80°; d) 108°; 72°. **26.** a) 120°; б) 80°; в) 60°; 60°; 60°. **27.** г) 90°; 90°; 90°; д) 75°; 105°; 75°; е) 46°; 46°; 134°. **28.** 135°. **29.** 135°. **30.** a) ∠3=∠4; ∠9=∠10; b) ∠1 и ∠2. **31.** Луч OC биссектриса ∠AOD; луч OD биссектриса ∠COE; луч OE биссектриса ∠DOB; луч OD биссектриса ∠AOB. **32.** Точка A лежит между точками B и C.

6

3. 30°. **5.** AO=1 cm, AB=2 cm, AC=1 cm. **6.** 13700 km. **7.** a) Точка B лежит между двумя другими; b) точка A лежит между двумя другими. **8.** 90°. **10.** Луч OC лежит между двумя другими. **11.** 60°; 60°. **12.** 80°, 100°, 80°, 100°. **13.** OE и OF лежат на одной прямой. **6 – тесты:** **1.** E; **2.** D; **3.** D; **4.** A; **5.** E; **6.** B; **7.** E; **8.** E; **9.** B; **10.** A; **11.** A; **12.** D; **13.** E; **14.** B; **15.** A; **16.** A; **17.** B; **18.** E

7

2. 90°. **3.** 60°. **4.** Нет. **5.** Задача имеет два решения: 1) 65°; 2) 15°. **6.** 15°. **7.** a) ∠AOC=45°; ∠BOC=45°; b) ∠AOC=30° ; ∠BOC=30°; c) ∠AOC=25° ; ∠BOC=25°; d) ∠AOC=10°; ∠BOC=10°. **8.** ∠DOE=60°. **9.** Нет. **10.** Задача имеет два решения: 1) 0,5 m; 2) 5,9 m. **11.** a) AC=9 m, BC=6 m; b) AC=7,5 m, BC=7,5 m; c) AC=6 m, BC=9 m. **13.** a) 15; b) 2; c) 45. **15.** 1,3. **16.** 6. **17.** 4.30 или 7.30. **18.** 6. **19.** ∠AOB=110°, ∠BOC=70°; b) ∠AOB=36°, ∠BOC=144°; c) ∠AOB=112°, ∠BOC=68°; d)∠AOB= 150°, ∠BOC=30°. **20.** 50°, 130°, 50°, 130°. **21.** a) C∈AB; b) A∈BC. **22.** a) x=180°-α ; y=α. b) x=90°; y=90°; c) x=180°-α ; y=α. **23.** a) 6; b) 10; c) $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. **24.** $b_{50}=\frac{2^{49}}{10}\ mm.$

8

Контрольная работа 2: 1. 108°. 2. 60°. 3. 48°.

6. Фигуры под номерами 1, 2, 3, 4, 5, 7 являются ломаными. **7.** a) a, b, d, e, g; b) c, f, h; c) c, f. **9.** a) прямой; b) острый; c) равнобедренный; d) равносторонний; e) тупоугольный. **10.** a) прямоугольный треугольник, b) тупоугольный треугольник, c) равносторонний треугольник, d) равнобедренный, e) тупоугольный треугольник. **11.** a) 12,2 dm; b) 102,4 m. **12.** a) 139,6 mm; b) 102,4 m. **14.** Каждый угол 60°. **15.** a) 3; b) 3; c) 3. **16.** 1) ABE – тупой; 2) ACE, BCE, DCE – прямые; 3) BED – равнобедренный;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

4) AED – разносторонний. **20.** Высота, биссектриса, медиана и внутренний угол. **21.** Прямоугольный треугольник. **22.** Да. **23.** 3. **24.** 9. **25.** 16. **27.** ΔKLM – прямоугольный треугольник, ML=5 cm. **28.** 18 cm; 24 cm; 30 cm. Прямоугольный треугольник. **29.** a=36 mm; b=48 mm; c=60 mm.

9 **3.** AB=BA; BC=AC; AC=BC. **4.** $\angle MNL=\angle LMN$; $\angle MLN=\angle LNM$; $\angle NML=\angle MLN$. **5.** $\angle B=80°$; $\angle D=52°$; $\angle F=48°$. **6.** AB=LM=5; BC=MN=8; AC=LN=9. **7.** x=5. **12.** e) $\angle D=35°$, $\angle C=62°$. **13.** 85°. **15.** Нет.

10 **1.** 10 cm. **2.** a=12 ; b=8. **8.** AB=8 cm; BC=8 cm; AC=11 cm.

11 **2.** 4. **3.** $\angle E=\angle N=35°$; $\angle D=\angle L=135°$; ED=NL=7. **10.** AC=BD=7.

12 **5.** 6. $\Delta ABN=\Delta CAK$; $\Delta ABC=\Delta CNK$; $\Delta BNK=\Delta BCK$; $\Delta BNC=\Delta CKN$; $\Delta BAC=\Delta KAN$; $\Delta BAN=\Delta KAC$. **8.** 3. $\Delta ABD=\Delta ACD$; $\Delta ABC=\Delta BCD$; $\Delta AOB=\Delta COD$. **10.** 10,4 cm. **12.** 8 cm. **15.** $\angle C_1=90°$, $\angle A_1=30°$, $\angle B_1=60°$. **16.** 10 cm, 10 cm.

13 **5 – тесты: 1.** B; **2.** A; **3.** B; **4.** E; **5.** D. **6.** A. **7.** D; **8.** A; **9.** B; **10.** D; **11.** A; **12.** B; **13.** A; **14.** B; **15.** D; **16.** A. **6 – задачи:** 1. 1) равносторонний треугольник; 2) прямоугольный треугольник. 3) остроугольный треугольник; 4) равнобедренный треугольник; 5) тупоугольный треугольник. 2. 1) Треугольники не равны, не соответствует признаку СУС; 2) треугольники равны по признаку СУС; 3) треугольники не равны, не соответствует признаку СУС. 4) треугольники равны по признаку УСУ; 5) треугольники равны по признаку ССС; 6) треугольники не равны, не соответствует признаку СУС. **7.** Да. **8.** $\Delta ABD=\Delta CAD$; $\Delta AED=\Delta AFD$; $\Delta BED=\Delta CFD$. **11.** 58°. **12.** 48°. **13.** 120°.

Контрольная работа 3: 1. 10. **3.** $7\frac{1}{3}$, $7\frac{1}{3}$, $3\frac{11}{15}$.

14 **2.** a∥b; c∥d. **4.** Да. **6.** 1) a∥b, получатся 3 части. 2) a∦b, получатся 4 части. **8.** a) вертикальные углы: ∠1 и ∠4; ∠2 и ∠3; ∠5 и ∠7; ∠6 и ∠8; b) смежные углы: ∠1 и ∠2; ∠2 и ∠4; ∠4 и ∠3; ∠3 и ∠1; ∠5 и ∠6; ∠6 и ∠7; ∠7 и ∠8; ∠8 и ∠5. **9.** ∠1=∠6=63°; ∠2=∠3=∠5==∠7=117°. b)∠2=∠3=∠5=∠7=117°; ∠4=∠8=63°. **10.** ∠1=∠3==∠5=∠7=117°; ∠4=∠8=63°. **11.** ∠2=∠4=∠6=∠8=58°; ∠3=∠5=122°. **12.** 98°, 82°, 98°; 70°, 110°, 70°. **13.** ∠2=148°; ∠3=148°; ∠4=32°; ∠6=46°; ∠7=134°; ∠8=46°. **14.** ∠3=∠5 внутренние накрест лежащие; ∠2=∠8 внешние накрест лежащие; ∠4=∠6 внутренние накрест лежащие углы равны. **15.** Равенства выполняются. **16.** Можно. **17.** ∠1+∠8=180°; ∠2+∠7=180°; ∠4+∠5=180°; ∠3+∠6=180°. **18.** Накрест лежащие углы равны.

15 **1.** x=150°. **3.** x=60°; y=120°. **8.** a) Да; b) да. **9.** a) нет; b) да. **11.** 1 может не пересечь или пересечёт все. **12.** AD∥BC. **13.** a) a∦b; b) a∥b. **14.** x=116°. **15.** ∠2=75°; ∠3=105°; ∠4=75°; ∠6=75; ∠7=105°; ∠8=75°. **16.** ∠1=60°; ∠2=120°; ∠4=120°; ∠5=60°; ∠6=120°; ∠7=60°. **17.** ∠2 = ∠4 = ∠6 = ∠8 = 75°. **18.** a) BC ∥ AD; AB ∥ CD. б) AD ∥ BC; в) AD ∥ BD

16 **1.** a) Не верно; b) не верно; c) не верно; d) не верно; e)не верно; f) не верно; g) не верно; h) не верно. **2.** a) Верно; b) верно; c) верно. **3.** a) Верно; b) верно; c) верно. **4.** ∠2=45°; ∠3=135°; ∠4=45°; ∠5=135°; ∠6=45°; ∠7=135°; ∠8=45°. **5.** ∠1=131°; ∠3=131°; ∠4=49°; ∠5=131°; ∠6=49°; ∠7=131°; ∠8=49°. **9.** 45°. **10.** x=11°. **14.** ∠2 = ∠3 = 53°. **15.** ∠1=73°, ∠2=73°. **16.** 70°, 110°. **19.** 70°, 110°. **20.** a) Возожно; b) возможно. **21.** a) Возможно; b) возможно. **23.** x=105°. **24.** x=35°. **25.** ∠1=78°; ∠2=102°; ∠3=78°; ∠4=102°; ∠5=78°; ∠6=102°; ∠7=78°; ∠8=102°. **26.** ∠1=64°; ∠2=116°; ∠3=64°; ∠4=116°; ∠5=64°; ∠6=116°; ∠7=64°; ∠8=116°. **27.** Нет. **28.** x=42°. **29.** 4 из 8 углов будут тупыми. Если это не так, то все углы будут по 90° и a⊥c; b⊥c; a∥b. **30.** ∠1=∠3=∠5=∠7=50°;

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

∠2=∠4=∠6=∠8=130°. **32.** ∠D=98°

17 **5 – тесты: 1.** A; **2.** B; **3.** A; **4.** D; **5.** D; **6.** D; **7.** D; **8.** E; **9.** B; **10.** B; **11.** D; **12.** E; **13.** A; **14.** B; **15.** E; **16.** A. **6 – задачи: 1.** Да. **2.** На. **3.** ∠4=∠7=118°; ∠2=∠3=∠6=∠8=62°. **4.** a∦b. **5.** x=55°. **6.** 128°. **8.** ∠1=∠3=∠5=∠7=42°; ∠2=∠4=∠6=∠8=133°. **9.** ∠1=∠3=∠5=∠7=20°; ∠2=∠4=∠6=∠8=160°. **10.** ∠1=∠3=∠5=∠7=75°; ∠2=∠4=∠6=∠8=105°. **11.** 59°. **12.** ∠1=∠3=∠5=∠7=72°; ∠2=∠4=∠6=∠8=108°. **Контрольная работа 4: 1.** ∠3=∠5=∠7=34°; ∠2=∠4=∠6=∠8=146°. **2.** 52°.

18 **1.** a) 80°; b) 25°; c) 45°; d) 45°. **2.** a) 63°; b) 90°; c) 113°, d) 15°. **3.** 102°. **4.** a) 80°, 50°; b) 30°; 60°; 90°; c) 50°, 60°, 70°. **5.** a) 65°; b) 45°; 90°; 45°. **6.** a) 79°; b) 105°. **7.** x=20°,y=50°. **9.** x+y=270°. **10.** 60°. **11.** 60°, 60°, 60°. **12.** 45°, 45°, 90°. **13.** a) 65°, 65; b) 60°; 60°; c) 37,5°; 37,5°. **14.** 60°, 45°, 75°. **15.** 30°, 120°. **16.** a) 75°; b) 34°; 68°; c) 50°. **17.** a) 128°; b) 51°. **18.** x+y+z=540°-(α+β+γ). **19.** 50°; 90°; 40°. **20.** a) 90°; b) 50°; c) 110°, d) 60°. **21.** 60°; 48°. **22.** 540°. **23.** 24°, 36°, 60°. **25.** a) 30°, 30°; b) 55°, 55°. **26.** a) 15°, 150°; b) 75°, 30°. **28.** ∠AOB=122,5°; ∠EOC=65°. **29.** 30°. **30.** 67,5°. **31.** На. **32.** Невозможно. **33.** ∠A=80°, ∠B=30°, ∠C= 70°. **34.** ∠A=35°; ∠B=35°. **35.** a) 70°; b) 75°;) 80°; e) 72°; f) 120°; g) 80°; h) 36°

19 **1.** a) AB; b) AB. **2.** a) PR; b) PR. **3.** ∠A=67°; ∠B=23°; ∠C=90°. **4.** a) 78°; 12°; 90°; b) 47°; 43°; 90°. **5.** ∠A=60°; ∠B=30°; ∠C=90°; AC=17; $BC=17\sqrt{3}$. **6.** 60°, 30°, 90°. **7.** 1) 4; 2) 6; 3) 60°. **8.** a) 5; b) 13,5; c) 9. **9.** 1) 35°; 2) 130°; 3) 90°; 4) 130°; 5) 100°; 6) 90°. **10.** a) Нет; b) нет; d) да; e) нет.

20 **1.** a) Равны; b) равны; d) равны; e) нет; f) нет. **2.** a) равны; b) равны; d) равны; e) нет; f) равны. **6.** 7 cm. **7.** 7 cm, 7 cm. **11.** 180°. **12.** 270°. **13.** 6. **14.** 8 cm. **17.** ∠B=80°.

21 **1.** BC; **2.** AB и BC (AB=BC). **3.** a) ∠A или ∠C; b) ∠B. **4.** a) ∠C; b) ∠B. **5.** a) Можно; b) нельзя. **6.** a) Нельзя; b) можно. **7.** a) Существует; b) нет; c) существует; d) существует. **8.** a) 7; b) 10; c) 8 или 5. **9.** a) Да. Необходимо чтобы сумма двух сторон треугольника была больше третьей стороны. Она не может быть равна или меньше, в противном случае треугольник не существует. c) не может. Такой треугольник не существует. **10.** a) Да. Необходимо, чтобы сумма двух сторон треугольника была больше третьей стороны. Она не может быть равна или меньше, в противном случае треугольник не существует; b) не может. Такой треугольник не существует; c) не может. Такой треугольник не существует. **11.** a) Наибольший угол A, наименьший угол C; b) наибольший угол A, наименьший угол C или B; c) наибольший угол A или B, наименьший угол C. **12.** a) BC<AB<AC; b) BC=AB<AC; c) BC=AC=AB. **14.** 7; 7; 11. **15.** 7. **16.** Треугольник или отрезок. **18.** Наибольший ∠ACB, наименьший ∠ABC. **19.** Основание, боковая сторона. **20.** a) BC>AC>AB; b) BC=AC<<AB. **21.** 60°; 120°; 60°; 120°. **22.** 0°<∠B<60°. **23.** Остроугольный треугольник. **24.** Наибольший BC, наименьший AB. **25.** Наименьшая сторона треугольника BC. **26.** a) Не существует. b) не существует. **27.** Треугольник не существует.

22 **1.** 1) 180°; 2) 360°. **2.** ∠B=75°; ∠C=75°. **3.** c=10 cm . **6.** Сумма внутренних углов равна α=1080°. Сумма внешних углов равна β=360°. **7.** 72°. **8.** a=20 cm, b=40 cm, c=40 cm. **9.** a) Так как ∠A=∠B=45°, то высота дерева равна длине его тени; b) так как $AB=A_1B_1$, то ширина озера равна AB; c) длина озера AC будет такой же, как длина AB; d) длина оврага равна AB=2BC. **10.** Длина озера равна AB=AC-CB. **11.** Нет.

4 – тесты: 1. B; **2.** C; **3.** B; **4.** B; **5.** D; **6.** B; **7.** B; **8.** B; **9.** E; **10.** A; **11.** D; **12.** A; **13.** D; **14.** A; **15.** D; **16.** D; **17.** D; **18.** D. **19.** A.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

5 – задачи. 1. Нельзя. **2.** 1) a=1; b=7 ; c=7. 2) a=2; b=6; c=7. 3) a=3; b=5; c=7. 4) a=4; b=4; c=7. 3. Нет, h_b>b; h_b=a; h_b=b. 4. 18. 5. 63°, 63°, 54°. 7. 60°. 8. 90°. 10. 40°, 40°, 100°. 11. Равны. **13.** Да. **14.** 20. **15.** 13. **16.** 1) 24°; 2) 70°. 17. 35°, 110°, 35°. **18.** 134°. **19.** 90°. **20.** Да. **21.** 39°,117°,24°.

Контрольная работа 5: 1. 65°. **2.** 40°,60°,80°. **3.** 12 cm. **4.** 40°,60°,80°.

23 **Тесты: 1.** A; **2.** D; **3.** B.

24 **1.** 20 cm. **2.** 20°. **3.** 15°. **4.** 30°. **5.** 40°; 60°; 80°. **6.** 1:2. **7.** 76°. **8.** 42°. **9.** 21°, 69°. **10.** ∠AOB=122,5°. **11.** 72°. **12.** 46°. 28. Остроугольный. **30.** a) 92°; b) 42°. **31.** 6; 6; 6; 60°. **33.** 45°. **35.** Отрезок. **37.** 144°. **38.** 54°. **39.** 3,6 cm.

25 **5 – Тесты: 1.** A; **2.** E; **3.** D; **4.** B; **5.** E; **6.** A; **7.** E; **8.** D. **9.** B. **10.** A. **11.** A; **12.** D; **13.** B; **14.** D; **15.** E; **16.** A; **17.** B; **18.** E; **19.** A; **20.** D. **6 – Задачи: 2.** 12 cm. **3.** 12 cm. **4.** 34. **5.** 2,8 cm. **6.** 83°. **7.** 15,6 cm. **8.** 55°. **10.** 2 m или 16 m. **11.** 81°, 99°. **12.** 125°; 55°; 55°; 125°; 125°; 55°; 55°; 125°. **13.** Да. **14.** 9 cm. **15.** 30°, 150°. **16.** 80°, 100°. **17.** 5,3 cm. **18.** 69°. **19.** 109°; 71°; 71°; 71°; 109°; 109°; 71°; 109°;

7. Трудные задачи: 1. a) 149 900 000 km. b) 149 100 000 km. **2.** точка D.

3. $\alpha = \frac{540°}{7}$; $\beta = \frac{720°}{7}$. **6.** $P = \frac{a+b+c}{2}$. **11.** Нет. **12.** 120°;. **13.** Нет.

Итоговая контрольная работа: 1. 135°, 135°, 45°. **3.** b) 22 cm. **4.** 7 cm. **5.** ∠B=45°; ∠C=45°.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Учебная и дополнительная литература и электронные ресурсы, использованные при составлении учебника

1. *A'zamov A., Haydarov B.* Matematika sayyorasi. Toshkent: O'qituvchi, 1993.
2. *Saitov Y.* Matematika va matematiklar haqida. Toshkent: O'qituvchi, 1992.
3. *Afonina S. I.* Matematika va go'zallik. Toshkent: O'qituvchi, 1986.
4. *Ismailov A., Xaydarov B., Karimov N., Sh.Ismailov.* Xalqaro tadqiqotlarda o'quvchilarning matematik savodxonligini baholash, metodik qo'llanma. – Toshkent, 2019.
5. *Погорелов А. В.* Геометрия 7–9, учебник. Москва: Просвещение, 2004.
6. *Атанасян С.* Геометрия 7–9 классы, учебник. Москва: Просвещение, 2002.
7. *Шарыгин Ф.* Геометрия 7–9 классы, учебник. Москва: Дрофа, 2000.
8. *Штейнгауз Г.* Математический калейдоскоп. Москва: Наука, 1993.
9. *Perelman Y. I.* Qiziqarli geometriya, Toshkent: O'qituvchi, 1981.
10. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. Москва: Наука, 1991.
11. *Бевз Г. П.* и др. Геометрия 7 учебник, Киев: Вежа, 2007.
12. *Александров А. Д.* Геометрия 7 учебник, Москва. Просвещение, 2013.
13. *Johannes Paasonen* Ahaa mathematiikkaa 7, Porvoo-Helsinki-Juva, 1993.
14. *Daniel C. Alexander*, Elementary geometry for college students. Canada, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
15. http://www.uzedu.uz – Официальный сайт Министерства народного образования, информационно-образовательный портал.
16. http://centeroko.ru. – Центр оценки качества образования (Россия).
17. http://www.markaz.tdi.uz – Сайт национального центра по оценке качества образования.
18. http://www. avloniy.uz – Сайт национального исследовательского института повышения квалификации и обучения новым методикам педагогов имени А. Авлони.
19. http://www.masofa.uz – портал дистанционного обучения национального исследовательского института повышения квалификации и обучения новым методикам педагогов имени А. Авлони.
20. http://www.onlinedu.uz – электронная платформа «Непрерывное профессиональное образование» национального исследовательского института повышения квалификации и обучения новым методикам педагогов имени А. Авлони.
21. http://www.ziyonet.uz – социально-образовательный портал «Ziyonet».
22. http://www.rtm.uz – Сайт Республиканского центра образования.
23. http://dr.rtm.uz – платформа новых учебников и методических пособий в электронном виде, презентаций, мультимедийных приложений, видеоуроков и цифровых ресурсов.
24. http://www.maktab.uz – платформа видеоуроков и других материалов онлайн обучения и школьных учебных программ для 1-11 классов.
25. http://www.stesting.uz – электронная платформа «Xalqaro baholash tadqiqotlariga tayyorlanish» для учащихся (на узбекском языке).
26. http://www.skillsgrover.uz – платформа обучения математики и оценивания знаний учащихся в Финляндии (на узбекском языке).
27. http://www.khanakademy.org – сайт дистанционного обучения «Академия Хана» (на английском языке).
28. http://www.xanakademiyasi.uz – платформа видеоуроков по математике, информатике, химии, физике, экономике, биологии и астрономии (на узбекском языке).
29. http://www.school.edu.ru – общеобразовательный портал.
30. http://www.problems.ru/ – поисковая система математических задач.
31. http://geometry.net/ – учебные материалы по алгебре и геометрии (на английском языке).
32. http://mathproblem.narod.ru/ – математические кружки и олимпиады.
33. http://www.ixl.com – портал дистанционного обучения математике (на английском языке)
34. http://www.mathkang.ru – сайт международного конкурса по математике «Кенгуру».
35. http://www.olimpia.uz – сайт международного конкурса по математике «Кенгуру» (на узбекском языке).
36. http://www.brilliant.org – сайт дистанционного обучения математике (на английском языке).
37. http://www.geogebra.com – бесплатная программа, позволяющая строить динамичные («живые») фигуры в алгебре и геометрии.
38. http://www. yaklass.ru – платформа онлайн образования для школьников и учителей.
39. www.schulen-ans-netz.de – сайт немецкой «Интернет школы» (на немецком языке).
40. www.studienkreis.de – сайт немецких образовательных кружков (на немецком языке).

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

O‘quv nashri

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 7-sinfi uchun darslik
(Rus tilida)

Перевод с узбекского *Гульнара Юсупова*
Редактор *Гульнара Юсупова*
Технический редактор *Акмал Сулаймонов*
Художественный редактор *Сарвар Фармонов*
Верстка и дизайнер *Ихволдин Салохитдинов*
Корректор *Людмила Ким*
Художник *Умид Сулаймонов*

Разрешено в печать 00.00.2022. Формат 60x84 1/8.
Гарнитура «Arial». Размер шрифта 12. Офсетная печать.
Условный печатный лист 22,32. Учётно-издательский лист 15,69.
Тираж _____. Заказ №_____.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE

Все учебники Узбекистана на сайте UZEDU.ONLINE

Таблица состояния учебника, выданного в аренду

T/r	Имя и фамилия учащегося	Учебный год	Первоначальное состояние учебника	Подпись классного руководителя	Состояние учебника при сдаче	Подпись классного руководителя
1						
2						
3						
4						
5						
6						

В конце учебного года учителем на основе следующих критериев оценивается состояние учебника, выданного в аренду:

Новый	Сохранено первоначальное состояние учебника.
Хороший	Обложка целая, не отделена от основной части учебника. В наличии все страницы, целые, по порядку, без надписей и рисунков на страницах.
Удовлетворительный	Обложка мятая, частично исписанная, края листов загнуты, удовлетворительно подреставрирован учеником. Вырванные страницы вклеены, на некоторых имеются надписи.
Не удовлетворительный	Обложка исписанная, порванная, частично или полностью отделена от основной части, неудовлетворительно подреставртрована. Страницы порваны или отсутствуют, исчерчены, разрисованы. Учебник реставрировать невозможно.

*Книга предоставлена исключительно в образовательных целях
UZEDU.ONLINE